

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMĂNTULUI

ION D. ION
A. P. GHIOCA
N. I. NEDIȚA

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

XII

Matematică

ALGEBRĂ

Manual pentru clasa a XII-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.
BUCUREȘTI, 1995

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

ION D. ION

A. P. GHIOCA

N. I. NEDIȚA

Matematică

XII

Algebră

Manual pentru clasa a XII-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.,
BUCUREȘTI

Manualul este în concordanță cu programa școlară actuală.

Referenți: Prof. univ. Gh. Galbură
Prof. univ. O. Stănășilă
Prof. Florina Saon
Prof. Maria Țuțuian
Prof. I. V. Maftai

Prezenta ediție a manualului de algebră pentru clasa a XII-a este rezultatul unei substanțiale revizii a celui apărut în anul 1979. S-a redus încărcătura teoretică a manualului, consecință și a restructurării problematicii programei școlare. A sporit numărul exemplelor și exercițiilor, introducându-se și modele de rezolvare pentru tipurile mai semnificative. Într-un capitol introductiv s-a realizat recapitularea unor teme despre mulțimi, funcții, matrice și numere, cu intenția de a instala pe cititor în lumea obiectelor matematice care sunt apoi sistematic invocate pentru ilustrarea teoriei structurilor algebrice.

Cu statut de lectură facultativă sunt prezentate câteva aplicații ale structurilor algebrice.

Exercițiile cu asterisc de la sfârșitul fiecărui capitol se adresează elevilor cu un interes sporit pentru matematică, rezolvarea lor nefiind necesară pentru parcurgerea manualului.

Autorii mulțumesc pe această cale referenților pentru sugestiile făcute, profesorilor de matematică din municipiul București, din județele Brașov, Brăila, Prahova și Vrancea care au inițiat și realizat un fructuos dialog asupra manualului.

ISBN 973-30-3106-2

Redactor: Prof. Valentin Radu
Technoredactor: Ilinca Prosan
Coperta: N. Sîrbu

§ 1. NUMERE

Peste tot în acest manual vom nota cu \mathbf{N} mulțimea numerelor naturale,

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Referitor la adunarea și înmulțirea numerelor naturale acceptăm proprietățile:

$$1) (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$2) 0 + x = x + 0 = x,$$

$$3) x + y = y + x,$$

$$4) (xy)z = x(yz),$$

$$5) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

$$6) x(y + z) = xy + xz,$$

$$7) xy = yx$$

oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{N}$.

De asemenea, vom nota cu \mathbf{Z} , mulțimea numerelor întregi,

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Acceptăm ca adevărate pentru adunarea și înmulțirea numerelor întregi proprietățile 1) — 7) precum și proprietatea:

$$8) x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in \mathbf{Z}.$$

Vom nota cu \mathbf{Q} mulțimea numerelor raționale, $\mathbf{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$. Pentru $x \in \mathbf{Q}, x \neq 0, x = a/b$, notăm cu x^{-1} numărul rațional b/a . Avem:

$$9) xx^{-1} = x^{-1}x = 1,$$

oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}, x \neq 0$.

Cu \mathbf{R} va fi notată mulțimea numerelor reale, iar cu \mathbf{C} mulțimea numerelor complexe, $\mathbf{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Pentru adunarea și înmulțirea numerelor reale (complexe) acceptăm ca adevărate proprietăți 1) — 9).

Avem:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Literele folosite mai sus pentru notarea mulțimilor de numere menționate apar în textul manualului culese aldin (gras). Pentru scrierea lor

mâna (pe hârtie sau la tablă...) la literele de tipar uzuale se adaugă o linie suplimentară. Aceste convenții de notații sunt consacrate în literatura matematică actuală.

Se știe că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional. Să reamintim demonstrația. Dacă $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{2} = a/b$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Putem presupune că fracția a/b este ireductibilă, adică a și b nu admit nici un divizor comun $c \in \mathbf{Z}$ astfel încât $|c| > 1$. Cum $a^2 = 2b^2$ rezultă că a^2 este par, deci a este par, de unde $a = 2a_1$, cu $a_1 \in \mathbf{Z}$. Avem $4a_1^2 = 2b^2$, deci $2a_1^2 = b^2$. Rezultă că și b este par, deci a și b admit ca divizor comun pe 2. Contradicție.

1.1. *Definiție.* Spunem că un număr întreg d diferit de 0 și 1 este *liber de pătrate* dacă nu se divide prin pătratul nici unui număr prim.

Astfel numerele 6, 2, -15, -1, -3 sînt libere de pătrate. Numerele 108 și -40 nu sînt libere de pătrate căci $108 = 3^3 \cdot 2^2$, $-40 = (-5) \cdot 2^3$.

Dacă $d \geq 0$ atunci prin \sqrt{d} notăm radicalul aritmetic al lui d adică unicul număr real $\alpha \geq 0$ astfel încât $\alpha^2 = d$. Dacă $d < 0$, atunci $\sqrt{d} = i\sqrt{-d}$, unde $i^2 = -1$. Astfel $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$.

1.2. **T e o r e m ă.** Dacă d este un număr întreg liber de pătrate, atunci $\sqrt{d} \notin \mathbf{Q}$.

Demonstrație. Dacă $d < 0$, atunci \sqrt{d} este număr complex și deci $\sqrt{d} \notin \mathbf{Q}$. Rămîne să considerăm cazul $d > 1$. Dacă $\sqrt{d} \in \mathbf{Q}$ atunci $\sqrt{d} = a/b$, $a > 0$, $b > 0$ unde a/b este o fracție ireductibilă. Avem $db^2 = a^2$ și dacă $a = 1$, atunci $b^2d = 1$, deci $d = 1$. Contradicție. Deci $a > 1$ și atunci a admite un divizor prim p . Așadar $a = pc$, cu $c \in \mathbf{Z}$, de unde $b^2d = p^2c^2$. Cum fracția a/b este ireductibilă, p nu divide pe b , deci din egalitatea $b^2d = p^2c^2$ rezultă că p^2 divide pe d . Contradicție.

Numerele de forma $a + b\sqrt{d}$, cu $a, b \in \mathbf{Q}$ și d întreg liber de pătrate se numesc *numere pătratice*. Astfel:

$$1 + \sqrt{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad 4 + 3\sqrt{5}, \quad 2 - 3i$$

sunt numere pătratice, unde $i^2 = -1$.

Dacă $a + b\sqrt{d}$ și $a' + b'\sqrt{d}$ sunt două numere pătratice, atunci:

$$a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d} \Leftrightarrow a = a' \text{ și } b = b'.$$

În adevăr, dacă $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ și $b \neq b'$, atunci

$$\sqrt{d} = \frac{a - a'}{b - b'} \in \mathbf{Q}.$$

Contradicție. Deci $b = b'$ și atunci $a = a'$.

Dacă d este un întreg liber de pătrate, atunci notăm cu $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ mulțimea tuturor numerelor pătratice de forma $a + b\sqrt{d}$, cu $a, b \in \mathbf{Q}$ și cu $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ mulțimea tuturor numerelor pătratice de forma $a + b\sqrt{d}$ cu $a, b \in \mathbf{Z}$.

Așadar:

$$\mathbf{Q}(\sqrt{d}) \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$$

și

$$\mathbf{Z}[\sqrt{d}] \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

Evident

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \subset \mathbf{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbf{C},$$

iar când $d > 0$, avem chiar $\mathbf{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbf{R}$.

Astfel:

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}$$

și

$$\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{C}.$$

Dacă $z = a + b\sqrt{d}$ este un număr pătratic, atunci numărul pătratic $z^* = a - b\sqrt{d}$ se numește *conjugatul* lui z .

§ 2. MULȚIMI ȘI FUNCȚII (recapitulare)

Fie E o mulțime. Vom nota cu $\mathfrak{A}(E)$ mulțimea tuturor părților (submulțimilor) lui E . Dacă $X, Y \in \mathfrak{A}(E)$, atunci cu $X \cup Y$ și $X \cap Y$ vom nota *reuniunea*, respectiv *intersecția* lui X cu Y ,

$$X \cup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid x \in X \text{ sau } x \in Y\}$$

respectiv

$$X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid x \in X \text{ și } x \in Y\}.$$

Amintim următoarele proprietăți ale reuniunii și intersecției:

$$1) (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z);$$

$$2) \emptyset \cup X = X \cup \emptyset = X, \quad E \cap X = X \cap E = X;$$

$$3) X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X;$$

$$4) X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

oricare ar fi $X, Y, Z \in \mathfrak{A}(E)$, unde \emptyset este submulțimea *vidă* a lui E .

Fie E și F două mulțimi. Pentru o funcție $f: E \rightarrow F$ vom preciza uneori și acțiunea lui f asupra elementelor $x \in E$ prin notația

$$f: E \rightarrow F, \quad x \rightarrow f(x)$$

unde $f(x)$ este *imaginea* lui x prin f .

Fie E o mulțime. Vom nota cu $\mathcal{F}(E)$ mulțimea tuturor funcțiilor $f: E \rightarrow E$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(E)$, atunci funcția

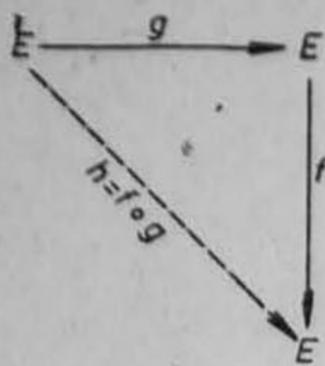


Fig. I.1.

$$h: E \rightarrow E, x \rightarrow h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x))$$

se notează cu $f \circ g$ și se numește *compusa* funcției f cu funcția g (v. fig. I.1).

Funcția $1_E: E \rightarrow E$, $1_E(x) = x$, $\forall x \in E$, se numește *aplicația identică* a mulțimii E .

2.1. Teoremă. Compunerea funcțiilor are proprietățile:

- 1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad \forall f, g, h \in \mathcal{F}(E)$,
- 2) $1_E \circ f = f \circ 1_E = f \quad \forall f \in \mathcal{F}(E)$.

Demonstrație. Pentru orice $x \in E$ avem:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

și

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

de unde

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

De asemenea, pentru orice $x \in E$ avem:

$$(1_E \circ f)(x) = 1_E(f(x)) = f(x) = f(1_E(x)) = (f \circ 1_E)(x),$$

deci

$$1_E \circ f = f \circ 1_E = f.$$

O funcție $f: E \rightarrow F$ se numește *injectivă* dacă $f(x_1) \neq f(x_2)$ oricare ar fi $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$, ceea ce revine la:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Spunem că funcția $f: E \rightarrow F$ este *surjectivă* dacă:

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ astfel încât } y = f(x).$$

O funcție $f: E \rightarrow F$ se numește *bijectivă* dacă este injectivă și surjectivă.

2.2. Teoremă. Fie E o mulțime și $f, g \in \mathcal{F}(E)$. Dacă f și g sunt funcții injective (surjective, bijective) atunci $f \circ g$ este funcție injectivă (respectiv surjectivă, bijectivă).

Demonstrație. Fie $h = f \circ g$. Presupunem că f și g sunt injective și fie $x_1, x_2 \in E$ astfel încât $h(x_1) = h(x_2)$. Rezultă că $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Cum f este funcție injectivă rezultă că $g(x_1) = g(x_2)$, de unde $x_1 = x_2$ căci și g este funcție injectivă. Așadar $h = f \circ g$ este funcție injectivă.

Presupunem că f și g sunt funcții surjective și fie $z \in E$. Cum f și g sunt funcții surjective, există $y \in E$ astfel încât $z = f(y)$ și există $x \in E$ astfel încât $y = g(x)$, de unde

$$z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = h(x),$$

deci $h = f \circ g$ este funcție surjectivă. Ultima afirmație este acum evidentă.

Dacă E și F sunt două mulțimi, vom nota cu $E \setminus F$ mulțimea

$$E \setminus F \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in E \text{ și } x \notin F\}.$$

numită *diferența* dintre E și F (în această ordine). Cu $E \times F$ vom nota *produsul cartezian* al lui E cu F , adică mulțimea tuturor perechilor ordonate (x, y) , cu $x \in E$ și $y \in F$,

$$E \times F \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in E \text{ și } y \in F\}.$$

§ 3. MATRICE (recapitulare)

Notăm cu $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea tuturor matricelor pătratice A de ordin 2 cu coeficienți din \mathbb{R} ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Vom folosi și scrierea mai condensată: $A = (a_{ij})$.

Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, atunci *suma* $A + B$ a matricei A cu matricea B se definește prin:

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

De asemenea, *produsul* AB al matricei A cu matricea B se definește prin:

$$AB \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Matricele 0 , E și $-A$ din $M_2(\mathbb{R})$,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

se numesc respectiv *matricea zero*, *matricea unitate*, *opusa matricei* A .

Avem următoarele proprietăți ale adunării și înmulțirii matricelor din $M_2(\mathbb{R})$:

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- 2) $0 + A = A + 0 = A$,
- 3) $A + (-A) = (-A) + A = 0$,

$$4) A + B = B + A,$$

$$5) (AB)C = A(BC),$$

$$6) EA = AE = A,$$

$$7) A(B + C) = AB + AC; (B + C)A = BA + CA$$

oricare ar fi $A, B, C \in M_2(\mathbf{R})$. După cum se știe din clasa a XI-a, demonstrarea lor se face invocând proprietăți similare ale operațiilor cu numere reale. Astfel:

$$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & a_{12} + (-a_{12}) \\ a_{21} + (-a_{21}) & a_{22} + (-a_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

și analog, $(-A) + A = 0$.

Vom nota cu $M_2(\mathbf{Z})$, $M_2(\mathbf{Q})$, $M_2(\mathbf{C})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin 2 cu coeficienți în \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{C} , respectiv. În general, pentru $n > 1$, notăm cu $M_n(\mathbf{Z})$, $M_n(\mathbf{Q})$, ... mulțimea matricelor pătratice de ordin n cu coeficienți în \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , ..., respectiv.

Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A = (a_{ij})$, vom nota cu $\det(A)$ *determinantul* matricei A (adică valoarea asociată matricei A),

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \in \mathbf{R}.$$

3.1. Teoremă. Oricare ar fi $A, B \in M_2(\mathbf{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, avem:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Demonstrație. Avem:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, se observă că avem identitatea:

$$\begin{aligned} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) = \\ = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}), \end{aligned}$$

de unde

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Exemplu.

Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, atunci

$$\det(A^n) = (-1)^n \text{ oricare ar fi } n = 1, 2, \dots$$

In adevăr, $\det(A) = 2 \times 2 - 5 \times 1 = -1$ și deci afirmația este adevărată pentru $n = 1$. Presupunem că $n > 1$ și că $\det(A^{n-1}) = (-1)^{n-1}$. Atunci:

$$\det(A^n) = \det(A^{n-1} \cdot A) = \det(A^{n-1}) \det(A) = (-1)^{n-1} \cdot (-1) = (-1)^n.$$

§ 4. NUMERE RELATIV PRIME (recapitulare)

Fie a și b două numere întregi. Un număr $d \in \mathbf{Z}$, $d \geq 0$, se numește cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al lui a și b dacă:

- (1) $d \mid a$ și $d \mid b$;
- (2) $c \mid a$ și $c \mid b \Rightarrow c \mid d$.

Dacă $d' \in \mathbf{Z}$, $d' \geq 0$, satisface, de asemenea, (1) și (2), atunci avem $d' \mid d$ și $d \mid d'$ de unde $d' = d$. Așadar, c.m.m.d.c. al numerelor a și b , în caz că există, este unic determinat. Pentru c.m.m.d.c. al lui a și b folosim notația $d = (a, b)$.

4.1. Teoremă. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Atunci c.m.m.d.c. al lui a și b există. Mai mult, dacă $d = (a, b)$, atunci există $h, k \in \mathbf{Z}$ astfel încât

$$d = ah + bk.$$

Demonstrație. Dacă $a = b = 0$, atunci $d = 0$ și $0 = 0h + 0k$, unde h, k pot fi luați chiar arbitrar din \mathbf{Z} în acest caz.

Presupunem că $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Fie $d = ah + bk$ cel mai mic număr strict pozitiv printre numerele de forma:

$$ax + by \quad x, y \in \mathbf{Z}$$

(arătați că printre ele se găsesc numere strict pozitive!).

Dacă $c \mid a$ și $c \mid b$, atunci c divide și pe $ah + bk = d$, deci d satisface (2) din definiția c.m.m.d.c. Rămâne să mai arătăm că $d \mid a$ și $d \mid b$.

Dacă d nu divide pe a , există $q, r \in \mathbf{Z}$ astfel încât

$$a = dq + r, \quad 0 < r < d.$$

Atunci

$0 < r = a - dq = a - (ah + bk)q = a(1 - hq) + b(-kq) < d$, ceea ce contrazice alegerea lui d . Rămâne adevărat că $d \mid a$. Analog se arată că $d \mid b$.

Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Vom spune că a este relativ prim cu b dacă $(a, b) = 1$. Evident, a este relativ prim cu b dacă și numai dacă există $h, k \in \mathbf{Z}$ astfel încât $ah + bk = 1$.

4.2. Teoremă. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Avem:

- 1) Dacă $(a, b) = 1$ și $(a, c) = 1 \Rightarrow (a, bc) = 1$;
- 2) Dacă $(a, b) = 1$ și $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$;
- 3) Dacă $(a, b) = 1$, $a \mid c$ și $b \mid c \Rightarrow ab \mid c$.

Demonstrație. 1) Fie $h, k, u, v \in \mathbf{Z}$ astfel încât $1 = ah + bk$ și $1 = au + cv$. Atunci:

$$1 = ah + bk(au + cv) = a(h + bku) + bc(kv), \text{ de unde } (a, bc) = 1.$$

2) Fie $h, k \in \mathbf{Z}$ astfel încât $ah + bk = 1$. Atunci $c = a(hc) + bck$. Cum $a | a$ și $a | bc$ rezultă că a divide numărul $a(hc) + bc \cdot k = c$.

3) Fie $h, k \in \mathbf{Z}$ astfel încât $ah + bk = 1$. Atunci $c = ac \cdot h + bc \cdot k$. Cum $a | c$ și $b | c$ rezultă că $ab | ac$ și $ab | bc$, deci ab divide numărul $ac \cdot h + bc \cdot k = c$.

Exemple

1. Dacă $p > 0$ este un număr prim, atunci:

$$(a, p) = 1 \quad \forall a \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leq a < p.$$

În adevăr, p fiind număr prim, singurii săi divizori pozitivi sînt 1 și p . Cum $1 \leq a < p$, p nu poate divide pe a . Rezultă că singurul divizor comun al lui a și p este 1 și atunci și c.m.m.d.c. al lui a și p este 1.

2. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, numărul $n^3 - n$ se divide prin 6. În adevăr, $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$, deci $n^3 - n$ se divide prin 2 și 3. Cum $(2, 3) = 1$, rezultă că $n^3 - n$ se divide și prin $2 \times 3 = 6$.

3. Dacă $p > 0, q > 0$ sunt două numere prime distincte, atunci:

$$(p^m, q^n) = 1 \quad \forall m, n \in \mathbf{N}.$$

În adevăr, să presupunem că $p < q$. Atunci conform cu rezultatul de la Exp. 1 avem $(p, q) = 1$. Presupunem că $(p, q^{n-1}) = 1$. Folosind Teorema 4.2, pct. 1) din $(p, q) = 1$ și $(p, q^{n-1}) = 1$ rezultă $(p, q^n) = 1$. Acum se fixează n și se demonstrează prin inducție asupra lui m că $(p^m, q^n) = 1$.

Exerciții rezolvate

R - 1 Fie E o mulțime și $f, g \in \mathcal{F}(E)$. Avem:

1) Dacă $f \circ g$ este funcție injectivă (surjectivă) atunci g este funcție injectivă (resp. f este funcție surjectivă);

2) Dacă $f \circ g = 1_E$, atunci g este funcție injectivă și f este funcție surjectivă;

3) Dacă $f \circ g = g \circ f = 1_E$, atunci f și g sunt funcții bijective.

Soluție. 1) Presupunem că $f \circ g$ este funcție injectivă și fie $x_1, x_2 \in E$ astfel încât $g(x_1) = g(x_2)$. Atunci

$$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2).$$

Cum $f \circ g$ este funcție injectivă, deducem $x_1 = x_2$, deci g este funcție injectivă.

Fie $z \in E$. Dacă $f \circ g$ este funcție surjectivă, atunci există $x \in E$ astfel încât

$$z = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Rezultă că $z = f(y)$, unde $y = g(x) \in E$, deci f este funcție surjectivă.

2) Rezultă din 1) observând că 1_E este funcție injectivă și surjectivă.

3) Rezultă din 2).

R - 2 Fie $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Definim funcția:

$$f_A : E \rightarrow E, f_A(x) = (2x_1 + 3x_2, -x_1 - 2x_2) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in E.$$

Arătați că:

- 1) $f_A \circ f_A = 1_E$.
- 2) f_A este funcție bijectivă.

Soluție. 1) Pentru orice $x \in E$, $x = (x_1, x_2)$ avem

$$\begin{aligned} (f_A \circ f_A)(x) &= f_A(f_A(x)) = f_A((2x_1 + 3x_2, -x_1 - 2x_2)) = \\ &= (2(2x_1 + 3x_2) + 3(-x_1 - 2x_2), -(2x_1 + 3x_2) - 2(-x_1 - 2x_2)) = (x_1, x_2) = x, \end{aligned}$$

de unde $f_A \circ f_A = 1_E$.

- 2) Rezultă din Ex. R-1, pct. 2).

R - 3 Fie $U, A \in M_2(\mathbf{Z})$,

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- 1) Găsiți o matrice $X \in M_2(\mathbf{Z})$ astfel încât $UX = E$;
- 2) Arătați că ecuația $AX = E$ admite o soluție $X \in M_2(\mathbf{Z})$ dacă și numai dacă $\det(A) = \pm 1$ și în acest caz avem și $XA = E$.

Soluție. 1) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Cum

$$UX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + z & 3y + w \\ 5x + 2z & 5y + 2w \end{pmatrix}$$

avem $UX = E$ dacă și numai dacă

$$\begin{pmatrix} 3x + z & 3y + w \\ 5x + 2z & 5y + 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ceea ce revine la:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + z = 1 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \text{b) } \begin{cases} 3y + w = 0 \\ 5y + 2w = 1. \end{cases}$$

Rezolvând sistemele de mai sus găsim $x = 2$, $z = -5$, $y = -1$ și $w = 3$, deci

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}).$$

- 2) Fie $X \in M_2(\mathbf{Z})$ astfel încât $AX = E$.

Atunci

$$1 = \det(E) = \det(AX) = \det(A) \det(X)$$

și cum $\det(A)$ și $\det(X)$ sunt numere întregi, rezultă că $\det(A) = \pm 1$

Reciproc, dacă $\det(A) = \pm 1$, atunci urmând calea de rezolvare de la pct. 1) se găsește:

$$X = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}) \quad \text{dacă } ad - cb = 1$$

și

$$X = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}) \quad \text{dacă } ad - cb = -1.$$

În ambele cazuri avem și $XA = E$.

R - 4 Fie m_1 și m_2 doi întregi pozitivi relativ primi, $m = m_1 m_2$ și $\mathbb{R}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, $\mathbb{R}_{m_1} = \{0, 1, \dots, m_1-1\}$, $\mathbb{R}_{m_2} = \{0, 1, \dots, m_2-1\}$.

Dacă $a, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, atunci notăm cu $a \bmod n$ restul împărțirii lui a prin n .

1) Arătați că funcția

$f: \mathbb{R}_m \rightarrow \mathbb{R}_{m_1} \times \mathbb{R}_{m_2}$, $f(a) = (a \bmod m_1, a \bmod m_2) \forall a \in \mathbb{R}_m$ este bijectivă.

2) Enumerați valorile funcției f când $m_1 = 4$ și $m_2 = 3$.

Soluție. 1) Mulțimea \mathbb{R}_m are m elemente și mulțimea $\mathbb{R}_{m_1} \times \mathbb{R}_{m_2}$ are $m_1 m_2 = m$ elemente.

Este deci suficient să arătăm că funcția f este injectivă. Fie $a, b \in \mathbb{R}_m$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci

$$(a \bmod m_1, a \bmod m_2) = (b \bmod m_1, b \bmod m_2).$$

Rezultă că $a \bmod m_1 = b \bmod m_1$ și $a \bmod m_2 = b \bmod m_2$. Cum $a \bmod m_1 = b \bmod m_1$, deducem că a și b dau același rest prin împărțirea cu m_1 , deci $m_1 \mid (a - b)$. Analog se deduce că $m_2 \mid (a - b)$. Dar $(m_1, m_2) = 1$, deci $m_1 m_2 \mid (a - b)$. Cum $|a - b| < m$, rezultă $a - b = 0$, deci $a = b$. Așadar, f este funcție injectivă.

2) În acest caz $m = 4 \times 3 = 12$, $\mathbb{R}_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$, $\mathbb{R}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ și $\mathbb{R}_3 = \{0, 1, 2\}$. Avem:

$$\begin{array}{lll} f(0) = (0, 0); & f(4) = (0, 1); & f(8) = (0, 2); \\ f(1) = (1, 1); & f(5) = (1, 2); & f(9) = (1, 0); \\ f(2) = (2, 2); & f(6) = (2, 0); & f(10) = (2, 1); \\ f(3) = (3, 0); & f(7) = (3, 1); & f(11) = (3, 2). \end{array}$$

Astfel,

$$f(7) = (7 \bmod 4, 7 \bmod 3) = (3, 1).$$

Exerciții

1. Fie $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Arătați că:

- 1) f este funcție injectivă;
- 2) f nu este funcție surjectivă.

2. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{N}$ și $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = x - 1$, $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$ și $g(0) = 0$.

Arătați că:

- 1) f este injectivă și nu este surjectivă;
- 2) g este surjectivă și nu este injectivă;
- 3) $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$.

3. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definim funcția $f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătați că:

- 1) $f_{a,b}$ este funcție bijectivă;
- 2) $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac, ad+b} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.
- 3) Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, găsiți $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f_{a,b} \circ f_{\alpha,\beta} = 1_{\mathbb{R}}$.

4. Fie $A \in M_2(\mathbf{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $F = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$,

$$f_A: E \rightarrow E, f_A(x) = (3x_1 + x_2, 4x_1 + 2x_2) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in E,$$

$$f_A^*: F \rightarrow F, f_A^*(x) = (3x_1 + x_2, 4x_1 + 2x_2) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in F.$$

Arătați că:

1) f_A este funcție injectivă și nu este surjectivă.

2) f_A^* este bijectivă.

5. Fie $A \in M_2(\mathbf{Q})$, $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Arătați că:

$$A^2 + A + E = 0, A^3 = E.$$

6. Pentru orice $\theta \in \mathbf{R}$ definim matricele:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Arătați că:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{-\theta} = S_\theta, R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S_\theta, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S_0.$$

$$2) R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}, R_\theta S_{\theta'} = S_{\theta+\theta'}, S_\theta R_{\theta'} = S_{\theta-\theta'},$$

$$S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}.$$

$$3) R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = E, S_\theta S_\theta = E.$$

7. Pentru o matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ următoarele afirmații sunt echivalente.

$$1) \text{ Există } a \in \mathbf{R} \text{ astfel încât } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$2) AX = XA \text{ oricare ar fi } X \in M_2(\mathbf{R}).$$

8. 1) Determinați matricele $A \in M_2(\mathbf{Z})$ cu proprietățile

$$A^2 = E \text{ și } \det(A) = 1.$$

2) Dacă

$$B = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{Z}$$

arătați că $B^2 = E$ și $\det(B) = -1$.

9. Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ fie matricele $U_a, V_a \in M_2(\mathbf{R})$,

$$U_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Arătați că:

$$1) U_a U_b = U_{a+b}, V_a V_b = V_{a+b}, \forall a, b \in \mathbf{R};$$

$$2) U_a U_{-a} = U_{-a} U_a = E, V_a V_{-a} = V_{-a} V_a = E, \forall a \in \mathbf{R}$$

10. Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A = (a_{ij})$, atunci definim matricea

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$$

numită *transpusa* matricii A . Verificați că:

$$1) (A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$2) (AB)^T = B^T A^T$$

$$3) (A^T)^T = A.$$

oricare ar fi $A, B \in M_2(\mathbf{R})$.

4) Funcția $f: M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R}), f(A) = A^T, A \in M_2(\mathbf{R})$ este bijectivă.

11. Fie $H = \left\{ A \in M_2(\mathbf{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0 \right\}$

Arătați:

1) Dacă $A, B \in H$, atunci $AB \in H$.

2) Oricare ar fi $A \in H$ există $X \in H$ astfel încât $AX = E$.

Comparați rezultatele acestui exercițiu cu cele de la Ex. 3.

12. Fie $a, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{Z}$. Demonstrați:

1) Dacă $(a, b_i) = 1, 1 \leq i \leq n$, atunci $(a, b_1 b_2 \dots b_n) = 1$;

2) Dacă pentru orice $i \neq j$ avem $(b_i, b_j) = 1$ și $b_i \mid a, 1 \leq i \leq n$, atunci $b_1 b_2 \dots b_n$ divide pe a .

13. Dacă n este impar, arătați că $n^5 - n$ se divide prin 240.

14. 1) Determinați numerele $v \in \mathbf{Z}[\sqrt{-5}], v = a + b\sqrt{-5}, a, b \in \mathbf{Z}$, cu proprietatea că există $z \in \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ astfel încât $vz = 1$.

2) Găsiți $z \in \mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ astfel încât $vz = 1$, unde $v = 3 - \sqrt{-5}$.

* * *

15*. Fie E o mulțime și $C_E: \mathfrak{S}(E) \rightarrow \mathfrak{S}(E), C_E(X) = E \setminus X, \forall X \in \mathfrak{S}(E)$. Arătați că aplicația C_E are proprietățile:

$$1) C_E(X \cup Y) = C_E(X) \cap C_E(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{S}(E),$$

$$2) C_E(X \cap Y) = C_E(X) \cup C_E(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{S}(E),$$

$$3) C_E \circ C_E = 1_{\mathfrak{S}(E)},$$

4) Aplicația C_E este bijectivă.

16*. Fie $A \in M_2(\mathbf{R}), A = (a_{ij}), E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ și $f_A: E \rightarrow E$.

$$f_A(x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in E.$$

Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f_A este bijectivă;

2) $\det(A) \neq 0$.

17*. Pentru orice $A \in M_2(\mathbf{R}), A = (a_{ij})$ definim aplicația f_A ca la Ex. 16*. Arătați că:

$$1) f_A = f_B \Leftrightarrow A = B;$$

$$2) f_A \circ f_B = f_{AB}, \forall A, B \in M_2(\mathbf{R});$$

3) Folosind asociativitatea compunerii funcțiilor, deduceți că $(AB)C = A(BC), \forall A, B, C \in M_2(\mathbf{R})$.

18*. Determinați matricile $A \in M_2(\mathbf{Z})$ cu proprietatea: $A^2 = -E$.

19*. Fie $O_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\}$. Arătați:

- 1) Dacă $A \in O_2$, atunci $\det(A) = \pm 1$;
- 2) Avem $A \in O_2$ și $\det(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi)$

astfel încât

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- 3) Avem $A \in O_2$ și $\det(A) = -1 \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi)$

astfel încât

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

- 4) Avem $A \in O_2 \Leftrightarrow A^T A = A A^T = E$;
- 5) Dacă $A, B \in O_2 \Rightarrow AB \in O_2$.

20*. Fie $\mathcal{X} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ și $\mathcal{S} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$.

Arătați că:

- 1) $\forall A, B \in \mathcal{X} \Rightarrow A + B \in \mathcal{X}$;
- 2) $\forall A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A + B \in \mathcal{S}$;
- 3) $A \in \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \Rightarrow A = 0$;
- 4) $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$ există $B \in \mathcal{X}$ și $C \in \mathcal{S}$ unic determinate cu proprietatea $A = B + C$.

21*. Dacă numerele $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ satisfac relația $a = bq + r$, atunci $(a, b) = (b, r)$. Deduceți că (a, b) este egal cu ultimul rest diferit de 0 din algoritmul lui Euclid pentru a și b .

22*. Fie a și b două numere întregi nenegative.

- 1) Arătați că $(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{(a, b)} - 1$;
- 2) Deduceți că $(2^a - 1, 2^b - 1) = 1 \Leftrightarrow (a, b) = 1$.

23*. Fie $q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ astfel încât $q - 3$ nu se divide prin 5. Dacă $m_1 = 2^{6q-1} - 1$, $m_2 = 2^{6q+1} - 1$, $m_3 = 2^{6q+2} - 1$, $m_4 = 2^{6q+3} - 1$, $m_5 = 2^{6q+5} - 1$, $m_6 = 2^{6q+7} - 1$, atunci $(m_i, m_j) = 1$ pentru $i \neq j$.

§ 1. NOȚIUNEA DE LEGE DE COMPOZIȚIE. EXEMPLE

Să trecem mai întâi în revistă câteva exemple cunoscute care permit degajarea conceptului de lege de compoziție.

Pentru moment să ne fixăm atenția asupra mulțimii $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ a numerelor naturale. Operația de *adunare* a numerelor naturale ne permite să definim aplicația

$$\varphi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$$

prin care facem să corespundă la orice pereche ordonată (x, y) de numere naturale un număr natural unic determinat $\varphi(x, y) = x + y$, numit *suma* lui x cu y . Astfel, $\varphi(3, 7) = 3 + 7 = 10$, $\varphi(5, 4) = 5 + 4 = 9$ etc.

Analog, folosind *înmulțirea* numerelor naturale, putem defini aplicația

$$\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, (x, y) \rightarrow \psi(x, y)$$

prin care la orice pereche ordonată (x, y) de numere naturale asociem un număr natural unic determinat $\psi(x, y) = xy$, numit *produsul* lui x cu y . Astfel $\psi(3, 7) = 3 \times 7 = 21$, $\psi(5, 4) = 5 \times 4 = 20$ etc.

Schimbând cadrul, observații similare pot fi făcute pe mulțimea $\mathfrak{A}(E)$ a tuturor părților X ale unei mulțimi date E . Putem defini aplicațiile:

$$\varphi : \mathfrak{A}(E) \times \mathfrak{A}(E) \rightarrow \mathfrak{A}(E), (X, Y) \rightarrow \varphi(X, Y) = X \cup Y$$

și

$$\psi : \mathfrak{A}(E) \times \mathfrak{A}(E) \rightarrow \mathfrak{A}(E), (X, Y) \rightarrow \psi(X, Y) = X \cap Y.$$

În viziunea aceasta, φ poartă numele de operație de *reuniune*, iar $\varphi(X, Y) = X \cup Y$ se numește *reuniunea* lui X cu Y ; ψ poartă numele de operație de *intersecție*, iar $\psi(X, Y) = X \cap Y$ se numește *intersecția* lui X cu Y .

Pentru a surprinde într-o schemă generală situații ca cele enumerate mai sus, vom considera o mulțime nevidă M și o aplicație

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y),$$

ignorând natura elementelor mulțimii M , precum și regula efectivă prin care la orice pereche ordonată (x, y) de elemente din M se asociază un element unic $\varphi(x, y) \in M$. Se obține astfel noțiunea de *lege de compoziție* pe mulțimea M . Mai precis:

1.1. *Definiție.* Fie M o mulțime nevidă. O aplicație φ definită pe produsul cartezian $M \times M$ cu valori în M ,

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$$

se numește *lege de compoziție* pe M .

Elementul unic determinat $\varphi(x, y) \in M$ care corespunde perechii ordonate $(x, y) \in M \times M$ prin aplicația φ se numește *compusul* lui x cu y prin legea de compoziție φ .

O lege de compoziție pe o mulțime M poartă încă numele de *operație algebrică* pe M sau *operație binară* pe M . Este clar că adunarea și înmulțirea numerelor naturale sînt legi de compoziție pe $M = \mathbf{N}$, reuniunea și intersecția sînt legi de compoziție pe mulțimea $M = \mathfrak{E}(E)$ a tuturor părților unei mulțimi E .

Legile de compoziție sînt date în diferite notații. De regulă se folosește fie notația *aditivă*, fie notația *multiplicativă*. În notația *aditivă* punem $\varphi(x, y) = x + y$. Elementul $x + y$ se numește *suma* lui x cu y , iar legea de compoziție φ se numește *adunare*. În notația *multiplicativă* punem $\varphi(x, y) = xy$ sau $\varphi(x, y) = x \cdot y$. Elementul xy se numește *produsul* lui x cu y , iar legea de compoziție φ se numește *înmulțire*.

În unele cazuri, fie obligați de tradiție, fie din necesitatea de a distinge între mai multe operații algebrice, pentru compusul $\varphi(x, y)$ al lui x cu y se folosesc încă notații ca:

$$x \circ y, x \wedge y, x \vee y, x * y, x \oplus y, x \perp y, x \top y, x \Delta y \text{ etc.}$$

Exemple

1. *Adunarea și înmulțirea matricelor.* Fie $M_2(\mathbf{R})$ mulțimea matricelor pătrate de ordin 2 cu coeficienți din \mathbf{R} .

Asociind fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $M_2(\mathbf{R})$ matricea $A + B \in M_2(\mathbf{R})$ se obține o lege de compoziție φ pe $M_2(\mathbf{R})$,

$$\varphi : M_2(\mathbf{R}) \times M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R}), (A, B) \rightarrow \varphi(A, B) = A + B,$$

numită *operația de adunare* a matricelor.

Asociind fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $M_2(\mathbf{R})$ matricea $AB \in M_2(\mathbf{R})$ se obține o lege de compoziție ψ pe $M_2(\mathbf{R})$,

$$\psi : M_2(\mathbf{R}) \times M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R}), (A, B) \rightarrow \psi(A, B) = AB,$$

numită *operația de înmulțire* a matricelor.

2. *Compunerea funcțiilor.* Fie E o mulțime și $\mathfrak{F}(E)$ mulțimea tuturor funcțiilor $f : E \rightarrow E$. Asociind fiecărei perechi ordonate (f, g) de funcții din $\mathfrak{F}(E)$ funcția $f \circ g \in \mathfrak{F}(E)$ se obține o lege de compoziție φ pe $\mathfrak{F}(E)$,

$$\varphi : \mathfrak{F}(E) \times \mathfrak{F}(E) \rightarrow \mathfrak{F}(E), (f, g) \rightarrow \varphi(f, g) = f \circ g,$$

numită *operația de compunere* a funcțiilor.

3. *Adunarea și înmulțirea modulo n .* Fie \mathbf{Z} mulțimea numerelor întregi și $n > 0$ un număr întreg fixat. Este știut că pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ există $q, r \in \mathbf{Z}$ unic determinați astfel încât

$$a = nq + r, 0 \leq r < n.$$

Numărul r de mai sus, cunoscut sub numele de *restul împărțirii lui a prin n* , va fi notat cu $a \bmod n$ (se citește „ a modulo n ”) și se numește încă *redusul modulo n* al numărului întreg a . Astfel, dacă $n = 5$, atunci $13 \bmod 5 = 3$, $(-8) \bmod 5 = 2$, $4 \bmod 5 = 4$.

Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ atunci definim *suma modulo n* a lui a cu b , notată cu $a \oplus b$, și *produsul modulo n* al lui a cu b , notat cu $a \otimes b$, prin:

$$a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} (a + b) \bmod n,$$

respectiv

$$a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} (ab) \bmod n.$$

Avem astfel pe \mathbf{Z} , alături de adunarea și înmulțirea uzuală

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (a, b) \rightarrow a + b \text{ și } \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (a, b) \rightarrow ab,$$

următoarele două legi de compoziție:

$$\varphi : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (a, b) \rightarrow \varphi(a, b) = a \oplus b$$

și

$$\psi : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (a, b) \rightarrow \psi(a, b) = a \otimes b$$

numite *adunarea modulo n* , respectiv *înmulțirea modulo n* .

Astfel, dacă $n = 6$, atunci $7 \oplus 9 = 4$, $(-3) \otimes 5 = 3$ căci $7 \oplus 9 = (7 + 9) \bmod 6 = 16 \bmod 6 = 4$, $(-3) \otimes 5 = ((-3) \times 5) \bmod 6 = (-15) \bmod 6 = 3$.

§ 2. PARTE STABILĂ. LEGE DE COMPOZIȚIE INDUSĂ

2.1. *Definiție.* Fie M o mulțime pe care este dată o lege de compoziție φ . O submulțime H a lui M cu proprietatea:

$$\forall x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$$

se numește *parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție φ*

Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție $\varphi : M \times M \rightarrow M$, atunci pe H putem defini legea de compoziție $\varphi' : H \times H \rightarrow H$, punând

$$\varphi'(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, y) \in H \quad \forall x, y \in H.$$

Vom spune că φ' este *legea de compoziție indusă pe H de către φ* .

Exemple

1. Mulțimea $2\mathbf{Z} = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ a numerelor întregi pare este o parte stabilă a lui \mathbf{Z} în raport cu operația de adunare a numerelor întregi pentru că suma a două numere pare este un număr par.

In adevăr, dacă $x, y \in 2\mathbf{Z}$, $x = 2h$, $y = 2k$, atunci $x + y = 2h + 2k = 2(h + k) \in 2\mathbf{Z}$.

Mulțimea $2\mathbf{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ a numerelor întregi impare este o parte stabilă a lui \mathbf{Z} în raport cu înmulțirea și nu este parte stabilă a lui \mathbf{Z} în raport cu adunarea. În adevăr, dacă $x, y \in 2\mathbf{Z} + 1$, atunci $x = 2h + 1$, $y = 2k + 1$, deci

$$xy = (2h + 1)(2k + 1) = 2(2hk + h + k) + 1 \in 2\mathbf{Z} + 1$$

și

$$x + y = 2h + 1 + 2k + 1 = 2(h + k + 1) \notin 2\mathbf{Z} + 1.$$

2. Fie n un număr natural mai mare ca 0 și

$$\mathfrak{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \subset \mathbf{Z}.$$

Mulțimea \mathfrak{R}_n este o parte stabilă a lui \mathbf{Z} atât în raport cu adunarea modulo n cât și în raport cu înmulțirea modulo n . În adevăr, oricare ar fi $x, y \in \mathfrak{R}_n$ avem $x \oplus y \in \mathfrak{R}_n$ și $x \otimes y \in \mathfrak{R}_n$ și în particular

$$\forall x, y \in \mathfrak{R}_n \Rightarrow x \oplus y \in \mathfrak{R}_n, \quad x \otimes y \in \mathfrak{R}_n.$$

Dacă $n > 1$, atunci \mathfrak{R}_n nu este stabilă în raport cu adunarea numerelor întregi, iar dacă $n > 2$, atunci \mathfrak{R}_n nu este stabilă în raport cu înmulțirea uzuală a numerelor întregi.

3. Fie $E = \{1, 2, 3\}$ și $H = \{f \in \mathfrak{F}(E) \mid f(3) = 3\}$.

Atunci H este o parte stabilă a lui $\mathfrak{F}(E)$ în raport cu operația de compunere. În adevăr, dacă $f, g \in H$, atunci $f(3) = 3$, $g(3) = 3$, deci

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3,$$

de unde $f \circ g \in H$.

§ 3. TABLA UNEI LEGI DE COMPOZIȚIE

Fie M o mulțime finită, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. În acest caz o lege de compoziție φ pe M , $\varphi : M \times M \rightarrow M$, poate fi dată prin ceea ce este cunoscut sub numele de *tabla operației* φ , care constă dintr-un tabel cu n linii și n coloane afectate celor n elemente ale lui M . Tabla legii de compoziție φ conține la intersecția liniei lui a_i cu coloana lui a_j elementul $\varphi(a_i, a_j)$.

φ	a_1	a_2	\dots	a_j	\dots	a_n
a_1						
a_2						
\vdots						
a_i				$\varphi(a_i, a_j)$		
\vdots						
a_n						

Tabla unei operații este utilă în perfectarea calculului algebrice și, așa cum se va vedea mai târziu, în testarea unor proprietăți ale operației.

Tablele operațiilor induse pe $\mathbb{R}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de adunarea și înmulțirea modulo 5 sunt următoarele:

\oplus	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabla adunării modulo 5.

\otimes	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tabla înmulțirii modulo 5.

Fie acum $E = \{1, 2, \dots, n\}$. O funcție $f: E \rightarrow E$ se dă uneori cu ajutorul unui tabel cu două linii, numită *permutarea mulțimii E*:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

În prima linie se trec în ordine numerele $1, 2, \dots, n$ iar în a doua linie se trec imaginile acestora prin f , anume $f(1), f(2), \dots, f(n)$. Astfel, dacă $E = \{1, 2\}$, atunci elementele lui $\mathfrak{F}(E)$ sunt:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tabla operației de compunere a funcțiilor din $\mathfrak{F}(E)$ este următoarea:

\circ	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

Astfel, $f \circ h = g$. În adevăr

$$(f \circ h)(1) = f(h(1)) = f(2) = 1 = g(1)$$

și

$$(f \circ h)(2) = f(h(2)) = f(2) = 1 = g(2)$$

de unde $f \circ h = g$. Rezultă că la intersecția liniei lui f cu coloana lui h din tabla operației de compunere a funcțiilor din $\mathfrak{F}(E)$ se pune funcția g .

Direct din tabla operației de compunere a funcțiilor din $\mathfrak{F}(E)$ se deduce că submulțimea $H = \{e, f\}$ a lui $\mathfrak{F}(E)$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

§ 4. ASOCIATIVITATE

Noțiunea de lege de compoziție prezintă un mare grad de generalitate. În definiția unei legi de compoziție φ pe o mulțime M se ignoră atât natura elementelor mulțimii M cât și modul efectiv în care φ acționează pe $M \times M$. Singura restricție pusă este ca φ să asocieze la orice cuplu ordonat (x, y) de elemente din M un element $\varphi(x, y)$ din M și numai unul. Din acest motiv studiul legilor de compoziție bazat doar pe definiția lor este foarte sărac în rezultate. S-a dovedit fertilă ideea de a studia legi de compoziție ce au proprietăți care pot fi „semnalate“ în multe exemple „concrete“.

Vom presupune în continuare că M este o mulțime nevidă echipată cu o lege de compoziție „*“,

$$M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y.$$

Expresia $x * y$ se citește: x compus cu y sau x star y sau x stea y .

Definițiile și rezultatele vor fi date folosind această notație (notația „star“) urmând să fie făcute precizările ce se impun și în alte notații pentru legea de compoziție.

Fie $x, y, z \in M$. Prezența parantezelor în expresia

$$(x * y) * z$$

cere următoarea procedură de calcul: se află întâi compusul lui x cu y și apoi $x * y$ se compune (la dreapta!) cu z , obținându-se în final elementul $(x * y) * z \in M$. Prezența parantezelor în expresia $x * (y * z)$ impune să aflăm întâi $y * z$ și să-l compunem apoi (la stânga!) cu x , obținându-se astfel elementul $x * (y * z) \in M$.

4.1. *Definiție.* O lege de compoziție $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, se numește *asociativă* dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in M.$$

Dacă legea de compoziție este dată în notație aditivă (multiplicativă) atunci proprietatea de asociativitate a acesteia se scrie:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in M,$$

respectiv

$$(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in M.$$

Dacă folosim notația $x \perp y$ pentru compusul lui x cu y , atunci proprietatea de asociativitate se scrie:

$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z), \quad \forall x, y, z \in M.$$

Exemple

1. Adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt legi de compoziție asociative pentru că

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

2. Adunarea și înmulțirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$ sunt legi de compoziție asociative, căci

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC), \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R}).$$

3. Reuniunea și intersecția părților unei mulțimi E sunt legi de compoziție asociative, căci

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

oricare ar fi $X, Y, Z \in \mathfrak{P}(E)$.

4. Compunerea funcțiilor unei mulțimi E în ea însăși este o lege de compoziție asociativă, căci

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \quad \forall f, g, h \in \mathfrak{F}(E).$$

5. Pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi definim legea de compoziție

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x, y) \rightarrow x - y.$$

Cum $(3 - 7) - 1 = -5 \neq -3 = 3 - (7 - 1)$, rezultă că această lege de compoziție nu este asociativă.

§ 5. COMUTATIVITATE

Proprietatea de asociativitate lărgeste mult aria posibilităților în perfectarea calculului algebric. O altă sursă în acest sens este dată de legile de compoziție pentru care compusul a două elemente oarecare este independent de ordinea în care se face compunerea acestora. Mai precis:

5.1. *Definiție.* O lege de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$ se numește *comutativă*, dacă:

$$x * y = y * x, \quad \forall x, y \in M.$$

Adunarea și înmulțirea numerelor reale, reuniunea și intersecția părților unei mulțimi sunt legi de compoziție comutative.

Remarcă. Comutativitatea unei legi de compoziție dată pe o mulțime finită M poate fi verificată pe tabla operației: elementul xy de la intersecția liniei lui x cu coloana lui y trebuie să fie egal cu elementul yx de la intersecția liniei lui y cu coloana lui x , oricare

ar fi $x, y \in M$. Aceasta revine la proprietatea că tabla operației este simetrică în raport cu dajagonala principală (fig. II.1).

În § 3 au fost date tablele adunării și înmulțirii modulo 5 pe $\mathbb{R}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Cum aceste table sunt simetrice în raport cu diagonala principală, rezultă că legile de compoziție menționate sunt comutative. Tot la locul citat a fost dată tabla compunerii funcțiilor din $\mathcal{F}(E)$, unde $E = \{1, 2\}$. Pe tabla acestei legi de compoziție se constată că $h \circ g = h \neq g = g \circ h$, deci această operație nu este comutativă.

Numeroase legi de compoziție se definesc cu ajutorul altora deja cunoscute. Asemenea operații pot prelua unele proprietăți de la cele de plecare prin „mecanismul” dat chiar de definiția lor. Astfel comutativitatea adunării matricelor din $M_2(\mathbb{R})$ este o consecință a proprietății de comutativitate a adunării numerelor reale. În adevăr, dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, atunci

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B + A. \end{aligned}$$

Să observăm că înmulțirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$ nu este comutativă, cu toate că înmulțirea numerelor reale este comutativă. Aceasta rezultă din exemplul următor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ atunci $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Exerciții rezolvate

R - 1 Pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi definim legea de compoziție

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} x + y - xy,$$

numită *compunerea circulară*. Să se arate că legea de compoziție „o” este asociativă și comutativă.

Soluție. Dacă $x, y, z \in \mathbb{Z}$, atunci:

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x + y - xy) \circ z = x + y - xy + z - (x + y - xy)z = \\ &= x + y + z - xy - yz - zx + xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x \circ (y + z - yz) = x + y + z - yz - x(y + z - yz) = \\ &= x + y + z - xy - yz - zx + xyz. \end{aligned}$$

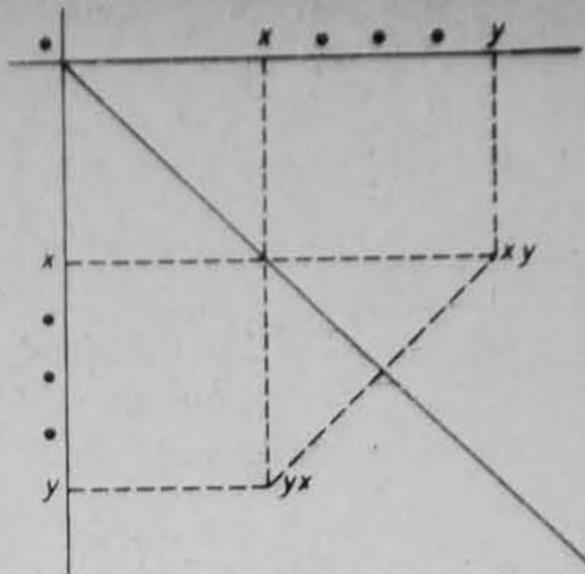


Fig. II.1

de unde

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

De asemenea, pentru $x, y \in \mathbf{Z}$ avem:

$$x \circ y = x + y - xy = y + x - yx = y \circ x.$$

R - 2 Fie M și N două mulțimi, „ $*$ “ o lege de compoziție pe M , „ \circ “ o lege de compoziție pe N și $f: M \rightarrow N$ o funcție surjectivă astfel încât

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y), \quad \forall x, y \in M.$$

1) Dacă legea de compoziție „ $*$ “ este asociativă (comutativă) atunci legea de compoziție „ \circ “ este asociativă (resp. comutativă).

2) Funcția $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(x) = 1 - x$ are proprietatea

$$f(xy) = f(x) \circ f(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{Z}$$

unde xy este produsul uzual în \mathbf{Z} iar „ \circ “ este compunerea circulară (v. Ex. R - 1).

3) Dați o nouă soluție pentru Ex. R-1.

Soluție. 1) Fie $u, v, w \in N$. Cum f este funcție surjectivă, există $x, y, z \in M$ astfel încât $u = f(x)$, $v = f(y)$, $w = f(z)$.

Avem:

$$u \circ v = f(x) \circ f(y) = f(x * y) = f(y * x) = f(y) \circ f(x) = v \circ u$$

și

$$\begin{aligned} (u \circ v) \circ w &= (f(x) \circ f(y)) \circ f(z) = f(x * y) \circ f(z) = f((x * y) * z) = \\ &= f(x * (y * z)) = f(x) \circ f(y * z) = f(x) \circ (f(y) \circ f(z)) = u \circ (v \circ w). \end{aligned}$$

2) Oricare ar fi $x, y \in \mathbf{Z}$ avem:

$$\begin{aligned} f(x) \circ f(y) &= f(x) + f(y) - f(x)f(y) = 1 - x + 1 - y - (1 - x)(1 - y) = \\ &= 1 - xy = f(xy). \end{aligned}$$

3) Funcția f este surjectivă iar înmulțirea uzuală a numerelor întregi este asociativă și comutativă. Putem aplica 1).

5.2. *Remarcă.* Fie $\varphi: M \times M \rightarrow M$ o lege de compoziție pe M , H o parte stabilă a lui M în raport cu φ și φ' legea de compoziție pe H indusă de φ .

Dacă φ este asociativă (comutativă) atunci φ' este asociativă (respectiv comutativă). În adevăr, pentru orice $x, y, z \in H$ avem:

$$\varphi'(\varphi'(x, y), z) = \varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi'(x, \varphi'(y, z))$$

și

$$\varphi'(x, y) = \varphi(x, y) = \varphi(y, x) = \varphi'(y, x).$$

§ 6. ELEMENT NEUTRU

Numerele reale 0 și 1 au proprietățile:

$$0 + x = x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

respectiv

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Dacă E este o mulțime și $1_E : E \rightarrow E$ este aplicația identică a lui E , atunci

$$1_E \circ f = f \circ 1_E = f, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(E).$$

De asemenea, pentru orice matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ avem:

$$0 + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a_{11} & 0 + a_{12} \\ 0 + a_{21} & 0 + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

și analog $A + 0 = A$.

6.1. *Definiție.* Un element $e \in M$ se numește *element neutru* pentru o lege de compoziție $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, dacă

$$e * x = x * e = x, \quad \forall x \in M.$$

6.2. *T e o r e m ă.* Dacă o lege de compoziție are element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstrație. Fie e și e' două elemente neutre pentru o lege de compoziție $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$. Avem $e * e' = e'$ căci e este element neutru. De asemenea, $e * e' = e$ căci și e' este element neutru, de unde $e = e'$.

Așadar, elementul neutru, în caz că există, este unic determinat.

În notație aditivă elementul neutru se notează de regulă cu 0 și se numește *elementul zero*, iar în notația multiplicativă elementul neutru se notează cu 1 sau chiar cu e și poartă numele de *elementul unitate*. Avem:

$$0 + x = x + 0 = x, \quad \forall x \in M,$$

respectiv

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in M.$$

Exemple

1. Numărul real 0 este elementul neutru al adunării numerelor reale, numărul real 1 este elementul neutru al înmulțirii numerelor reale.
2. Aplicația identică 1_E a mulțimii E este elementul neutru al operației de compunere a funcțiilor din $\mathfrak{F}(E)$.
3. Fie E o mulțime. Cum $\emptyset \cup X = X \cup \emptyset = X$ și $E \cap X = X \cap E = X$ oricare ar fi $X \in \mathfrak{Q}(E)$ rezultă că \emptyset este elementul neutru al operației „ \cup ”, iar E este elementul neutru al operației „ \cap ”.

4. Mulțimea $2\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a numerelor naturale pare este o parte stabilă a lui \mathbb{N} în raport cu înmulțirea și legea de compoziție indusă de către aceasta pe $2\mathbb{N}$ nu admite element neutru.

§ 7. ELEMENTE SIMETRIZABILE

Ca și până acum, M este o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție

$$M \times M \rightarrow M, \quad (x, y) \rightarrow x * y.$$

Vom presupune în plus că această lege de compoziție este asociativă și că admite element neutru, fie acesta e .

7.1. *Definiție.* Un element $x \in M$ se numește *simetrizabil* în raport cu legea de compoziție (asociativă și cu element neutru) $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, dacă există $x' \in M$ astfel încât

$$x' * x = x * x' = e.$$

Să observăm că dacă $x'' \in M$ satisface ca și x' condițiile

$$x'' * x = x * x'' = e,$$

atunci $x' = x''$. În adevăr

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''.$$

Dacă $x \in M$ este simetrizabil, atunci unicul element $x' \in M$ cu proprietatea $x' * x = x * x' = e$ se numește *simetricul* lui x (în raport cu operația „*“).

În notația multiplicativă simetricul lui x , în caz că există, se notează de regulă cu x^{-1} și se numește *inversul* lui x ; în notația aditivă se notează cu $-x$ și se numește *opusul* lui x . Așadar,

$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1,$$

respectiv

$$(-x) + x = x + (-x) = 0.$$

Exemple

1. Cum $e * e = e$, rezultă că elementul neutru este simetrizabil și simetricul lui e este tot e . În notație multiplicativă avem $1^{-1} = 1$, iar în notație aditivă $-0 = 0$.

2. Matricea $A \in M_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $ad - cb = 1$, este simetrizabilă (inversabilă) în raport cu operația de înmulțire din $M_2(\mathbb{Z})$ și

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$$

In adevăr,

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

și analog

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

3. Orice număr întreg este simetrizabil în raport cu adunarea numerelor întregi; numerele întregi simetrizabile față de înmulțire sunt 1 și -1 , $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$.
4. Consultând tabla dată la § 3 pentru compunerea funcțiilor din $\mathfrak{F}(E)$, unde $E = \{1, 2\}$, se observă că $e \circ e = e$ și $f \circ f = e$, deci funcțiile e și f sunt simetrizabile (inversabile) și $e^{-1} = e$, $f^{-1} = f$.

7.2. **Teoremă.** Dacă $x, y \in M$ sînt elemente simetrizabile în raport cu o lege de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$ (asociativă și cu element neutru) atunci $x * y$ și x' sînt simetrizabile. Mai mult:

1) $(x * y)' = y' * x'$,

2) $(x')' = x$.

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} (y' * x') * (x * y) &= y' * (x' * (x * y)) = y' * ((x' * x) * y) = \\ &= y' * (e * y) = y' * y = e \end{aligned}$$

și analog $(x * y) * (y' * x') = e$. Rezultă că $x * y$ este simetrizabil și $(x * y)' = y' * x'$. A doua afirmație este imediată.

Proprietățile 1) și 2) din enunțul teoremei precedente se transcriu multiplicativ astfel:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \quad (x^{-1})^{-1} = x.$$

iar în notația aditivă

$$-(x + y) = (-y) + (-x), \quad -(-x) = x.$$

Se face următoarea convenție de notație:

$$\boxed{x - y \stackrel{\text{def}}{=} x + (-y)}$$

Exerciții rezolvate

R - 1 Să se arate că legea de compoziție

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, \quad (x, y) \rightarrow x \circ y = x + y - xy$$

are element neutru și să se determine elementele simetrizabile. Aceeași problemă pentru legea de compoziție

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}, (x, y) \rightarrow x \circ y = x + y - xy.$$

Soluție. Dacă $e \in \mathbf{Z}$ este element neutru pentru legea de compoziție „ \circ ”, trebuie să avem

$$x = e \circ x = e + x - ex, \quad \forall x \in \mathbf{Z}$$

deci

$$e = ex, \quad \forall x \in \mathbf{Z}$$

și în particular $e = e \cdot 0 = 0$. Pe de altă parte se verifică că $0 \circ x = x \circ 0 = x, \forall x \in \mathbf{Z}$, deci numărul 0 este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.

Fie $a \in \mathbf{Z}$. Pentru ca a să fie simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ \circ ” trebuie să existe $x \in \mathbf{Z}$ astfel încât

$$0 = a \circ x = a + x - ax,$$

de unde

$$x(a - 1) = a.$$

Se observă că această ecuație admite o soluție $x \in \mathbf{Z}$ dacă și numai dacă $a = 0$ sau $a = 2$. Elementele simetrizabile sînt 0 și 2, $0' = 0$ și $2' = 2$.

Când \mathbf{Z} se înlocuiește cu \mathbf{Q} , elementele simetrizabile sînt toate numerele raționale $a \neq 1$.

R — 2 Fie d un număr întreg liber de pătrate și

$$H = \left\{ A \in M_2(\mathbf{Q}) \mid A = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{Q}, a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0 \right\}.$$

- 1) H este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.
- 2) Orice matrice $A \in H$ este inversabilă (simetrizabilă) în raport cu operația indusă.

Soluție. 1) Fie $A, B \in H$. $A = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & db' \\ b' & a' \end{pmatrix}$.

Avem:

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + dbb' & d(ba' + ab') \\ ba' + ab' & aa' + dbb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & db'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$$

unde $a'' = aa' + dbb' \in \mathbf{Q}$, $b'' = ba' + ab' \in \mathbf{Q}$. Pentru a avea $AB \in H$ este suficient să arătăm că $a'' \neq 0$ sau $b'' \neq 0$. Dacă $a'' = 0$ și $b'' = 0$ atunci $x = a'$ și $y = b'$ este o soluție nebanală a sistemului omogen:

$$(*) \begin{cases} ax + dby = 0, \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Determinantul matricii acestui sistem este egal cu $a^2 - db^2$. Cum d este liber de pătrate și $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, rezultă că $a^2 - db^2 \neq 0$ căci altfel $\sqrt{d} \in \mathbf{Q}$. Contradicție. Dar din $a^2 - db^2 \neq 0$ rezultă că singura soluție a sistemului (*) este $x = y = 0$. Rămâne adevărat că $a'' \neq 0$ sau $b'' \neq 0$, deci $AB \in H$.

2) Se observă că matricea unitate $E \in H$ și fie $A \in H$. Să arătăm că există o matrice $X \in H$.

$$X = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{Q}, x \neq 0 \text{ sau } y \neq 0$$

astfel încât $XA = AX = E$. Avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E = AX = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + dby & d(bx + ay) \\ bx + ay & ax + dby \end{pmatrix}$$

ceea ce este echivalent cu sistemul liniar:

$$(**) \begin{cases} ax + dby = 1, \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului (**) este $a^2 - db^2 \neq 0$ și unica soluție este $x = a/(a^2 - db^2)$, $y = -b/(a^2 - db^2)$.

Cum $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, rezultă $x \neq 0$ sau $y \neq 0$. Așadar:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - db^2} & \frac{-db}{a^2 - db^2} \\ \frac{-b}{a^2 - db^2} & \frac{a}{a^2 - db^2} \end{pmatrix} \in H.$$

Se verifică și egalitatea $XA = E$, deci A^{-1} există și $A^{-1} = X \in H$.

§ 8. PROPRIETĂȚI ALE ADUNĂRII ȘI ÎNMULȚIRII MODULO n

În capitolul I, § 1, au fost enumerate proprietățile adunării și înmulțirii numerelor întregi.

Anume, cu terminologia adoptată în capitolul de față, adunarea numerelor întregi,

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \rightarrow x + y$$

este asociativă, comutativă, admite pe 0 ca element neutru și orice număr întreg admite opus.

De asemenea, înmulțirea numerelor întregi

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \rightarrow xy,$$

este asociativă, comutativă și admite pe 1 ca element neutru.

În fine, înmulțirea numerelor întregi este *distributivă* față de adunare:

$$x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{Z}.$$

Fie $n > 0$ un număr întreg. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ am definit *suma modulo n* a lui a cu b , notată cu $a \oplus b$ și *produsul modulo n* al lui a cu b , notat cu $a \otimes b$ ca fiind restul împărțirii prin n al numărului $a + b$, respectiv ab :

$$a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} (a + b) \bmod n, \quad a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} (ab) \bmod n.$$

S-au obținut astfel două legi de compoziție pe \mathbf{Z} ,

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (a, b) \rightarrow a \oplus b \quad \text{și} \quad \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (a, b) \rightarrow a \otimes b$$

numite *adunarea modulo n* , respectiv *înmulțirea modulo n* .

Ne propunem în continuare să studiem proprietățile acestora. Un rezultat util pentru acest studiu este următorul

8.1. **L e m ă.** Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Atunci oricare ar fi $h, k \in \mathbf{Z}$ avem:

$$(a + nh) \oplus (b + nk) = a \oplus b$$

și

$$(a + nh) \otimes (b + nk) = a \otimes b.$$

Demonstrație. Pentru orice h și $k \in \mathbf{Z}$ avem:

$$(a + nh) + (b + nk) = (a + b) + n(h + k)$$

și

$$(a + nh)(b + nk) = ab + n(ak + bh + nhk).$$

Rezultă că numerele $(a + nh) + (b + nk)$ și $a + b$ dau același rest prin împărțirea cu n , deci

$$(a + nh) \oplus (b + nk) = a \oplus b$$

și, de asemenea, numerele $(a + nh)(b + nk)$ și ab dau același rest prin împărțirea cu n , deci

$$(a + nh) \otimes (b + nk) = a \otimes b.$$

8.2. **T e o r e m ă.** Operațiile de adunare și înmulțire modulo n au proprietățile:

- 1) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$,
- 2) $a \oplus b = b \oplus a$,
- 3) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$,
- 4) $a \otimes b = b \otimes a$,
- 5) $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$

oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

Demonstrație. 1). Cum $a \oplus b$ este restul împărțirii lui $a + b$ prin n , există $q \in \mathbf{Z}$ astfel încât

$$a + b = nq + (a \oplus b).$$

Din lema precedentă rezultă:

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b) \oplus c = ((a + b) + c) \text{ mod } n.$$

De asemenea:

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c) = (a + (b + c)) \text{ mod } n.$$

Dar $(a + b) + c = a + (b + c)$, de unde $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

4) Avem:

$$a \otimes b = (ab) \text{ mod } n = (ba) \text{ mod } n = b \otimes a.$$

5) Aplicând lema 8.1 avem:

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= a \otimes (b + c) = (a(b + c)) \text{ mod } n = (ab + ac) \text{ mod } n = \\ &= ab \oplus ac = a \otimes b \oplus a \otimes c. \end{aligned}$$

Proprietatea 2) se demonstrează ca 4), iar 3) ca 1).

Să observăm că adunarea modulo n nu admite element neutru. În adevăr, să presupunem că $0 \in \mathbf{Z}$ este astfel încât $0 \oplus a = a \oplus 0 = a, \forall a \in \mathbf{Z}$. Dacă $a \in \mathbb{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, atunci $0 \oplus a \neq a$ pentru că $0 \oplus a \in \mathbb{R}_n$. Contradicție.

Analog se arată că înmulțirea modulo n nu admite element neutru. Așa cum s-a mai observat, avem:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_n \Rightarrow a \oplus b \in \mathbb{R}_n, a \otimes b \in \mathbb{R}_n.$$

Putem deci considera operațiile induse pe \mathbb{R}_n de către operațiile de adunare și înmulțire modulo n ,

$$\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n, \quad (a, b) \rightarrow a \oplus b$$

respectiv

$$\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n, \quad (a, b) \rightarrow a \otimes b.$$

Aceste operații au evident proprietățile 1)–5) din enunțul Teoremei 8.2 (v. Remarca 5.2). Cum:

$$0 \oplus a = a \oplus 0 = a, \quad 1 \otimes a = a \otimes 1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}_n$$

rezultă că numerele 0 și 1 sînt elemente neutre pentru operațiile induse pe \mathbb{R}_n de către adunarea modulo n , respectiv înmulțirea modulo n .

În fine, să mai observăm că

$$a \oplus (n - a) = (n - a) \oplus a = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}_n$$

și cum $n - a \in \mathbb{R}_n$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_n, a \neq 0$, rezultă că orice element $a \in \mathbb{R}_n$ este simetrizabil în raport cu operația indusă pe \mathbb{R}_n de către adunarea modulo n , simetricul (opusul) lui a fiind $n - a$ dacă $a \neq 0$ și 0 dacă $a = 0$.

Fie $n = 6$. Tablele operațiilor induse pe $\mathbb{R}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de către adunarea și înmulțirea modulo 6 sînt:

\oplus	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabla adunării modulo 6

\otimes	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Tabla înmulțirii modulo 6

Faptul că operația indusă pe \mathbb{R}_6 de adunarea modulo 6 este comutativă și că admite pe 0 ca element neutru se constată și pe tabla acesteia. Folosind notația aditivă pentru simetric, se constată de asemenea că:

$$-0 = 0, \quad -1 = 5, \quad -2 = 4, \quad -3 = 3, \quad -4 = 2, \quad -5 = 1$$

căci

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 5 = 0, \quad 2 \oplus 4 = 0, \quad 3 \oplus 3 = 0.$$

Elementele din \mathfrak{R}_6 simetrizabile în raport cu operația indusă de înmulțirea modulo 6 sînt 1 și 5. Folosind în acest caz notația multiplicativă pentru simetric, avem:

$$1^{-1} = 1,$$

$$5^{-1} = 5$$

căci $1 \otimes 1 = 1, \quad 5 \otimes 5 = 1.$

Remarcă. Operația „ \otimes ” are prioritate față de „ \oplus ” și de aceea într-o expresie ca $(c \otimes b) \oplus c$ parantezele pot fi omise, scriind simplu $a \otimes b \oplus c$.

Exerciții rezolvate

R - 1 Găsiți soluțiile din \mathfrak{R}_6 ale ecuațiilor:

1) $5 \otimes x \oplus 2 = 4,$

2) $3 \otimes x \oplus 4 = 4,$

3) $2 \otimes x \oplus 3 = 2,$

unde „ \oplus ” și „ \otimes ” sînt simbolurile adunării și înmulțirii modulo 6.

Soluție. 1) Cum $5 \otimes x \oplus 2 \oplus 4 = 4 \oplus 4$ iar $2 \oplus 4 = 0$ și $4 \oplus 4 = 2$, rezultă că

$$5 \otimes x = 2.$$

Din tabla înmulțirii modulo 6 rezultă că $x = 4$. Același rezultat se obține observînd că 5 este simetrizabil în raport cu „ \otimes ” și $5^{-1} = 5$. Deducem:

$$x = 1 \otimes x = (5 \otimes 5) \otimes x = 5 \otimes (5 \otimes x) = 5 \otimes 2 = 4.$$

2) Cum $3 \otimes x \oplus 4 \oplus 2 = 4 \oplus 2$, rezultă că $3 \otimes x = 0$.

Din tabla înmulțirii modulo 6, găsim pentru x valorile $x_1 = 0, x_2 = 2$ și $x_3 = 4$ (O ecuație de grad 1 admite trei soluții!).

3) Cum $2 \otimes x \oplus 3 \oplus 3 = 2 \oplus 3$, rezultă $2 \otimes x = 5$. Din tabla înmulțirii modulo 6 se constată că nu există $x \in \mathfrak{R}_3$ astfel încît $2 \otimes x = 5$. Așadar ecuația 3) nu admite soluții.

R - 2 1) Rezolvați în \mathfrak{R}_5 ecuația $2 \otimes x \oplus 3 = 2$.

2) Arătați că ecuația $a \otimes x \oplus b = 0$ cu $a, b \in \mathfrak{R}_5, a \neq 0$, admite o soluție unică în \mathfrak{R}_5 .

Soluție. 1) Adunînd la fiecare termen al ecuației opusul lui 3 în raport cu adunarea modulo 5 pe \mathfrak{R}_5 , se obține:

$$2 \otimes x \oplus 3 \oplus 2 = 2 \oplus 2,$$

deci

$$2 \otimes x = 4.$$

Din tabla înmulțirii modulo 5 pe \mathfrak{R}_5 se constată că 2 este simetrizabil și simetricul lui 2 în raport cu această operație este 3. Înmulțind cu 3 ecuația $2 \otimes x = 4$ se obține

$$3 \otimes 2 \otimes x = 3 \otimes 4$$

și cum $3 \otimes 2 = 1, 3 \otimes 4 = 2$, deducem că $x = 2$.

2) Consultând tablele înmulțirii și adunării modulo 5 pe $\mathcal{R}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (v. § 3) se constată că toate elementele $b \in \mathcal{R}_5$ sunt simetrizabile în raport cu adunarea modulo 5 și că toate elementele $a \in \mathcal{R}_5, a \neq 0$, sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea modulo 5. Așadar etapele de rezolvare de la pct. 1) pot fi parcurse și pe cazul general $a \otimes x \oplus b = 0, a \neq 0$, deci ecuația $a \otimes x \oplus b = 0$ are cel puțin o soluție în \mathcal{R}_5 .

Fie $x_1, x_2 \in \mathcal{R}_5$, astfel încât $a \otimes x_1 \oplus b = 0$ și $a \otimes x_2 \oplus b = 0$. Atunci avem:

$$a \otimes x_1 \oplus b = a \otimes x_2 \oplus b.$$

Adunând opusul lui b la fiecare termen al egalității precedente obținem

$$a \otimes x_1 = a \otimes x_2$$

și înmulțind termenii acestei ultime egalități cu simetricul lui a în raport cu înmulțirea modulo 5 se obține $x_1 = x_2$.

Exerciții

1. Să se alcătuiască tablele operațiilor induse pe $\mathcal{R}_4 = \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbf{Z}$ de adunarea și înmulțirea modulo 4.
2. Arătați că mulțimea $H = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbf{Z}$ este stabilă față de legea de compoziție $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \rightarrow |x - y|$ și să se alcătuiască tabla operației induse.
3. Arătați că orice submulțime $H \neq \emptyset$ a lui \mathbf{R} este stabilă în raport cu fiecare din legile de compoziție

$$x \perp \beta \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, \beta\}; \quad x \top \beta \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x, \beta\}, \quad \forall x, \beta \in \mathbf{R}.$$

Alcătuiți tablele operațiilor induse pe $H = \{x, \beta, \gamma\}$, unde

$$x = \sqrt{5}, \quad \beta = \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad \gamma = \sqrt[3]{3 + \sqrt{2}}.$$

4. Fie $H = \{a \in \mathbf{N} \mid a \mid 12\}$. Arătați că H este o parte stabilă a lui \mathbf{N} în raport cu fiecare din legile de compoziție:

$$a \perp b \stackrel{\text{def}}{=} \text{c.m.m.d.c.}\{a, b\}, \quad a \top b \stackrel{\text{def}}{=} \text{c.m.m.m.c.}\{a, b\}, \quad \forall a, b \in \mathbf{N}.$$

Alcătuiți tablele operațiilor induse.

5. Pentru care valori ale parametrului real λ intervalul $(2, \infty)$ este o parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu legea de compoziție

$$x * y \stackrel{\text{def}}{=} xy - 2x - 2y + \lambda, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

6. Fie $E = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\}$ și $f_i: E \rightarrow E, 1 \leq i \leq 3$, definite astfel:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = (x + \sqrt{3})/(1 - x\sqrt{3}), \quad f_3(x) = (x - \sqrt{3})/(1 + x\sqrt{3}), \quad \forall x \in E.$$

Arătați că $H = \{f_1, f_2, f_3\}$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor și alcătuiți tabla operației induse.

7. Pe \mathbf{R} definim legea de compoziție $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + xy$. Arătați că această lege de compoziție este asociativă, comutativă și cu element neutru. Intervalul $[-1, \infty)$ este o parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu legea de compoziție „*“.

8. Arătați că legile de compoziție de la ex. 3 sunt asociative și comutative. Studiați existența elementului neutru pentru operațiile induse pe intervalele $[a, *b], [a, b), (a, b], (a, b)$ unde $a, b \in \mathbf{R}, a < b$.

9. Arătați că legile de compoziție definite pe \mathbf{N} la ex. 4 sunt asociative și comutative. Studiați existența elementului neutru pentru aceste legi de compoziție și pentru operațiile induse pe $H = \{a \in \mathbf{N} \mid a \mid 12\}$.

10. Fie $M \cong \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Pe mulțimea M introducem legile de compoziție:

$$(x, y) + (z, w) \stackrel{\text{def}}{=} (x + z, y + w),$$

$$(x, y)(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} (xz + yw, xw + yz)$$

oricare ar fi perechile (x, y) și (z, w) din M . Arătați că aceste legi de compoziție sunt asociative, comutative și cu element neutru.

11. Fie $M = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, unde $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Pe mulțimea M introducem următoarele legi de compoziție:

$$(x, y) + (z, w) \stackrel{\text{def}}{=} (xw + yz, yw),$$

$$(x, y)(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} (xz, yw)$$

oricare ar fi perechile (x, y) și (z, w) din M . Arătați că aceste legi de compoziție sunt asociative, comutative și cu element neutru.

12. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Pe \mathbf{Z} definim legea de compoziție „*“.

$$x * y \stackrel{\text{def}}{=} axy + b(x + y) + c, \quad \forall x, y \in \mathbf{Z}.$$

- 1) Arătați că „*“ este lege de compoziție asociativă dacă și numai dacă

$$b^2 - b - ac = 0.$$

- 2) Când $b^2 - b - ac = 0$ legea de compoziție „*“ are element neutru dacă și numai dacă $b \mid c$.

13. Pe mulțimea \mathbf{N} a numerelor naturale definim legea de compoziție „*“.

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \quad (m, n) \rightarrow m * n \stackrel{\text{def}}{=} m^n.$$

- 1) Cercetați proprietățile acestei legi de compoziție.
2) Determinați tripletele (m, n, p) de numere naturale diferite de 0 astfel încât

$$(m * n) * p = m * (n * p).$$

14. Pe \mathbf{R} se definește legea de compoziție „*“.

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def}}{=} xy + 2ax + by.$$

Determinați a și b astfel încât legea de compoziție „*“ să fie comutativă și asociativă.

15. Pe \mathbf{R} se definește legea de compoziție „*“.

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def}}{=} xy - x - y + 2.$$

Cercetați existența elementului neutru.

16. Fie M mulțimea matricelor $A \in M_2(\mathbf{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Arătați:

- 1) $A, B \in M \Rightarrow AB \in M$;
- 2) Nu există $U \in M$ astfel încât $UA = A, \forall A \in M$;
- 3) Există o infinitate de matrice $V \in M$ astfel încât $AV = A, \forall A \in M$.

- Admite element neutru operația indusă pe M de înmulțirea matricelor?
17. Pe $\mathbf{R}^* = \{a \in \mathbf{R} \mid a \neq 0\}$ definim legile de compoziție:

$$a \perp b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a+b}{2} \quad (\text{media aritmetică})$$

$$a \top b \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{ab} \quad (\text{media geometrică})$$

$$a \Delta b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{media armonică})$$

$$\forall a, b \in \mathbf{R}^*,$$

Arătați că aceste legi de compoziție sunt comutative și nu sunt asociative. Admite element neutru?

18. Pe $M_2(\mathbf{R})$ se definește legea de compoziție „ \star ”

$$A \star B \stackrel{\text{def}}{=} AB + BA, \quad \forall A, B \in M_2(\mathbf{R}).$$

Studiați dacă legea de compoziție „ \star ” este asociativă (comutativă). Admite element neutru?

19. Determinați părțile stabile finite ale lui \mathbf{Z} în raport cu înmulțirea. Este $\mathbf{R}^* \setminus \mathbf{Q}$ parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu adunarea și (înmulțirea)?

20. Fie H mulțimea numerelor reale de forma $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbf{Q}$ ce satisfac condiția $a^2 - 2b^2 = 1$. Arătați că H este o parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu înmulțirea și că toate numerele din H sunt simetrizabile în raport cu operația indusă.

21. Fie M mulțimea matricelor $A \in M_2(\mathbf{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

1) Dacă $A, B \in M$, atunci $AB \in M$.

2) Care sunt elementele simetrizabile ale lui M în raport cu operația indusă?

22. Determinați elementele simetrizabile în raport cu înmulțirea modulo 12 din \mathcal{R}_{12} .

23. Examinând tabla înmulțirii modulo 8, deduceți că pentru ecuația $a \otimes x \oplus b = 0$, cu $a, b \in \mathcal{R}_8$, $a \neq 0$, sunt posibile numai cazurile:

- 1) nu are nici o soluție în \mathcal{R}_8 ;
- 2) are o singură soluție în \mathcal{R}_8 ;
- 3) are două soluții în \mathcal{R}_8 ;
- 4) are patru soluții în \mathcal{R}_8 .

Dăți câte un exemplu de astfel de ecuație pentru fiecare tip.

24. Găsiți toate soluțiile din \mathcal{R}_{12} ale sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} 3 \otimes x \oplus 1 \otimes y = 11, \\ 4 \otimes x \oplus 9 \otimes y = 10. \end{cases}$$

* * *

25. Fie $n > 0$ un număr întreg și

$$M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}, (a, n) = 1\}.$$

- 1) Dacă $(a, b), (c, d) \in M \Rightarrow (ac, ad + bc) \in M$;
- 2) Legea de compoziție „ \star ” definită prin M prin:

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc)$$

este comutativă și asociativă.

- 3) Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.

26*. Pe o mulțime M se dă o lege de compoziție asociativă

$$M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow xy.$$

Presupunem că $\exists a \in M$ astfel încât $y \in aMa = \{axa \mid x \in M\}, \forall y \in M$.

Arătați că o asemenea lege de compoziție admite element neutru.

27*. Fie „ \top ” și „ \perp ” două legi de compoziție pe mulțimea M , cu elemente neutre e respectiv e' . Dacă oricare ar fi $x, y, u, v \in M$ avem :

$$(x \top y) \perp (u \top v) = (x \perp u) \top (y \perp v),$$

atunci :

1) $e = e'$.

2) $x \top y = x \perp y,$

$\forall x, y \in M.$

3) $x \perp y = y \perp x,$

$\forall x, y \in M.$

28*. Fie M o mulțime cu trei elemente.

1) Câte legi de compoziție se pot defini pe M ?

2) Câte dintre acestea sunt comutative?

3) Câte admit element neutru?

Generalizare.

29*. Pe mulțimea punctelor unui plan Π definim legea de compoziție $\varphi : \Pi \times \Pi \rightarrow \Pi$

$\varphi(A, B) = C \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} C$ este simetricul lui A în raport cu B .

1) Arătați că φ nu este asociativă și nici comutativă.

2) Raportând punctele planului la un reper x_1Ox_2 , arătați că mulțimea H a punctelor planului de coordonate întregi este inclusă în orice parte stabilă T a lui Π în raport cu φ care conține punctele de coordonate $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$.

30*. Fie M mulțimea tuturor secvențelor de opt litere din alfabetul latin, numite *cuvinte* de lungime 8 peste alfabetul latin. Dacă $\alpha, \beta \in M$, definim cuvintele $\alpha * \beta$ și $\alpha \circ \beta$ astfel : $\alpha * \beta$ este cuvântul format cu primele 5 litere ale lui α urmate de ultimele trei litere ale lui β , iar $\alpha \circ \beta$ este cuvântul format din ultimele 4 litere ale lui α urmate de primele patru litere ale lui β . Astfel, dacă $\alpha = \text{aartbbcd}$ și $\beta = \text{esttrabb}$, atunci $\alpha * \beta = \text{aartbabb}$ și $\alpha \circ \beta = \text{bbcdestt}$. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă, iar „ \circ ” nu este asociativă. Studiați comutativitatea.

§ 1. MONOIZI

Algebra modernă are ca subiect studiul structurilor algebrice. Prin *structură algebrică* se înțelege o mulțime nevidă M înzestrată cu una sau mai multe legi de compoziție φ, ψ, \dots , care satisfac o listă specifică de proprietăți, numite *axiomele* structurii.

Prima structură algebrică pe care o introducem este structura de monoid. Prin *monoid* se înțelege un cuplu (M, φ) format cu o mulțime nevidă M și o lege de compoziție definită pe M , $\varphi: M \times M \rightarrow M$, asociativă și cu element neutru. Se mai spune că M este (formează) monoid în raport cu operația φ .

Mai sistematic, folosind de exemplu notația „ $*$ ” pentru legea de compoziție, definiția monoidului se poate da astfel:

1.1. *Definiție.* O mulțime nevidă M este monoid în raport cu o lege de compoziție definită pe M ,

$$M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x*y$$

dacă sunt satisfăcute următoarele axiome

$$M_1) \quad (x*y)*z = x*(y*z), \quad \forall x, y, z \in M;$$

$$M_2) \quad \exists e \in M \text{ astfel încât } e*x = x*e = x, \quad \forall x \in M.$$

Dacă pentru legea de compoziție φ a monoidului se folosește una din notațiile „ $*$ ”, „ $+$ ”, „ \cdot ” etc. atunci în loc de (M, φ) scriem $(M, *)$, $(M, +)$, (M, \cdot) etc.

Adesea cuplul (M, φ) se notează tot cu M ; în acest caz M se interpretează fie ca fiind cuplul (M, φ) , fie ca fiind mulțimea suport (subiacentă) a structurii de monoid.

Ansamblul de condiții M_1, M_2 poartă numele de *axiomele monoidului*. Elementul $e \in M$ care satisface axioma M_2 este unic determinat (v. Teorema 6.2, Cap. II) și se numește *elementul neutru* al monoidului M .

Vom nota cu $U(M)$ mulțimea elementelor lui M simetrizabile în raport cu operația acestuia. Când M este dat în notație multiplicativă, elementele din $U(M)$ se mai numesc încă și *unități* ale monoidului M .

Spunem că monoidul M este *comutativ* dacă operația acestuia satisface și axioma:

$$M_3) \quad x*y = y*x, \quad \forall x, y \in M.$$

Exemple

1. Adunarea numerelor este asociativă, comutativă și admite pe 0 ca element neutru. Rezultă că $(\mathbf{N}, +)$ este monoid comutativ, numit *monoidul aditiv* al numerelor naturale. De asemenea, (\mathbf{N}, \cdot) este monoid comutativ, numit *monoidul multiplicativ* al numerelor naturale.

2. Fie E o mulțime și $\mathfrak{E}(E)$ mulțimea tuturor părților lui E .

Cum :

$$M_1) \quad (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{E}(E)$$

$$M_2) \quad \emptyset \cup X = X \cup \emptyset = X, \quad \forall X \in \mathfrak{E}(E)$$

$$M_3) \quad X \cup Y = Y \cup X, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{E}(E)$$

rezultă că $(\mathfrak{E}(E), \cup)$ este monoid comutativ.

Analog, $(\mathfrak{E}(E), \cap)$ este monoid comutativ.

3. Fie E o mulțime și $\mathfrak{F}(E)$ mulțimea tuturor funcțiilor $f: E \rightarrow E$. Cum

$$M_1) \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \quad \forall f, g, h \in \mathfrak{F}(E)$$

$$M_2) \quad 1_E \circ f = f \circ 1_E = f, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(E)$$

rezultă că $\mathfrak{F}(E)$ formează monoid în raport cu operația de compunere. Dacă E are cel puțin două elemente, atunci $(\mathfrak{F}(E), \circ)$ nu este monoid comutativ (v. tabla operației lui $\mathfrak{F}(E)$ când $E = \{1, 2\}$; Cap. II, § 3).

Să observăm că într-un monoid M sunt adevărate toate rezultatele obținute în Cap. II în legătură cu elementele simetrizabile.

Dacă $a \in M$ definim inductiv *puterile* lui a cu exponenți numere naturale astfel :

$$a^0 = e, \quad a^1 = a, \quad a^2 = aa, \quad a^3 = a^2a, \dots, \quad a^n = a^{n-1}a, \dots$$

sau mai condensat prin

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e & \text{dacă } n = 0, \\ a^{n-1} \cdot a & \text{dacă } n > 0. \end{cases}$$

1.2. **T e o r e m ă.** Oricare ar fi numerele naturale m și n avem :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că pentru m fixat, afirmațiile din enunț sunt adevărate oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. Cum

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot e = a^m = a^{m+0}$$

și

$$(a^m)^0 = e = a^0 = a^{m \cdot 0},$$

afirmațiile din enunț sunt adevărate pentru $n = 0$.

Presupunem că $n > 0$ și că afirmațiile din enunț sunt adevărate pentru $n - 1$. Atunci :

$$a^m a^n = a^m (a^{n-1} \cdot a) = (a^m \cdot a^{n-1}) a = a^{m+n-1} a = a^{m+n}$$

și

$$(a^m)^n = (a^m)^{n-1} \cdot a^m = a^{m(n-1)} \cdot a^m = a^{m(n-1)+m} = a^{mn}$$

Analog, dacă legea de compoziție a monoidului M este dată aditiv, definim multiplii na ai lui a , cu $n \in \mathbb{N}$, astfel :

$$na \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 0 \\ (n-1)a + a & \text{dacă } n > 0. \end{cases}$$

Rezultatul din teorema precedentă se transcrie aditiv astfel :

$$ma + na = (m+n)a, \quad n(ma) = (nm)a \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Exerciții rezolvate

R - 1 Fie M mulțimea tuturor matricilor $A \in M_2(\mathbb{Z})$ de forma :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

- 1) Să se arate că M este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că formează monoid în raport cu operația indusă.
- 2) Determinați elementele simetrizabile ale monoidului M .

Soluție. 1) Fie $A, B \in M(\mathbb{Z})$.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Avem :

$$AB = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & av + cv \\ 0 & bv \end{pmatrix} \in M.$$

Rezultă că M este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Cum

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$$

rezultă că operația indusă pe M admite element neutru, anume pe E . Operația indusă este și asociativă căci înmulțirea matricelor este asociativă. Rezultă că (M, \cdot) este monoid.

2) Presupunem că $A \in U(M)$. Atunci există $B \in M$ astfel încât $AB = BA = E$.

Cum

$$1 = \det(E) = \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

și $\det(A), \det(B)$ sunt numere întregi, rezultă că $\det(A) = \pm 1$, deci

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Cum $a, b \in \mathbb{Z}$ rezultă că $ab = 1$ dacă $a = 1, b = 1$ sau $a = -1, b = -1$ și $ab = -1$ dacă $a = 1, b = -1$ sau $a = -1, b = 1$. Așadar, dacă $A \in U(M)$ atunci A este egală cu una din matricile:

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{Z}$$

Reciproc, matricile din lista precedentă sunt elemente inversabile ale monoidului M , inversele lor fiind respectiv matricile:

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{Z}$$

după cum ușor se poate verifica.

R - 2 Fie E o mulțime nevidă și $f \in \mathcal{F}(E)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- f este element simetrizabil al monoidului $(\mathcal{F}(E), \circ)$;
- f este funcție bijectivă.

Enumerați elementele simetrizabile ale monoidului $(\mathcal{F}(E), \circ)$, unde $E = \{1, 2, 3\}$.

Soluție. a) \Rightarrow b). Cum f este element simetrizabil, există $g \in \mathcal{F}(E)$ astfel încât

$$f \circ g = g \circ f = 1_E.$$

Rezultă că f este funcție bijectivă (v. Ex. R-1, Cap. I).

b) \Rightarrow a). Cum $f: E \rightarrow E$ este funcție bijectivă, pentru orice $y \in E$ există $x \in E$ unic determinat astfel încât $y = f(x)$. Definim $g: E \rightarrow E$ prin:

$$g(y) \stackrel{\text{def}}{=} x \Leftrightarrow f(x) = y, \quad \forall y \in E.$$

Avem

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = 1_E(y), \quad \forall y \in E,$$

și

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = 1_E(x), \quad \forall x \in E,$$

de unde

$$f \circ g = g \circ f = 1_E$$

deci f este element simetrizabil al monoidului $(\mathcal{F}(E), \circ)$.

Preșupunem că $E = \{1, 2, 3\}$ și $f \in \mathcal{F}(E)$. Cu convenția de la § 3, cap. II, funcția f se poate da prin:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$

Evident, $\mathcal{F}(E)$ are $3 \times 3 \times 3 = 27$ elemente, f fiind simetrizabil (\equiv bijectiv) dacă și numai dacă valorile sale $f(1), f(2), f(3)$ reproduc, într-o ordine arbitrară, numerele 1, 2, 3. Avem deci $3! = 6$ elemente simetrizabile, anume:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Așadar $U(\mathcal{F}(E)) = \{\epsilon, \sigma, \pi, \alpha, \beta, \gamma\}$.

§ 2 DEFINIȚIA GRUPULUI
EXEMPLE

Noțiunea de grup ocupă un loc central printre structurile algebrice. Teoria grupurilor are în esență o sursă unică: studiul, în raport cu operația de compunere, al funcțiilor bijectivă ale unei mulțimi în ea însăși.

Definiția noțiunii de grup se dă imediat cu ajutorul celei de monoid: un monoid G cu proprietatea că orice element $x \in G$ este simetrizabil (în raport cu operația acestuia) se numește grup. Mai precis:

2.1. Definiție. Un cuplu $(G, *)$ format cu o mulțime nevidă G și cu o lege de compoziție pe G ,

$$G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y$$

se numește grup dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

$$G_1) \quad (x * y) * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in G;$$

$$G_2) \quad \exists e \in G \quad \text{astfel încât} \quad e * x = x * e = x, \quad \forall x \in G;$$

$$G_3) \quad \forall x \in G, \exists x' \in G \quad \text{astfel încât} \quad x' * x = x * x' = e.$$

Elementul $e \in G$, a cărui existență este asigurată de axioma G_2 , este unic determinat (v. Teorema 6.2, Cap. II) și se numește *elementul neutru* al grupului G . Elementul x' a cărui existență este asigurată de axioma G_3 pentru orice $x \in G$, este unic determinat (v. § 7, Cap. II) și se numește *simetricul* lui x ; în notația multiplicativă punem $x' = x^{-1}$, iar în notația aditivă punem $x' = -x$, numit *inversul*, respectiv *opusul* lui x .

Ansamblul de condiții G_1 , G_2 și G_3 poartă numele de *axiomele grupului*. Dacă în plus este satisfăcută și axioma:

$$G_4) \quad x * y = y * x, \quad \forall x, y \in G,$$

atunci cuplul $(G, *)$ se numește *grup abelian* sau *grup comutativ*.

Exemple

1. Grupul permutărilor de 3 obiecte. Fie $E = \{1, 2, 3\}$.

Să notăm cu \mathfrak{S}_3 mulțimea tuturor funcțiilor bijectivă de la E la E . Folosind convenția de la § 3, Cap. II, acestea pot fi descrise astfel:

$$1_E = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

deci $\mathfrak{S}_3 = \{e, \sigma, \pi, \alpha, \beta, \gamma\}$.

Cum compusa a două funcții bijective este o funcție bijectivă (v. Teorema 2.2, Cap. 1) rezultă că \mathfrak{S}_3 este o parte stabilă a lui $\mathfrak{S}(E)$ în raport cu compunerea funcțiilor.

Să alcătuim tabla operației induse pe \mathfrak{S}_3 de către compunerea funcțiilor, operație numită *compunerea permutărilor* de trei obiecte.

\circ	e	σ	π	α	β	γ
e	e	σ	π	α	β	γ
σ	σ	π	e	γ	α	β
π	π	e	σ	β	γ	α
α	α	β	γ	e	σ	π
β	β	γ	α	π	e	σ
γ	γ	α	β	σ	π	e

Tabla grupului \mathfrak{S}_3 .

Avem, de exemplu, $\sigma \circ \alpha = \gamma$. În adevăr,

$$(\sigma \circ \alpha)(1) = \sigma(\alpha(1)) = \sigma(1) = 2 = \gamma(1),$$

$$(\sigma \circ \alpha)(2) = \sigma(\alpha(2)) = \sigma(3) = 1 = \gamma(2),$$

$$(\sigma \circ \alpha)(3) = \sigma(\alpha(3)) = \alpha(2) = 3 = \gamma(3)$$

de unde $\sigma \circ \alpha = \gamma$.

Cum compunerea funcțiilor este asociativă și $1_E = e \in \mathfrak{S}_3$, rezultă că (\mathfrak{S}_3, \circ) este monoid. Se observă pe tabla operației lui \mathfrak{S}_3 că orice element din \mathfrak{S}_3 este simetrizabil, anume:

$$e^{-1} = e, \quad \sigma^{-1} = \pi, \quad \pi^{-1} = \sigma, \quad \alpha^{-1} = \alpha, \quad \beta^{-1} = \beta, \quad \gamma^{-1} = \gamma.$$

Rezultă că (\mathfrak{S}_3, \circ) este grup, numit *grupul permutărilor* de trei obiecte sau încă *grupul simetric* de grad 3. Din tabla operației lui \mathfrak{S}_3 rezultă că acesta nu este grup comutativ.

Analog, dacă $n > 1$ și $E = \{1, 2, \dots, n\}$ atunci mulțimea \mathfrak{S}_n a funcțiilor bijective de la E la E formează grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor; (\mathfrak{S}_n, \circ) se numește *grupul permutărilor* de n obiecte sau *grupul simetric* de grad n .

2. *Grupul lui Klein*. Fie $E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ și $\mathcal{K} = \{1_E, u, v, w\}$, unde u, v și w sunt următoarele funcții de la E la E (v. fig. III.1):

$$u: E \rightarrow E, \quad u(x) = (x_1, -x_2),$$

$$v: E \rightarrow E, \quad v(x) = (-x_1, x_2),$$

$$w: E \rightarrow E, \quad w(x) = (-x_1, -x_2),$$

oricare ar fi $x = (x_1, x_2) \in E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

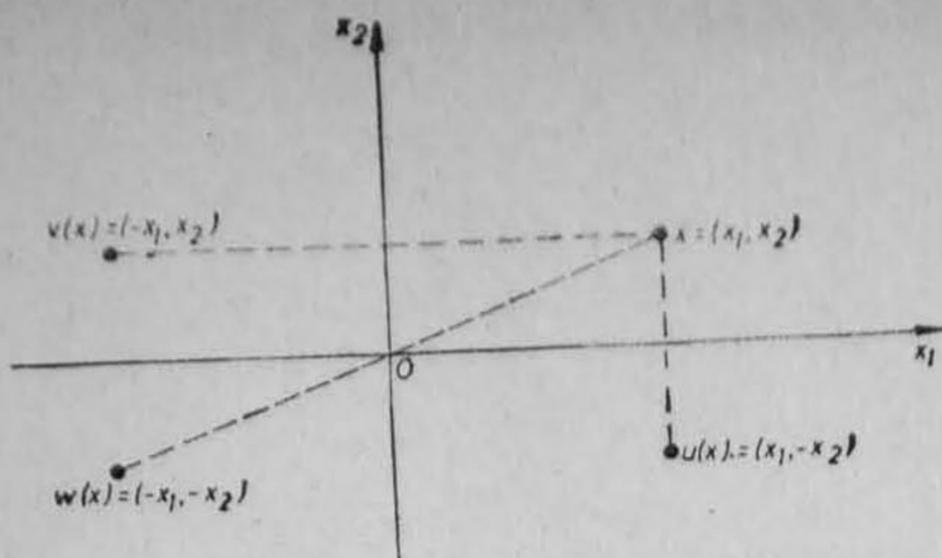


Fig. III.1.

Dacă compunem două funcții din \mathfrak{K} se obține tot o funcție din \mathfrak{K} . De exemplu avem $u \circ v = w$. În adevăr, pentru orice $x \in E$, $x = (x_1, x_2)$, avem:

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u((-x_1, x_2)) = (-x_1, -x_2) = w(x),$$

de unde $u \circ v = w$. Să alcătuim tabla operației indusă pe \mathfrak{K} de către compunerea funcțiilor din $\mathfrak{F}(E)$.

\circ	1_E	u	v	w
1_E	1_E	u	v	w
u	u	1_E	w	v
v	v	w	1_E	u
w	w	v	u	1_E

Tabla grupului Klein.

Cum compunerea funcțiilor este asociativă și $1_E \in \mathfrak{K}$, rezultă ca (\mathfrak{K}, \circ) este monoid. Se observă pe tabla operației lui \mathfrak{K} că orice element din \mathfrak{K} este simetrizabil, anume:

$$1_E^{-1} = 1_E, u^{-1} = u, v^{-1} = v, w^{-1} = w.$$

Așadar (\mathfrak{K}, \circ) este grup, numit *grupul lui Klein*. Din tabla operației, se deduce că grupul lui Klein este comutativ. Să observăm că elementele grupului \mathfrak{K} sunt funcții bijective. Aceasta se poate verifica direct sau observând că $u \circ u = 1_E$, $v \circ v = 1_E$, $w \circ w = 1_E$ și aplicând apoi rezultatul de la Ex. B-1, Cap. I.

3. Grupul (\mathfrak{R}_n, \oplus) al resturilor modulo n . Fie $n = 4$ și $\mathfrak{R}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Se știe că \mathfrak{R}_4 este o parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu adunarea modulo 4.

Să alcătuim tabla operației induse.

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabla grupului (\mathcal{R}_4, \oplus) .

Operația indusă pe \mathcal{R}_4 de către adunarea modulo 4 este asociativă (v. § 8, Cap. II). Din tabla acestei operații rezultă că admite pe 0 ca element neutru, că este comutativă și că orice element din \mathcal{R}_4 este simetrizabil în raport cu operația indusă :

$$-0 = 0, \quad -1 = 3, \quad -2 = 2, \quad -3 = 1.$$

Așadar, (\mathcal{R}_4, \oplus) este grup abelian. Analog se arată că (\mathcal{R}_n, \oplus) este grup abelian, unde $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ iar „ \oplus ” este operația indusă pe \mathcal{R}_n de către adunarea modulo n , numit *grupul resturilor modulo n* .

4. Din proprietățile adunării și înmulțirii numerelor, menționate în Cap. I, § 1, rezultă că

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +) \text{ și } (\mathbb{C}, +)$$

sunt grupuri abeliene, numite respectiv *grupul aditiv* al numerelor întregi, raționale, reale, complexe.

De asemenea, notând

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ și } \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

atunci

$$(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot) \text{ și } (\mathbb{C}^*, \cdot)$$

sunt grupuri *abeliene*, numite respectiv *grupul multiplicativ* al numerelor raționale, reale, complexe diferite de zero.

§ 3 REGULI DE CALCUL INTR-UN GRUP

Cum orice grup este monoid, calculul algebric cu elementele unui grup beneficiază de toate regulile valabile pentru legile de compoziție asociative și cu element neutru (v. § 1).

Pe de altă parte, pentru grupuri avem o serie de reguli care nu sunt întotdeauna aplicabile în cazul monoizilor. În esență, aceste reguli se fundamentează pe proprietatea că orice element al unui grup este simetrizabil în raport cu operația acestuia.

3.1. Teoremă. Într-un grup G sunt adevărate regulile de simplificare la stânga și la dreapta :

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

respectiv

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

Demonstrație. Presupunem că pentru $a, b, c \in G$ avem $a * b = a * c$ și fie a' simetricul elementului a . Avem :

$$b = e * b = (a' * a) * b = a' * (a * b) = a' * (a * c) = (a' * a) * c = e * c = c,$$

deci $b = c$, de unde rezultă că este adevărată regula de simplificare la stânga. Analog se demonstrează regula de simplificare la dreapta.

3.2. Teoremă. Fie $(G, *)$ un grup. Oricare ar fi $a, b \in G$, ecuațiile :

$$a * x = b \text{ și } y * a = b$$

au soluții unice în G , anume $x = a' * b$, respectiv $y = b * a'$, unde a' este simetricul lui a .

Demonstrație. Dacă x_1 și x_2 sunt soluții din G ale ecuației $a * x = b$, atunci

$$a * x_1 = b = a * x_2,$$

deci $a * x_1 = a * x_2$ și folosind regula de simplificare la stânga obținem $x_1 = x_2$. Așadar, ecuația $a * x = b$ are cel mult o soluție în G .

Fie $x = a' * b$, unde a' este simetricul lui a .

Avem :

$$a * x = a * (a' * b) = (a * a') * b = e * b = b,$$

de unde rezultă că $x = a' * b$ este soluție (din G) a ecuației $a * x = b$, unică conform primei părți a demonstrației. Analog se arată că ecuația $y * a = b$ admite soluție unică, $y = b * a'$.

Dacă grupul G este dat în notația aditivă (multiplicativă) atunci rezultatele din teoremele precedente se transcriu astfel :

$$a + b = a + c \text{ sau } b + a = c + a \Rightarrow b = c,$$

$$a + x = b \Rightarrow x = (-a) + b,$$

$$y + a = b \Rightarrow y = b + (-a) = b - a,$$

respectiv

$$ab = ac \text{ sau } ba = ca \Rightarrow b = c,$$

$$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b,$$

$$ya = b \Rightarrow y = ba^{-1}.$$

Cum operația unui grup este asociativă și cu element neutru, toate rezultatele din § 1 sunt adevărate și în cazul grupurilor. Astfel, dacă G este grup multiplicativ, $a \in G$ și $n \in \mathbf{N}$, atunci punând

$$a^n = \begin{cases} e & \text{dacă } n = 0 \\ a^{n-1}a & \text{dacă } n > 0 \end{cases}$$

avem :

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbf{N}.$$

Pentru elementele unui grup putem defini și puteri ale acestora cu exponenți numere întregi negative, după cum urmează.

Dacă $a \in G$ și $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$, atunci $-n > 0$, deci are sens a^{-n} printr-un și inversul acestuia, anume $(a^{-n})^{-1}$. Punem deci :

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} (a^{-n})^{-1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}, n < 0$$

și avem :

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbf{Z}}$$

O cale de demonstrație a acestei afirmații este reducerea la cazul exponenților nenegativi, care a fost deja demonstrat (v. § 1).

Astfel, dacă $m < 0$ și $n < 0$ avem :

$$a^m a^n = (a^{-m})^{-1} (a^{-n})^{-1} = (a^{-n} \cdot a^{-m})^{-1} = (a^{(-n)+(-m)})^{-1} = (a^{-(m+n)})^{-1} = a^{m+n}.$$

Presupunem că $m > 0$, $n < 0$. Dacă $m \geq |n|$ există $r \geq 0$ astfel încât $m = -n + r$ și atunci

$$a^m a^n = a^{r+(-n)} a^n = a^r a^{-n} (a^{-n})^{-1} = a^r = a^{m+n}$$

ș.a.m.d.

Dacă grupul G este dat în notație aditivă, atunci cele de mai sus devin proprietăți pentru *multiplicii întregi* ai elementelor lui G :

$$\boxed{ma + na = (m+n)a, \quad n(ma) = (nm)a, \quad \forall m, n \in \mathbf{Z}}$$

Cum pentru orice $a \in G$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem

$$a^n a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = e = a^{(-n)} a^n$$

rezultă că

$$\boxed{(a^n)^{-1} = a^{-n}, \quad \forall a \in G, n \in \mathbf{Z}}$$

Analog, în notație aditivă avem :

$$\boxed{-(na) = (-n)a, \quad \forall a \in G, n \in \mathbf{Z}}$$

Exerciții rezolvate

R-1 Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Arătați că

$$\varepsilon^{n^3-n+1} = \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Soluție. Cum $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, avem:

$$\varepsilon^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Observând că $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, rezultă că $n^3 - n$ se divide cu 3, deci $n^3 - n = 3q$, cu $q \in \mathbb{Z}$. Dar ε este element al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot) și folosind regulile de calcul cu puterile întregi ale unui element dintr-un grup multiplicativ, avem:

$$\varepsilon^{n^3-n+1} = \varepsilon^{3q+1} = \varepsilon^{3q} \cdot \varepsilon^1 = (\varepsilon^3)^q \varepsilon^1 = 1^q \varepsilon = \varepsilon.$$

R-2 Arătați că în orice linie (coloană) a tablei operației unui grup G cu un număr finit de elemente, fiecare element al lui G apare o dată și numai o singură dată.

Soluție. Presupunem că operația grupului G este notată multiplicativ și că $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, cu $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$. Fie $a \in G$. În linia lui a din tabla operației grupului G apar elementele:

$$aa_1, aa_2, \dots, aa_i, \dots, aa_n.$$

Dacă $i \neq j$, atunci $aa_i \neq aa_j$. În adevăr, dacă $aa_i = aa_j$, prin simplificare cu a se obține $a_i = a_j$. Contradicție. Rezultă că elementele aa_1, aa_2, \dots, aa_n sunt distincte, și mai puțin ordinea, coincid cu a_1, a_2, \dots, a_n .

R-3 Fie G un grup multiplicativ cu patru elemente, $G = \{e, a, b, c\}$, unde e este elementul neutru. Alcătuiți tabla operației grupului G dacă se știe că $a^2 = e$ și $c^2 = e$.

Soluție. Cunoscând că e este element neutru și că $a^2 = e^2 = e$, în tabla operației lui G se pot completa următoarele poziții:

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	?	?
b	b	?	?	?
c	c	?	?	e

Ca să nu avem repetiții în linia lui a și în coloana lui b , la intersecția acestora, nu putem pune a , e sau b , deci $ab = c$. Analog se arată apoi succesiv că $ac = b$, $bc = a$, $bb = e$, $ba = e$, $ca = b$, $cb = a$.

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

R-4 Fie (G, \cdot) un grup cu n elemente și e elementul neutru al lui G .

1) Demonstrați în cazul când G este comutativ că

$$a^n = e, \quad \forall a \in G.$$

2) Verificați această proprietate în cazul grupului S_3 .

Soluție. 1) Fie a_1, a_2, \dots, a_n elementele grupului G și fie a un element arbitrar din G . Conform cu Ex. R-2, elementele

$$aa_1, aa_2, \dots, aa_n$$

coincid, mai puțin ordinea, cu a_1, a_2, \dots, a_n și cum G este comutativ avem:

$$a_1 a_2 \dots a_n = aa_1 aa_2 \dots aa_n = \underbrace{aa \dots aa}_n a_1 a_2 \dots a_n = a^n a_1 a_2 \dots a_n.$$

Așadar:

$$e(a_1 a_2 \dots a_n) = a^n(a_1 a_2 \dots a_n)$$

și prin simplificare se obține $e = a^n$.

2) Grupul S_3 are 6 elemente, deci $n = 6$.

Pastrând notațiile folosite la § 2, pentru elementele grupului S_3 și folosind tabla operației grupului S_3 se obține $\sigma^2 = e, \pi^2 = e, \alpha^2 = e, \beta^2 = e, \gamma^2 = e$. Astfel din tabla operației grupului S_3 deducem:

$$\sigma^3 = \sigma \circ \sigma = \pi, \quad \sigma^4 = \sigma^2 \circ \sigma = \pi \circ \sigma = e.$$

Avem:

$$\sigma^6 = \sigma^{3 \times 2} = (\sigma^3)^2 = e^2 = e; \quad \alpha^6 = \alpha^{2 \times 3} = (\alpha^2)^3 = e^3 = e \text{ etc.}$$

Remarcă. Se poate demonstra că rezultatul de la pct. 1) este adevărat și pentru grupuri necomutative, așa cum de altfel s-a verificat pentru grupul S_3 .

§ 4. SUBGRUP. EXEMPLE

Fizionomia unui grup G se descrie în esență cu ajutorul subgrupurilor sale: submulțimi nevide H ale lui G cărora operația lui G le conferă, de asemenea, o structură de grup.

Mai precis:

4.1. *Definiție.* Fie $(G, *)$ un grup. O submulțime nevidă H a lui G se numește *subgrup* al lui G dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

$$1) \quad \forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H;$$

$$2) \quad \forall x \in H \Rightarrow x' \in H,$$

unde x' este simetricul lui x (în raport cu operația lui G).

Dacă grupul G este dat în notația aditivă, atunci condițiile 1) și 2) din definiția subgrupului se transcriu astfel:

$$1) \quad \forall x, y \in H \Rightarrow x + y \in H;$$

$$2) \quad \forall x \in H \Rightarrow -x \in H.$$

4.2. Teorema. Fie $(G, *)$ un grup, e elementul neutru al lui G și H un subgrup al lui G . Atunci :

1) $e \in H$.

2) H este grup în raport cu operația indusă pe H de către operația grupului G .

Demonstrație. 1) Cum $H \neq \emptyset$, putem alege un element $x \in H$. Din 2) rezultă că și $x' \in H$ și acum din 1) rezultă că $e = x' * x \in H$.

2) Să notăm cu φ operația grupului G , $\varphi : G \times G \rightarrow G$. Din 1) rezultă că H este o parte stabilă a lui G în raport cu operația φ . Fie φ' legea de compoziție indusă pe H de φ .

$$\varphi' : H \times H \rightarrow H, (x, y) \rightarrow \varphi'(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, y).$$

Evident φ' este asociativă (căci φ este asociativă) și admite ca element neutru pe $e \in H$. Dacă $x \in H$, atunci simetricul său x' în raport cu φ se găsește în H , deci este simetric al lui x și în raport cu φ' . Rezultă ca (H, φ') este grup.

Exemple

1. Fie $(G, *)$ un grup, e elementul său neutru și $E = \{e\}$. Atunci E este subgrup al lui G , numit *subgrupul unitate*. În adevăr, dacă $x, y \in E$, atunci $x * y = e$, deci

$$x * y = e * e = e \in E,$$

$$x' = e' = e \in E.$$

Dacă G este dat în notație aditivă, atunci $0 = \{0\}$ este subgrup al lui G , numit *subgrupul zero*.

2. Fie \mathfrak{S}_3 grupul permutărilor de trei obiecte, $\mathfrak{S}_3 = \{e, \sigma, \pi, \alpha, \beta, \gamma\}$. Următoarele submulțimi ale lui \mathfrak{S}_3 :

$$E = \{e\}, H_1 = \{e, \sigma, \pi\}, H_2 = \{e, \alpha\}, H_3 = \{e, \beta\}, H_4 = \{e, \gamma\}$$

sunt subgrupuri ale lui \mathfrak{S}_3 . Să facem verificare pentru H_1 . Din tabla operației grupului \mathfrak{S}_3 se deduce că elementele lui H_1 se compun conform tablei următoare

\circ		e	σ	π
e		e	σ	π
σ		σ	π	e
π		π	e	σ

Se observă pe această tablă că H_1 este o parte stabilă a lui \mathfrak{S}_3 în raport cu compunerea precum și cu operația de trecere la invers, deci H_1 este subgrup al lui \mathfrak{S}_3 .

3. Fie $n \geq 0$ un număr întreg și $n\mathbb{Z}$ mulțimea tuturor multiplilor lui n ,

$$n\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{nh \mid h \in \mathbb{Z}\}.$$

Atunci $n\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$. În adevăr, dacă $x, y \in n\mathbb{Z}$, există $h, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = nh, y = nk$. Rezultă că

$$x + y = nh + nk = n(h + k) \in n\mathbb{Z},$$

$$-x = -(nh) = n(-h) \in n\mathbb{Z},$$

deci $n\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$.

Definiție. Fie (G, \cdot) un grup, $a \in G$ și $n > 0$. Spunem că a este *element de ordin n* al grupului G dacă $a^n = e$ și $a^h \neq e, h = 1, 2, \dots, n-1$.

Exerciții rezolvate

R - 1 Să se determine ordinul pentru fiecare element al grupului \mathfrak{S}_3 .

Soluție. Pentru elementele lui \mathfrak{S}_3 , păstrăm notațiile de la § 3. Folosind tabla operației grupului \mathfrak{S}_3 , avem:

$$\sigma^1 = \sigma \neq e, \sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \pi \neq e, \sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma = \pi \circ \sigma = e$$

deci σ este element de ordin 3. Analog se arată că π este element de ordin 2. Cum $\alpha^1 = \alpha, \alpha^2 = \alpha \circ \alpha = e$, rezultă că α este element de ordin 2. Analog se arată că β și γ sunt elemente de ordin 2. În fine, să observăm că într-un grup G elementul neutru este singurul element de ordin 1.

R - 2 Fie a un element de ordin n al unui grup (G, \cdot) :

1) Arătați că $H_a \stackrel{\text{def}}{=} \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ este subgrup cu n elemente al lui G ;

2) Dacă $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, atunci ζ este element de ordin n al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot) ;

3) Dacă $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, atunci U_n este subgrup cu n elemente al lui (\mathbb{C}, \cdot) , numit *grupul rădăcinilor de ordin n ale unității*;

4) Reprezentați geometric elementele grupului U_3 (resp. U_4, U_5).

Soluție. 1) Fie $x, y \in H, x = a^i, y = a^j$, unde $0 \leq i, j < n$. Fie $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $i + j = nq + r, 0 \leq r < n$. Avem: $xy = a^i a^j = a^{i+j} = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = e^q a^r = a^r \in H$. Să mai observăm că inversele elementelor $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ sunt respectiv $e, a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a \in H$, deci H este subgrup al lui G .

Dacă $a^i = a^j$, unde $0 \leq i, j < n$, atunci $i = j$. În adevăr, dacă $i < j$, atunci $0 < j - i < n$ și $a^{j-i} = a^j (a^i)^{-1} = a^j (a^i)^{-1} = e$, ceea ce nu este posibil căci ordinul lui a este n . Analog se arată că nu putem avea $i > j$. Deducem că elementele lui H_n sunt distincte.

2) Fie $h \in \mathbb{N}$, $0 \leq h < n$. Folosind formula lui Moivre, avem:

$$\zeta^h = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^h = \cos \frac{2h\pi}{n} + i \sin \frac{2h\pi}{n}.$$

Deducem că $\zeta^h \neq 1$ pentru $h = 1, 2, \dots, n-1$ și $\zeta^n = 1$, deci ζ este element de ordin n al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot) .

3) Este suficient să arătăm că $U_n = H\zeta = \{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\}$, unde $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Dacă $z \in H\zeta$, atunci $z = \zeta^r$, $0 \leq r < n$, de unde $z^n = (\zeta^n)^r = 1^r = 1$,

deci: $z \in U_n$. Așadar $H\zeta \subseteq U_n$. Fie acum $z = \cos \varphi + i \sin \varphi \in U_n$. Cum $z^n = 1$, rezultă că $\cos n\varphi + i \sin n\varphi = 1$, deci $n\varphi = 2h\pi$, cu $h \in \mathbb{Z}$. Fie $q, r \in \mathbb{Z}$, astfel încât $h = nq + r$, $0 \leq r < n$.

Avem:

$$z = \cos \frac{2h\pi}{n} + i \sin \frac{2h\pi}{n} = \zeta^h = \zeta^{nq+r} = (\zeta^n)^q \zeta^r = \zeta^r \in H\zeta,$$

de unde $U_n \subseteq H\zeta$.

4) Se observă că reprezentând numerele complexe din U_n punctele obținute sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi, cu centrul în origine și cu un vârf în punctul de coordonate $(1, 0)$ (vezi fig. III.2).

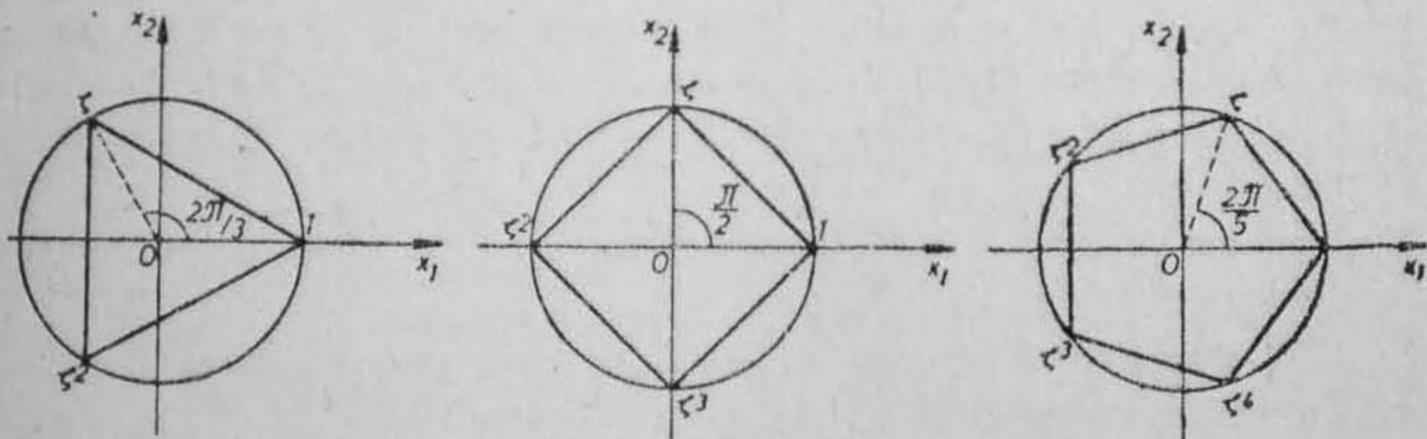


Fig. III.2.

§ 5. MORFISME DE GRUPURI

Numărul exemplurilor de grupuri este considerabil și din acest motiv se impune o clasificare a acestora. Două grupuri G și Γ vor fi declarate ca fiind de același tip (izotipice) dacă sunt la fel de bogate în elemente și, mai puțin o bijectie $f: G \rightarrow \Gamma$, operațiile celor două grupuri acționează la fel asupra elementelor lui G , respectiv Γ . Mai precis:

5.1. **Definiție.** Fie $(G, *)$ și (Γ, \circ) două grupuri. O aplicație bijectivă $f: G \rightarrow \Gamma$ se numește **izomorfism de grupuri** dacă este și un **morfism de grupuri**, adică:

$$f(x*y) = f(x) \circ f(y), \quad \forall x, y \in G.$$

Spunem că un grup G este izomorf cu un grup Γ , și scriem $G \cong \Gamma$, dacă există cel puțin un izomorfism $f: G \rightarrow \Gamma$. În caz contrar spunem că grupul G nu este izomorf cu grupul Γ și scriem $G \not\cong \Gamma$.

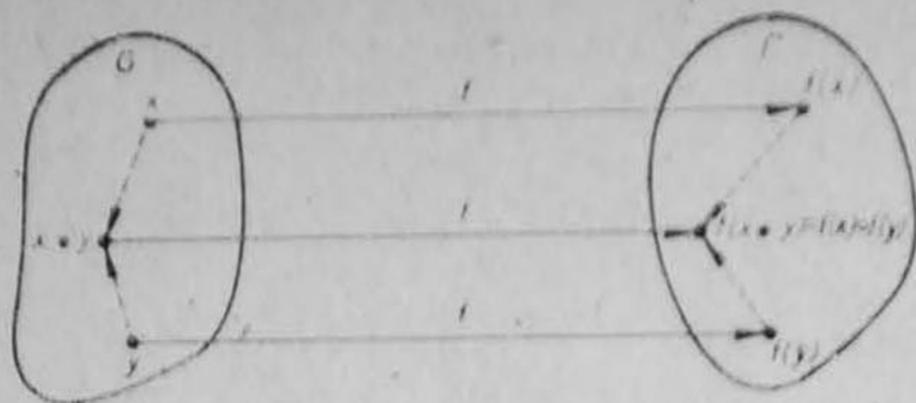


Fig. III.3

Cu alți termeni, grupul $(G, *)$ este izomorf cu grupul (Γ, \circ) dacă există o aplicație bijectivă $f: G \rightarrow \Gamma$ astfel încât oricare ar fi $x, y \in G$ imaginea $f(x*y)$ a compusului $x*y$ prin f este egală cu compusul $f(x) \circ f(y)$ al imaginilor prin f ale lui x și y (v. fig. III.3); pe scurt: *imaginea compusului este egală cu compusul imaginilor*.

Dacă G și Γ sunt grupuri finite cu câte n elemente, $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\Gamma = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, iar $f: G \rightarrow \Gamma$ este aplicația bijectivă definită prin

$$f(a_i) = b_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

atunci f este izomorfism dacă și numai dacă pentru orice i și j , $1 \leq i, j \leq n$, imaginea prin f a elementului $a_i * a_j$ de la intersecția liniei lui a_i cu coloana lui a_j din tabla operației lui G coincide cu elementul $b_i \circ b_j$ de la intersecția liniei lui $b_i = f(a_i)$ cu coloana lui $b_j = f(a_j)$ din tabla operației lui Γ (v. fig. III.4).

Spunem în acest caz că tablele operațiilor celor două grupuri sunt *la fel structurate* (relativ la f).

5.2. Teoremă. Fie $(G, *)$ și (Γ, \circ) două grupuri. Dacă $f: G \rightarrow \Gamma$ este izomorfism, atunci și $f^{-1}: \Gamma \rightarrow G$ este izomorfism.

Demnstratie. Fie $u, v \in \Gamma$. Cum f este aplicație bijectivă există $x, y \in G$ unice determinați astfel încât $f(x) = u$ și $f(y) = v$. Conform definiției aplicației f^{-1} avem $f^{-1}(u) = x$ și $f^{-1}(v) = y$.

Dar

$$u \circ v = f(x) \circ f(y) = f(x*y),$$

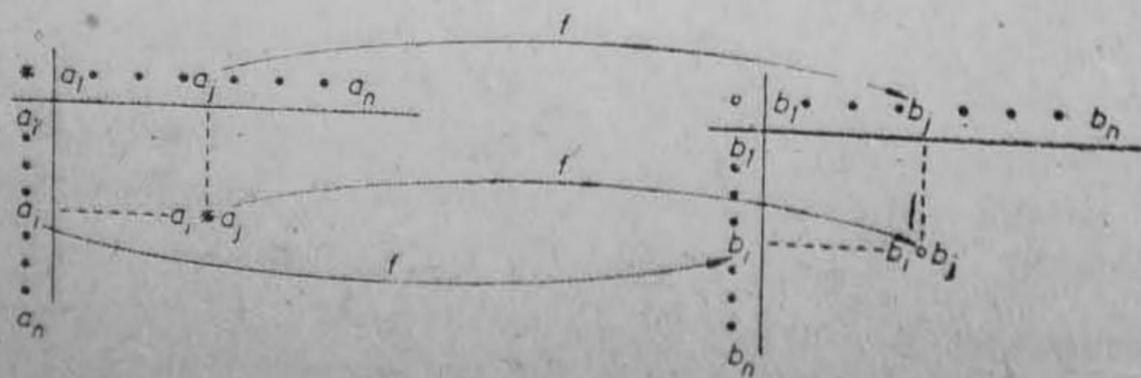


Fig. III.4.

de unde

$$f^{-1}(u \cdot v) = x * y = f^{-1}(u) * f^{-1}(v)$$

și cum f^{-1} este aplicație bijectivă, rezultă că f^{-1} este izomorfism.

Exemple

1. $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. Grupul aditiv $(\mathbb{R}, +)$ al numerelor reale este izomorf cu grupul multiplicativ (\mathbb{R}_+^*, \cdot) al numerelor reale strict pozitive.

În adevăr, fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cum f este aplicație bijectivă și

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x) f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

rezultă că f este izomorfism.

Să observăm în acest caz că inversul izomorfismului f este aplicația $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

și avem:

$$f^{-1}(xy) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y = f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

Între două grupuri pot exista mai multe izomorfisme, în cazul de față chiar o infinitate (la orice $a > 0$, $a \neq 1$, corespunde un izomorfism).

2. $(\mathbb{Q}, +) \not\cong (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$. Grupul aditiv $(\mathbb{Q}, +)$ al numerelor raționale nu este izomorf cu grupul multiplicativ (\mathbb{Q}_+^*, \cdot) al numerelor raționale strict pozitive.

În adevăr, dacă $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ este un izomorfism între aceste două grupuri, există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f(r) = 2$. Cum $f(r/2) \in \mathbb{Q}$ și

$$2 = f(r) = f\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{r}{2}\right) f\left(\frac{r}{2}\right) = \left(f\left(\frac{r}{2}\right)\right)^2$$

rezultă că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Contradicție.

3. Dacă $(G, *)$ și (Γ, \circ) sunt două grupuri cu câte trei elemente, atunci $G \cong \Gamma$. Cu alte cuvinte, există un singur tip de grup cu trei elemente.

În adevăr, fie $G = \{e, a, b\}$, $\Gamma = \{\theta, u, v\}$ unde e și θ sunt elementele neutre ale lui G și Γ respectiv. Pentru că e și θ sunt elemente neutre, în tablele operațiilor celor două grupuri putem completa următoarele poziții:

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	?	?
b	b	?	?

o	θ	u	v
θ	θ	u	v
u	u	?	?
v	v	?	?

Avem $a * a = b$. În adevăr, nu putem avea $a * a = a$ căci a s-ar repeta în linia sa. De asemenea, nu putem avea $a * a = e$ căci atunci, ca să evităm repetarea lui a și e în linia lui a , am fi obligați să punem $a * b = b$, ceea ce produce o repetare a lui b în coloana acestuia.

Cum $a * a = b$, pentru a evita repetarea elementelor lui G , în liniile și coloanele tablei operației acestuia, trebuie să avem $a * b = e$, $b * a = e$, $b * b = a$. Analog, se completează tabla operației lui Γ .

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

\circ	θ	u	v
θ	θ	u	v
u	u	v	θ
v	v	θ	u

Definind $f: G \rightarrow \Gamma$ prin $f(e) = \theta$, $f(a) = u$ și $f(b) = v$, rezultă că f este izomorfism de grupuri căci f este aplicație bijectivă și tablele operațiilor celor două grupuri sînt la fel structurate (relativ la f).

Renunțând la condiția de bijectivitate din definiția izomorfismului se obține noțiunea mai generală de *morfism (omomorfism) de grupuri*, anume:

5.3. Definiție. Fie $(G, *)$ și (Γ, \circ) două grupuri. O aplicație $f: G \rightarrow \Gamma$ se numește **morfism de grupuri** dacă

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y), \quad \forall x, y \in G.$$

Evident, orice izomorfism de grupuri este morfism de grupuri. Aplicația $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{R}_4$ de la grupul $(\mathbf{Z}, +)$ la grupul (\mathcal{R}_4, \oplus) ,

$$f(a) = a \bmod 4, \quad \forall a \in \mathbf{Z}$$

este un morfism de grupuri. În adevăr, dacă $a, b \in \mathbf{Z}$, fie $a_1 = a \bmod 4$, $b_1 = b \bmod 4$. Există $h, k \in \mathbf{Z}$ astfel încât:

$$a = 4h + a_1, \quad b = 4k + b_1$$

și conform Lemei 8.1 Cap. II avem:

$$a \oplus b = a_1 \oplus b_1.$$

Rezultă că:

$f(a + b) = (a + b) \bmod 4 = a \oplus b = a_1 \oplus b_1 = f(a) \oplus f(b)$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$, deci f este morfism de grupuri. Se observă că f este morfism surjectiv dar nu este injectiv

Astfel:

$$f(7) = 7 \bmod 4 = 3 = 19 \bmod 4 = f(19).$$

5.4. Teoremă. Fie $(G, *)$ și (Γ, \circ) două grupuri, e și θ elementele neutre ale lui G și Γ respectiv. Dacă $f: G \rightarrow \Gamma$ este un morfism de grupuri, atunci:

1) $f(e) = \theta$;

2) $f(x') = (f(x))'$ $\forall x \in G$,

unde x' este simetricul lui x , iar $(f(x))'$ este simetricul lui $f(x)$.

Demonstrație. 1) Avem :

$$\theta \circ f(e) = f(e) = f(e * e) = f(e) \circ f(e)$$

și prin simplificare cu $f(e)$ se obține $\theta = f(e)$.

2) Pentru orice $x \in G$ avem :

$$\theta = f(e) = f(x * x') = f(x) \circ f(x')$$

deci $\theta = f(x) \circ f(x')$ și analog $f(x') \circ f(x) = \theta$, de unde $(f(x))' = f(x')$.

Fie G un grup. Un izomorfism (morfism) $f: G \rightarrow G$ se numește *automorfism* (resp. *endomorfism*) al grupului G .

Exerciții rezolvate

R-1 Fie $(G, *)$ un grup cu patru elemente astfel încât $x^2 = e, \forall x \in G$,

unde e este elementul neutru.

1) Arătați că $G \simeq \mathfrak{K}$, unde \mathfrak{K} este grupul lui Klein (v. § 3).

2) Arătați că grupul $(G, *)$ nu este izomorf cu grupul (\mathfrak{R}_4, \oplus) .

Soluție. 1) Fie $G = \{e, a, b, c\}$. Tablele operațiilor grupurilor G și \mathfrak{K} sunt (v. § 3 și Ex. R-3, § 4) :

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

\circ	1_E	u	v	w
1_E	1_E	u	v	w
u	u	1_E	w	v
v	v	w	1_E	u
w	w	v	u	1_E

Aplicația $f: G \rightarrow \mathfrak{K}$ definită prin $f(e) = 1_E, f(a) = u, f(b) = v, f(c) = w$ este izomorfism căci tablele operațiilor celor două grupuri sunt la fel de structurate (relativ la f).

2) În adevăr, să presupunem că există un izomorfism $f: G \rightarrow \mathfrak{R}_4$ și fie $x \in G$ astfel încât $f(x) = 3$. Atunci :

$$0 = f(e) = f(x * x) = f(x) \oplus f(x) = 3 \oplus 3 = 2.$$

Contradicție.

R-2 Arătați că aplicația $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}^*$,

$$f(h) = \cos \frac{2h\pi}{n} + i \sin \frac{2h\pi}{n}, \quad \forall h \in \mathbf{Z}$$

este un morfism de la grupul $(\mathbf{Z}, +)$ la grupul (\mathbf{C}^*, \cdot) .

Determinați numerele $x \in \mathbf{Z}$ astfel încât $f(x) = 1$.

Soluție. Pentru orice $h, k \in \mathbf{Z}$ avem :

$$f(h+k) = \cos \frac{2(h+k)\pi}{n} + i \sin \frac{2(h+k)\pi}{n} = \left(\cos \frac{2h\pi}{n} + i \sin \frac{2h\pi}{n} \right) \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = f(h)f(k)$$

și deci f este morfism de la grupul $(\mathbf{Z}, +)$ la grupul (\mathbf{C}^*, \cdot) .

Se observă că pentru $x \in \mathbb{Z}$ avem $f(x) = 1$ dacă și numai dacă

$$\cos \frac{2x\pi}{n} + i \sin \frac{2x\pi}{n} = 1$$

ceea ce este posibil dacă și numai dacă

$$\frac{2x\pi}{n} = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă că $f(x) = 1$ dacă și numai dacă $x = nk$, $k \in \mathbb{Z}$, deci $f(x) = 1$ dacă și numai dacă $n \mid x$.

R-3 Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, definim $t_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t_a(x) = x + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Arătați că :

1) Mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{t_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor.

2) Grupul $(\mathbb{R}, +)$ este izomorf cu grupul $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \circ)$.

Soluție. 1) Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, avem $t_a \circ t_b = t_{a+b}$. În adevăr, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem :

$$(t_a \circ t_b)(x) = t_a(t_b(x)) = t_a(x + b) = x + b + a = t_{a+b}(x),$$

de unde $t_a \circ t_b = t_{a+b}$, deci compunerea funcțiilor induce o lege de compoziție pe $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ evident asociativă și cu element neutru, egal cu $1_{\mathbb{R}} = t_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Cum

$$t_a \circ t_{-a} = t_{a+(-a)} = t_0 = 1_{\mathbb{R}} = t_{-a} \circ t_a, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

rezultă că $t_a^{-1} = t_{-a}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, deci $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \circ)$ este grup.

2) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $f(a) = t_a$, este bijectivă și

$$f(a + b) = t_{a+b} = t_a \circ t_b = f(a) \circ f(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Exerciții

1. Fie $M = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1) Arătați că M este o parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu înmulțirea și că formează monoid comutativ în raport cu operația indusă.

2) Determinați elementele simetrizabile ale monoidului (M, \cdot) .

2. Arătați că corespondența $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def}}{=} (x + y) / (1 + xy)$ este o lege de compoziție pe intervalul $G = (-1, 1)$ și că $(G, *)$ este grup abelian.

3. Fie $\varepsilon = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ și $G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\} \subset \mathbb{C}$.

1) Arătați că G este o parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu înmulțirea și alcătuiți tabla operației induse.

2) Deduceți că (G, \cdot) este grup abelian.

4. Fie $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $f_i : E \rightarrow E$, $1 \leq i \leq 4$,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}, \quad \forall x \in E.$$

1) Arătați că mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ este stabilă în raport cu compunerea funcțiilor și alcătuiți tabla operației induse.

2) Deduceți că (G, \circ) este grup abelian.

5. Fie $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ și $f : E \rightarrow E$, $1 \leq i \leq 6$,

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = \frac{x-1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = 1-x,$$

$$f_6(x) = \frac{x}{x-1}, \quad \forall x \in E.$$

1) Arătați că mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ este stabilă în raport cu compunerea funcțiilor și alcătuiți tabla operației induse.

2) Deduceți că (G, \circ) este grup necomutativ.

6. Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Arătați că corespondența

$$(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def}}{=} x^{10} y$$

este o lege de compoziție pe G și că $(G, *)$ este grup comutativ.

7. Fie $G = [-1, \infty)$, $\Gamma = (-1, \infty)$ și următoarea lege de compoziție pe \mathbb{R} ,

$$(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + xy.$$

1) Arătați că G și Γ sunt părți stabile ale lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „*“

2) Dacă „ \top “ și „ \perp “ sunt legile de compoziție induse pe G respectiv Γ de „*“

atunci (G, \top) și (Γ, \perp) sunt monoizi comutativi.

3) Care dintre monoizii (G, \top) și (Γ, \perp) este grup?

8. Pe \mathbb{Z} se definește legea de compoziție

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1.$$

Arătați că (\mathbb{Z}, \perp) este grup abelian.

9. Fie $(G, *)$ un grup comutativ și $a \in G$. Pe G se definește legea de compoziție

$$G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def}}{=} x * y * a.$$

Arătați că (G, \perp) este grup.

10. Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea:

$$(xy)^2 = x^2 y^2, \quad \forall x, y \in G.$$

Arătați că G este grup abelian.

11. Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea:

$$x^2 = e, \quad \forall x \in G.$$

Arătați că G este grup abelian.

12. Fie (G, \perp) și (G, \top) două structuri de grup definite pe aceeași mulțime. Dacă legile de compoziție „ \perp “ și „ \top “ au același element neutru și

$$x \perp y = (x \top x) \top (x \top y), \quad \forall x, y \in G$$

atunci:

$$1) x \perp y = x \top y, \quad \forall x, y \in G$$

$$2) x \perp y = y \perp x, \quad \forall x, y \in G.$$

13. Fie $\sigma, \gamma \in \mathfrak{S}_3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Să se găsească $\xi \in \mathfrak{S}_3$ astfel încât $\sigma \circ \xi = \gamma$.

14. Fie $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Arătați că $\sigma^4 = e$ și $\pi^3 = e$, unde e este permutarea identică.

2) Rezolvați în \mathfrak{S}_4 ecuațiile: $\sigma^{193} \circ x = \pi^{101}$ și $y \circ \sigma^{207} = \pi^{23}$.

15. Fie (G, \cdot) un grup și $a, b \in G$ astfel încât $ab = ba$. Să se arate că:

$$a^h b^k = b^k a^h, \quad \forall h, k \in \mathbb{Z}.$$

16. Fie (G, \cdot) un grup și e elementul său neutru. Dacă elementele $a, b \in G$ satisfac condițiile

$$b^3 = e, \quad ab = b^2a$$

atunci $b^2 = e$ și $ab = ba$.

17. Fie $(G, *)$ un grup și $a \in G$. Arătați că funcțiile:

$$f: G \rightarrow G, \quad f(x) = a * x, \quad \forall x \in G$$

$$g: G \rightarrow G, \quad g(x) = x * a, \quad \forall x \in G$$

sunt bijective.

18. Fie $H_1 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\}$ și

$$H_2 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid A = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 4c & 5d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1) Arătați că $M_2(\mathbb{Z})$ este grup în raport cu adunarea matricelor.
2) H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(M_2(\mathbb{Z}), +)$.

19. 1) Dacă H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale unui grup G , atunci $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G .
2) Arătați că pentru subgrupurile $3\mathbb{Z}$ și $4\mathbb{Z}$ ale grupului $(\mathbb{Z}, +)$ avem:

$$3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}.$$

20. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală cu proprietatea că există cel puțin un număr $T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$(*) \quad f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Arătați că mulțimea H a numerelor reale T cu proprietatea $(*)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

2) Determinați acest subgrup când

a) $f(x) = \sin 2\pi x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

21. Arătați că grupul (G, \cdot) de la Ex. 3 este izomorf cu grupul (\mathbb{R}_3, \oplus) .

22. Arătați că grupul lui Klein este izomorf cu grupul (G, \circ) de la Ex. 4.

23. Arătați că grupul (\mathfrak{S}_3, \circ) este izomorf cu grupul (G, \circ) de la Ex. 5.

24. Arătați că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \forall x \in (0, \infty)$$

este un izomorfism de la grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) la grupul (G, \cdot) de la Ex. 2.

25. Fie $G = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și pentru orice $x, y \in G$ fie

$$x * y \stackrel{\text{def}}{=} \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y).$$

Arătați că $(G, *)$ este grup și că $(G, *) \cong (\mathbf{R}, +)$.

26. Fie $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbf{R}$ (v. Ex. 6, Cap. I)

și $G = \{E, A, B, C\}$, unde $E = R_0$, $A = R_{\pi/3}$, $B = R_\pi$ și $C = R_{2\pi/3}$.

1) Arătați că G este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea și alcătuiți tabla operației induse.

2) Deduceți că (G, \cdot) este grup și arătați că $(G, \cdot) \cong (\mathcal{R}_4, \oplus)$.

27. Arătați că funcția $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$,

$$f(k) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k, \quad \forall k \in \mathbf{Z},$$

este morfism de la grupul $(\mathbf{Z}, +)$ la grupul (\mathbf{Q}^*, \cdot) .

28. Fie E o mulțime cu două elemente, $E = \{a, b\}$. Pe mulțimea $\mathcal{E}(E)$ definim legea de compoziție „ Δ ”, numită *diferența simetrică a două mulțimi*:

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X), \quad \forall X, Y \in \mathcal{E}(E).$$

1) Alcătuiți tabla legii de compoziție „ Δ ”;

2) Comparați tabla operației „ Δ ” cu tabla grupului \mathcal{K} al lui Klein (v. § 3) și indicați o funcție bijectivă $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}(E)$ astfel încât

$$f(x \cdot y) = f(x) \Delta f(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{K};$$

3) Deduceți că $(\mathcal{E}(E), \Delta)$ este grup.

29. Fie $E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Pentru orice $t \in \mathbf{R}$ fie funcția

$$f_t: E \rightarrow E,$$

$$f_t(x, y) = \left(x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t\right), \quad \forall (x, y) \in E.$$

Arătați că:

1) $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$, $f_0 = 1_E$, $f_{-t} = f_t^{-1}$.

2) Mulțimea $G = \{f_t : t \in \mathbf{R}\}$ este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

3) $(G, \circ) \cong (\mathbf{R}, +)$.

• • •

30*. Fie $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$,

$\theta \in \mathbf{R}$ (v. Ex. 6, Cap. I) și $G = \{E, A, B, U, V, W\}$ unde

$$E = R_0, \quad A = R_{2\pi/3}, \quad B = R_{4\pi/3}, \quad U = S_0, \quad V = S_{\pi/3}, \quad W = S_{2\pi/3}.$$

1) Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea și alcătuiți tabla operației induse.

2) Deduceți că G este grup și că $(G, \cdot) \cong (\mathcal{S}_3, \cdot)$.

31*. Fie (G, \cdot) un grup și H o submulțime finită a lui G . Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\forall x, y \in H \Rightarrow xy \in H$;

2) H este subgrup al lui G .

32*. Fie G o mulțime și $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xy$ o lege de compoziție asociativă. Următoarele afirmații sunt echivalente :

1) (G, \cdot) este grup :

2) $\forall a, b \in G$ există $x, y \in G$ astfel încât $ax = b$ și $ya = b$.

33*. Fie H o submulțime nevidă a lui \mathbb{Z} . Următoarele afirmații sunt echivalente :

1) H este subgrup al lui \mathbb{Z} ;

2) $\exists n \geq 0$ astfel încât $H = n\mathbb{Z}$.

34*. Fie $z \in \mathbb{C}$. Arătați că există $n > 0$ astfel încât $z^n = 1$ dacă și numai dacă $z = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi$, cu $r \in \mathbb{Q}$.

35*. Fie H un subgrup cu n elemente al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot) . Arătați că $H = U_n$, unde U_n este grupul rădăcinilor de ordin n ale unității.

36*. Determinați automorfismele grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

§ 1. DEFINIȚIA INELULUI. EXEMPLE

Vom studia în continuare o nouă structură algebrică — structura de *inel*. Noțiunea de inel s-a degajat inițial în cadrul teoriei numerelor, unde a apărut sub numele de *inel de numere*, prototipul fiind \mathbf{Z} luat împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor întregi

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \rightarrow x + y,$$

respectiv

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \rightarrow xy.$$

Ulterior, noțiunea de inel a avut numeroase aplicații în diferite domenii ale Algebrei (inele de polinoame, inele de matrice), în Analiza matematică (inele de funcții), în Logica matematică (inele booleene) etc.

1.1. *Definiție.* O mulțime nevidă A , luată împreună cu două legi de **compoziție** (adunarea și înmulțirea)

$$A \times A \rightarrow A, (x, y) \rightarrow x + y$$

și

$$A \times A \rightarrow A, (x, y) \rightarrow xy,$$

se numește *inel* dacă :

G) $(A, +)$ este grup abelian,

M) (A, \cdot) este monoid,

D) înmulțirea este distributivă față de adunare, anume :

$$x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx \quad \forall x, y, z \in A.$$

Afirmația că $(A, +)$ este grup abelian revine la faptul că adunarea inelului satisface axiomele :

$$G_1) (x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in A,$$

$$G_2) \exists 0 \in A \text{ astfel încât } 0 + x = x + 0 = x \quad \forall x \in A,$$

$$G_3) \forall x \in A, \exists x' \in A \text{ astfel încât } x' + x = x + x' = 0,$$

$$G_4) x + y = y + x \quad \forall x, y \in A.$$

Afirmația că (A, \cdot) este monoid revine la faptul că înmulțirea inelului satisface axiomele :

$$M_1) (xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in A,$$

$$M_2) \exists 1 \in A \text{ astfel încât } 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in A.$$

Vom spune că $(A, +)$ este *grupul aditiv* al inelului A . Ansamblul de condiții $G_1 - G_4$, M_1 , M_2 și D poartă numele de *axiomele inelului*. Elemen-

tele 0 și 1 sînt unic determinate și se numesc *elementul zero*, respectiv *elementul unitate* al inelului A . Inelul A se numește *finit* dacă A are doar un număr finit de elemente. Elementele $x \in A$ simetrizabile în raport cu înmulțirea lui A se numesc *elemente inversabile* sau *unități* ale inelului A .

Dacă înmulțirea inelului satisface încă și axioma:

$$M_4) \quad xy = yx \quad \forall x, y \in A$$

spunem că A este *inel comutativ*.

Definiție. Spunem că A este *inel fără divizori ai lui zero* dacă

$$x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.$$

Un inel comutativ cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero se numește *domeniu de integritate*.

Exemple

1. *Inelul \mathbf{Z} al întregilor raționali.* Din proprietățile adunării și înmulțirii numerelor întregi, enumerate în Cap. I, § 1, rezultă că $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ este inel comutativ, numit *inelul întregilor raționali*.
2. *Inelul $\mathbf{Z}[i]$ al întregilor lui Gauss.* Fie $\mathbf{Z}[i]$ mulțimea tuturor numerelor complexe de forma $a + bi$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$, numite *întregi ai lui Gauss*. Dacă $a + bi$ și $c + di$ sunt din $\mathbf{Z}[i]$, atunci

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbf{Z}[i]$$

și

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbf{Z}[i].$$

Rezultă că $\mathbf{Z}[i]$ este o parte stabilă a lui \mathbf{C} în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe. Evident, operațiile induse verifică axiomele G_1, G_1, M_1, M_3 și D .

Cum $0 = 0 + 0 \cdot i$ și $1 = 1 + 0 \cdot i$, rezultă că aceste operații verifică și axiomele G_2 și M_2 . În fine, pentru orice $z \in \mathbf{Z}[i]$, $z = a + ib$, avem $-z = (-a) + (-b)i \in \mathbf{Z}[i]$, deci este verificată și axioma G_2 . Așadar $\mathbf{Z}[i]$ este inel comutativ în raport cu operațiile induse pe $\mathbf{Z}[i]$ de adunarea și înmulțirea numerelor complexe, numit *inelul întregilor lui Gauss*.

3. *Inelul $(\mathcal{R}_n, \oplus, \otimes)$ al resturilor modulo n .* Fie n un număr întreg pozitiv și $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \subset \mathbf{Z}$. Operațiile induse pe \mathcal{R}_n de adunarea și înmulțirea modulo n satisfac axiomele inelului comutativ (v. § 8, Cap. II). Așadar, \mathcal{R}_n este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea modulo n , numit *inelul resturilor modulo n* .

Un interes aparte, prin aplicațiile pe care le are în diferite domenii ale tehnicii (aritmetica calculatoarelor, teoria codurilor) îl prezintă inelul $(\mathcal{R}_2, \oplus, \otimes)$

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \otimes & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Tablele operațiilor inelului $\mathcal{R}_2 = \{0, 1\}$.

În inelul \mathcal{R}_6 avem $2 \otimes 3 = 0$, $4 \otimes 3 = 0$, deci $(\mathcal{R}_6, \oplus, \otimes)$ este inel cu divizori ai lui zero.

4. $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sunt inele comutative (v. Cap. I, § 1). Să observăm că pentru orice $x \neq 0$ din \mathbf{Q} , \mathbf{R} sau \mathbf{C} există $y \neq 0$ din \mathbf{Q} , \mathbf{R} respectiv \mathbf{C} , astfel încât $xy = 1$. Inelele cu această proprietate suplimentară vor fi studiate mai târziu.

5. *Inelul matricelor pătrate.* Fie A un inel. Inelul A poate fi oricare din inelele \mathbf{Z} , $\mathbf{Z}[i]$, \mathcal{R}_n , \mathbf{Q} etc. Notăm cu $M_2(A)$ mulțimea tuturor matricelor U pătrate de ordin 2 cu coeficienți din A ,

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in A.$$

Dacă $U, V \in M_2(A)$,

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

definim matricele $U + V$ și UV prin

$$U + V \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(A)$$

și

$$UV \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(A).$$

Matricele 0 , E și $-U$ din $M_2(A)$,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -U = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

se numesc respectiv *matricea zero*, *matricea unitate*, *opusa matricei U* .

Am amintit o serie de proprietăți ale adunării și înmulțirii matricelor din $M_2(\mathbf{R})$. Demonstrațiile multora dintre ele se fac invocând proprietăți ale adunării și înmulțirii numerelor reale, care sunt de asemenea adevărate pentru adunarea și înmulțirea oricărui inel A . Din acest motiv, asemenea demonstrații pot fi reproduse și pentru matricele din $M_2(A)$. Pe această cale se poate demonstra :

$$G_1) (U + V) + W = U + (V + W),$$

$$G_2) 0 + U = U + 0 = U,$$

$$G_3) U + (-U) = (-U) + U = 0,$$

$$G_4) U + V = V + U,$$

$$M_1) (UV)W = U(VW),$$

$$M_2) EU = UE = U,$$

$$D) U(V + W) = UV + UW; (V + W)U = VU + WU$$

oricare ar fi $U, V, W \in M_2(A)$.

Rezultă că adunarea și înmulțirea matricelor conferă lui $M_2(A)$ o structură de inel.

La fel se organizează ca inel mulțimea $M_n(A)$ a matricelor pătratice de ordin n cu coeficienți din A .

Cînd $n > 1$, inelul $M_n(A)$ nu este comutativ și are divizori ai lui zero.

Astfel, dacă $U, V \in M_2(\mathbb{R}_6)$,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

atunci

$$UV = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \otimes 3 \oplus 3 \otimes 3 & 1 \otimes 0 \oplus 3 \otimes 2 \\ 3 \otimes 3 \oplus 3 \otimes 3 & 3 \otimes 0 \oplus 3 \otimes 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci inelul $M_2(\mathbb{R}_6)$ are divizori ai lui zero.

§ 2. REGULI DE CALCUL INTR-UN INEL

Calculul algebric cu elementele unui inel beneficiază de toate regulile date pentru grupuri și monoizi dacă sunt implicate separat adunarea, respectiv înmulțirea inelului. În afară de acestea, într-un inel avem o serie de reguli de calcul specifice, care se referă la ansamblul celor două operații ale inelului.

1. Pentru orice $x \in A$ avem: $x0 = 0x = 0$. În adevăr, fie $y = x0$. Cum $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$, avem $y = y + y$. Atunci:

$$0 = y + (-y) = (y + y) + (-y) = y + (y + (-y)) = y + 0 = y = x0$$

și analog, $0x = 0$.

2. Într-un inel A cu cel puțin două elemente avem $1 \neq 0$.

În adevăr, dacă $1 = 0$, atunci $x = 1x = 0x = 0$, de unde $A = \{0\}$. Contradicție!

3. (regula semnelor). Oricare ar fi $x, y \in A$ avem: $(-x)y = x(-y) = -xy$ și $(-x)(-y) = xy$.

În adevăr, $0 = 0y = ((-x) + x)y = (-x)y + xy = xy + (-x)y$, de unde rezultă că $(-x)y$ este opusul lui xy , deci $(-x)y = -xy$. Analog, $x(-y) = -xy$. În fine, $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy$.

4. (distributivitatea înmulțirii față de scădere). Oricare ar fi $x, y, z \in A$, avem: $x(y - z) = xy - xz$ și $(y - z)x = yx - zx$.

Reamintim că $y + (-z)$ se notează cu $y - z$. Avem:

$$x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy - xz$$

și analog $(y - z)x = yx - zx$.

5. Într-un inel A fără divizori ai lui zero, din $xy = xz$ sau $yx = zx$, cu $x \neq 0$, rezultă $y = z$.

În adevăr, dacă $xy = xz$, atunci

$$x(y - z) = xy - xz = xy - xy = 0$$

și cum $x \neq 0$ rezultă că $y - z = 0$, deci $y = z$. Analog, din $yx = zx$ rezultă $y = z$.

Exerciții rezolvate

R - 1 Arătați că într-un inel comutativ A avem :

$$1) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \quad \forall a, b \in A$$

$$2) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \forall a, b \in A,$$

unde $2ab = ab + ab$ (v. Cap. III, § 1).

Soluție. Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și apoi față de scădere avem :

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) = aa - ab + ba - bb = \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2. \end{aligned}$$

2) Conform definiției puterilor unui element și distributivității înmulțirii față de adunare, avem :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b = a^2 + ba + ab + b^2 = \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

R - 2 Fie A un inel comutativ cu proprietatea :

$$(\alpha) \quad a + a + a = 0, \quad \forall a \in A.$$

$$1) \text{ Arătați că } (a + b)^3 = a^3 + b^3, \quad \forall a, b \in A;$$

$$2) \text{ Arătați că inelele } \mathcal{R}_3 \text{ și } M_2(\mathcal{R}_3) \text{ au proprietatea } (\alpha).$$

Soluție. 1) Să arătăm la început că într-un inel comutativ este adevărată formula

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad \forall a, b \in A.$$

În adevăr, folosind rezultatul de la exercițiul precedent, avem :

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b = a^3 + 2a^2b + a^2b + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Dar

$$3a^2b = a^2b + a^2b + a^2b = 0$$

și analog $3ab^2 = 0$, de unde $(a + b)^3 = a^3 + b^3$

2) În inelul \mathcal{R}_3 avem :

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 \oplus 0 &= (0 \oplus 0) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0, \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 &= (1 \oplus 1) \oplus 1 = 2 \oplus 1 = 0, \\ 2 \oplus 2 \oplus 2 &= (2 \oplus 2) \oplus 2 = 1 \oplus 2 = 0, \end{aligned}$$

te unde $a \oplus a \oplus a = 0, \forall a \in \mathcal{R}_3$.

Fie $U \in M_2(\mathcal{R}_3), U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ cu $a, b, c, d \in \mathcal{R}_3$.

În inelul $M_2(\mathcal{R}_3)$ avem :

$$U \oplus U \oplus U = \begin{pmatrix} a \oplus a \oplus a & b \oplus b \oplus b \\ c \oplus c \oplus c & d \oplus d \oplus d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

§ 3. INELUL CLASELOR DE RESTURI MODULO n

Fie $n > 0$ un număr întreg. Conform teoremei împărțirii cu rest, pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ există $q, r \in \mathbf{Z}$ unic determinați astfel încât

$$a = nq + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Numărul unic determinat r din relația precedentă, numit *restul* împărțirii lui a prin n , s-a notat cu $a \bmod n$ și s-a numit încă *reducusul* modulo n al lui a (v. Cap. II, § 1).

Ca rezultat al împărțirii numerelor întregi prin $n > 0$ sunt posibile resturile :

$$0, 1, \dots, r, \dots, n - 1.$$

Prin împărțirea lui a la n se obține restul r dacă și numai dacă a este de forma $nh + r$, cu $h \in \mathbf{Z}$. Mulțimile de numere

$$C_0, C_1, \dots, C_r, \dots, C_{n-1},$$

unde

$$\begin{aligned} C_0 &= \{a \in \mathbf{Z} \mid a \bmod n = 0\} = \{nh \mid h \in \mathbf{Z}\} = n\mathbf{Z} \\ C_1 &= \{a \in \mathbf{Z} \mid a \bmod n = 1\} = \{nh + 1 \mid h \in \mathbf{Z}\} = n\mathbf{Z} + 1 \\ &\vdots \\ C_r &= \{a \in \mathbf{Z} \mid a \bmod n = r\} = \{nh + r \mid h \in \mathbf{Z}\} = n\mathbf{Z} + r \\ &\vdots \\ C_{n-1} &= \{a \in \mathbf{Z} \mid a \bmod n = n - 1\} = \{nh + n - 1 \mid h \in \mathbf{Z}\} = \\ &= n\mathbf{Z} + n - 1 \end{aligned}$$

se numesc *clase de resturi modulo n* .

Așadar, un număr întreg a aparține clasei C_r dacă și numai dacă a împărțit la n dă restul r ,

$$a \in C_r \Leftrightarrow a \bmod n = r.$$

În particular $r \in C_r$ pentru $r \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Clasa de resturi C_r se notează de regulă cu \hat{r} . Așadar

$$\hat{r} = C_r = n\mathbf{Z} + r, \quad r \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$$

Să notăm cu Z_n mulțimea claselor de resturi modulo n ,

$$Z_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}.$$

Dacă $\hat{a}, \hat{b} \in Z_n$, definim suma $\hat{a} + \hat{b}$ și produsul $\hat{a} \hat{b}$ prin:

$$\hat{a} + \hat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \oplus b}, \quad \hat{a} \hat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \otimes b}.$$

Se definesc astfel pe Z_n , două legi de compoziție:

$$Z_n \times Z_n \rightarrow Z_n, (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a} + \hat{b}$$

și

$$Z_n \times Z_n \rightarrow Z_n, (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a} \hat{b},$$

numite *adunarea*, respectiv *înmulțirea* claselor de resturi modulo n .

Astfel, pentru $n = 6$ avem $Z_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$ și tablele adunării și înmulțirii claselor de resturi modulo 6 sînt:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$						
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

3.3. Teoremă. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n conferă mulțimii Z_n o structură de inel comutativ, numit *inelul claselor de resturi modulo n* .

Demonstrație. Să verificăm axiomele inelului comutativ. În esență demonstrația se fundamentează pe faptul că $\mathfrak{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ are o structură de inel comutativ în raport cu operațiile induse pe \mathfrak{R}_n de adunarea și înmulțirea modulo n (v. ex. 3, § 1). De exemplu, axioma D se verifică astfel

$$\begin{aligned} \hat{a}(\hat{b} + \hat{c}) &= \widehat{ab \oplus ac} = \widehat{a \otimes (b \oplus c)} = \widehat{a \otimes b \oplus a \otimes c} = \widehat{a \otimes b} + \widehat{a \otimes c} = \\ &= \hat{a} \hat{b} + \hat{a} \hat{c} \end{aligned}$$

și la fel se arată că G_1, G_4, M_1 și M_3 sunt verificate de adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n .

Cum

$$\hat{0} + \hat{a} = \hat{0} \oplus \hat{a} = \hat{a}, \quad \hat{1} \hat{a} = \hat{1} \otimes \hat{a} = \hat{a}, \quad \forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_n$$

rezultă că și axiomele G_2 și M_2 sunt verificate.

În fine, avem

$$\hat{a} + \widehat{n - a} = \widehat{a \oplus (n - a)} = \hat{0}, \quad \forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_n, \text{ cu } a \neq 0$$

deci orice clasă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este simetrizabilă în raport cu adunarea claselor de resturi modulo n

$$-\hat{a} = \widehat{n - a}, \quad \forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_n, \quad a \neq 0 \quad \text{și} \quad -\hat{0} = \hat{0}.$$

3.4. *Remarcă.* Clasele de resturi modulo n au fost notate cu $\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}$. Numerele $0, 1, \dots, n-1$ se numesc *reprezentanții canonici* ai claselor de resturi $\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}$ respectiv.

În aplicații este adesea preferabil să descriem clasele de resturi și cu alte numere care aparțin acestora. În acest sens, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, se notează cu \hat{x} clasa de resturi C_r , $0 \leq r < n$ astfel încât $x \in C_r$; \hat{x} se numește *clasa* lui x modulo n . Așadar, prin definiție avem :

$$(x) \quad \hat{x} \stackrel{\text{def}}{=} x \bmod n, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Astfel, dacă $n = 5$, atunci

$$\begin{aligned} \widehat{32} &= 32 \bmod 5 = (6 \cdot 5 + 2) \bmod 5 = 6 \cdot 5 \bmod 5 + 2 \bmod 5 = \widehat{2} \in \mathbb{Z}_5, \\ \widehat{-7} &= (-7) \bmod 5 = (-2) \bmod 5 = (0 - 2) \bmod 5 = (5 - 2) \bmod 5 = \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5, \\ \widehat{25} &= 25 \bmod 5 = \widehat{0} \in \mathbb{Z}_5. \end{aligned}$$

Spunem că numărul întreg x este *congruent* cu y modulo n , și scriem $x \equiv y \pmod{n}$ dacă și numai dacă $n \mid x - y$ sau altfel scris $\frac{x - y}{n} \in \mathbb{Z}$.

Din definiția (x) rezultă că pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$ avem :

$$(y) \quad \hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x \bmod n = y \bmod n \Leftrightarrow n \mid x - y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}.$$

Să mai observăm că operațiile cu clase de resturi date prin reprezentanți arbitrari se pot efectua după regulile :

$$(y) \quad \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}, \quad \hat{x} \hat{y} = \widehat{xy}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_n.$$

În adevăr, fie $\hat{a} = x \bmod n$, $\hat{b} = y \bmod n$ și $h, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$x = nh + a, \quad y = nk + b.$$

Atunci

$$x + y = n(h + k) + (a + b), \quad xy = n(nhk + ak + hb) + ab$$

Cum $a \oplus b = (a + b) \bmod n$ și $a \otimes b = (ab) \bmod n$, acum din (β) și Teorema 8.1, Cap. II rezultă :

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{a \oplus b} = \widehat{a + b} = \widehat{x + y}$$

$$\widehat{x} \widehat{y} = \widehat{a} \widehat{b} = \widehat{a \otimes b} = \widehat{ab} = \widehat{xy}.$$

Exerciții rezolvate

R - 1 Fie $M_2(\mathbb{Z}_6)$ inelul matricelor pătratice de ordin 2 cu coeficienți din \mathbb{Z}_6 și $U, V, E, X \in M_2(\mathbb{Z}_6)$,

$$U = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{5} \\ \widehat{5} & \widehat{4} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

- 1) Calculați $U + V$ și UV ;
- 2) Determinați pe X astfel încât $UX = E$. Deduceți că U este element inversabil al inelului $M_2(\mathbb{Z}_6)$.

Soluție. 1) Avem :

$$U + V = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{5} \\ \widehat{5} & \widehat{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{3} + \widehat{3} & \widehat{5} + \widehat{1} \\ \widehat{5} + \widehat{1} & \widehat{4} + \widehat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$$

și

$$UV = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{5} \\ \widehat{5} & \widehat{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{3} \cdot \widehat{3} + \widehat{5} \cdot \widehat{1} & \widehat{3} \cdot \widehat{1} + \widehat{5} \cdot \widehat{2} \\ \widehat{5} \cdot \widehat{3} + \widehat{4} \cdot \widehat{1} & \widehat{5} \cdot \widehat{1} + \widehat{4} \cdot \widehat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$$

2) Avem

$$\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix} = E = UX = \begin{pmatrix} \widehat{3}\alpha + \widehat{5}\gamma & \widehat{3}\beta + \widehat{5}\delta \\ \widehat{5}\alpha + \widehat{4}\gamma & \widehat{5}\beta + \widehat{4}\delta \end{pmatrix}$$

ceea ce revine la :

$$\text{a) } \begin{cases} \widehat{3}\alpha + \widehat{5}\gamma = \widehat{1} \\ \widehat{5}\alpha + \widehat{4}\gamma = \widehat{0} \end{cases} \quad \text{și b) } \begin{cases} \widehat{3}\beta + \widehat{5}\delta = \widehat{0} \\ \widehat{5}\beta + \widehat{4}\delta = \widehat{1} \end{cases}$$

Să rezolvăm sistemul a). Să observăm că elementele inversabile ale inelului \mathbb{Z}_6 sunt $\widehat{1}$ și $\widehat{5}$ (v. tabla înmulțirii inelului \mathbb{Z}_6) și că $(\widehat{1})^{-1} = \widehat{1}$, $(\widehat{5})^{-1} = \widehat{5}$. Necunoscutele sistemului care au ca coeficienți elemente inversabile din \mathbb{Z}_6 pot fi exprimate în funcție de celelalte. Astfel, este posibil să facem aceasta cu necunoscuta α din a doua ecuație. Cum $\gamma \in \mathbb{Z}_6$, în inelul \mathbb{Z}_6 putem face calculul :

$$\widehat{4}\gamma + \widehat{2}\gamma = (\widehat{4} + \widehat{2})\gamma = \widehat{0}\gamma = \widehat{0}.$$

Așadar, adunând pe $\hat{2}\gamma$ la fiecare termen al ecuației a doua se obține

$$\hat{5}\alpha = \hat{2}\gamma$$

de unde, prin înmulțire cu $(\hat{5})^{-1} = \hat{5}$ deducem

$$\hat{5}(\hat{5}\alpha) = \hat{5}(\hat{2}\gamma)$$

deci

$$(\hat{5}\cdot\hat{5})\alpha = (\hat{5}\cdot\hat{2})\gamma$$

și în definitiv $\alpha = \hat{4}\gamma$. Înlocuind în prima ecuație pe α cu $\hat{4}\gamma$ aceasta devine

$$\hat{5}\gamma = \hat{1}$$

deci $\gamma = \hat{5}$ și atunci $\alpha = \hat{4}\gamma = \hat{4}\cdot\hat{5} = \hat{2}$.

Analog se rezolvă sistemul b) și se obține $\beta = \hat{5}$, $\delta = \hat{3}$, deci

$$X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_6).$$

Cum

$$XU = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2}\cdot\hat{3} + \hat{5}\cdot\hat{5} & \hat{2}\cdot\hat{5} + \hat{5}\cdot\hat{4} \\ \hat{5}\cdot\hat{3} + \hat{3}\cdot\hat{5} & \hat{5}\cdot\hat{5} + \hat{3}\cdot\hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

avem $XU = E$. Analog $UX = E$, deci U este element inversabil al inelului $M_2(\mathbb{Z}_6)$ și

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{3} \end{pmatrix}$$

R - 2 1) Fie $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$. Arătați că \hat{a} este element inversabil al inelului \mathbb{Z}_n dacă și numai dacă a este relativ prim cu n ;

2) Determinați elementele inversabile ale inelului \mathbb{Z}_9 și rezolvați în inelul \mathbb{Z}_9 ecuația $\hat{7}x + \hat{3} = \hat{2}$.

Soluție. 1) Presupunem că \hat{a} este inversabilă în inelul \mathbb{Z}_n . Atunci există $\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$. Cum

$$\hat{a}\hat{b} = \hat{a}\hat{b} = \hat{1}$$

avem $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$ și din proprietate, (β) rezultă că numărul $ab - 1$ se divide prin n . Există deci $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ab - 1 = nk$. Așadar

$$a \cdot b + n(-k) = 1,$$

de unde $(a, n) = 1$, (v. § 4, Cap. I).

Reciproc, dacă $(a, n) = 1$, există $h, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ah + nk = 1$ (v. § 4, Cap. I)

Cum

$$\hat{1} = \widehat{ah + nk} = \widehat{ah} + \widehat{nk} = \widehat{ah} + \hat{0} = \widehat{ah}$$

rezultă că \hat{a} este element inversabil al inelului \mathbb{Z}_n și $(\hat{a})^{-1} = \hat{h}$.

2) Elementele inelului Z_9 sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{8}$. Dintre numerele $0, 1, 2, \dots, 8$ sunt relativ prime cu 9 numerele $1, 2, 4, 5, 7$ și 8 , deci elementele inversabile ale inelului Z_9 sunt $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}$ și $\hat{8}$. Din tabla înmulțirii inelului Z_9 se pot determina inversele acestor clase.

Se constată că: $(\hat{1})^{-1} = \hat{1}$, $(\hat{2})^{-1} = \hat{5}$, $(\hat{4})^{-1} = \hat{7}$, $(\hat{5})^{-1} = \hat{2}$ și $(\hat{7})^{-1} = \hat{4}$. Ecuația dată se rezolvă astfel:

$$\hat{7}x = \hat{2} + (-\hat{3}) = \hat{2} + \widehat{0-3} = \hat{2} + \widehat{9-3} = \hat{2} + \widehat{6} = \widehat{2+6} = \hat{8}$$

și atunci

$$x = (\hat{7})^{-1}\hat{8} = \hat{4}\cdot\hat{8} = \widehat{4\cdot 8} = \widehat{32} = \widehat{3\cdot 9 + 5} = \widehat{3\cdot 9} + \widehat{5} = \widehat{3\cdot 0} + \widehat{5} = \hat{5}.$$

Pentru a determina inversele acestor clase mai putem proceda:

$$\text{fie } \hat{2}^{-1} = \hat{a} \in Z_9 \Leftrightarrow 2a \equiv 1 \pmod{9} \Leftrightarrow \frac{2a-1}{9} \in Z \Leftrightarrow a \equiv 5 \pmod{9}, \text{ deci } \hat{2}^{-1} = \hat{5};$$

$$\text{fie } \hat{4}^{-1} = \hat{b} \in Z_9 \Leftrightarrow 4b \equiv 1 \pmod{9} \Leftrightarrow \frac{4b-1}{9} \in Z \Leftrightarrow b \equiv 7 \pmod{9}, \text{ deci } \hat{4}^{-1} = \hat{7};$$

$$\text{fie } \hat{5}^{-1} = \hat{c} \in Z_9 \Leftrightarrow 5c \equiv 1 \pmod{9} \Leftrightarrow \frac{5c-1}{9} \in Z \Leftrightarrow c \equiv 2 \pmod{9}, \text{ deci } \hat{5}^{-1} = \hat{2};$$

$$\text{fie } \hat{7}^{-1} = \hat{d} \in Z_9 \Leftrightarrow 7d \equiv 1 \pmod{9} \Leftrightarrow \frac{7d-1}{9} \in Z \Leftrightarrow d \equiv 4 \pmod{9}, \text{ deci } \hat{7}^{-1} = \hat{4}.$$

§ 4. CORPURI

Un cadru ideal pentru perfectarea calculelor algebrice este dat de inelele cu proprietatea că orice element diferit de 0 este simetrizabil în raport cu înmulțirea. Asemenea inele sînt cunoscute sub numele de *corpuri*. Mai precis:

4.1. *Definiție.* Un inel K se numește *corp* dacă $0 \neq 1$ și orice element $x \in K$, $x \neq 0$, este simetrizabil în raport cu înmulțirea:

$$\forall x \in K, x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in K \text{ astfel încât } x^{-1}x = xx^{-1} = 1.$$

Un corp K se numește *comutativ* dacă înmulțirea sa este comutativa.

Proprietăți

1. *Corpurile nu au divizori ai lui zero.* În adevăr, dacă $x, y \in K$, $x \neq 0$ și $y \neq 0$, atunci $xy \neq 0$ căci dacă $xy = 0$ deducem

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0,$$

deci $y = 0$. Contradicție.

2. *Elementele diferite de zero dintr-un corp formează grup față de înmulțire.* În adevăr, fie K un corp și $K^* = K \setminus \{0\}$. Din proprietatea 1) rezultă că K^* este o parte stabilă a lui K în raport cu înmulțirea. Cum $1 \neq 0$, rezultă că $1 \in K^*$. Deducem că operația indusă pe K^* de înmulțirea lui K este asociativă și admite pe 1 ca element neutru. Fie $x \in K^*$. Atunci $x \neq 0$ și fie x^{-1} inversul său în raport cu înmulțirea lui K . Cum $x^{-1}x = 1 \neq 0$, rezultă că $x^{-1} \neq 0$, deci $x^{-1} \in K^*$. Evident, x^{-1} este inversul lui x și în raport cu operația indusă. Deci (K^*, \cdot) este grup, numit *grupul multiplicativ* al corpului K .

Exemple

1. Corpurile \mathbf{Q} , \mathbf{R} și \mathbf{C} . Din proprietățile adunării și înmulțirii numerelor (v. § 1, Cap. I) rezultă că $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sînt corpuri comutative, numite respectiv *corpul numerelor raționale*, *corpul numerelor reale*, *corpul numerelor complexe*.

2. Corpurile de numere pătratice $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Fie d un întreg liber de pătrate și

$$\mathbf{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

Dacă $z, w \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $z = a + b\sqrt{d}$, $w = u + v\sqrt{d}$ cu $a, b, u, v \in \mathbf{Q}$, atunci

$$z + w = (a + u) + (b + v)\sqrt{d} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d}).$$

$$zw = (au + dbv) + (av + bu)\sqrt{d} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$$

deci $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ este o parte stabilă a lui \mathbf{C} în raport cu adunarea și înmulțirea. Observând că $0 = 0 + 0\sqrt{d} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ se deduce ușor că $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ este inel comutativ în raport cu operațiile induse pe $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ de adunarea și înmulțirea lui \mathbf{C} . Pentru a dovedi că $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ este corp mai rămâne să arătăm că pentru orice $z \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $z = a + b\sqrt{d}$, $z \neq 0$, există $z' \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ astfel încât $zz' = 1$.

Dacă $z \neq 0$, atunci $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Rezultă că $a^2 - db^2 \neq 0$ (dacă $a^2 - db^2 = 0$ și $b = 0$ deducem și $a = 0$, iar dacă $a^2 - db^2 = 0$ și $b \neq 0$ deducem $\sqrt{d} \in \mathbf{Q}$, ambele situații fiind contradictorii).

Fie

$$z' = \frac{a}{a^2 - db^2} - \frac{b}{a^2 - db^2}\sqrt{d} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$$

și avem :

$$zz' = 1.$$

Rezultă că $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ formează corp față de operațiile induse de adunarea și înmulțirea din \mathbf{C} , numit *corp de numere pătratice*. Astfel $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(i)$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ etc. sînt corpuri de numere pătratice.

3. Inelele $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ și $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$ nu sînt corpuri. În adevăr, $2x \neq 1$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$, deci 2 nu este inversabil în raport cu înmulțirea lui \mathbf{Z} . În inelul \mathbf{Z}_6 avem $\hat{3} \cdot \hat{4} = 0$ și cum corpurile nu au divizori ai lui zero rezultă că $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$ nu este corp.

4. Corpul \mathbf{Z}_p al claselor de resturi modulo p . Fie $p > 0$ un număr prim. Atunci inelul \mathbf{Z}_p este corp.

În adevăr, elementele lui \mathbf{Z}_p sînt

$$\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{p-1}.$$

Pentru orice $a \in \mathbf{Z}$, $1 \leq a < p$ avem $(a, p) = 1$.

În adevăr, p fiind prim, singurii divizori pozitivi ai lui p sînt 1 și p

Cum $1 \leq a < p$, p nu divide pe a , deci a și p admit un singur divizor comun pozitiv, anume pe 1. Atunci și c.m.m.d.c. al lui a și p este egal cu 1, deci $(a, p) = 1$. Aplicând acum rezultatul de la Ex. R-2, § 3, deducem că orice clasă $\hat{a} \in \mathbf{Z}_p$, $\hat{a} \neq \hat{0}$, este inversabilă în raport cu înmulțirea, deci \mathbf{Z}_p este corp. În particular \mathbf{Z}_5 este corp. Faptul că orice clasă $\hat{a} \in \mathbf{Z}_5$, $\hat{a} \neq \hat{0}$, este inversabilă în raport cu înmulțirea se observă și pe tabla înmulțirii lui \mathbf{Z}_5 : $(\hat{1})^{-1} = \hat{1}$, $(\hat{2})^{-1} = \hat{3}$, $(\hat{3})^{-1} = \hat{2}$, $(\hat{4})^{-1} = \hat{4}$.

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Tabla adunării lui \mathbf{Z}_5 .

.	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Tabla înmulțirii lui \mathbf{Z}_5 .

Exerciții rezolvate

R-1 Un corp cu patru elemente. Fie $K = \{0, 1, a, b\}$ unde $0, 1, a, b \in M_2(\mathbf{Z}_2)$,

$$0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

Arătați:

- K este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Z}_2)$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și alcătuiți tablele operațiilor induse.
- Operațiile induse conferă lui K o structură de corp comutativ.

Soluție. 1) Conform definiției operațiilor cu matrice, avem:

$$1 + a = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} + \hat{0} & \hat{0} + \hat{1} \\ \hat{0} + \hat{1} & \hat{1} + \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} = b \in K$$

$$ab = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} \cdot \hat{1} + \hat{1} \cdot \hat{1} & \hat{0} \cdot \hat{1} + \hat{1} \cdot \hat{0} \\ \hat{1} \cdot \hat{1} + \hat{1} \cdot \hat{0} & \hat{1} \cdot \hat{1} + \hat{1} \cdot \hat{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = 1 \in K$$

s.a.m.d.

Așadar K este o parte stabilă a lui $M_4(\mathbb{Z}_2)$ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire, tablele operațiilor induse fiind :

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

2) Cum adunarea și înmulțirea matricelor sunt operații asociative, la fel vor fi și operațiile induse pe K . Din același motiv operația indusă de înmulțire este distributivă în raport cu operația indusă de adunare.

Pe tabla adunării lui K se observă că această operație este comutativă, admite pe 0 ca element neutru și orice element din K are opus. Pe tabla înmulțirii lui K se observă că această operație este comutativă, admite pe 1 ca element neutru și orice element din K diferit de 0 are invers. Așadar $(K, +, \cdot)$ este corp comutativ.

R-2 1) *Teorema lui Fermat*. Fie $a, p \in \mathbb{Z}$, cu $p > 0$ număr prim care nu divide pe a . Arătați că :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2) Fie $a = 149^{128}$. Calculați $a \pmod{7}$.

Soluție. Fie $Z_p^* = Z_p \setminus \{0\}$. Cum (Z_p^*, \cdot) este un grup comutativ, din Ex. R-2, Cap. III, § 3, rezultă :

$$(\hat{x})^{p-1} = \hat{1}, \quad \forall \hat{x} \in Z_p^*.$$

Dar cum p nu divide pe a rezultă că

$$a \pmod{p} \neq 0, \text{ deci}$$

$$\hat{a} = a \pmod{p} \neq \hat{0}.$$

Deducem că $\hat{a} \in Z_p^*$, deci

$$\hat{1} = (\hat{a})^{p-1} = \widehat{a^{p-1}},$$

de unde $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

2) În corpul Z_7 , avem

$$\widehat{149} = \widehat{149 \pmod{7}} = \widehat{(21 \cdot 7 + 2) \pmod{7}} = \hat{2}.$$

Cum 7 nu divide pe 2, conform teoremei lui Fermat avem

$$2^6 \equiv 1 \pmod{7}. \text{ Atunci în corpul } Z_7 \text{ avem: } \hat{1} = \hat{2}^6 = (\hat{2})^6, \text{ deci } (\hat{2})^6 = \hat{1}.$$

Dar $128 = 6 \cdot 21 + 2$, deci

$$\widehat{149^{128}} = (\widehat{149})^{128} = (\hat{2})^{128} = (\hat{2})^{6 \cdot 21 + 2} = ((\hat{2})^6)^{21} \cdot (\hat{2})^2 = \hat{2}^2 = \hat{4},$$

de unde $a \pmod{7} = 4$.

Ca și în cazul grupurilor, noțiunea de izomorfism de inele (corpuri) constituie un criteriu de clasificare a inelelor (respectiv corpurilor), un criteriu de identificare a inelelor (respectiv corpurilor) cu aceleași proprietăți algebrice.

5.1. *Definiție.* Fie A și A' două inele. O aplicație bijectivă $f: A \rightarrow A'$ se numește *izomorfism de inele* dacă

$$1) f(x + y) = f(x) + f(y).$$

$$2) f(xy) = f(x)f(y)$$

oricare ar fi, $x, y \in A$.

Vom spune că inelul A este izomorf cu inelul A' , și scriem $A \simeq A'$, dacă există cel puțin un izomorfism $f: A \rightarrow A'$.

Să observăm că dacă $f: A \rightarrow A'$ este un izomorfism de inele, atunci $f(1) = 1'$. În adevăr, acest lucru decurge din surjectivitatea lui f căci dacă $x' \in A'$, atunci $x' = f(x)$ cu $x \in A$, deci:

$$f(1)x' = f(1)f(x) = f(1 \cdot x) = f(x) = x' = x'f(1),$$

de unde $f(1) = 1'$.

Renunțând la condiția de bijectivitate asupra lui f în definiția de mai sus și adăugând cerința:

$$3) f(1) = 1'$$

se obține noțiunea de *morfism (omomorfism)* de inele.

Dacă $f: A \rightarrow A'$ este morfism de inele, atunci din 1) rezultă că f este morfism de la grupul $(A, +)$ la grupul $(A', +)$. Conform rezultatelor obținute pentru morfisme de grupuri, rezultă că:

$$f(0) = 0'$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A.$$

Cu un argument asemănător celui folosit la grupuri, se arată că dacă $x \in A$ este inversabil, atunci $f(x)$ este element inversabil al lui A' și

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}.$$

Vom spune că o aplicație $f: K \rightarrow K'$ de la un corp K la un corp K' este *izomorfism (morfism)* de corpuri dacă f este izomorfism (respectiv morfism) de inele de la K la K' .

Orice morfism de corpuri $f: K \rightarrow K'$ este injectiv. În adevăr, fie $x_1, x_2 \in K$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$ și să notăm $x = x_1 - x_2$.

Avem:

$$f(x) = f(x_1 + (-x_2)) = f(x_1) + f(-x_2) = f(x_1) + (-f(x_2)) = f(x_1) + (-f(x_1)) = 0'.$$

Dacă $x \neq 0$, atunci putem scrie $1' = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0'f(x^{-1}) = 0'$. Contradicție, căci $1' \neq 0'$. Rămâne adevărat că $x = 0$, deci $x_1 = x_2$, de unde rezultă că f este injectiv.

5.2. *Definiție.* Fie $(A, *, \circ)$ și (A', Δ, ∇) două inele și $f: A \rightarrow A'$. Aplicația f se numește *izomorfism de inele*, dacă:

- i) f este o funcție bijectivă
- ii) f este morfism de inele, adică:

1. $f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$
2. $f(x \circ y) = f(x) \nabla f(y)$, pentru $\forall x, y \in A$.

Dacă A este un inel, atunci ca și în cazul grupurilor, un izomorfism (morfism) $f: A \rightarrow A$ se numește *automorfism* (resp. *endomorfism*) al inelului A . Aceeași terminologie se folosește și pentru corpuri.

Exemple

1. Aplicația $f: \mathbf{Z} \rightarrow M_2(\mathbf{Z})$,

$$f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \forall a \in \mathbf{Z}$$

este un morfism injectiv de inele. În adevăr, pentru orice $a, b \in \mathbf{Z}$ avem:

$$f(a + b) = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = f(a)f(b)$$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Injectivitatea lui f este evidentă.

2. Pentru orice $z \in \mathbf{C}$, $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbf{R}$, notăm cu $\bar{z} = a - bi$ conjugatul lui z . Aplicația

$$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, \quad f(z) = \bar{z}, \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

este un automorfism al corpului \mathbf{C} . În adevăr

$$f(z + w) = \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} = f(z) + f(w),$$

$$f(zw) = \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} = f(z)f(w) \quad \text{oricare ar fi } z, w \in \mathbf{C}.$$

Cum $z = \overline{\bar{z}} = f(\bar{z})$, rezultă că f este surjectiv și cum orice morfism de corpuri este injectiv, deducem că f este automorfism al corpului \mathbf{C} .

Exerciții rezolvate

R - 1 Fie $K = \{0, 1, a, b\}$ corpul cu patru elemente de la Ex. R - 1, §4.

Arătați că:

- 1) $(x + y)^2 = x^2 + y^2, (xy)^2 = x^2y^2, \forall x, y \in K.$

2) Aplicația $f: K \rightarrow K$, $f(x) = x^2$, $\forall x \in K$ este automorfism al corpului K și $f \neq 1_K$.

3) Dacă $g \neq 1_K$ este automorfism al lui K , atunci $g = f$.

Soluție. 1) Din tabla adunării corpului K (v. § 4) rezultă că :

$$2x = x + x = 0, \quad \forall x \in K.$$

Cum corpul K este comutativ, pentru orice $x, y \in K$, avem :

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = \\ &= x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + (x+x)y + y^2 = x^2 + 0y + y^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

și

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x(y(xy)) = x((yx)y) = x((xy)y) = x(x(yy)) = x(xy^2) = (xx)y^2 = x^2y^2.$$

2) Folosind pct. 1, pentru orice $x, y \in K$, avem :

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 = f(x) + f(y)$$

și

$$f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y).$$

Rămâne să arătăm că f este bijectiv. Folosind tabla înmulțirii corpului K (v. § 4) valorile aplicației f pot fi date prin tabelul următor :

x	0	1	a	b
$f(x) = x^2$	0	1	b	a

Se observă astfel că $f \neq 1_K$ și că f este aplicație bijectivă.

3) Cum g este morfism de corpuri avem $g(0) = 0$ și $g(1) = 1$. Atunci, pentru ca $g \neq 1_K$ trebuie ca $g(a) = b$ și $g(b) = a$, de unde $g = f$.

R-2 Fie K mulțimea tuturor matricelor $U \in M_2(\mathbb{R})$ de forma

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1) Arătați că mulțimea K este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că operațiile induse conferă lui K o structură de corp.

2) $\mathbb{C} \simeq K$.

Soluție. 1) Fie $U, V \in K$,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Avem :

$$U + V = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in K$$

și

$$UV = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \in K.$$

Se mai observă că

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K, \quad -U = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix} \in K$$

și acum este limpede că operațiile induse satisfac axiomele inelului.

Fie $U \in K$, $U \neq 0$, $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Cum $U \neq 0$, avem $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, deci $a^2 + b^2 \neq 0$.

Fie

$$U' = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \in K.$$

O verificare imediată arată că

$$U'U = UU' = E,$$

deci U este inversabilă și $U^{-1} = U'$. Așadar, K este corp.

2) Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$. Definim

$$f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K.$$

Dacă $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $w = c + di$, atunci

$$z + w = (a + c) + (b + d)i,$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

deci

$$f(z + w) = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -a & c \end{pmatrix} = f(z) + f(w)$$

$$f(zw) = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = f(z)f(w).$$

Se mai observă că f este aplicație bijectivă, deci f este izomorfism, de unde $\mathbb{C} \simeq K$.

§ 6. POLINOAME CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN INEL COMUTATIV

În clasa a X -a s-a dat o construcție pentru polinoamele cu coeficienți complecși. Sub forma zisă *algebraică* un *polinom* f cu coeficienți complecși, într-o nedeterminată X , este o expresie de forma

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n,$$

unde $a_i \in \mathbb{C}$ și $n \geq 0$.

S-a notat cu $\mathbb{C}[X]$ mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți complecși în nedeterminata X . Dacă $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots$ s-a definit *egalitatea*, *suma* și *produsul* după cum urmează:

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \dots$$

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \dots$$

Din lista proprietăților adunării și înmulțirii polinoamelor cu coeficienți complecși, stabilite în clasa a X-a, rezultă:
 $C[X]$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a polinoamelor.

În construcția lui $C[X]$, precum și în demonstrațiile proprietăților operațiilor cu polinoame, a intervenit, în mod esențial, faptul că adunarea și înmulțirea numerelor complexe satisfac axiomele inelului comutativ. Din acest motiv putem înlocui pe C cu un inel comutativ oarecare A . Se obține inelul comutativ $A[X]$ al polinoamelor cu coeficienți în A . Inelul A poate fi: inelul Z al întregilor raționali, inelul Z_n al claselor de resturi modulo n etc. În particular A poate fi un corp comutativ, de exemplu Q, R, C, Z_p, p număr prim. Obținem astfel inelele de polinoame

$$Z[X], Z_n[X], Q[X], R[X], C[X], Z_p[X]$$

cu coeficienți în Z, Z_n, Q, R, C, Z_p respectiv.

Fie $f \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_iX^i + \dots$. Elementul $a_i \in A$ se numește *coeficientul* de rang i al polinomului f . Dacă $a_i = 0$, atunci termenul $0X^i$ poate fi omis, iar dacă $a_i = 1$, atunci termenul $1X^i$ poate fi scris simplu X^i . Dacă f este diferit de polinomul 0, atunci există $n \geq 0$ astfel încât $a_n \neq 0$ și $a_i = 0, \forall i > n$. În aceste condiții f va fi scris de regulă după cum urmează:

$$f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n.$$

Numărul $n = \max \{i | a_i \neq 0\}$ se numește *gradul* polinomului f , notat cu $\text{grad } f$, iar a_n se numește *coeficientul dominant* al lui f .

Prin definiție, polinomul 0 are gradul $-\infty$.

$$\text{Fie } f, g \in A[X] \quad f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n,$$

$$g = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m$$

cu $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Pentru a face o alegere, presupunem că $n \geq m$. Atunci

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_m + b_m)X^m + a_{m+1}X^{m+1} + \dots + a_nX^n$$

și

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \dots + \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)X^k + \dots + a_n b_m X^{m+n},$$

de unde

$$\text{grad}(f + g) \leq \max \{\text{grad } f, \text{grad } g\}$$

și

$$\text{grad}(fg) \leq \text{grad } f + \text{grad } g.$$

Formulele de mai sus rămân adevărate și atunci când $f = 0$ sau $g = 0$. Dacă $n = m$ și $a_n = -b_n$, atunci în prima formulă avem inegalitatea strictă.

Dacă $f \neq 0$ și $g \neq 0$, iar A este inel fără divizori ai lui zero, atunci $fg \neq 0$ căci din $a_n \neq 0$ și $b_m \neq 0$ deducem că $a_n b_m \neq 0$. Mai mult, în acest caz

$$\text{grad}(fg) = \text{grad } f + \text{grad } g.$$

Așadar :

6.1. **Teoremă.** Dacă A este domeniu de integritate, atunci $A[X]$ este domeniu de integritate și

$$\text{grad}(fg) = \text{grad } f + \text{grad } g, \quad \forall f, g \in A[X].$$

Fie A un inel comutativ, $f \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ și $x \in A$. Elementul $f(x) \in A$,

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

se numește *valoarea* polinomului f în punctul x .

6.2. **Teoremă.** Valoarea sumei (produsului) a două polinoame $f, g \in A[X]$ într-un punct x este egală cu suma (respectiv produsul) valorilor polinoamelor f și g în punctul x :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Demonstrație. Dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots$, atunci pentru orice $x \in A$ avem:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots = (f + g)(x) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots = (fg)(x). \end{aligned}$$

Fie $f \in A[X]$. Asociind fiecărui element $x \in A$ valoarea $f(x)$ a polinomului f în punctul x se obține o funcție $\bar{f}: A \rightarrow A$,

$$\bar{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in A,$$

numită *funcția polinomială* asociată lui f .

Zerourile funcției polinomiale $\bar{f}: A \rightarrow A$ asociată polinomului $f \in A[X]$ se numesc *rădăcini* (din A) ale lui f . Cu alte cuvinte, un element $a \in A$ se numește *rădăcină* (din A) a polinomului $f \in A[X]$ dacă valoarea lui f în punctul a este egală cu 0, deci $f(a) = 0$.

Exemple

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 7 - 6X + X^2$, atunci funcția polinomială asociată lui f este funcția reală de o variabilă reală $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x) = f(x) = 7 - 6x + x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rădăcinile (din \mathbb{R}) ale polinomului f sunt

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 7} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Funcțiile polinomiale asociate polinoamelor cu coeficienți reali sunt studiate în Analiza matematică.

2. Dacă $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$ (coeficienții nespecificați sunt egali cu $\hat{1}$) atunci funcțiile polinomiale asociate $f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$, $g: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ pot fi descrise prin valorile lor în orice $x \in \mathbb{Z}_3$, folosind tabelele:

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$f(x)$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$g(x)$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Se vede în acest caz că $f \neq g$ și totuși $\bar{f} = \bar{g}$.

Să mai observăm că polinoamele f și g nu au rădăcini în \mathbb{Z}_3 .

3. Polinomul $f = 2X - 7 \in \mathbb{Z}[X]$ nu are rădăcini în \mathbb{Z} . În adevăr, dacă pentru $a \in \mathbb{Z}$ avem $f(a) = 0$, atunci $2a - 7 = 0$, deci $2a = 7$. Dar $2a$ este par și 7 este impar. Contradicție.

4. Orice polinom f de grad 1 cu coeficienți dintr-un corp comutativ K admite o rădăcină în K . În adevăr, fie $f \in K[X]$, $f = a + bX$, unde $a, b \in K$, $b \neq 0$. Fie $c = -b^{-1}a \in K$. Atunci

$$f(c) = a + bc = a + b(-b^{-1}a) = a - bb^{-1}a = a - a = 0.$$

5. Rădăcinile în \mathbb{Z}_5 ale polinomului $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^2 + \hat{1}$ sunt $\hat{2}$ și $\hat{3}$. În adevăr, funcția polinomială asociată, $\bar{f}: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ ia valorile date în tabelul:

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$f(x)$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$

Fie K un corp comutativ. Corpul K poate fi de exemplu \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_p , p număr prim. Teorema de mai jos a fost demonstrată în clasa a N -a în cazul $K = \mathbb{C}$ și demonstrația s-a bazat în esență pe faptul că orice număr complex $z \neq 0$ are invers față de înmulțire. Din acest motiv rezultatul rămâne adevărat dacă în loc de \mathbb{C} luăm un corp comutativ K oarecare. Așadar:

6.3. Teoremă. Fie K un corp comutativ și $g \in K[X]$, $g \neq 0$. Oricare ar fi polinomul $f \in K[X]$, există polinoamele $q, r \in K[X]$ unice determinate astfel încât

$$f = gq + r, \text{ grad } r < \text{grad } g.$$

Polinoamele q și r se numesc *câtul* respectiv *restul* împărțirii lui f prin g .

Exemplu

Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^5 + \hat{4}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$. Să se afle câtul și restul împărțirii lui f prin g . Coeficientul dominant al câtului este elementul $a \in \mathbb{Z}_5$ care înmulțit cu coeficientul dominant al lui g dă coeficientul dominant al lui f . Deci $a \cdot \hat{2} = \hat{3}$, de unde $a = \hat{4}$.

Folosind tablele operațiilor corpului \mathbb{Z}_5 și organizarea uzuală a calculelor din algoritmul împărțirii polinoamelor, avem :

$$\begin{array}{r|l}
 \hat{3}X^5 + \hat{4}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2} & \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1} \\
 \hat{3}X^5 + \hat{2}X^4 + \hat{4}X^3 & \hline
 \hline
 \hat{2}X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2} & \hat{4}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4} \\
 \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 & \hline
 \hline
 X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{2} & \\
 X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X & \hline
 \hline
 \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{2} & \\
 \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{4} & \hline
 \hline
 \hat{2}X + \hat{3} &
 \end{array}$$

Rezultă că $q = \hat{4}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$ și $r = \hat{2}X + \hat{3}$. Avem :

$$\begin{aligned}
 gq + r &= (\hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1})(\hat{4}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}) + \hat{2}X + \hat{3} = \\
 &= \hat{3}X^5 + \hat{4}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2} = f.
 \end{aligned}$$

Fie $f, g \in K[X]$. Vom spune că polinomul g *divide* polinomul f și scriem $g|f$, dacă există $q \in K[X]$ astfel încât $f = gq$. Se mai spune în acest caz că g este *divizor* sau *factor* al lui f în inelul $K[X]$ sau că f este *multiplu* al lui g în inelul $K[X]$.

Calculul valorii $f(a)$ a unui polinom $f \in K[X]$ într-un punct $a \in K$ poate fi făcut cu algoritmul împărțirii polinoamelor. În adevăr:

6.4. Teorema restului. Fie K un corp comutativ, $f \in K[X]$ și $a \in K$. Atunci valoarea $f(a)$ a polinomului f în punctul a este egală cu restul împărțirii lui f prin $X - a$.

Demonstrație. Fie $q, r \in K[X]$ astfel încât

$$f(x) = (X - a)q + r, \text{ grad } r < \text{grad } (X - a) = 1.$$

Rezultă că $r \in K$ și deci

$$f(a) = ((X - a)q + r)(a) = (a - a)q(a) + r(a) = r(a) = r.$$

Tot ca o consecință a Teoremei 6.3 putem obține o caracterizare a divizorilor de grad 1 ai unui polinom, anume :

6.5. Teorema factorului. (Bézout). Fie K un corp comutativ, $f \in K[X]$ și $a \in K$. Atunci polinomul $X - a$ divide pe f dacă și numai dacă $f(a) = 0$.

Demonstrație. Evident $X - a$ divide f dacă și numai dacă restul r al împărțirii este 0. Afirmația rezultă din faptul că $r = f(a)$.
 Împărțirea unui polinom $f \in K[X]$ prin $X - a$ (deci și calculul valorii $f(a)$) se poate face cu schema lui Horner.

Exerciții rezolvate

R-1 Să se determine două polinoame $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $fg = -1 + 6X - 12X^2 + 8X^3$, $\text{grad } f = 1$ și $\text{grad } g = 2$.

Soluție. Conform condițiilor din enunț avem $f = a_0 + a_1X$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2$, unde $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \neq 0$ și $b_2 \neq 0$. Avem:

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1)X^2 + a_1b_2X^3 = -1 + 6X - 12X^2 + 8X^3,$$

de unde, conform definiției egalității polinoamelor, deducem:

$$\begin{cases} a_0b_0 = -1, \\ a_0b_1 + a_1b_0 = 6, \\ a_0b_2 + a_1b_1 = -12 \\ a_1b_2 = 8. \end{cases}$$

Dar, din $a_0b_0 = -1$ cu $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ rezultă $a_0 = 1, b_0 = -1$ sau $a_0 = -1, b_0 = 1$. Când $a_0 = 1, b_0 = -1$, avem:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 6, \\ b_2 + a_1b_1 = -12, \\ a_1b_2 = 8, \end{cases}$$

de unde $a_1 = -2, b_1 = 4, b_2 = -4$, deci $f = 1 - 2X$ și $g = -1 + 4X - 4X^2$. Când $a_0 = -1, b_0 = 1$ se găsește $f = -1 + 2X$ și $g = 1 - 4X + 4X^2$.

R-2 Determinați toate polinoamele $f \in \mathbb{Z}_4[X]$ astfel încât

$$f^2 = \hat{0} \text{ și } \text{grad } f = 1.$$

Aceeași problemă pentru polinoamele inelului $\mathbb{Z}_5[X]$.

Soluție. Fie $f = \hat{a} + \hat{b}X \in \mathbb{Z}_4[X]$, $\hat{b} \neq \hat{0}$. Cum $f^2 = \hat{0}$ rezultă că

$$0 = f^2 = (\hat{a} + \hat{b}X)(\hat{a} + \hat{b}X) = \hat{a}^2 + 2\hat{a}\hat{b}X + \hat{b}^2X^2$$

și deci, prin identificarea coeficienților, avem:

$$(S) \begin{cases} \hat{a}^2 = \hat{0}, \\ 2\hat{a}\hat{b} = \hat{0}, \\ \hat{b}^2 = \hat{0}. \end{cases}$$

Dar $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ și $\hat{0}^2 = \hat{0}, \hat{1}^2 = \hat{1}, \hat{2}^2 = \hat{0}, \hat{3}^2 = \hat{1}$.

Rezultă că soluțiile sistemului (S) sunt $(\hat{0}, \hat{0})$, $(\hat{0}, \hat{2})$, $(\hat{2}, \hat{0})$ și $(\hat{2}, \hat{2})$. Cum $\hat{b} \neq \hat{0}$, deducem că polinoamele căutate sunt $\hat{2}X$ și $\hat{2} + \hat{2}X$.

Observăm că Z_5 este corp, deci inelul $Z_5[X]$ nu are divizori ai lui zero și atunci din $f^2 = \hat{0}$ rezultă $f = \hat{0}$.

R-3 Fie $f \in Z_5[X]$, $f = X^3 + \hat{3}X + \hat{4}$. Să se afle câtul și restul împărțirii lui f prin polinomul $X + \hat{3}$.

Soluție. Avem $\hat{3} = -\hat{2}$ deoarece $-\hat{2} = \widehat{-2} = \widehat{0-2} = \widehat{5-2} = \hat{3}$, deci $X + \hat{3} = X - \hat{2}$ și folosind schema lui Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} & \hat{4} & \\ \hline \hat{1} & \hat{2} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{2} \end{array}$$

deducem că $q = X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$ și $r = \hat{3} = f(\hat{2})$.

R-4 Fie $f \in Z_2[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. Arătați că f se divide prin $X + \hat{1}$ dacă și numai dacă f are un număr par de coeficienți $a_i \neq \hat{0}$.

Soluție. Cum $\hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$, avem $X + \hat{1} = X - \hat{1}$. Dar

$$f(\hat{1}) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

și cum $\hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$, rezultă că $f(\hat{1}) = \hat{0}$ dacă și numai dacă numărul coeficienților $a_i \neq \hat{0}$ este par. Se aplică apoi teorema factorului.

R-5 Fie K un corp comutativ, $f \in K[X]$ și $a, b \in K$, $a \neq b$.

1) Arătați că restul împărțirii polinomului f prin $(X - a)(X - b)$ este

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} X + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

2) Dacă $X - a \mid f$, $X - b \mid f$ și $a \neq b$, atunci $(X - a)(X - b) \mid f$.

Soluție. 1) Cum gradul polinomului $(X - a)(X - b)$ este egal cu 2, restul împărțirii lui f prin g este de forma $cX + d$, cu $c, d \in K$. Fie $q \in K[X]$ astfel încât

$$f = (X - a)(X - b)q + cX + d.$$

Deducem că $f(a) = ca + d$ și $f(b) = cb + d$ și cum $a \neq b$ avem: $c = (a - b)^{-1}(f(a) - f(b))$ și $d = (a - b)^{-1}(af(b) - bf(a))$.

2) Dacă $X - a \mid f$ și $X - b \mid f$, atunci $f(a) = f(b) = 0$. Se deduce că $c = d = 0$, deci $f = (X - a)(X - b)q$.

Fie K un corp comutativ și $K[X]$ inelul polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți în K . Vom arăta că aritmetica inelului $K[X]$ este în esență aceeași cu cea a inelului \mathbb{Z} al întregilor raționali. Se știe că pentru orice număr întreg $a > 1$ există numerele prime $p_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, unic determinate astfel încât $a = p_1 p_2 \dots p_n$, rezultat cunoscut sub numele de *teorema fundamentală a aritmeticii*. Un rezultat asemănător este adevărat și pentru polinoamele cu coeficienți într-un corp comutativ K , locul numerelor prime fiind luat de către polinoamele ireductibile (v. Teorema 7.2)

7.1. Definiție. Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$ un polinom de grad $n > 0$. Spunem că f este polinom *reductibil* peste corpul K dacă există două polinoame $g, h \in K[X]$ de grad strict mai mic ca n astfel încât $f = gh$. În caz contrar, spunem că f este polinom *ireductibil* peste corpul K .

Exemple

1. Orice polinom de grad 1 din $K[X]$ este ireductibil peste K . În adevăr, fie $f = aX + b$, $a \neq 0$, un polinom de grad 1 din $K[X]$. Dacă f este reductibil peste K există $g, h \in K[X]$, astfel încât

$$f = gh, \text{ grad } g < 1, \text{ grad } h < 1.$$

Evident $g \neq 0$ și $h \neq 0$, de unde $\text{grad } g = \text{grad } h = 0$.

Obținem $1 = \text{grad } f = \text{grad } (gh) = \text{grad } g + \text{grad } h = 0 + 0 = 0$.

Contradicție. Deci f este ireductibil peste K .

2. Dacă un polinom $f \in K[X]$ de grad $n > 1$ este ireductibil peste K , atunci f nu admite rădăcini în K . Reciproc, dacă un polinom $f \in K[X]$ de grad 2 sau 3 nu admite rădăcini în K , atunci f este ireductibil peste K .

În adevăr, dacă $\text{grad } f = n > 1$ și $a \in K$ este rădăcină a lui f , atunci conform teoremei factorului $X - a \mid f$, deci există $q \in K[X]$ astfel încât

$$f = (X - a)q.$$

Cum $X - a, q \in K[X]$ și $\text{grad } (X - a) = 1 < n$, $\text{grad } q = n - 1 < n$ rezultă că f este reductibil peste K .

Reciproc, presupunem că gradul lui f este 2 sau 3. Dacă f este reductibil peste K , atunci f admite o rădăcină în K . În adevăr, fie $g, h \in K[X]$ astfel încât

$$f = gh, \text{ grad } g < \text{grad } f, \text{ grad } h < \text{grad } f.$$

Cum $\text{grad } f = \text{grad } g + \text{grad } h$, iar $\text{grad } f$ este 2 sau 3, rezultă $\text{grad } g = 1$ sau $\text{grad } h = 1$. Presupunem că $\text{grad } g = 1$. Atunci $g = aX + b \in K[X]$, $a \neq 0$. Fie $c = -a^{-1}b \in K$. Avem

$$f(c) = g(c)h(c) = (a(-a^{-1}b) + b)h(c) = 0 \cdot h(c) = 0.$$

Astfel, polinomul $f = X^2 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$ este ireductibil peste \mathbf{Q} . În adevăr, în caz contrar există $a \in \mathbf{Q}$ astfel încât $0 = f(a) = a^2 - 2$, de unde $\sqrt{2} = a \in \mathbf{Q}$. Contradicție.

Să observăm că același polinom $f = X^2 - 2$ este reductibil peste \mathbf{R} căci $f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ și $X - \sqrt{2}, X + \sqrt{2} \in \mathbf{R}[X]$.

Polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X]$ este ireductibil peste corpul \mathbf{Z}_3 . În adevăr, $\text{grad } f = 3$ și $f(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{2} \neq \hat{0}$, $f(\hat{2}) = \hat{1} \neq \hat{0}$.

3. Polinoamele de grad 1 din $\mathbf{C}[X]$ sunt singurele polinoame ireductibile peste corpul \mathbf{C} . În adevăr, din Exp. 1 rezultă că polinoamele de grad 1 din $\mathbf{C}[X]$ sunt ireductibile peste \mathbf{C} . Fie acum $f \in \mathbf{C}[X]$, astfel încât $\text{grad } f > 1$.

Să arătăm că f este reductibil peste \mathbf{C} . Conform teoremei fundamentale a algebrei (d'Alambert-Gauss) există $z \in \mathbf{C}$ astfel încât $f(z) = 0$. Din Exp. 2 rezultă că f este reductibil peste \mathbf{C} .

4. Polinoamele de grad 1 și polinoamele de grad 2 fără rădăcini reale din $\mathbf{R}[X]$ sunt singurele polinoame ireductibile peste corpul \mathbf{R} . Este suficient să arătăm că orice polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ ireductibil peste \mathbf{R} și de grad $n > 1$ este polinom de grad 2 fără rădăcini reale (v. Exp. 1 și 2). Conform teoremei fundamentale a algebrei există $z = a + ib \in \mathbf{C}$ astfel încât $f(z) = 0$. Avem $b \neq 0$ căci în caz contrar $z = a \in \mathbf{R}$ și atunci f ar fi reductibil peste \mathbf{R} (v. Exp. 2).

Cum polinomul f are coeficienți reali, avem și $f(\bar{z}) = 0$, unde $\bar{z} = a - ib$. Deoarece $\mathbf{R}[X] \subset \mathbf{C}[X]$, avem $f \in \mathbf{C}[X]$, $f(z) = 0$, $f(\bar{z}) = 0$, deci în inelul $\mathbf{C}[X]$ polinomul f se divide prin $X - z$ și $X - \bar{z}$. Dar $b \neq 0$, deci $z \neq \bar{z}$ și atunci (v. Ex. R-5, § 6) deducem că polinomul :

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2aX + a^2 + b^2 \in \mathbf{R}[X]$$

divide pe f . Deducem că există $q \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât

$$(*) \quad f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)q.$$

Dacă $n > 2$, atunci din (*) rezultă că f este reductibil peste \mathbf{R} , contrar ipotezei. Așadar, $n = 2$, $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 0$, de unde rezultă că f este un polinom de grad 2 fără rădăcini reale.

Fie $f, g \in K[X]$. Spunem că f este asociat în divizibilitate cu g și scriem $f \sim g$, dacă există $a \in K$, $a \neq 0$, astfel încât $f = ag$.

Putem acum enunța următorul rezultat care generalizează la polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ teorema fundamentală a aritmeticii :

7.2. Teoremă. Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$ un polinom de grad mai mare ca 0. Atunci :

- 1) f se descompune într-un produs finit de polinoame ireductibile peste K .

2) Dacă $f = f_1 f_2 \cdots f_m = f'_1 f'_2 \cdots f'_m$ sunt două descompuneri ale polinomului f în produs finit de polinoame ireductibile, atunci $m = m'$ și există o permutare $\sigma \in \Xi_m$ astfel încât $f_i \sim f_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq m$.

Demonstrație. Vom demonstra numai afirmația 1). Fie $n = \text{grad } f$. Dacă $n = 1$, atunci f este ireductibil peste K și deci 1) este adevărat (printre produsele finite acceptăm și produsele cu un singur factor).

Presupunem că $n > 1$ și că afirmația 1) este adevărată pentru polinoame de grad mai mic ca n . Dacă f este ireductibil atunci 1) este adevărat. În caz contrar există $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = gh$, $\text{grad } g < n$, $\text{grad } h < n$. Conform ipotezei inducției g și h sunt produse finite de polinoame ireductibile peste K , deci și $f = gh$ este un produs finit de polinoame ireductibile peste K .

7.3. *Consecință.* Orice polinom $f \in C[X]$ de grad mai mare ca 0 se reprezintă ca produs finit de polinoame de grad 1 din $C[X]$, unice determinate mai puțin ordinea și o asociere în divizibilitate a factorilor.

Demonstrație. Rezultă din Teorema 7.2 și Exp. 4.

7.4. *Consecință.* Orice polinom $f \in R[X]$ de grad mai mare ca 0 se reprezintă ca produs finit de polinoame din $R[X]$ de grad 1 sau de grad 2 fără rădăcini reale, unice determinate mai puțin ordinea și o asociere în divizibilitate a factorilor.

Demonstrație. Rezultă din Teorema 7.2 și Exp. 4.

Exerciții rezolvate

R-1 Să se descompună în factori ireductibili peste \mathbf{Q} , \mathbf{R} și \mathbf{C} polinomul $f = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ știind că admite rădăcina $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție. Polinomul f având coeficienții reali, admite și rădăcina $\bar{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci f se divide prin polinomul $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 + X + 1$ (v. Ex. R-5, § 6). Obținem:

$$(1) \quad f = (X^2 - 2)(X^2 + X + 1).$$

Cum rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$ sunt complexe rezultă că $X^2 + X + 1$ este ireductibil peste \mathbf{R} și cu atât mai mult peste \mathbf{Q} . Am observat că $X^2 - 2$ este ireductibil peste \mathbf{Q} (v. Exp. 2). Așadar, (1) este descompunerea lui f în factori ireductibili peste \mathbf{Q} . Descompunerile lui f în factori ireductibili peste \mathbf{R} și \mathbf{C} sunt:

$$f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + X + 1),$$

respectiv

$$f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) \left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

R-2 Să se descompună în factori ireductibili peste corpul Z_3 polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2} \in Z_3[X]$.

Soluție. Pentru a valorifica observațiile făcute la Exp. 2, să cercetăm valorile $f(x)$, $x \in Z_3$.
 Avem:

$$\begin{array}{r|ccc} x & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline f(x) & \hat{2} & \hat{0} & \hat{2} \end{array}$$

deci f se divide prin $X - \hat{1} = X + \widehat{-1} = X + 0 \widehat{-1} = X + 3 \widehat{-1} = X + \hat{2}$. Folosind schema lui Horner

$$\begin{array}{r|cccc|c} \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} & \hat{2} & & \\ \hline \hat{1} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} & & \hat{1} \end{array}$$

obținem $f = (X - \hat{1})(X^2 + \hat{1})$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini în Z_3 , rezultă că este ireductibil peste Z_3 . Descompunerea căutată este $f = (X - \hat{1})(X^2 + \hat{1}) = (X + \hat{2})(X^2 + \hat{1})$.

- R-3** 1) Câte polinoame de grad cel mult 4 sunt în inelul $Z_2[X]$?
 2) Să se găsească toate polinoamele de grad cel mult 4 ireductibile peste corpul Z_2 .

Soluție. 1) Dacă $f \in Z_2[X]$ are gradul cel mult 4, atunci

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \quad (a_i \in Z_2).$$

Cum pentru fiecare coeficient a_i avem două posibilități, $\hat{0}$ sau $\hat{1}$, din definiția egalității polinoamelor rezultă că avem $2^5 = 32$ polinoame de grad cel mult 4.

2) Singurele polinoame de grad 1 sunt X , $\hat{1} + X$ și acestea sunt ireductibile peste Z_2 (v. Exp. 1).

Un polinom ireductibil peste Z_2 de grad 2, 3 sau 4 are termenul liber egal cu $\hat{1}$ căci altfel admite ca rădăcină pe $\hat{0} \in Z_2$ și deci ar fi reductibil peste Z_2 . De asemenea, numărul coeficienților $\neq \hat{0}$ ai unui asemenea polinom este impar căci altfel ar admite pe $\hat{1} \in Z_2$ ca rădăcină (v. Ex. R-4, § 6) și deci ar fi reductibil peste Z_2 . Singurele polinoame de grad 2 sau 3 care satisfac ambele condiții sunt $\hat{1} + X + X^2$, $\hat{1} + X + X^3$, $\hat{1} + X^2 + X^3$ și conform cu observațiile de la Exp. 2 ele sunt ireductibile peste Z_2 .

În fine, singurele polinoame de grad 4 care satisfac cele două condiții sunt $\hat{1} + X + X^4$, $\hat{1} + X^2 + X^4$, $\hat{1} + X^3 + X^4$, $\hat{1} + X + X^2 + X^3 + X^4$ și fie f unul dintre ele. Dacă f este reductibil, descompunerea sa în factori ireductibili nu poate conține factori de gradul 1 căci atunci $f(\hat{0}) = \hat{0}$ sau $f(\hat{1}) = \hat{0}$, ceea ce am exclus.

Acum este clar că descompunerea lui f nu poate conține nici factori ireductibili de grad 3 (căci atunci ar conține și unul de grad 1). Atunci descompunerea lui f conține numai factori ireductibili de grad 2. Cum $\hat{1} + X + X^2$ este singurul polinom ireductibil de grad 2, iar grad $f = 4$, rezultă că

$$f = (\hat{1} + X + X^2)^2 = \hat{1} + X^2 + X^4.$$

Asadar, polinoamele ireductibile de grad 4 sunt $\hat{1} + X + X^4$, $\hat{1} + X^3 + X^4$ si $\hat{1} + X + X^2 + X^4$.

Exerciții

1. Pe mulțimea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legile de compoziție:

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d)$$

$$(a, b) (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (ac + 3bd, ad + bc).$$

Arătați că aceste legi de compoziție conferă mulțimii A o structură de inel comutativ și fără divizori ai lui zero.

2. Pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi definim legile de compoziție:

$$x \perp y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + 3, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

$$x \top y \stackrel{\text{def}}{=} xy + 3x + 3y + 6, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Arătați că:

- 1) (\mathbb{Z}, \perp) este grup abelian.
- 2) (\mathbb{Z}, \top) este monoid comutativ.
- 3) $x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Deduceți că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero. Determinați elementele inversabile ale acestui inel.

3. Fie $a \in \mathbb{Z}$ și $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - a$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

1) Arătați că se pot defini în mod unic două legi de compoziție „ \perp ” și „ \top ” pe \mathbb{Z} astfel încât:

$$f(x + y) = f(x) \perp f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

$$f(xy) = f(x) \top f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

2) Arătați că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero, elementele sale inversabile fiind $1 - a$, $-1 - a$.

3) Când $a = 3$, comparați rezultatul cu cel de la Ex. 2.

4. Fie

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Arătați că A este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că formează inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu operațiile induse.

5. Pe mulțimea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legile de compoziție:

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d),$$

$$(a, b) (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (ac, bd).$$

Arătați că aceste legi de compoziție conferă mulțimii A o structură de inel comutativ cu divizori ai lui zero. Care sunt elementele inversabile ale acestui inel?

6. Fie A_1 și A_2 două inele. Pe mulțimea $A = A_1 \times A_2$ definim legile de compoziție:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2) (b_1, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 b_1, a_2 b_2).$$

- 1) Arătați că A are o structură de inel în raport cu aceste legi de compoziție (A este numit *produsul direct* al lui A_1 cu A_2).
- 2) Arătați că A este comutativ dacă și numai dacă A_1 și A_2 sunt inele comutative.
7. Fie $(\mathcal{R}_9, \oplus, \otimes)$ inelul resturilor modulo 9 și $A = \mathcal{R}_9 \times \mathbb{Z}$ produsul direct al inelului \mathcal{R}_9 cu inelul \mathbb{Z} (v. Ex. 6).

- 1) Enumerați elementele inversabile ale inelului A .
- 2) Cum pot fi caracterizate elementele inversabile ale produsului direct a două inele?
8. Fie $(\mathcal{R}_2, \oplus, \otimes)$ inelul resturilor modulo 2 și $B = \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_2$ produsul direct al inelului \mathcal{R}_2 cu \mathcal{R}_2 .

- 1) Alcătuiți tabla adunării și tabla înmulțirii inelului B .
- 2) Deduceți că $x + x = 0$ și $x^2 = x$, $\forall x = (x_1, x_2) \in B$.

9. Fie B un inel astfel încât $x^2 = x$, $\forall x \in B$. Arătați că :

- 1) $x + x = 0$, $\forall x \in B$.
- 2) $xy = yx$, $\forall x, y \in B$.

10. Arătați că într-un inel comutativ A avem :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall a, b \in A.$$

11. Arătați că într-un inel comutativ A este valabilă formula binomului lui Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \forall a, b \in A.$$

12. Fie $(\mathcal{R}_5, \oplus, \otimes)$ inelul resturilor modulo 5.

- 1) Verificați că $a \oplus a \oplus a \oplus a \oplus a = 0$, $\forall a \in \mathcal{R}_5$.
- 2) Deduceți, folosind formula binomului lui Newton, că :

$$(a \oplus b)^5 = a^5 \oplus b^5 \quad \forall a, b \in \mathcal{R}_5.$$

13. Fie $U \in M_3(\mathbb{R})$,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- 1) Pentru ce numere $a, b, c \in \mathbb{R}$ avem $U^2 = 0$?
- 2) Dacă $U^2 = 0$, atunci $E - U$ este inversabilă și $(E - U)^{-1} = E + U$.

14. Fie \mathbb{Z}_{12} inelul claselor de resturi modulo 12 și G mulțimea elementelor inversabile ale acestui inel.

- 1) Determinați elementele lui G și arătați că G este o parte stabilă în raport cu înmulțirea lui \mathbb{Z}_{12} .
- 2) Alcătuiți tabla operației induse și deduceți că (G, \cdot) este grup izomorf cu grupul lui Klein.

15. Rezolvați următorul sistem de ecuații liniare cu coeficienți în inelul \mathbb{Z}_{12} :

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4}, \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1}. \end{cases}$$

16. Fie $U \in M_2(\mathbb{Z}_{12})$ $U = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$ și $\hat{c} = \hat{a}\hat{d} - \hat{c}\hat{b} = \det(U)$.

- 1) Arătați că matricea U este element inversabil al inelului $M_2(\mathbb{Z}_7)$ dacă și numai dacă $\det(U)$ este egal cu $\hat{1}$, $\hat{5}$, $\hat{7}$ sau $\hat{11}$ și

$$U^{-1} = \hat{c}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{d} & -\hat{b} \\ -\hat{c} & \hat{a} \end{pmatrix}.$$

- 2) Următoarele matrice din $M_2(\mathbb{Z}_{17})$ sunt inversabile și găsiți inversele lor:

$$U = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

17. Pe mulțimea $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definim legile de compoziție:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc + bd).$$

Arătați că aceste operații conferă lui K o structură de corp comutativ.

18. Pe mulțimea $K = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim legile de compoziție:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Arătați că aceste operații conferă mulțimii K o structură de corp comutativ.

19. Pe intervalul $K = (0, \infty)$ definim legile de compoziție:

$$x \perp y = xy, \quad \forall x, y \in K, \\ x \top y = x^{1/y}, \quad \forall x, y \in K.$$

Arătați că tripletul (K, \perp, \top) este un corp comutativ.

20. Fie $L = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

1) Arătați că $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 \neq \hat{0}$, $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_3, \hat{x} \neq \hat{0} \text{ sau } \hat{y} \neq \hat{0}$.

- 2) Arătați că L este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z}_3)$ în raport cu adunarea și înmulțirea și că formează corp comutativ cu 9 elemente față de operațiile induse.

21. Pe mulțimea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legile de compoziție:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

- 1) Arătați că A are o structură de inel comutativ în raport cu aceste legi de compoziție.

- 2) Determinați elementele inversabile ale inelului A .

- 3) Arătați că $A \simeq \mathbb{Z}[i]$.

22. Arătați că funcția $f: \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \rightarrow K$

$f(z) = (a - b, 2b)$, $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $z = a + b\sqrt{-3}$ cu $a, b \in \mathbb{Q}$ este un izomorfism de la corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ la corpul K de la Ex. 17.

23. Arătați că corpul \mathbb{C} este izomorf cu corpul K de la Ex. 18.

24. Arătați că corpul \mathbb{R} este izomorf cu corpul K de la Ex. 19.

25. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

1) Arătați că mulțimea K este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Q})$ în raport cu adunarea și înmulțirea și că formează corp în raport cu operațiile induse.

2) Arătați că $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq K$.

26. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe \mathbb{R} definim legile de compoziție :

$$x \perp y = ax + by - 2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$x \top y = xy - 2x - 2y + c, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1) Determinați a, b, c astfel încât $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ să fie corp.

2) Determinați apoi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \alpha x + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

să stabilească un izomorfism de la corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ al numerelor reale la corpul $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

27. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3}$ și $g = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + X + \hat{3}$. Calculați $f + g$ și fg .

28. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_6[X]$, $f = \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{3}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{2}$. Calculați fg .

29. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + \hat{2}X + X + \hat{1}$. Determinați toate polinoamele $g = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}_3[X]$ cu proprietatea : $\overline{g} = \overline{f}$.

30. Enumerați rădăcinile din \mathbb{Z}_6 ale polinomului $f = \hat{3}X^2 + \hat{3}X \in \mathbb{Z}_6[X]$.

31. Să se determine două polinoame f și g de grad 1, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât

$$f^2 + g^2 = X^2 + 1, f(2)g(2) = 2.$$

32. Determinați gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$,

$$f = (\lambda^2 + 3\lambda + 2)X^2 + (\lambda^2 + 4\lambda + 3)X + (\lambda^2 - 1)X + 1, \text{ unde}$$

λ este un parametru real.

33. Să se determine două polinoame f și g de grad 1, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, astfel încât

$$(X^2 + 2X + 2)f + (X^2 + 3X + 3)g = 1.$$

34. Fie K un corp comutativ și $f_1, f_2, f_3 \in K[X]$, grad $f_i = i$, $1 \leq i \leq 3$. Arătați că egalitatea

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \quad (\alpha_i \in K)$$

este posibilă numai în cazul $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Generalizare.

35. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, grad $f \leq 2$. Dacă există trei numere reale diferite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât

$$f(\alpha_i) = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

atunci f este egal cu polinomul zero. Generalizare.

36. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \hat{3}X^2 + X^2 + \hat{2}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$. Aflați câtul și restul împărțirii lui f prin g .

37. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^2 - 3X^2 + aX + b$, $g = X^2 - 2X + 3$. Să se determine a și b astfel încât $g \mid f$.

38. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Determinați coeficienții polinomului f dacă

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

39. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a + bX + X^2$. Determinați a și b astfel încât f să dividă polinomul $X^4 + 1$.

40. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 5X^3 + 18X^2 - 15X + 4$. Folosind schema lui Horner, calculați $f(3)$.

41. Calculați cu schema lui Horner câtul și restul împărțirii polinomului

$$f \in \mathbb{Z}_5[X], f = \hat{5}X^4 + \hat{3}X^2 + X + \hat{2}, \text{ prin } X + \hat{5}.$$

42. Dacă polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ admite două rădăcini întregi de parități diferite, atunci $f(k)$ este par, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

43. Să se descompună în factori ireductibili peste \mathbb{R} și peste \mathbb{C} polinoamele $X^4 + 4$, $X^4 + 27$.

44. Să se descompună în factori ireductibili peste \mathbb{Z}_5 polinomul

$$f = X^4 + X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}.$$

45. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^2 - 2$.

1) Arătați că f este ireductibil peste \mathbb{Q} .

2) Descompuneți în factori ireductibili polinomul f peste \mathbb{R} și peste \mathbb{C} .

46*. Fie $A = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu 4 elemente. Arătați că :

1) Funcția $f: A \rightarrow A$, $f(x) = 1 + x$, $\forall x \in A$ este bijectivă.

2) $\sum_{x \in A} f(x) = 1 + a + b$ și $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

3) Dacă A este corp, atunci $1 + 1 = 0$.

47*. Fie $A = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu patru elemente. Afirmațiile următoare sînt echivalente :

i) A este corp :

ii) Există $x \in A$ astfel încât $1 + x = x^2$.

48*. Fie A un inel astfel încât $x^n = x$, $\forall x \in A$. Arătați că $x^2 = x$, $\forall x \in A$.

49*. Fie A mulțimea tuturor funcțiilor continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Arătați că A este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea funcțiilor reale de variabilă reală :

2) Pentru $f \in A$, $f \neq 0$ există $g \in A$, $g \neq 0$ astfel încât $fg = 0$, dacă și numai dacă mulțimea $\{x \mid f(x) = 0\}$ conține un interval :

3) Determinați funcțiile din A cu proprietatea $f^2 = f$.

50*. Dacă $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ este un morfism de corpuri, atunci $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Determinați apoi automorfismele corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

51*. Fie \mathbb{R} corpul numerelor reale și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un morfism de corpuri. Arătați că $f = 1_{\mathbb{R}}$.

52*. Fie $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, $h = fg$ și $p > 0$ un număr prim. Dacă toți coeficienții lui h se divid prin p atunci cel puțin unul din polinoamele f, g are toți coeficienții divizibili prin p .

53*. Descompuneți în produs de polinoame ireductibile peste corpul \mathbb{Z}_2 polinoamele de grad ≤ 4 din $\mathbb{Z}_2[X]$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL I

3. 1) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = acx + ad + b = f_{ac, ad+b}(x)$; 2) $\alpha = a^{-1}$, $\beta = a^{-1}b$.

4. Pentru orice $x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f_A(x)$ are a 2-a componentă pară, deci f_A nu este surjectivă; pentru orice $y \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $y = (y_1, y_2)$, sistemul de ecuații $3x_1 + x_2 = y_1$, $4x_1 + 2x_2 = y_2$ are soluție unică, deci f_A este bijectivă.

6. Primele egalități prin verificare directă. Apoi se poate continua astfel:

$$R_{\theta} S_{\theta'} = R_{\theta} R_{\theta'} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S_{\theta+\theta'} \text{ etc.}$$

7. Puneți condiția ca A să comute cu matricele $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și se obține că 2) \Rightarrow 1).

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. Inducție după n (v. Teorema 4.2).

13. Avem $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ și $240 = 2^4 \times 3 \times 5$ și se arată că $n^5 - n$ se divide prin 2^4 , 3 și 5 .

16. Se aplică regula lui Cramer.

17. Fie $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Cum $f_A(e_1) = f_B(e_1)$ rezultă că $(a_{11}, a_{21}) = (b_{11}, b_{21})$ iar din $f_A(e_2) = f_B(e_2)$ rezultă $(a_{12}, a_{22}) = (b_{12}, b_{22})$, deci $A = B$ etc.

18. Dacă $A^2 = -E$, atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + bc + 1 = 0$. De

$$\text{exemplu } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

19. Fie $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Atunci $A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și din $A^T A = E$ rezultă:

$$1 = \det(E) = \det(A^T)\det(A) = (ad - bc).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E = A^T A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

deci $ad - bc = \pm 1$, $a^2 + b^2 = 1$, $ac + bd = 0$, $c^2 + d^2 = 1$. Dacă $ad - bc = 1$, atunci $c = -b$, $a = d$. Cum $a^2 + b^2 = 1$, există $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel încât $a = \cos \theta$ și $b = \sin \theta$ etc.

$$20. A) B = \frac{1}{2}(A + A^T), C = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

21. Există n astfel încât $a = bq_0 + r_0$, $b = r_0q_1 + r_1$, $r_0 = r_1q_2 + r_2$, ..., $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$, $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$, cu $0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_0 < b$ (algoritmul lui Euclid pentru a și b). Atunci:

$$r_n = (r_n, 0) = (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = \dots = (r_0, r_1) = (b, r_0) = (a, b).$$

22. Fie $q, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = bq + r, 0 \leq r < b$. Avem:

$$2^a - 1 = 2^{bq+r} - 1 = (2^{bq} - 1)2^r + 2^r - 1 = (2^b - 1)Q + 2^r - 1, \text{ unde}$$

$Q = (2^{b(q-1)} + 2^{b(q-2)} + \dots + 2^b + 1)$ și $2^r - 1 < 2^b - 1$. Deci dacă r este restul împărțirii lui a prin b , atunci $2^r - 1$ este restul împărțirii lui $2^a - 1$ prin $2^b - 1$. În particular, dacă d este ultimul rest diferit de zero din algoritmul lui Euclid pentru a și b , atunci $2^d - 1$ este ultimul rest diferit de zero din algoritmul lui Euclid pentru $2^a - 1$ și $2^b - 1$, de unde $(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{(a, b)} - 1$.

23. Conform Ex. 22 este suficient să arătăm că numerele $6q - 1, 6q + 1, 6q + 2, 6q + 3, 6q + 5, 6q + 7$ sunt relativ prime în perechi. Dacă un număr prim p divide două din ele, atunci divide și diferența lor în valoare absolută. Diferențele în valoare absolută posibile sunt 2, 3, 4, 6, 8, 1, 5, deci p poate fi 2, 3 sau 5. Se observă că 2 divide doar pe $6q + 2$ iar 3 doar pe $6q + 3$. Singura complicație poate apărea când 5 divide pe $6q + 2$ și $6q + 7$ ceea ce se exclude prin ipoteza $q \not\equiv 3 \pmod{5}$.

CAPITOLUL II

1. Vezi Tablele II-1 și II-2.
2. Vezi Tabla II-3.
3. Vezi Tablele II-4 și II-5.
4. Vezi Tablele II-6 și II-7.
5. Dacă $x, y \in (2, \infty)$ atunci $x - 2 > 0, y - 2 > 0$, deci $xy - 2(x + y) + 4 = (x - 2)(y - 2) > 0$. Cum $x \cdot y = xy - 2(x + y) + 4 + \lambda - 4$, trebuie ca $\lambda \geq 6$.
6. Vezi Tabla II-8.

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabla II-1

\otimes	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Tabla II-2

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	1	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

Tabla II-3

\perp	α	β	γ
α	α	α	α
β	α	β	γ
γ	α	γ	γ

Tabla II-4

\top	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	β	β
γ	γ	β	γ

Tabla II-5

\circ	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

Tabla II-8

\perp	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	1	2	1
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	1	6	12

Tabla II-6

\top	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	1	6	12
2	2	2	6	1	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	1	12	1	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

Tabla II-7

7. Elementul neutru este 0. Dacă, $x, y \in [-1, \infty)$ atunci $x + 1 \geq 0, y + 1 \geq 0$, deci $x + y + xy + 1 = (y + 1)(x + 1) \geq 0$, de unde $x * y \in [-1, \infty)$.

8. Operația „ \perp ” admite ca element neutru pe b când H este $[a, b]$ sau $(a, b]$ iar operația „ \top ” admite ca element neutru pe a când H este $[a, b]$ sau $[a, b)$.

9. Operația „ \top ” admite ca element neutru pe 1. Operația „ \perp ” nu admite element neutru, iar cea indusă pe H de „ \perp ” admite ca element neutru pe 12.

12. Dacă $e \in Z$ este element neutru, puneți condițiile $e * 0 = 0$ și $e * 1 = 1$.

13. $(1, n, p), (m, n, 1), (m, 2, 2)$;

14. $a = 0, b = 0$, sau $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

15. $e = 2$.

16. 3) Avem $AV = A, \forall A \in M$ dacă $V = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $e \in \mathbb{R}$.

18. Operația „ $*$ ” nu este asociativă și admite element neutru matricea $\frac{1}{2}E$, unde E este matricea unitate.

20. Fie $x, y \in H, x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}$, atunci $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ și $(ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = a^2(c^2 - 2d^2) - 2b^2(c^2 - 2d^2) = 1$, deci $xy \in H$. Cum $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 = 1$, avem $x^{-1} = a - b\sqrt{2}$.

21. 2) A este simetrizabil dacă și numai dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$ și avem

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -ca^{-1}b^{-1} & b^{-1} \end{pmatrix}.$$

24. $x = 1, y = 2$.

25. Elementul neutru este $(1, 0)$, elementele simetrizabile sunt $(1, b)$ și $(-1, b)$ cu $b \in Z$.

26. Fie $b \in M$ astfel încât $a = aba$. Fie $e = ab$ și $f = ba$. Avem $ey = abaxa = axa = y$ și $yf = axaba = axa = y, \forall y \in M$. În particular $e = ef = f$.

27. Luând x arbitrar, $y = e, u = e$ și $v = e'$ se obține $x = x \perp e$. Luând $x = e', y = e', u = e$ și v arbitrar se obține $v = e \perp v$, de unde $e = e'$. Acum avem $x \perp y = (x \top e) \perp \perp (e \top y) = (x \perp e) \top (e \perp y) = x \top y, \forall x, y \in M$. De asemenea, $x \perp y = (e \top x) \perp \perp (y \perp e) = (e \perp y) \top (x \perp e) = y \top x = y \perp x$.

28. 1) 3^2 ; 2) 3^6 ; 3) 3^5 . În general, pentru o mulțime cu n elemente, avem: $n^{n^2}, n^{n^{(n+1)^2}}, n^{(n-1)^{2+1}}$ respectiv.

30. Orice cuvânt $\alpha \in M$ se poate scrie sub formă $\alpha = \alpha' \alpha''$, unde α' este secvența formată cu primele 5 litere ale lui α ; α'' este secvența formată cu următoarele 3 litere ale lui α . Dacă $\alpha, \beta, \gamma \in M, \alpha = \alpha' \alpha'', \beta = \beta' \beta'', \gamma = \gamma' \gamma''$, atunci $(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha' \beta'') * (\gamma' \gamma'') = \alpha' \gamma'' = = (\alpha' \alpha'') * (\beta' \gamma'') = \alpha * (\beta * \gamma)$.

CAPITOLUL III

1. $\pm 1, \pm i$.

2. Dacă $x, y \in (-1, 1)$, atunci $(x + y)/(x + xy) \in (-1, 1)$. Elementul neutru este 0 iar simetricul lui x este $-x$.

3. Vezi tabla III-1. 4. Vezi Tabla III-2. 5. Vezi Tabla III-3.

	1	e	e ²
1	1	e	e ²
e	e	e ²	1
e ²	e ²	1	e

Tabla III-1

o	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄
f ₁	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄
f ₂	f ₂	f ₁	f ₄	f ₃
f ₃	f ₃	f ₄	f ₁	f ₂
f ₄	f ₄	f ₃	f ₂	f ₁

Tabla III-2

o	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆
f ₁	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆
f ₂	f ₂	f ₃	f ₁	f ₆	f ₄	f ₅
f ₃	f ₃	f ₁	f ₄	f ₅	f ₆	f ₂
f ₄	f ₄	f ₃	f ₂	f ₁	f ₂	f ₃
f ₅	f ₅	f ₆	f ₄	f ₃	f ₁	f ₂
f ₆	f ₆	f ₄	f ₅	f ₁	f ₂	f ₁

Tabla III-3

10. Avem $xyxy = xxyy$. Înmulțind la stânga cu x^{-1} și la dreapta cu y^{-1} , rezultă $xy = yx$.

11. Avem $(xy)^2 = e = ee = x^2y^2$ și se aplică Ex. 10.

12. Pentru x arbitrar și $y = e$ rezultă $x = (x \top x) \top x$. Deci $x \top x = e$, de unde $x \perp y = x \top y$. Aplicând Ex. 11, deducem și $x \perp y = y \perp x$.

13. $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 14. $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

15. Când $h \geq 0$ și $k \geq 0$ demonstrație prin inducție. Dacă $h < 0$ și $k < 0$, atunci $a^h b^k = (a^{-h})^{-1} (b^{-k})^{-1} = (b^{-k} a^{-h})^{-1} = (a^{-h} b^{-k})^{-1} = (b^{-k})^{-1} (a^{-h})^{-1} = b^k a^h$ etc.

16. Din $ab = b^2a$ rezultă că $b^2 = aba^{-1}$. Atunci $b^2 = b^2 b^2 = b^4 = aba^{-1} aba^{-1} = ab^2 a^{-1}$, de unde $b^2 a = ab^2$. Atunci $ab^2 = b^2 ab = b^2 b^2 a = a$, de unde $b^2 = e$. Înmulțind la stânga și dreapta cu b egalitatea $b^2 a = ab^2$ rezultă $ab = ba$.

17. Vezi Teoremele 4.1 și 4.2, Cap. III, § 4.

19. Evident $12\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$. Dacă $a \in 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$, atunci $3 \mid a$ și $4 \mid a$ și cum $(3, 4) = 1$ rezultă că $3 \times 4 = 12$ divide a , deci $a \in 12\mathbb{Z}$.

20. a) $H = (\mathbb{Z}, +)$; b) $H = (\mathbb{Q}, +)$.

24. Se observă că $f(x) \in (-1, 1)$, $\forall x \in (0, \infty)$ și $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

25. Funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lg(x)$, $\forall x \in G$ este un izomorfism de la (G, \cdot) la $(\mathbb{R}, +)$.

26. 1) Vezi Tabla III-4. 2) Definiți $f: \mathcal{X} \rightarrow G$ prin $f(c) = E$, $f(u) = A$, $f(v) = B$ și $f(w) = E$.

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

Tabla III-4

Δ	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	\emptyset	$\{a, b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset	$\{a\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	\emptyset

Tabla III-5

28. Vezi Tabla III-5; 2) $f(e) = \emptyset$, $f(u) = \{a\}$, $f(v) = \{b\}$, $f(w) = \{a, b\}$.

31. 1) \Rightarrow 2). Fie $a \in H$. Cum H este mulțime finită, aplicația $f: H \rightarrow H$, $f(x) = ax$, este bijectivă. Există deci $b \in H$ astfel încât $ab = a$. Atunci $b = e$, deci $e \in H$. Există $a' \in H$ astfel încât $aa' = e$. Dar $a^{-1} = a' \in H$ și deci H este subgrup.

32. 2) \Rightarrow 1). Există $e \in G$ astfel încât $ae = a$. Pentru $b \in G$ avem $be = yae = ya = b$. Analog există $e' \in G$ astfel încât $e'b = b$, $\forall b \in G$. Evident, $e = e'$. Dacă $a \in G$, există a' , $a'' \in G$ astfel încât $a'a = e = aa''$ și cum $a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$ se deduce că a^{-1} există.

33. 1) \Rightarrow 2), Dacă $H = 0 = \{0\}$ se ia $n = 0$. Dacă $H \neq 0$ fie $x \in H$, $x \neq 0$. Cum și $-x \in H$ rezultă că H conține numere întregi strict pozitive și fie $n > 0$ cel mai mic număr strict pozitiv din H . Avem $n\mathbb{Z} \subseteq H$ și folosind teorema împărțirii (prin n) cu rest se arată și $H \subseteq n\mathbb{Z}$.

34. Fie $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Atunci $1 = z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ deci $n\varphi = 2k\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $z = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi$, unde $r = k/n \in \mathbb{Q}$. Reciproc, dacă $r \in \mathbb{Q}$, atunci există $h, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, astfel încât $r = h/n$ și atunci $z^n = 1$ dacă $z = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi$.

35. Notăm elementele $1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ ale lui H astfel încât argumentele lor să satisfacă $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n-1} < 2\pi$. Cum argumentul lui $z_2 z_1^{-1} \in H$ este $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$, rezultă că $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_1$. Exploatând această idee se arată că $\varphi_i = i\varphi_1$ pentru $0 < i < n$ și $n\varphi_1 = 2\pi$. Rezultă că $H = H\zeta = U_n$, unde $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ (v. Ex. R-2, § 4 Cap. III).

36. Fie $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}, +)$ și fie $a = f(1)$. Atunci $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2a$, $f(-2) = -f(2) = -2a$ etc., deci $f(h) = ha$, $\forall h \in \mathbb{Z}$. Cum f este surjectiv, există $b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = f(b) = ba$. Deducem că $a = \pm 1$. Dacă $a = 1$, atunci $f = 1\mathbb{Z}$ iar dacă $a = -1$, atunci $f = -1\mathbb{Z}$.

CAPITOLUL IV

1. Elementul zero al lui A este $(0, 0)$, elementul unitate este $(1, 0)$. Dacă $(a, b)(x, y) = (0, 0)$, atunci $ax + 3by = 0$ și $bx + ay = 0$. Când $(a, b) \neq (0, 0)$ avem $\det \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 - 3b^2 \neq 0$, de unde $x = 0$, $y = 0$, deci A nu are divizori ai lui zero.

3. Dacă „ \perp ” și „ \top ” satisfac condițiile din enunț, atunci pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$ avem $x + y - a = (x - a) \perp (y - a)$ și $xy - a = (x - a) \top (y - a)$. Observând că f este bijectiv și notând $x - a = u$, $y - a = v$, avem $u \perp v = u + v + a$ și $u \top v = uv + au + av - a^2 - a$, $\forall u, v \in \mathbb{Z}$. Elementul zero este $-a$, elementul unitate este $1 - a$.

5. Elementul zero este $(0, 0)$ iar $(1, 1)$ este elementul unitate al lui A . Elementele inversabile sunt $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ și $(-1, -1)$.

7. 1) $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(4, 1)$, $(4, -1)$, $(5, 1)$, $(5, -1)$, $(7, 1)$, $(7, -1)$, $(8, 1)$, $(8, -1)$.

8. Vezi Tablele IV.1 și IV.2.

+	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 0)

Tabla IV. 1.

	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(1, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 0)
(0, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 1)
(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)

Tabla IV. 2.

9. $x + x = (x + x)^2 = (x + x)(x + x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x + x + x$, de unde $x + x = 0$ și deci $x = -x$, $\forall x \in B$. De asemenea, $x + y = (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + yx + xy + y^2 = x + yx + xy + y$, de unde $yx + xy = 0$, deci $yx = -xy = xy$.

10. 1) 16 ; 3) Există 6 elemente inversabile.

12. 1) $a \oplus a \oplus a \oplus a \oplus a = (1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1) \otimes a = 0 \otimes a = 0$.
2) Se observă că $5 \mid C_5^k$, $0 < k < 5$ și se aplică 1) și Ex. 11.

13. 1) Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $ac = 0$; 2) $(E - U)(E + U) = E$

14. Vezi tabla IV.3.

15. $x = \hat{2}, y = \hat{11}$.

	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\hat{11}$	$\hat{7}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$
$\hat{11}$	$\hat{11}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{1}$

Tabla IV. 3.

21. 2) $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$; 2) Aplicația $f: \mathbb{Z}[i] \rightarrow A, f(z) = (a, b), \forall z \in \mathbb{Z}[i], z = a + ib$, este izomorfism.

23. Aplicația $f: \mathbb{C} \rightarrow K, f(z) = (a, b), \forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib$ este izomorfism.

24. Aplicația $f: K \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x, \forall x \in K$, este un izomorfism.

25. Aplicația $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2})^* \rightarrow K, f(z) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, \forall z \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), z = a + b\sqrt{2}$ este izomorfism.

26. 1) $a = b = 1, c = 6$; 2) $\alpha = 1, \beta = 2$.

27. $f + g = X^2 + \hat{4}X + \hat{4}, fg = X^6 + X^2 + \hat{4}X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{2}X + \hat{3}$.

28. $fg = 0$.

29. $\hat{2}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{1}, X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}, \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$.

30. $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$.

31. Fie $f = ax + b, g = cX + d$. Punând condiția $f^2 + g^2 = X^2 + 1$ rezultă $a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0$. De asemenea, $(2a + b)^2 + (2c + d)^2 = 5, (2a + b)(2c + d) = 2$. Deci $2a + b$ și $2c + d$ sunt rădăcinile ecuației $t^2 - 5t + 2 = 0$. Se găsește $f = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}$,

$g = \frac{3}{5}X - \frac{4}{5}$ etc.

32. grad f este 0 dacă $\lambda = 1$; 2 dacă $\lambda = 2$; 3 dacă $\lambda \neq 2$ și $\lambda \neq 1$.

33. $f = X + 2, g = -X - 1$.

36. $q = \hat{4}X^2 + \hat{4}X + \hat{2}, r = \hat{3}X + \hat{2}$.

37. $a = 14, b = -3$.

38. $f = -1 + 4X - 6X^2 + 4X^3$.

39. $a = \pm i, b = 0; a = 1, b = \pm\sqrt{2}; a = -1, b = i\sqrt{2}$.

40. $f(3) = 196$.

41. $q = \hat{5}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{5}, r = \hat{5}$.

42. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$, $a = 2s$, $b = 2t + 1$, astfel încât $f(a) = f(b) = 0$. Cum $a \neq b$, polinomul $(X - a)(X - b)$ divide pe f , deci există $q \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $f = (X - 2s)(X - 2t - 1)q$. Se observă că pentru orice $k \in \mathbf{Z}$ unul din numerele $k - 2s$, $k - 2t - 1$ este par.

43. $X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2) = (X + 1 - i)(X + 1 + i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)$, $X^3 + 27 = (X^2 + 3)(X^2 + 3X + 3)(X^2 - 3X + 3) = (X + i\sqrt{3})(X - i\sqrt{3})(X + z)(X + \bar{z})(X - \bar{z})(X - z)$, unde $z = (3 + i\sqrt{3})/2$.

$$44. f = (X + \hat{2})(X + \hat{3})(X^2 + X + \hat{1}).$$

45. 1) v. Ex. 2, § 7; 2) $f = (X - \sqrt[3]{2})(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4}) = (X - \sqrt[3]{2})(X - \sqrt[3]{2}\varepsilon)(X - \sqrt[3]{2}\varepsilon^2)$, unde $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

46. Cum A este mulțime finită este suficient să arătăm că f este funcție injectivă. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $1 + x_1 = 1 + x_2$, de unde $x_1 = x_2$, căci $(A, +)$ este grup. Așadar $A = \{f(0), f(1), f(a), f(b)\}$, deci $f(0) + f(1) + f(a) + f(b) = 0 + 1 + a + b$, ceea ce în grupul $(A, +)$ atrage $1 + 1 + 1 + 1 = 0$. Dacă A este corp și $1 + 1 \neq 0$, atunci $0 \neq (1 + 1)^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$. Contradicție.

48. Cum $1 = (-1)^0 = -1$, avem $1 + 1 = 0$, deci $a + a = a(1 + 1) = a \cdot 0 = 0$, $\forall a \in A$. Avem: $1 + x = (1 + x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^k = x + x^4 + x^2 + 1$, de unde $x^4 = -x^2 = x^2$.

În fine, $x = x^6 = x^4 \cdot x^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4 = x^2$.

49. 2) Fie $f \in A$, $f \neq 0 = f_0$, unde $f_0(x) = 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$ este elementul zero al inelului. Fie $I = (a, b) \subset [0, 1]$ cu $a < b$ astfel încât $f(x) = 0 = f_0$ pentru orice $x \in (a, b)$.

Definim funcția $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$g(x) = \begin{cases} (x - a)(x - b) & \text{dacă } x \in I \\ 0 & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus I \end{cases}$$

iar g este o funcție continuă cu $g \in 0$ și $fg = 0$, unde f este un divizor al lui zero.

Reciproc: dacă pentru $f \in A$, $f \neq 0$, $\exists g \in A$, $g \neq 0$ astfel încât $fg = 0$. Fie $x' \in [0, 1]$ astfel încât $g(x') \neq 0$. Cum g este continuă, există $I \subset [0, 1]$ astfel încât $x' \in I$ și $g(x) \neq 0$, orice $x \in I$. Cum $f_0(x) = 0 = f(x) \cdot g(x)$, orice $x \in I \Rightarrow f(x) = f_0(x) = 0$, pentru orice $x \in I$.

3) Cum $f^2 = f$ atunci $f(f - f_1) = 0 \Rightarrow f(x)[f(x) - 1] = 0$ pentru orice $x \in [0, 1] \Rightarrow f(x) \in \{0, 1\}$, orice $x \in [0, 1]$, unde f_1 este elementul unitate al inelului, cu $f_1(x) = 1$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Cum $f([0, 1]) \subset \{0, 1\}$, iar f este continuă, și aplicând proprietatea lui Darboux obținem $f = f_0$ sau $f = f_1$.

50. Avem $f(1) = 1$, $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(-2) = -f(2) = -2$, în general, $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$. Dacă $r \in \mathbf{Q}$, atunci $r = mn^{-1}$, cu $m, n \in \mathbf{Z}$, de unde $f(r) = (f(mn^{-1})) = f(m)f(n^{-1}) = f(m)(f(n))^{-1} = mn^{-1} = r$. Fie g un automorfism al lui $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Evident $g(r) = r$, $\forall r \in \mathbf{Q}$. Dacă $x = a + b\sqrt{2}$, cu $a, b \in \mathbf{Q}$, atunci $g(x) = g(a) + g(b)g(\sqrt{2}) = a + bg(\sqrt{2})$. Dar $2 = g(2) = g(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = g(\sqrt{2})g(\sqrt{2}) = (g(\sqrt{2}))^2$; deducem că $g(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. Dacă $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, atunci g este automorfismul identic, iar dacă $g(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, atunci g este automorfismul cu acțiune $a + b\sqrt{2} \rightarrow a - b\sqrt{2}$.

51. Se observă că $f(r) = r$, $\forall r \in \mathbf{Q}$ (v. Ex. 50). Dacă $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, atunci $f(x) > 0$. În adevăr, fie $y \in \mathbf{R}$, $y > 0$ astfel încât $y^2 = x$. Atunci $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 > 0$.

Fie $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ și $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, $x - \varepsilon < r_1 < x < r_2 < x + \varepsilon$. Atunci $f(x - \varepsilon) < f(r_1) < f(x) < f(r_2) < f(x + \varepsilon)$, deci $r_1 < f(x) < r_2$, de unde $|f(x) - x| < \varepsilon$. Rezultă că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

CUPRINS

Cap. I: PRELIMINARII

1. Numere	3
2. Mulțimi și funcții (recapitulare)	5
3. Matrice (recapitulare)	7
4. Numere relativ prime (recapitulare)	9
Exerciții	12

Cap. II. LEGI DE COMPOZIȚIE

1. Noțiunea de lege de compoziție. Exemple	16
2. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă	18
3. Tabla unei legi de compoziție	19
4. Asociativitate	21
5. Comutativitate	22
6. Element neutru	25
7. Elemente simetrizabile	26
8. Proprietăți ale adunării și înmulțirii modulo n	29
Exerciții	33

Cap. III. GRUPURI

1. Monoizi	37
2. Definiția grupului. Exemple	41
3. Reguli de calcul într-un grup	44
4. Subgrup. Exemple	48
5. Morfisme de grupuri	51
Exerciții	56

Cap. IV. INELE ȘI CORPURI

1. Definiția inelului. Exemple	61
2. Reguli de calcul într-un inel	64
3. Inelul claselor de resturi modulo n	66
4. Corpuri	71
5. Morfisme de inele și corpuri	75
6. Polinoame cu coeficienți într-un inel comutativ	78
7. Polinoame ireductibile. Descompunerea polinoamelor în produs de factori ireduc- tibili	85
Exerciții	89
Indicații și răspunsuri	94

Lei 800

ISBN 973-30-3106-2

Nr. colilor de tipar . 6,50
Bun de tipar : 6.XII.1994



Comanda nr. 40572/41246/95
Regia Autonomă a Imprimeriilor
Imprimeria „CORESI“ București
ROMANIA