

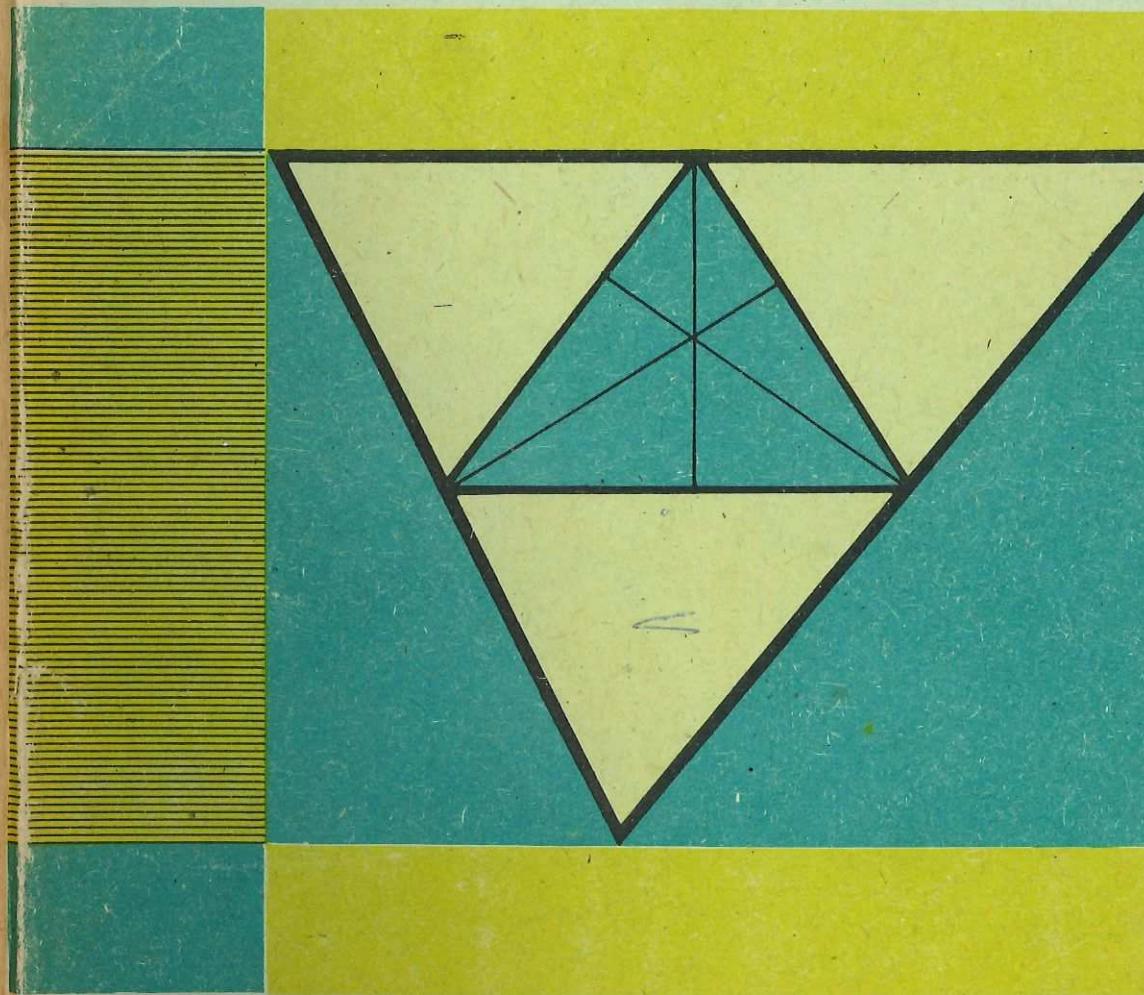
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

IX Matematică

Geometrie și trigonometrie

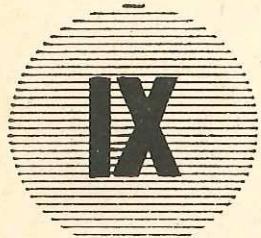
Manual pentru clasa a IX-a

Matematică – Manual pentru clasa a IX-a



Augustin Coță
Mariana Răduțiu

Marta Radó
Florica Vornicescu



Matematică

Geometrie și trigonometrie

Manual pentru clasa a IX-a



Editura Didactică și Pedagogică
București

Manualul a fost elaborat în anul 1981 pe baza programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39438/1980.

Referenți: Prof. univ. Gheorghe Galbură
Prof. univ. Dan Papuc
Prof. Ioan Maftei
Prof. Liliana Niculescu
Prof. Marcel Tena
Prof. Viorel Zaharia

La definitivarea manualului s-a ținut seamă și de propunerile unor colective de cadre didactice din orașele Alexandria, Craiova și Timișoara, care au analizat proiectul de manual.

Notătii folosite în acest manual

Puncte: A, B, C, \dots
Drepte: a, b, c, \dots
Segmentul deschis (AB)
Segmentul închis $[AB]$
Semidreapta deschisă $(AB$
Semidreapta închisă $[AB$
Distanța de la A la B } AB
Lungimea segmentului AB
Planul determinat de o dreaptă d
și de un punct A nesituat pe d (dA) sau (Ad)
Semiplan deschis $(dA$
Semiplan închis $[dA$
Plane $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Redactor: Prof. Valentin Radu
Tehnoredactor: Ilinca Prosan
Coperta: Nicolae Sirbu

Prefață

În multe țări, printre care și în țara noastră, s-a trecut la predarea axiomatică a geometriei în liceu.

Se pune întrebarea: ce fel de axiome să stea la baza manualului de Geometrie pentru clasa a IX-a?

Ținând seama de dificultățile conceptuale și tehnice legate de axiomatica lui Hilbert, s-au propus și s-au pus în aplicare, în diferite țări, variante sisteme de axiome, mai accesibile pentru elevi. Avem la dispoziție, în limba română: traducerile manualelor Alef zero, care prezintă de fapt un model algebric al geometriei (definind succesiv structurile vectoriale, affine și metrice) și care au la baza lor axiomaticile lui H. Weyl, respectiv J. Dieudonné; traducerea din limba rusă a manualului de geometrie pentru clasele VI—VIII, redactat de un colectiv condus de academicianul A.N. Kolmogorov; traducerea din limba engleză a cărții lui E. Moise „Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior”, în care se expune într-o formă modificată sistemul de axiome propus de G.D. Birkhoff (în 1932) și care stă la baza noilor manuale de geometrie în S.U.A. Menționăm că se folosesc și sisteme de axiome care modelează grupul generat de simetriile axiale plane, de exemplu cel al lui G. Pickert. În axiomatica lui Kolmogorov simetriile axiale ocupă de asemenea un loc central.

Dintre toate acestea am adoptat axiomele lui G.D. Birkhoff în varianta lui E. Moise cu mici modificări, criteriile noastre fiind următoarele:

- menținerea unui paralelism între nivelul abstract și cel concret al gândirii;
- reflectarea și posibilitatea interpretării cunoștințelor cît mai direct în realitatea fizică;
- asigurarea unui grad sporit de accesibilitate;
- posibilitatea participării active a elevilor la lecții;
- integrarea cunoștințelor de geometrie în ansamblul învățământului matematic;
- valorificarea tradițiilor învățământului de geometrie din țara noastră.

La redactarea manualului ne-am bazat pe unele cunoștințe de logică matematică, mulțimi, funcții, numere reale pe care elevii le au din clasele anterioare sau le obțin în primele lecții de la cursul de algebră.

Simplificarea realizată prin axiomatica lui Birkhoff, ca de altfel și prin aceea a lui Kolmogorov, rezidă în acceptarea distanței printre noțiunile fundamentale ale geometriei și în atragerea în acest mod a numerelor reale în tratarea geometriei.

Menționăm că în acest mod geometria unidimensională va fi algebrizată, tratarea aspectelor bidimensionale rămnind sintetică, apropiată de cea tradițională. Capitolul cu privire la puținele elemente de geometrie analitică se leagă organic de tratarea sintetică prin punerea în prim plan a teoremei directe și reciproce a lui Pitagora.

Este clar că pentru începători problema independenței axiomelor se situează pe un ultim plan. Totuși menționăm că axioamele noastre sunt independente, ceea ce nu înseamnă însă că nu pot fi înlocuite cu axioane mai slabe. Din axioma riglei, ultima parte poate fi eliminată, axioma de separare a planului poate fi înlocuită cu axioma lui Pasch, iar axioma L.U.L. poate fi restrânsă la formularea lui Hilbert, dar nu fără a cauza unele complicații tehnice. Măsura unghiurilor poate fi scoasă dintre noțiunile fundamentale și atunci axioma U.3. devine superfluo, dar acest lucru creează dificultăți mai mari.

Credem că este un avantaj că noțiunile delicate de „a fi între“ și „congruență“ au primit definiții directe, proprietățile de ordonare devenind exerciții cu module. De asemenea, s-au eliminat dificultățile legate de aspectul dublu al proprietăților de continuitate (pe dreaptă și în \mathbb{R}).

Cu privire la capitolul IV dorim să observăm că instrumentul principal este formula distanței între două puncte. Din această formulă decurge imediat condiția de perpendicularitate, iar de aici ecuația dreptei. Cu aceleași mijloace stabilim formula $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, fără a fi necesar să se deosebească mai multe cazuri.

În legătură cu folosirea materialelor bibliografice tradiționale trebuie să arătăm că în geometrie avem proprietăți de: incidentă (coliniaritate și concurență), congruență, paralelism și ordonare (poziția unui punct pe un segment, pe o semidreaptă, într-un semiplan sau a unei semidrepte în interiorul unui unghi etc.); soluția tradițională a unei probleme mai complexe constă în rezolvarea riguroasă a aspectelor de incidentă, congruență și paralelism și admiterea unor situații de ordonare pe bază intuitivă. De regulă, o asemenea soluție poate fi completată (uneori cu ușurință, alteori mai greu, eventual cu analiza mai multor cazuri posibile). Dacă s-a atins un anumit nivel de pregătire și elevul a înțeles legătura dintre intuiție și deducție, și soluția tradițională poate fi acceptată (sub rezerva posibilității de completare).

De aceste considerații se leagă și o observație cu privire la rezolvarea problemelor de geometrie cu un grad de dificultate mai ridicat. După ce problema a fost abordată la nivel concret, în mod intuitiv, pe baza desenului, soluția întrezărită va fi controlată în mod riguros mai întâi sub aspectul proprietăților de incidentă, congruență și paralelism (deci în mod tradițional) și abia după aceea în privința ordonărilor. Într-o ultimă fază rezolvarea se redactează la nivel abstract. Acest procedeu se motivează prin faptul că momentul decisiv în găsirea soluției este cel tradițional, în timp ce aspectele de ordonare sunt mai tehnice.

Părțile din text însemnate cu o linie laterală nu sunt obligatorii.

Teoremele trebuie să fie reținute întocmai, chiar dacă demonstrațiile sunt facultative, căci problemele nu pot fi abordate cu succes decât pe temeiul cunoașterii sigure a teoremelor.

Unele dintre exercițiile și problemele din manual au fost preluate din alte manuale, culegeri de probleme și Gazeta matematică, fără a mai indica sursa.

Ne face o deosebită placere să mulțumim profesorului universitar Radó Francisc pentru sprijinul acordat și sugestiile sale la elaborarea acestui manual.

Mulțumim de asemenea colectivelor de cadre didactice din Timișoara, Alexandria, Craiova, Constanța, Galați, referenților și colegilor pentru observațiile făcute, care ne-au fost de un real folos în definitivarea acestui manual.

Autorii

Incidență, ordonare, congruență

§ 1. Studiul axiomatic al geometriei

Cunoștințele de geometrie le obținem în două moduri: *intuitiv* și *deductiv*. Cunoștințele intuitive sunt extrase din observații și experiențe. Din anumite cunoștințe geometrice putem deduce cu ajutorul logicii alte cunoștințe; acestea din urmă sunt obținute pe cale deductivă, prin *demonstrație*, fără a se recurge la intuiție.

În tratarea modernă a geometriei se caută a se prezenta cât mai multe proprietăți pe cale deductivă. Bineînțeles, cunoștințele intuitive nu pot fi eliminate complet, căci geometria prin ele se ancorează în lumea reală, obiectivă. Pe de altă parte noi trebuie să avem la dispoziție de la început o colecție de proprietăți geometrice, din care apoi să putem deduce altele. Această colecție se limitează la un minim de propoziții, care se numesc *axiome*. Axiomele sunt admise fără demonstrație și reprezintă punctul de plecare în tratarea geometriei.

În axiome și în consecințele lor intervin noțiuni de logică și de teoria mulțimilor și noțiunea de număr real, pe care le presupunem cunoscute. Afară de acestea, în axiome apar cîteva noțiuni specifice geometriei, numite *noțiuni geometrice fundamentale*. Aceste noțiuni, extrase din lumea obiectivă, nu primesc în geometrie o definiție directă, însă sistemul de axiome constituind definiția lor. Celelalte noțiuni geometrice sunt introduse cu ajutorul noțiunilor fundamentale prin definiții directe. Proprietățile geometrice demonstrează cu ajutorul axiomelor și definițiilor se numesc *teoreme* (cele de importanță mai mică sau care pregătesc alte teoreme se mai numesc *leme* sau *propoziții*).

Așadar, la baza unui studiu modern al geometriei stau noțiunile fundamentale și axiomele care exprimă proprietăți ale acestor noțiuni. Există diverse posibilități de a alege din multitudinea de noțiuni și proprietăți geometrice noțiunile fundamentale și axiomele. Noi vom considera următoarele noțiuni fundamentale: *punct*, *dreaptă*, *plan*, *distanță* și *măsura unghiurilor**.

* În axiomatica lui Hilbert noțiunile fundamentale sunt: punctul, dreapta, planul, incidența, relația „între“ și congruența.

In acest manual vom studia *geometria în plan* în care se consideră existența unui singur plan. Axiomele acestei geometrii le grupăm în axiome de incidentă, axioma riglei, axioma de separare a planului, axiomele unghiului, axioma de congruență și axioma paralelezelor. Treptat, după ce vom introduce cîte o axiomă, vom defini imediat unele noțiuni și vom demonstra un număr de teoreme. Se recomandă să reținem care dintre teoreme se bazează numai pe o parte dintre axiome, căci astfel vom înțelege mai profund legătura logică dintre proprietățile geometrice și ne vom însuși esența metodei axiomatice în matematică.

Prima prezentare axiomatică a geometriei a fost dată de Euclid (365—300 î.e.n.), care a servit ca model pentru cărțile de geometrie pînă la sfîrșitul secolului trecut. Axiomatica lui Euclid nu este perfectă; în axiome nu se vorbește de pildă despre proprietăți de ordonare și din această cauză în demonstrații se face uz de intuiție în mod tacit. Primul sistem axiomatic complet al geometriei a fost dat de D. Hilbert în 1899. În acest manual, aşa cum am arătat și în prefăță, se pleacă de la axiomele lui G.D. Birkhoff*, într-o formă ușor modificată.

În țara noastră geometria a stat în atenția mulților savanți iluștri, care pe lîngă cercetările lor originale au realizat și valoioase lucrări didactice, impulsând învățămîntul geometric românesc. Dintre ei amintim pe Gheorghe Tițeica (1873—1939), Alexandru Myller (1879—1965), Gheorghe Vrânceanu (1900—1979), care au întemeiat o renumită școală de geometrie diferențială, pe Traian Lalescu (1882—1929), Dimitrie Pompeiu (1873—1954), care odată cu cercetările lor de analiză matematică au adus o remarcabilă contribuție și în geometrie. Cu studii de axiomatice geometriei s-a preocupat renumitul algebrist Dan Barbilian (1895—1961), cunoscut și ca poet sub pseudonimul Ion Barbu. Gazeta Matematică (înființată în 1895) antrenează și stimulează tineretul în studiul geometriei.

§ 2. Axiomele de incidentă ale geometriei în plan

Primul grup de axiome se enunță astfel:

I.1. Planul este o mulțime de puncte, pe care o notăm cu \mathcal{P} .

I.2. Orice dreaptă este o submulțime a lui \mathcal{P} .

I.3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. În plan există trei puncte care nu sunt situate pe aceeași dreaptă.

I.4. Prin două puncte distințe trece o dreaptă și numai una.

Dacă A este un punct și d o dreaptă, relația $A \in d$ se citește astfel: punctul A aparține dreptei d sau A este situat pe d sau d conține pe A sau d trece prin A sau punctul A și dreapta d sint incidente. Punctele A, B, C se zic coliniare, dacă există o dreaptă d astfel ca $A \in d, B \in d, C \in d$.

Fie A și B două puncte diferite. Potrivit axiomei I.4 există o singură dreaptă d astfel încît $A \in d$ și $B \in d$; această dreaptă d va fi notată cu AB .

Teoremă. Două drepte diferite au cel mult un punct comun.

Demonstrație. Să presupunem că teorema nu este adeverată. Atunci există două drepte d_1, d_2 și două puncte P, Q astfel încât $d_1 \neq d_2, P \neq Q$,

* George David Birkhoff (1884—1944) matematician american.

$P, Q \in d_1$, $P, Q \in d_2$. Conform axiomei I.4 $d_1 = PQ$, $d_2 = PQ$, deci $d_1 = d_2$, în contradicție cu $d_1 \neq d_2$. Așadar presupunerea noastră ne-a condus la o contradicție. Rezultă că teorema este adevărată.

Observație. Metoda folosită în această demonstrație se numește *metoda reducerii la absurd*. Ea constă în a arăta că negarea concluziei teoremei conduce la o contradicție.

Exercițiil

1. Oricare ar fi dreapta d , putem găsi în planul \mathcal{P} un punct nesituat pe d .

Rezolvare. Presupunând contrariul, toate punctele planului sunt situate pe dreapta d , ceea ce este în contradicție cu axioma I.3.

2. Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, dreptele AB, BC, CA sunt distințe două cîte două.

3. Presupunind că există în \mathcal{P} punctele A, B, C, D dintre care nu avem trei coliniare, să se arate că dreptele AB, AC, AD, BC, BD, CD sunt distințe două cîte două.

4*. Să presupunem că A, B, C, D, E sunt cinci puncte diferite, A, B, C sunt coliniare și $D, E \notin AB$. Dintre dreptele $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$ cîte pot fi distințe cel mult? Arătați o situație în care avem mai puține drepte distințe.

5*. Pot exista 5 puncte în \mathcal{P} astfel încît unite două cîte două, să obținem exact 7 drepte distințe?

§ 3. Distanța și axioma rigliei

Știm din experiență că fixind o „unitate de măsură” (un „segment etalon”) și folosind procedeul de măsurare, fiecărei perechi de puncte putem face să-i corespundă un număr real (nenegativ) unic, „distanța între cele două puncte”.

În tratarea noastră, *distanța este o noțiune fundamentală*. Admitem deci că oricare ar fi punctele $A, B \in \mathcal{P}$ există un număr real unic, notat cu AB sau $d(A, B)$, care se numește *distanța între A și B*.

Pentru două puncte oarecare A și B , distanța AB este un număr real unic.

Observație. În aplicațiile practice se folosesc mai multe unități de măsură, de exemplu 1 m, 1 km, 1 cm etc.; în aceste cazuri trebuie să se indice unitatea respectivă. Spre deosebire de această situație, la noi distanța este un număr real. De exemplu $d(A, B) = AB = 5$ și nu 5 cm.

| Noțiunea fundamentală este de fapt o funcție $\delta : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, numită *funcție distanță*. Într-adevăr, știm că un element oarecare al produsului cartezian $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ este o pereche de puncte (A, B) și deoarece acesteia îi corespunde numărul real AB determinat în mod unic, avem o funcție definită pe mulțimea $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu valori în \mathbb{R} .

În clasa a VII-a s-a învățat despre reprezentarea numerelor reale pe o dreaptă, ceea ce permite să definim o funcție bijectivă f între mulțimea punctelor unei drepte d și mulțimea numerelor reale \mathbb{R} . Intuitiv, punem în evidență această funcție însemnînd unele puncte de pe dreapta d și scriind sub ele numerele care le corespund, de exemplu punctului A îi corespunde 2, punctului

* Problemele prevăzute cu steluță se adresează cercurilor de elevi.

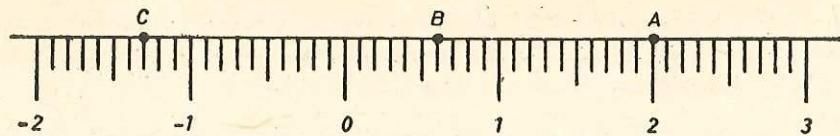


Fig. I.1

B 0,6 punctului C $-1,3$ (fig. I.1). În acest fel dreapta d apare ca o „riglă gradată infinită“. Cu ajutorul ei putem cunoaște distanța dintre două puncte situate pe dreapta d . Pe figura I.1 avem $AB = BA = 1,4$, $AC = CA = 3,3$, $BC = CB = 1,9$. Observați că distanțele sunt pozitive, în timp ce gradăriile (valorile funcției f) pot fi pozitive sau negative.

Prin axioma următoare admitem existența și precizăm proprietățile acestei funcții f .

R. (Axioma riglei.) — Fie d o dreaptă oarecare și $A, B \in d$ două puncte distincte. Fiecărui punct $M \in d$ îi putem face să-i corespundă un număr real unic x_M astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiții:

- 1) Pentru fiecare număr real a există un singur punct $P \in d$ cu $x_P = a$.
- 2) $x_A = 0$, $x_B > 0$.
- 3) Oricare ar fi punctele $P, Q \in d$, avem

$$(1) \quad PQ = |x_Q - x_P|.$$

Prin această axiomă se mai precizează că funcția $f : d \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(M) = x_M$, este determinată în mod unic de condițiile 1), 2) și 3).

Definiție. Funcția $f : d \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *sistem de coordonate pentru dreapta d* (sau *pe dreapta d*), punctul A *originea* lui, iar numărul x_M *abscisa* sau *coordonata* punctului M (în sistemul de coordonate considerat).

Observații. Condiția 1) arată că funcția $f : d \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă.

Condiția 2) arată că oricum s-ar da două puncte M și N pe o dreaptă d , există un sistem de coordonate pentru care abscisa lui M este 0, iar abscisa lui N este pozitivă (M reprezintă originea sistemului de coordonate, iar rolul lui N este de a preciza un sens de parcurgere pe dreaptă) (fig. I.2, a și b). Dacă s-ar permite și modificarea „unității de măsură“ am putea

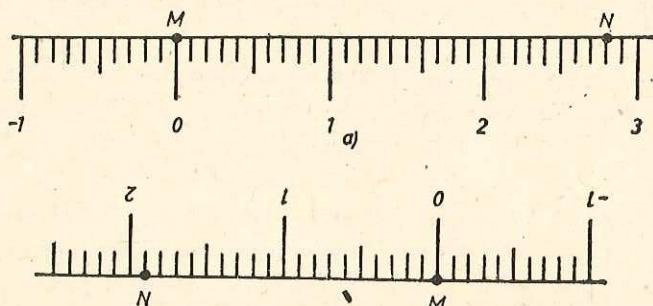
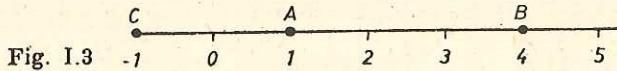


Fig. I.2



asocia punctului dat N abscisa 1, lucru care în teoria noastră nu este posibil, deoarece — precum s-a precizat — funcția distanță este fixată.

Condiția 3) indică o legătură între distanțe și abscise. Dacă cunoaștem abscisele a două puncte, putem calcula distanța dintre ele cu ajutorul formulei (1). De exemplu, în cazul figurii I.3 $x_A = 1$, $x_B = 4$ și $AB = 3 = |x_B - x_A|$; sau $x_A = 1$, $x_C = -1$ și $AC = 2 = |x_C - x_A| = |-1 - 1| = |-2|$.

Theoremă. Oricare ar fi punctele P și Q , au loc următoarele proprietăți:

$$(2) \quad PQ \geq 0,$$

$$(3) \quad PQ = 0 \Leftrightarrow P = Q,$$

$$(4) \quad PQ = QP.$$

Oricare ar fi punctele P , Q , R pe o dreaptă d , avem

$$(5) \quad PR \leq PQ + QR.$$

Demonstrație. Fie d o dreaptă ce conține punctele date P și Q . Conform axiomei riglei există un sistem de coordonate pe d și avem

$$PQ = |x_Q - x_P| \geq 0;$$

$$PQ = |x_Q - x_P| = |x_P - x_Q| = QP;$$

$$PQ = 0 \Leftrightarrow |x_Q - x_P| = 0 \Leftrightarrow x_P = x_Q \Leftrightarrow P = Q,$$

ultima echivalență rezultând din condiția 1) (sau altfel spus din faptul că funcția $f : d \rightarrow \mathbb{R}$, $f(M) = x_M$ este injectivă). În cazul $R \in d$ putem scrie

$$\begin{aligned} PR &= |x_R - x_P| = |(x_R - x_Q) + (x_Q - x_P)| \leq \\ &\leq |x_R - x_Q| + |x_Q - x_P| = QR + PQ. \end{aligned}$$

Observație. Deoarece la haza noștiunii de distanță stă procedeul de măsurare, s-ar părea că ar fi fost mai natural să definim distanța ca un număr pozitiv, și nu ca un număr real. Atragem din nou atenția asupra faptului că în axiome postulăm că se poate de puțin; presupunând numai $PQ \in \mathbb{R}$, din teoremă rezultă $PQ \geq 0$.

Exercițiil

1. Fie $AB = 4$. Există un sistem de coordonate pe AB cu $x_A = 5$, $x_B = 8$?
2. $x_A = -2$, $x_B = 3$, $x_C = 10$. Să se afle AB , AC și BC .
3. Într-un sistem de coordonate pe dreapta AB , $x_A = 3$, $AB = 5$, $x_B < 0$. a) Să se afle x_B . b) Să se determine x_G știind că $C \in AB$, $BC = 7$ și $AC < BC$.

4*. $x_A = -2$, $x_B = 5$; să se determine punctele $M, N \in AB$, știind că $AM = 4$, $MN = 1$, $NB = 2$.

5*. $x_A = 1$, $x_B = 4$. Să se afle $M, N \in AB$, știind că $AM = 1$, $MN = 4$, $NB = 2$.

§ 4. Segmente, semidrepte și unghiuri

Intuitiv, pe figura I.4 punctul M este „între A și B “. Dăm definiția acestei noțiuni.

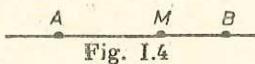


Fig. I.4

Definiții. Fie A și B puncte diferite. Zicem că punctul M este între A și B (sau M separă punctele A și B) dacă

(1) A, M, B sunt puncte coliniare diferite

și

(2) $AM + MB = AB$.

Prin segmentul deschis (AB) înțelegem mulțimea punctelor între A și B , iar segmentul inchis $[AB]$ este mulțimea $(AB) \cup \{A, B\}$.

Așadar

(3) $[AB] = \{M \in AB \mid AM + MB = AB\}$,

(4) $(AB) = [AB] - \{A, B\}$.

Notățile (AB) și $[AB]$ pot fi folosite și în cazul $A = B$, dar atunci nu înseamnă segmente: $(AA) = \emptyset$, $[AA] = \{A\}$.

Prin lungimea segmentului $[AB]$ se înțelege distanța AB .

Exerciții

1. Arătați că egalitatea (2) este satisfăcută dacă $M = A$ și dacă $M = B$.

2. Demonstrați: dacă C este între A și B , atunci C este și între B și A .

Indicație. Se admit condițiile (1) și (2). Trebuie să demonstrăm (1) și (2) cu literele A și B schimbată între ele. Se ține seama de formula (4) de la § 3.

3. Să se arate că $[AB] = [BA]$.

4. Fie $C \in AB$, $x_A = 2$, $x_B = 10$, $x_C = 4$. B este între A și C ? dar C între A și B ? dar A între A și B ?

Indicație. Deoarece $AB = |x_B - x_A| = 8$, $BC = |4 - 10| = 6$ și $AC = |4 - 2| = 2$, condiția (2) nu este satisfăcută, deci B nu este între A și C . C este între A și B . Punctul A nu este între A și B , căci condiția (1) nu este satisfăcută.

Segmentele pot fi caracterizate cu ajutorul absciselor:

Teorema 1. Oricare ar fi sistemul de coordonate pe dreapta AB , dacă $x_A < x_B$, avem

$$(5) \quad [AB] = \{M \in AB \mid x_A \leq x_M \leq x_B\},$$

$$(6) \quad (AB) = \{M \in AB \mid x_A < x_M < x_B\},$$

iar dacă $x_A > x_B$

$$(7) \quad [AB] = \{M \in AB \mid x_B \leq x_M \leq x_A\},$$

$$(8) \quad (AB) = \{M \in AB \mid x_B < x_M < x_A\}.$$

Demonstrație. Fie $x_A < x_B$. Deoarece (5) este o egalitate între două mulțimi, va trebui să luăm un element din membrul I și să arătăm că el aparține și membrului II, și invers.

Fie $P \in [AB]$. Înînd cont de (2) avem $AP + PB = AB$, prin urmare

$$(9) \quad |x_P - x_A| + |x_B - x_P| = x_B - x_A,$$

(căci $x_B > x_A$). Considerăm următoarele cazuri:

a) $x_P < x_A$; atunci din $x_A < x_B$ deducem $x_P < x_B$ și egalitatea (9) devine

$$x_A - x_P + x_B - x_P = x_B - x_A.$$

Reducind termenii asemenea, obținem $2x_A = 2x_P$, deci $x_A = x_P$, în contradicție cu $x_P > x_A$. Așadar, acest caz nu este posibil.

b) $x_P > x_B$; acum relația (9) se scrie

$$x_P - x_A + x_P - x_B = x_B - x_A$$

sau $x_P = x_B$. Nici acest caz nu este posibil.

Rezultă că $x_A \leq x_P \leq x_B$, deci $P \in \{M \in AB \mid x_A \leq x_M \leq x_B\}$.

Fie acum M un punct din membrul II al egalității (5). Atunci $M \in AB$ și

$$(10) \quad x_A \leq x_M \leq x_B.$$

Din (10) rezultă $x_M - x_A \geq 0$ și $x_B - x_M \geq 0$, deci

$$\begin{aligned} AM + MB &= |x_M - x_A| + |x_B - x_M| = x_M - x_A + x_B - x_M = \\ &= x_B - x_A = |x_B - x_A| = AB. \end{aligned}$$

Prin urmare $M \in [AB]$.

Tinând seama de (4), formula (6) rezultă imediat din (5). Formulele (7) și (8) se obțin din (5) și (6) observând că $[AB] = [BA]$ și $(AB) = (BA)$.

Corolar. Punctul $M \in AB$ este între A și B dacă și numai dacă

(11)

$$x_A < x_M < x_B \text{ sau } x_B < x_M < x_A.$$

Exerciții

5. Care dintre următoarele relații sunt adevărate, dacă punctele A, B, C au abscisele 8, 2, 7:

$$A \in [BC], \quad B \in (AC), \quad C \in (AB), \quad C \in [AB]?$$

6. Punctele coliniare A, B, C au abscisele 6, -3, -2. Unul dintre punctele A, B, C este situat între celelalte două?

Afirmațiile teoremei următoare, numite *proprietăți de ordonare* ale punctelor pe o dreaptă, sunt evidente sub aspect intuitiv. Totuși trebuie să le demonstrăm, deoarece numai axiomele sunt admise fără demonstrație.

Teorema 2. Dacă B este între A și C , atunci A nu este între B și C și nici C între A și B .

Demonstrație. Alegem un sistem de coordonate astfel ca $x_B = 0$, $x_C > 0$.

Din relația (11) rezultă că $x_A < 0$. Deoarece $x_B < x_C$, A între B și C ne-ar conduce la $0 = x_B < x_A < x_C$, adică $x_A > 0$, în contradicție cu $x_A < 0$. Faptul că C nu este între A și B se arată în mod analog.

Exerciții

7. $M \in AB$, $A \notin [MB]$, $B \notin [MA] \Rightarrow M \in (AB)$.

8. $M \in AB$, $A \notin (MB)$, $B \notin (MA) \Rightarrow M \in [AB]$.

9. $C \in (AB)$, $D \in (AC) \Rightarrow D \in (AB)$.

10. $C \in (AB) \Rightarrow (AC) \subset (AB)$.

11. $C, D \in (AB) \Rightarrow [CD] \subset (AB)$.

12. $C \in (AB)$, $B \in (CD) \Rightarrow C, B \in (AD)$.

13. Orice segment conține o infinitate de puncte.

14. Fie m un număr real > 1 . Arătați că există un punct $M \in (AB)$ astfel încât $AM = \frac{AB}{m}$.

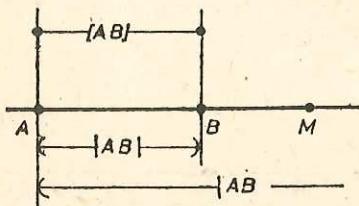


Fig. I.5

Definiție. Fiind date punctele distințte A și B , semidreapta închisă $[AB]$ și semidreapta deschisă (AB) se definesc astfel (fig. I.5):

$$[AB] \stackrel{\text{def}}{=} \{M \mid M \in [AB] \text{ sau } B \in (AM)\},$$

$$(AB) \stackrel{\text{def}}{=} [AB] - \{A\}.$$

Dreapta AB este *suportul* semidreptelor $[AB]$ și (AB) , iar punctul A *originea* lor.

Dacă $B \in (AC)$, semidreptele $[BA]$ și $[BC]$ se zic *opuse*, la fel (BA) și (BC) . Semidreptele pot fi precizate cu ajutorul absciselor:

Teorema 3. Oricare ar fi sistemul de coordonate pe dreapta AB , dacă $x_A < x_B$

$$(12) \quad [AB = \{M \in AB \mid x_M \geq x_A\}]$$

$$(13) \quad (AB = \{M \in AB \mid x_M > x_A\}),$$

iar dacă $x_A > x_B$

$$(14) \quad [AB = \{M \in AB \mid x_M \leq x_A\}]$$

$$(15) \quad (AB = \{M \in AB \mid x_M < x_A\}).$$

Demonstrație. Presupunând $x_A < x_B$, din teorema 1 obținem

$$M \in [AB] \Leftrightarrow x_A \leq x_M \leq x_B,$$

$$B \in (AM) \Leftrightarrow x_A < x_B < x_M.$$

Așadar $M \in [AB] \Leftrightarrow x_A \leq x_M \leq x_B$ sau $x_B < x_M$, ceea ce se scrie mai simplu: $M \in [AB] \Leftrightarrow x_A \leq x_M$, deci are loc egalitatea (12). Egalitățile (13), (14) și (15) rezultă în mod analog.

Corolar. Dacă $C \in (AB)$, atunci $(AB) = (AC)$; în notația (AB) , punctul B poate fi înlocuit cu oricare punct al semidreptei (AB) .

Definiție. Un *unghi* este reuniunea a două semidrepte închise avind aceeași origine (fig. I.6).

Dacă cele două semidrepte sunt $h = [AB]$ și $k = [AC]$, unghiul va fi notat \widehat{hk} sau \widehat{BAC} sau \widehat{A} (dacă nu e pericol de confuzie). Punctul A se numește *vîrf*, iar semidreptele h , k se numesc *laturile* unghiului \widehat{hk} .

Dacă $h = k$, \widehat{hk} se numește *unghi nul*, iar dacă h și k sunt semidrepte opuse, atunci \widehat{hk} este un *unghi alungit*. Un unghi care nu este nici nul, nici alungit, se numește *unghi propriu*.

Definiție. Dacă punctele A, B, C nu sunt coliniare, multimea

$$ABC \stackrel{\text{def}}{=} [AB] \cup [BC] \cup [CA]$$

se numește *triunghi*. Punctele A, B, C sunt *vîrfurile*, segmentele $[AB], [BC], [CA]$ sunt *laturile*, iar unghiurile $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$ sunt *unghiurile triunghiului*.

Dacă două (respectiv trei) laturi au lungimi egale, triunghiul se numește *isoscel* (respectiv *echilateral*).

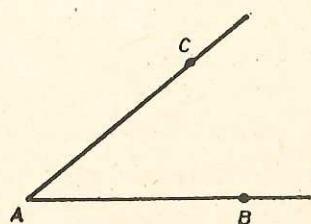


Fig. 1.6

15. Fie $x_A = 2$, $x_B = 10$, $x_C = 14$. Care dintre următoarele egalități sunt adevărate: $[AB] = [AC]$, $(AB) = (AC)$, $(BA) = (BC)$, $(CA) = (CB)$; $(AC) = (BC)$?
16. Fie $x_A = -1$, $x_B = 3$, $x_C = 5$, $x_D = 8$. Să se arate că $B \in (AC)$, $[BC] \subset (AD)$, $B \in (AD)$, $D \notin (CA)$.
17. Se dau $x_A = -3$, $x_B = 0$, $x_C = 5$, $x_D = 9$. Să se afle $(CA \cap [BD]) \cup [CA \cap (BD)]$.
18. Să se arate: $[AB] \subset [AB]$ ($A \neq B$).
19. Dacă $A \neq B$, atunci: a) $(AB \cap (BA = (AB))$, b) $[AB \cap [BA = [AB]]$, c) $(AB \cup (BA = AB)$.

§ 5. Axioma de separare a planului

Definiție. Fie d o dreaptă și A , B două puncte ale planului \mathcal{P} , nesituate pe d . Dacă segmentul $[AB]$ are un punct comun cu d , spunem că dreapta d separă punctele A și B sau că A și B sunt de o parte și de alta a dreptei d . În caz contrar se spune că A și B sunt de aceeași parte a lui d . Pe figura I.7 dreapta d separă punctele A și B , de asemenea punctele A și C , dar nu separă pe B și C . Expresiile „ d separă A și B “ și „ d nu separă A și B “ au sens numai dacă A și B nu se află pe d .

Admitem următoarea axiomă de separare a planului:

S. Fie d o dreaptă ce separă punctele A și B . Dacă d nu separă punctele B și C , atunci d separă A și C (fig. I.7).

Observație. Pentru puncte coliniare A , B , C afirmația S face parte din teorema 2 de la § 4 (punctul 5). Așadar este suficient să se considere în axiomă numai puncte necoliniare. Sub această formă mai slabă axioma S se numește *axioma lui Pasch*. Pentru a simplifica referirile, am cuprins în axiomă ambele situații.

Exerciții

1*. Oricare ar fi dreapta d și punctul A nesituat pe d , arătați că există un punct $B \in \mathcal{P} - d$ astfel ca d să nu separe A și B și există un punct C astfel ca d să separe A și C .

Rezolvare. Luăm un punct P pe dreapta d . Știm că există B și C astfel ca $A \in (PB)$ și $P \in (CA)$ (§ 4, teorema 2,3). Atunci d nu separe pe A , B și separe pe A , C .

2. Dacă dreapta d nu separe A și B și nici B și C , atunci d nu separe punctele A și C .

Rezolvare. Într-adevăr, în caz contrar d ar sepa A și C și atunci din axioma S ar rezulta că d separe A și B (căci nu separe C și B), în contradicție cu ipoteza.

Teorema 1. Dacă o dreaptă d separe atât punctele B și A cât și punctele A și C , atunci d nu separe B și C (fig. I.7).



Demonstrație. Dacă punctele A , B , C sunt coliniare, teorema revine la punctul 4) din teorema 2, § 4. Vom admite deci că punctele A , B , C nu sunt coliniare. Să presupunem că teorema nu e adevărată. Atunci există pe dreapta d punctele M , N , P astfel încât $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ și $P \in (BC)$ (fig. I.8). Cum punctele M , N , P sunt coliniare, unul din aceste puncte va fi situat între celelalte două (teorema 2, § 4 punctul 1). Pentru a face o alegere, să presupunem că M este între N și P .

Așadar dreapta AB separă N și P ; pe de altă parte AB nu separă N și C (căci conform teoremei 2.2), § 4 din $N \in (AC)$ rezultă că A nu este între N și C), deci din axioma S deducem că AB separă punctele P și C , adică $B \in (PC)$. Dar avem și $P \in (BC)$ în contradicție cu punctul 2) al teoremei amintite.

Corolar. O dreaptă care intersectează un triunghi, dar nu trece printr-un vîrf al său, intersectează exact două din laturile triunghiului.

Exerciții

3. Dacă dreapta d separă A și B și de asemenea C și D , dar nu separă A și C , atunci d nu separă punctele B și D .

4. Fie A , B , C , D puncte distincte. Dacă A și B sunt de aceeași parte a lui CD , putem afirma că C și D sunt de aceeași parte a lui AB ?

Definiție. Fie A un punct nesituat pe dreapta d (fig. I.9). Considerăm toate punctele M de aceeași parte a lui d , ca și A . Mulțimea formată din aceste puncte și punctul A se notează cu (dA) și se numește *semiplan (deschis)*. Spunem că dreapta d este *frontiera* lui și că semiplanul (dA) este *limitat* de dreapta d .

Avem

$$(1) \quad (dA) = \{M \in \mathcal{P} \mid [AM] \cap d = \emptyset\}.$$

Intr-adevăr, pentru $M \neq A$, relația $[AM] \cap d = \emptyset$ înseamnă că A și M sunt de aceeași parte a lui d ; iar pentru $M = A$ relația $[AA] \cap d = \emptyset$ este verificată, căci $[AA] = \{A\} \not\subset d$.

În notația (dA) punctul A poate fi înlocuit cu orice punct al semiplanului (dA) :

$$(2) \quad B \in (dA) \Rightarrow (dA) = (dB).$$

Intr-adevăr, cum $[AB] \cap d = \emptyset$, exercițiul 2 ne arată că $[AM] \cap d = \emptyset$ și $[BM] \cap d = \emptyset$ sunt condiții echivalente, deci mulțimile de puncte, care le verifică, coincid.

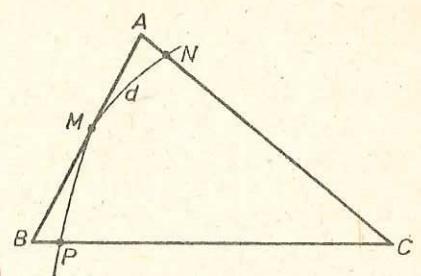


Fig. I.8

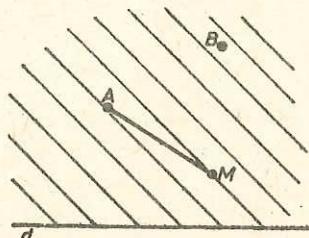


Fig. I.9

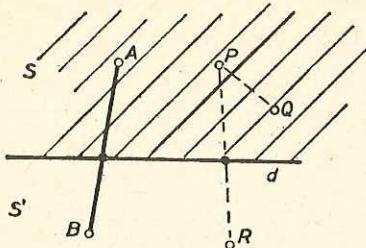


Fig. I.10

Teorema 2. (Teorema de separare a planului). Fieind dată în planul \mathcal{P} o dreaptă oarecare d , au loc următoarele proprietăți:

- 1) Există exact două semiplane limitate de dreapta d , pe care le notăm cu S și S' .
- 2) $\mathcal{P} - d = S \cup S'$ și $S \cap S' = \emptyset$.
- 3) Dacă $P, Q \in S$ sau $P, Q \in S'$, segmentul (PQ) nu tăie dreapta d . Dacă $P \in S$ și $R \in S'$, segmentul (PR) și dreapta d au un punct comun (fig. I.10).

Semiplanele S și S' se numesc *opuse*.

Demonstrație. Luăm un punct A nesituat pe d ; stim că există un punct B astfel ca d să separe A și B (exerc. 1). Să considerăm semiplanele $S = (dA)$ și $S' = (dB)$. Luând $M \in \mathcal{P} - d$, să arătăm că $M \in S \cup S'$. Dacă $M \in S$ afirmația este evidentă. Dacă $M \notin S$ dreapta d separă A și M , deci conform teoremei 1 dreapta d nu separă B și M , adică $M \in S'$. Așadar $\mathcal{P} - d \subset S \cup S'$ și deoarece incluziunea inversă este evidentă, $\mathcal{P} - d = S \cup S'$.

Să presupunem că $P \in S \cap S'$; atunci d nu separă A și P și nici B și P . Cum d separă A și B și nu separă A și P deducem din axioma S că d separă B și P . Contradicția dovedește că nu există nici un punct în $S \cap S'$ și astfel am demonstrat afirmația 2).

Un semiplan oarecare S^* limitat de dreapta d se scrie sub forma $S^* = (dQ)$, unde $Q \in \mathcal{P} - d$. Am demonstrat mai sus că $Q \in S$, sau $Q \in S'$. În primul caz $(dQ) = (dA) = S$ (vezi (2)), iar în al doilea caz $(dQ) = (dB) = S'$. Așadar $S^* = S$ sau $S^* = S'$ și afirmația 1) este demonstrată.

Fie $P, Q \in S$. Atunci $S = (dP)$ și din definiția semiplanului urmează că $[PQ] \cap d = \emptyset$. Dacă $P \in S$, $R \in S'$, avem $S = (dP)$ și $[PR] \cap d \neq \emptyset$, deci și afirmația 3) este demonstrată.

Definiție. Reuniunea unui semiplan cu frontieră sa se numește *semiplan închis*. Simbolul $[dA] \stackrel{\text{def}}{=} (dA \cup d)$ se citește „semiplanul închis limitat de dreapta d și conținând punctul A “.

Exerciții

5. Dacă punctele A și B aparțin semiplanului S (deschis sau închis), atunci $[AB] \subset S$.

6*. Dacă $A \notin d$ și $B \in d$, atunci $(BA) \subset (dA)$ (fig. I.11).

Indicație. Se va arăta: $M \in (BA) \Rightarrow B \notin [AM] \Rightarrow M \in (dA)$.

7*. Dacă $A \notin d$ și $B \in d$, atunci $(BA) \subset (dA)$.

Indicație. Se ia un punct $M \in (BA)$ și se disting cazurile:

- 1° $M \in (BA)$; atunci $M \in (dA)$ conform exercițiului 6;
- 2° $M = A$;
- 3° $A \in (BM)$.

8*. Să se arate că intersecția dintre o dreaptă d și un semiplan deschis este sau dreapta d sau o semidreaptă deschisă sau mulțimea vidă.

9*. Dacă M este un punct pe latura $[AB]$ a unui triunghi ABC , iar P un punct ce se găsește de aceeași parte a dreptei AB , ca și C , atunci semidreapta (MP) intersectează latura $[BC]$ sau $[CA]$ a triunghiului (fig. I.12).

Indicație. Conform axiomei S , dreapta MP taie segmentul $[BC]$ sau $[CA]$ într-un punct Q . Trebuie să se demonstreze că punctul Q este situat pe semidreapta (MP) . În acest scop se va arăta că P și Q sunt de aceeași parte a lui AB , ceea ce implică $[PQ] \cap AB = \emptyset$.

10. Fie ABC un triunghi, $B' \in (AC)$ și $C' \in (AB)$. Să se arate că segmentele (BB') și (CC') au un punct comun.

11. Folosind notațiile exercițiului 10, fie $D \in (BC)$. Să se arate că $(AD) \cap (B'C') \neq \emptyset$.

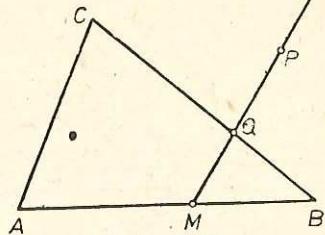


Fig. I.12

§ 6. Mulțimi convexe

Definiție. Se numește *mulțime convexă* o mulțime \mathcal{M} de puncte, care are următoarea proprietate: dacă P, Q sunt două puncte distincte oarecare ale mulțimii \mathcal{M} (fig. I.13), atunci \mathcal{M} conține toate punctele segmentului (PQ) :

$$(1) \quad P, Q \in \mathcal{M} \Rightarrow (PQ) \subset \mathcal{M}.$$

Mulțimea vidă și mulțimile formate dintr-un singur punct se consideră convexe, deoarece pentru ele nu se pune nici o condiție.

O mulțime formată din două puncte nu este convexă. Mulțimea din figura I.13 este convexă, cea din figura I.14 nu este convexă.

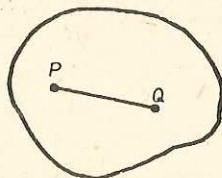


Fig. I.13

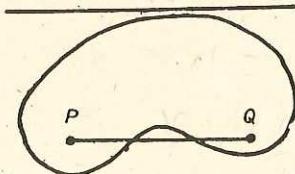


Fig. I.14

Exerciții

1. Arătați că planul \mathcal{P} și orice dreaptă sînt mulțimi convexe.

2. Orice segment și orice semidreaptă sînt mulțimi convexe.

Indicație. Fie de exemplu (AB) un segment deschis. Dacă P și $Q \in (AB)$, atunci $(PQ) \subset (AB)$ (§ 4, exerc. 11).

3. Arătați că semiplanele deschise și semiplanele închise sînt mulțimi convexe.

Din mulțimi convexe putem forma alte mulțimi convexe cu ajutorul teoremei următoare.

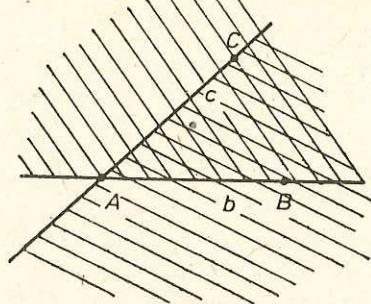


Fig. I.15

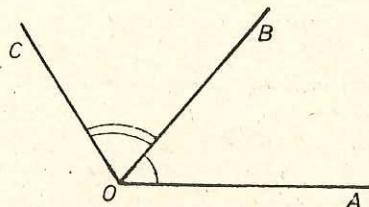


Fig. I.16

Teorema 1. Orice intersecție de mulțimi convexe este convexă.

Demonstrație. Demonstrăm teorema pentru două mulțimi convexe, M_1 și M_2 (în cazul mai multor mulțimi convexe se raționează la fel). Trebuie să arătăm că $M_1 \cap M_2$ este o mulțime convexă. Fie $P, Q \in M_1 \cap M_2$. Atunci $P, Q \in M_1$ și $P, Q \in M_2$. Cum M_1 și M_2 sunt mulțimi convexe, $(PQ) \subset M_1$ și $(PQ) \subset M_2$. Dar atunci $(PQ) \subset M_1 \cap M_2$.

Definiție. Interiorul unghiului propriu \widehat{BAC} este mulțimea de puncte $\text{Int } \widehat{BAC} \stackrel{\text{def}}{=} (bC \cap (cB, \text{ unde } b = AB, c = AC)$ (fig. I.15).

Int \widehat{BAC} fiind intersecția a două semiplane deschise, adică a două mulțimi convexe, este o mulțime convexă.

Definiții. Două unghiuri proprii cu același vîrf și cu o latură comună se numesc *adiacente*, dacă interioarele lor nu au nici un punct comun (unghiurile \widehat{AOB} și \widehat{BOC} pe figurile I.16 și I.17).

Unghiurile \widehat{AOB} și \widehat{BOC} se numesc *unghiuri adiacente suplementare* dacă (OA) și (OC) sunt semidrepte opuse (fig. I.18).

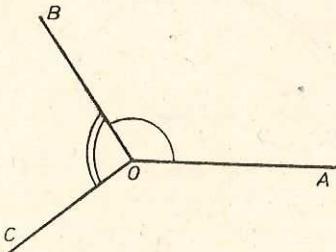


Fig. I.17

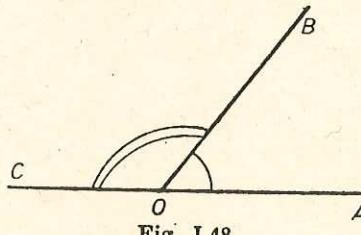


Fig. I.18

Exerciții

4*. Fie BAC un unghi propriu. Să se arate:

a) $(BC) \subset \text{Int } \widehat{BAC}$; b) $D \in \text{Int } \widehat{BAC} \Rightarrow (AD \subset \text{Int } \widehat{BAC})$.

5*. Interiorul unui triunghi ABC se definește astfel

$$\text{Int } ABC \stackrel{\text{def}}{=} (aA \cap (bB \cap (cC,$$

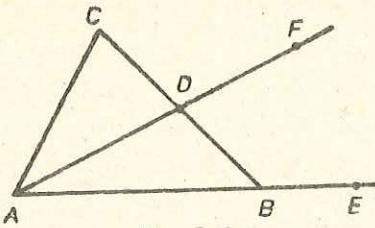


Fig. I.19

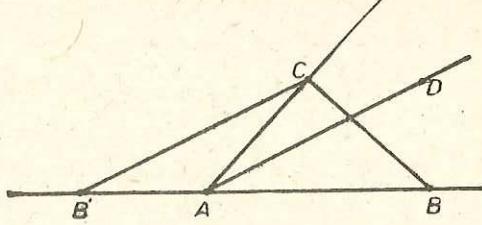


Fig. I.20

unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Să se arate:

- 1) $\text{Int } ABC$ este o mulțime convexă.
- 2) $\text{Int } ABC = \text{Int } \widehat{ABC} \cap \text{Int } \widehat{BCA} \cap \text{Int } \widehat{CAB}$.
- 3) $\text{Int } ABC = (aA \cap \text{Int } \widehat{BAC})$.

6. Fie ABC un triunghi și $D \in (BC)$. Se iau punctele E și F în așa fel ca $B \in (AE)$ și $D \in (AF)$ (fig. I.19). Să se arate că $F \in \text{Int } \widehat{CBE}$.

Indicație. Se va arăta că C, F sunt de aceeași parte a lui BE și E, F de aceeași parte a lui BC .

7*. Fi \widehat{BAC} un unghi propriu și $D \in \text{Int } \widehat{BAC}$. Să se arate că $\text{Int } \widehat{BAD} \subset \text{Int } \widehat{BAC}$.

Teorema 2. (Teorema transversalei.) Dacă punctul D aparține interiorului unghiului propriu \widehat{BAC} , atunci semidreapta (AD) și segmentul (BC) au un punct comun:

$$(AD \cap (BC)) \neq \emptyset.$$

Demonstrare. Fie $(AB') semidreapta opusă lui (AB) (fig. I.20). Semidreapta (AD) intersectează segmentul $(B'C)$ sau segmentul (BC) (§ 5, exerc. 9). Dar (AD) nu poate intersecta pe $(B'C)$, deoarece aceste mulțimi sunt de o parte și de alta a dreptei AC (§ 5, exerc. 6 și 7).$

Exerciții

8. Fie \widehat{BAC} un unghi propriu și $D \in \text{Int } \widehat{BAC}$. Să se arate că punctele B și C sunt de o parte și de alta a dreptei AD .

Indicație. Se aplică teorema transversalei.

9*. Fie punctele B și C situate de aceeași parte a dreptei OA . Să se arate că

$$C \in \text{Int } \widehat{AOB} \text{ sau } B \in \text{Int } \widehat{AOC} \text{ sau } \widehat{AOB} = \widehat{AOC}.$$

Indicație. E suficient să considerăm cazul $B \notin \text{Int } \widehat{AOC}$ și $B \notin (OC)$, căci altfel afirmația este evidentă. Dacă am avea $(AB) \cap OC = \emptyset$, ar rezulta că $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$ sau $B \in (OC)$, deci A și B sunt de o parte și de alta a dreptei OC . Așadar $(AB) \cap OC = \{P\}$. Arătați că $P \in (OC)$, de unde va rezulta $(OP) \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ și $C \in \text{Int } \widehat{AOB}$.

10. Dacă punctul P aparține interiorului triunghiului ABC , atunci dreapta AP intersectează segmentul $[BC]$ într-un punct A' și $P \in (AA')$.

11*. Dacă dreapta d trece printr-un punct P , situat în interiorul triunghiului ABC , atunci dreapta d intersectează triunghiul. În câte puncte?

12*. Fie A și C de o parte și de alta a dreptei BB' , iar $O \in (BB')$, $O \notin AC$. Să se arate că dintre semidreptele (OB) și (OB') exact una este situată în interiorul unghiului \widehat{AOC} .

13*. Fie P un punct în interiorul unghiului propriu \widehat{AOB} , iar Q un punct în exteriorul lui (adică $Q \notin \text{Int } \widehat{AOB} \cup [OA \cup OB]$). Să se arate că segmentul (PQ) intersectează o latură a unghiului \widehat{AOB} .

Definiție. O linie poligonală este o mulțime de formă

$$L = [P_1P_2] \cup [P_2P_3] \cup \dots \cup [P_nP_{n+1}]$$

Punctele P_1, \dots, P_{n+1} se numesc vîrfurile liniei L , iar segmentele $[P_1P_2], \dots, [P_nP_{n+1}]$ se numesc laturile ei; laturile $[P_{k-1}P_k]$ și $[P_kP_{k+1}]$ se zic vecine (fig. I.21,a).

Linia poligonală L se numește *închisă*, dacă $P_1 = P_{n+1}$ (fig. I.21, b și c) și *simplu închisă* dacă în plus oricare două laturi nevecine nu au punct comun și două laturi vecine au suporturi diferite. O linie poligonală simplu închisă se mai numește *poligon*. Linia poligonală din figura I.21,b) nu este poligon; un poligon nu se autointersectează! Un poligon cu trei laturi este un triunghi. Un poligon cu 4, 5, 6, ... laturi se numește *patrulater*, *pentagon*, *exagon* etc. Poligonul cu vîrfurile P_1, P_2, \dots, P_n va fi notat cu $P_1P_2\dots P_n$. Segmentele $[P_iP_k]$, care nu sunt laturi, se numesc *diagonale*.

Poligonul $P_1P_2\dots P_n$ se numește *poligon convex*, dacă, pentru fiecare latură $[P_kP_{k+1}]$, toate vîrfurile diferite de P_k și P_{k+1} se găsesc de aceeași parte a dreptei P_kP_{k+1} (pentru $k = n$, $P_{n+1} = P_1$) (fig.I.21, c).

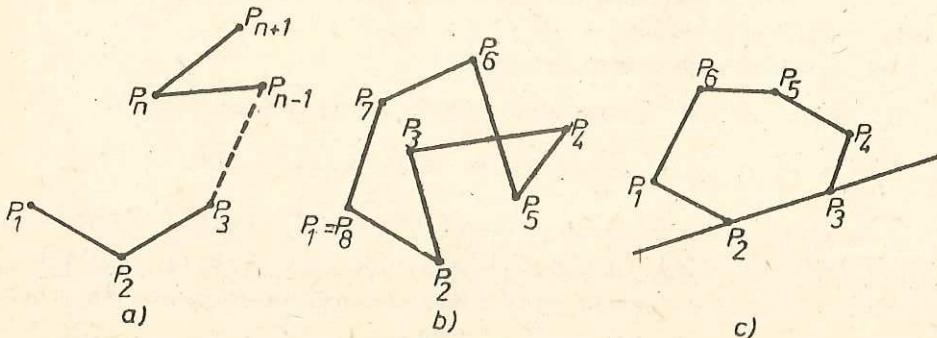


Fig. I.21

Un poligon convex $P_1P_2\dots P_n$ nu este o mulțime convexă, dar *interiorul* său (care se definește precum urmează) este o mulțime convexă. *Interiorul* unui poligon convex este intersecția semiplanelor deschise limitate de suporturile laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe laturile respective (fig. I.22): dacă notăm $d_k = P_kP_{k+1}$ pentru $k=1, \dots, n-1$ și $d_n = P_nP_1$, atunci $\text{Int } P_1P_2 \dots P_n = = (d_1P_1 \cap (d_2P_1 \cap \dots (d_nP_1.$

Reuniunea dintre un poligon convex $P_1P_2\dots P_n$ și interiorul său se numește *suprafață poligonală convexă*, care se notează prin $[P_1P_2\dots P_n]$

$$[P_1P_2 \dots P_n] = P_1P_2 \dots P_n \cup \text{Int } P_1P_2 \dots P_{n-1}.$$

În cazul unui triunghi ABC mulțimea $[ABC]$ se numește *suprafață triunghiulară*.

Exercițiil

14. Să se arate că diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$ au un punct comun (fig. I.23).

15. Dacă diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$ au un punct comun, atunci patrulaterul este convex.

16*. Intersecția semiplanelor închise, limitate de suporturile laturilor unui poligon convex P coincide cu mulțimea $\text{Int } P \cup P$.

17*. Reuniunea unui poligon convex cu interiorul său este o mulțime convexă.

18*. Fie $P_1P_2 \dots P_{n+1}$ o linie poligonală. Dacă P_1 și P_{n+1} sunt de o parte și de alta a unei drepte d , atunci această dreaptă intersectează linia poligonală.

19*. Dacă o dreaptă d nu este suportul unei laturi a unui poligon convex, atunci d are cel mult 2 puncte comune cu poligonul dat.

20*. Dacă $P_1P_2 \dots P_n$ este un poligon convex, unde $n \geq 4$, atunci $P_2P_3 \dots P_n$ este de asemenea un poligon convex.

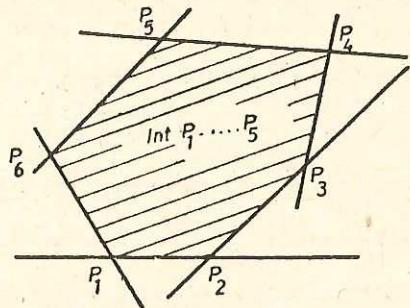


Fig. I.22

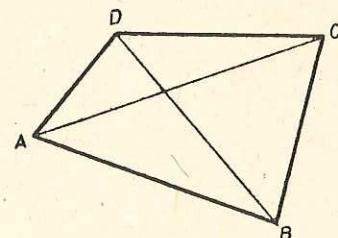


Fig. I.23

§ 7. Axiomatele unghilului

Vom nota cu \mathcal{U} mulțimea unghurilor.

Măsurând unghurile cu raportorul (fig. I.24), fiecărui unghi i se asociază un număr real. Astfel se obține o funcție definită pe \mathcal{U} cu valori în intervalul închis $[0, 180]$.

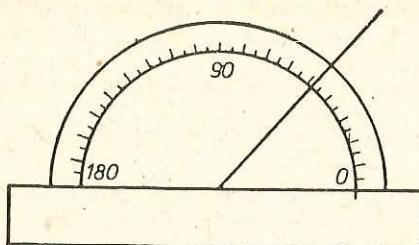


Fig. I.24

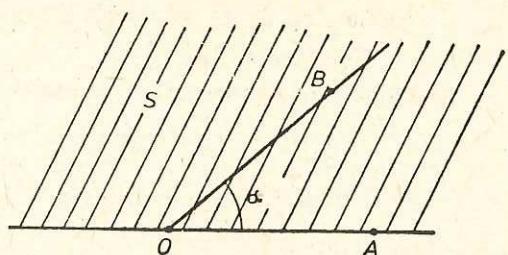


Fig. I.25

Ultima noțiune fundamentală, pe care o introducem în geometrie, este inspirată de procedeul de măsurare cu raportorul.

Admitem existența unei funcții $m: \mathcal{U} \rightarrow [0, 180]$, numită *funcția măsură unghiurilor (in grade)*, care satisfac următoarele axiome (evidente sub aspect intuitiv):

U.1. $m(\widehat{AOB}) = 0$ dacă și numai dacă \widehat{AOB} este un unghi nul; $m(\widehat{AOB}) = 180$ dacă și numai dacă \widehat{AOB} este un unghi alungit.

U.2 (Axioma de construcție a unghiurilor.) Fie (OA) o semidreaptă și S un semiplan limitat de dreapta OA . Pentru orice număr $\alpha \in (0, 180)$ există o semidreaptă unică (OB) , inclusă în S , astfel ca $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ (fig. I.25).

Din U.2 rezultă imediat

Teorema 1. Dacă $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOB}')$ și punctele B, B' sunt de aceeași parte a dreptei OA , atunci $(OB) = (OB')$ (deci $\widehat{AOB} = \widehat{AOB}'$) (fig. I.26).

U.3. (Axioma adunării unghiurilor.) Dacă \widehat{AOB} și \widehat{BOC} sunt unghiuri adiacente cu $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$ sau unghiuri adiacente suplementare (fig. I.27, a) respectiv b)), atunci

$$(1) \quad m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC}).$$

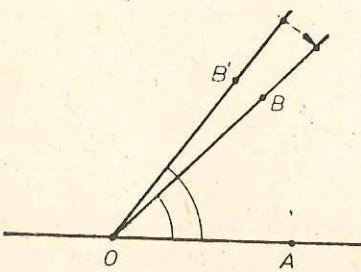
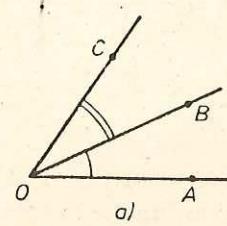
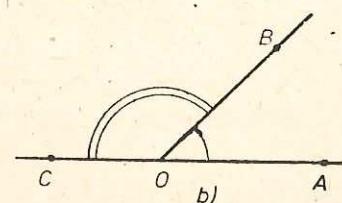


Fig. I.26



a)



b)

În particular, suma măsurilor unghiurilor a două unghiuri adiacente suplementare este egală cu 180.

Deoarece în capitolul III se mai introduce o măsură (în radiani) pentru unghiuri, pentru a distinge cele două măsuri, în loc de $m(\widehat{AOB}) = \alpha$, $\alpha \in [0, 180]$ vom adopta notația $m(\widehat{AOB}) = \alpha^\circ$. Menționăm că în numeroase cărți se utilizează și notația $\widehat{AOB} = \alpha^\circ$.

Definiții. Două unghiuri se numesc *suplementare* dacă suma măsurilor lor este egală cu 180° . Atunci fiecare este un *suplement* al celuilalt.

Două unghiuri cu același vîrf se numesc *opuse la vîrf* dacă laturile lor sunt semidrepte opuse (\widehat{AOB} și \widehat{COD} , pe fig. I.28).

Teorema 2. Două unghiuri opuse la vîrf au măsuri egale.

Demonstrație. Fie \widehat{AOB} și \widehat{COD} două unghiuri opuse la vîrf. Avem

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{AOD}) = 180^\circ,$$

$$m(\widehat{COD}) + m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{COB}) = 180^\circ,$$

$$\text{deci } m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD}).$$

Teorema 2 are și o reciprocă:

Teorema 3. Fie $O \in (AA')$ și B, B' două puncte de o parte și de alta a dreptei AA' . Dacă $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$, atunci semidreptele (OB) și (OB') sunt opuse (fig. I.29).

Demonstrație. Fie (OC) semidreapta opusă lui (OB') . Conform teoremei 2, $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{A'OB'})$; dar $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$, deci $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOB})$. Din teorema 1 obținem că $(OB) = (OC)$, aşadar (OB) și (OB') sunt opuse.

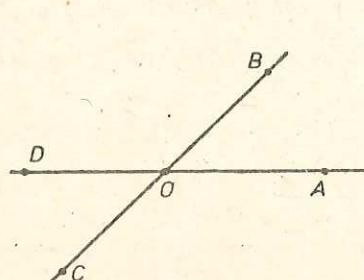


Fig. I.28

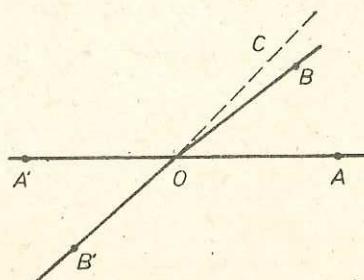


Fig. I.29

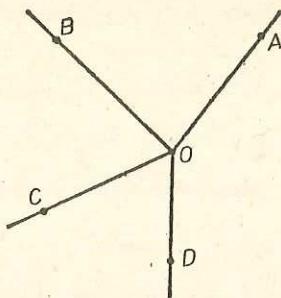


Fig. I.30

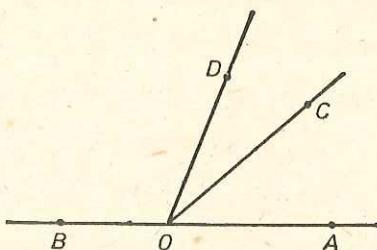


Fig. I.31

Exerciții

1. Fie $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ$. Rezultă că A, O, C sunt coliniare?

2. Care dintre următoarele egalități sunt valabile în cazul figurii I.30:

a) $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA})$, b) $m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) = m(\widehat{BOD})$,

c) $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOA}) = m(\widehat{COA})$?

3. Știind că $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$, $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$ și $m(\widehat{AOB}) = 23^\circ$, să se afle $m(\widehat{BOC})$.

4. Pe figura I.31 $m(\widehat{COD}) = 30^\circ$. Să se afle $m(\widehat{AOC})$ și $m(\widehat{DOB})$, știind că $m(\widehat{DOB}) = 2 m(\widehat{AOC})$.

5. Fie \widehat{AOC} un unghi propriu, A și C de o parte și de alta a dreptei OB și $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) < 180^\circ$; atunci $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC})$.

Indicație. Fie (OB') opusă cu (OB) . Presupunând că $(OB) \not\subset \text{Int } \widehat{AOC}$, avem $(OB' \subset \text{Int } \widehat{AOC}$ (\S 6, exerc. 12), deci $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) = m(\widehat{AOC}) < 180^\circ$, din care se va deduce o contradicție.

§ 8. Proprietăți de congruență

Definiție. Spunem că segmentele (AB) și $(A'B')$ sunt *congruente* și scriem $(AB) \equiv (A'B')$ dacă $AB = A'B'$. Analog, unghiiurile \widehat{AOB} și $\widehat{A'O'B'}$ se numesc *congruente* și se notează $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ dacă $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'O'B'})$.

Teorema 1. Au loc următoarele proprietăți:

(1) $\forall (AB) : (AB) \equiv (AB)$ (reflexivitate),

(2) $(AB) \equiv (CD) \Rightarrow (CD) \equiv (AB)$ (simetrie),

(3) $(AB) \equiv (CD)$, $(CD) \equiv (EF) \Rightarrow (AB) \equiv (EF)$ (tranzitivitate).

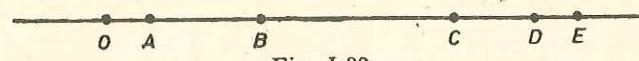


Fig. I.32.

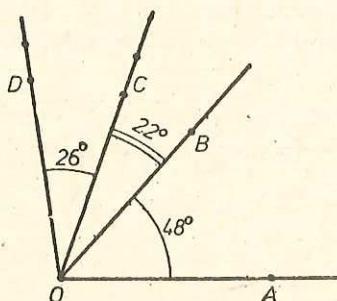


Fig. I.33

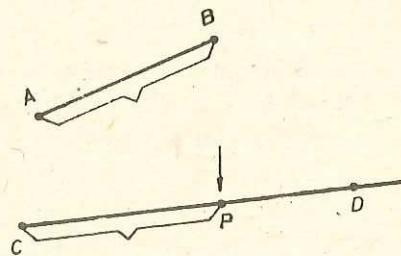


Fig. I.34

Demonstrație. Arătăm proprietatea (3). Din ipoteză rezultă $AB = CD$ și $CD = EF$, deci $AB = EF$, ceea ce înseamnă că $(AB) \equiv (EF)$. Proprietățile (1) și (2) se arată la fel.

Enunțați, în analogie cu teorema 1, o teoremă pentru unghiuri!

Exerciții

- Punctele A, B, C, D, E , situate pe o dreaptă, au abscisele $x_A = 1, x_B = 4, x_C = 9, x_D = 11, x_E = 12$. Găsiți segmente congruente determinate de aceste puncte (fig. I.32).
- Găsiți unghiuri congruente pe figura I.33.

Teorema 2. (Teorema de construcție a unui segment.) Fie (AB) un segment și (CD) o semidreaptă. Există un singur punct $P \in (CD)$ astfel ca $(AB) \equiv (CP)$ (fig. I.34).

Demonstrație. Alegem sistemul de coordonate pentru dreapta CD astfel ca $x_G = 0$ și $x_D > 0$. Punctul P trebuie să satisfacă două condiții:

- $P \in (CD)$, ceea ce înseamnă $x_P > 0$ (vezi § 4 formula (13)), și b) $CP = AB$, adică $|x_P - 0| = AB$. Așadar $x_P = AB$ și astfel punctul P este determinat în mod unic.

Teorema 3. (Teorema de adunare și de scădere a segmentelor.) Fie $B \in (AC)$ și $B' \in (A'C')$ (fig. I.35). Atunci

$$(4) \quad (AB) \equiv (A'B'), \quad (BC) \equiv (B'C') \Rightarrow (AC) \equiv (A'C'),$$

$$(5) \quad (AC) \equiv (A'C'), \quad (AB) \equiv (A'B') \Rightarrow (BC) \equiv (B'C').$$

Demonstrație. Deoarece B este între A și C și B' între A' , C'

$$(6) \quad AC = AB + BC$$

$$\text{și } A'C' = A'B' + B'C'.$$

Din ipotezele implicației (4) rezultă

$$AB = A'B' \text{ și } BC = B'C'.$$

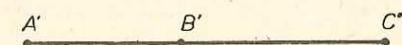
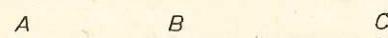


Fig. I.35

Folosind egalitățile (6) obținem că $AC = A'C'$, deci $(AC) \equiv (A'C')$. — Din ipotezele lui (5) deducem $AC = A'C'$, $AB = A'B'$, ceea ce împreună cu (6) ne dă $BC = B'C'$, adică $(BC) \equiv (B'C')$.

Observație. Dacă $B \in (AC)$, segmentul (AC) este numit uneori „suma“ segmentelor (AB) și (BC) , iar segmentul (BC) „diferența“ lui (AB) și (AC) . De aici provine denumirea teoremei 3.

Definiție. Spunem că segmentul (AB) este *mai mare* decât segmentul (CD) și scriem $(AB) > (CD)$, dacă $AB > CD$. În acest caz se mai spune că (CD) este *mai mic* decât (AB) ($(CD) < (AB)$).

Exerciții

3. Arătați că $(AB) > (CD)$ dacă și numai dacă există un punct $M \in (AB)$ astfel ca $(AM) \equiv (CD)$.

$$4*. (AB) > (CD), (CD) > (EF) \Rightarrow (AB) > (EF).$$

$$5*. (AB) \equiv (A'B'), (CD) \equiv (C'D'), (AB) > (CD) \Rightarrow (A'B') > (C'D').$$

6*. Fie $B \in (AC)$ și $B' \in (A'C')$. Arătați că atunci a) $(AB) > (A'B')$, $(BC) > (B'C')$ implică $(AC) > (A'C')$.

b) $(AC) > (A'C')$, $(BC) < (B'C')$ implică $(AB) > (A'B')$.

Definiție. Spunem că punctul M este *mijlocul* segmentului (AB) dacă $M \in AB$ și $(AM) \equiv (MB)$.

Observație. Dacă un obiect matematic se definește printr-o condiție, atunci se pun în mod necesar două întrebări: 1) condiția poate fi satisfăcută? (adică există cel puțin un asemenea obiect?), și 2) cite obiecte satisfac condiția? Definiția respectivă este corectă, dacă condiția este satisfăcută de un singur obiect. Vom demonstra acum că definiția de mai sus este corectă.

Teorema 4. *Orice segment (AB) are un singur mijloc M și $M \in (AB)$.*

Demonstrație. Fie $x_A = a$, $x_B = b$ și $a < b$. Punctul $M \in AB$ este mijlocul lui (AB) dacă și numai dacă $AM = MB$, ceea ce este echivalent cu

$$|x_M - a| = |b - x_M|.$$

Deosebim cazurile: 1) $x_M < a$, 2) $x_M > b$, 3) $a \leq x_M \leq b$. Cazul $x_M < a$ ne conduce la $a - x_M = b - x_M$ și $a = b$, în contradicție cu $a < b$; la fel, nici cazul $x_M > b$ nu este posibil. Prin urmare numai cazul 3) este posibil. Dar atunci $x_M - a = b - x_M$, de unde

$$(7) \quad x_M = \frac{a + b}{2}.$$

Așadar abscisa x_M este determinată în mod unic, și împreună cu ea și punctul M , mijlocul lui (AB) . Cum

$$a < \frac{a + b}{2} < b,$$

rezultă $M \in (AB)$.

Exerciții

7. Fie C mijlocul segmentului (AB) și D un punct cu proprietatea că B este mijlocul lui (CD) . Să se arate că $B \in (AD)$. Să se calculeze x_C și x_D , știind că $x_A = 2$, $x_B = 7$.

8. Se consideră trei puncte coliniare A , B , C și mijloacele D , E , F ale segmentelor (AB) , (BC) , (AC) . Să se arate că (DE) și (BF) au același mijloc.

Din axioma U.2 rezultă imediat

Teorema 5. (Teorema de construcție a unui unghi.) Fie $(OA$ o semireaptă, S un semiplan limitat de dreapta OA și \widehat{hk} un unghi propriu oarecare. Atunci există o semidreaptă unică $(OB$, inclusă în S , astfel că $\widehat{AOB} = \widehat{hk}$.

Teorema 6. (Teorema de adunare și scădere a unghiurilor.) Fie $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB}$, $(O'C' \subset \text{Int } \widehat{A'O'B'}$ (fig. I. 36). Atunci

$$(8) \quad \widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'}, \quad \widehat{COB} = \widehat{C'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'},$$

$$(9) \quad \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}, \quad \widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'} \Rightarrow \widehat{COB} = \widehat{C'O'B'}.$$

Demonstrație. Folosind axioma U.3 putem scrie

$$m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = m(\widehat{AOB})$$

$$(10) \quad m(\widehat{A'O'C'}) + m(\widehat{C'O'B'}) = m(\widehat{A'O'B'}).$$

Din ipotezele implicației (8) rezultă $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{A'O'C'})$, $m(\widehat{COB}) = m(\widehat{C'O'B'})$, ceea ce împreună cu (10) ne conduce la $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'O'B'})$, deci $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$. Analog, din ipotezele lui (9) și egalitățile (10) obținem $m(\widehat{COB}) = m(\widehat{C'O'B'})$, de unde $\widehat{COB} = \widehat{C'O'B'}$.

Observație. Dacă $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB}$, unghiul \widehat{AOB} este uneori numit „suma“ unghiurilor \widehat{AOC} și \widehat{COB} , iar unghiul \widehat{COB} este numit „diferența“ unghiurilor \widehat{AOB} și \widehat{AOC} .

Definiție. Spunem că unghiul \widehat{hk} este mai mare decât \widehat{lm} și scriem $\widehat{hk} > \widehat{lm}$ dacă $m(\widehat{hk}) > m(\widehat{lm})$.

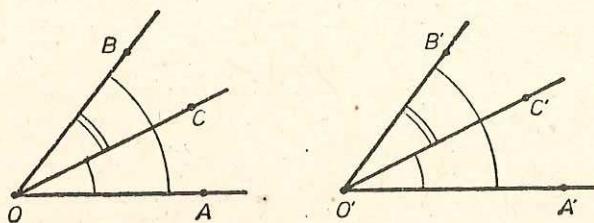


Fig. I.36

Teorema 7. (Teorema semidreptei interioare unui unghi.)

- a) Dacă semidreapta (OB) este interioară unghiului \widehat{AOC} ($OB \subset \text{Int } \widehat{AOB}$), atunci $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$.
 b) Dacă punctele B și C sunt situate de aceeași parte a dreptei OA și $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$, atunci $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC})$ (fig. I.37).

Demonstrație. a) Dacă $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC})$, atunci folosind axioma adunării unghiurilor, avem $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC})$. Deci $m(\widehat{AOB}) < m(\widehat{AOC})$ de unde $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$.

b) Conform exercițiului 9 de la § 6, unul dintre următoarele cazuri are loc: $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB}$, sau $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$, sau $\widehat{AOB} \equiv \widehat{AOC}$. Este clar că ultimul caz nu este posibil. Nici primul nu este posibil, deoarece din $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB})$ rezultă în virtutea axiomei U.3: $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AO\bar{C}}) + m(\widehat{COB}) > m(\widehat{AOC})$. Dar atunci $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$, în contradicție cu ipoteza.

Exerciții

9. Arătați: $\widehat{hk} > \widehat{h'k'}$, $\widehat{k'k} > \widehat{k''k''} \Rightarrow \widehat{hk} > \widehat{h''k''}$.
 10. $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, $\widehat{lm} \equiv \widehat{l'm'}$, $\widehat{hk} > \widehat{lm} \Rightarrow \widehat{h'k'} > \widehat{l'm'}$.
 11. Fie $C \in \text{Int } \widehat{AOB}$, $C' \in \text{Int } \widehat{A'O'B'}$. Să se arate:
 a) $\widehat{AO\bar{C}} > \widehat{A'O'C'}$, $\widehat{COB} > \widehat{C'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$.
 b) $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$, $\widehat{AO\bar{C}} > \widehat{A'O'C'} \Rightarrow \widehat{COB} < \widehat{C'O'B'}$.
 12. Arătați că $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$ dacă și numai dacă există o semidreaptă $(OM \subset \text{Int } \widehat{AOB})$ astfel încât $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$.

Definiție. Semidreapta $[OC]$ se numește *bisectoarea* unghiului propriu \widehat{AOB} dacă $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB})$ și $\widehat{AO\bar{C}} \equiv \widehat{COB}$ (fig. I.38).

Teorema 8. Orice unghi propriu are o singură bisectoare.

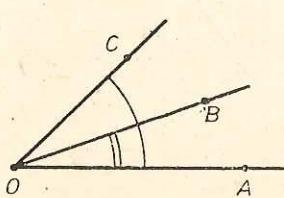


Fig. I.37

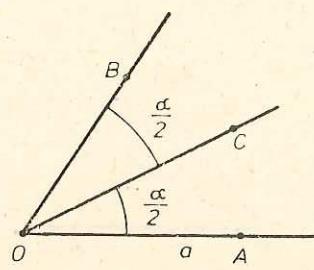


Fig. I.38

Demonstrație. Fie \widehat{AOB} un unghi dat, $m(\widehat{AOB}) = \alpha^\circ$, $0 < \alpha^\circ < 180^\circ$ și $a = AO$ (fig. I.38). Să presupunem că $[OC]$ este o bisectoare a unghilui \widehat{AOB} ; atunci $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = m(\widehat{AOB}) = \alpha^\circ$ și $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB})$, deci $m(\widehat{AOC}) = \frac{\alpha^\circ}{2}$. Înănd seama și de faptul că $[OC] \subset [aB]$, din axioma U.2 deducem că semidreapta $[OC]$ este determinată în mod unic. Așadar, din ipoteza că \widehat{AOB} are o bisectoare rezultă că aceasta este unică. Rămâne să arătăm existența bisectoarei. Construim conform axiomei U.2 semidreapta $[OC']$ astfel ca $m(\widehat{AOC'}) = \frac{\alpha^\circ}{2}$ și B, C' să fie de aceeași parte a dreptei OA .

Din teorema 7 b rezultă că $[OC'] \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ și astfel $m(\widehat{AO'C'}) + m(\widehat{C'OB}) = m(\widehat{AOB})$; deci $m(\widehat{C'OB}) = \frac{\alpha^\circ}{2}$. Prin urmare $[OC']$ este bisectoarea lui \widehat{AOB} .

Definiție. Se numește *unghi drept* orice unghi, care este congruent cu un suplement al său (fig. I.39).

Din axioma U.3 rezultă imediat:

Un unghi este drept dacă și numai dacă măsura lui este 90° . De aici obținem: *Un unghi congruent cu un unghi drept este un unghi drept.*

Definiții. Spunem că semidreptele $[OA]$ și $[OB]$ sunt *perpendiculare* și scriem $[OA] \perp [OB]$ dacă \widehat{AOB} este un unghi drept. În acest caz vom spune că OA și OB sunt *drepte perpendiculare* sau *drepte ortogonale* și vom scrie $OA \perp OB$ (și $[OA] \perp [OB]$).

Un unghi propriu mai mic (mare) decit un unghi drept se numește *ascuțit* (*obtuz*).

Demonstrați cu ajutorul axiomei U.2:

Teorema 9. Fie d o dreaptă și $O \in d$. Prin punctul O trece o singură dreaptă perpendiculară pe d .

(Existența și unicitatea perpendicularei ridicate pe o dreaptă, într-un punct al ei.)

Exerciții

13. Dacă $\hat{hk} \equiv \hat{lm}$, atunci un suplement al lui \hat{hk} este congruent cu orice suplement al lui \hat{lm} .

14. Fie $[OC]$ bisectoarea unghiului propriu \widehat{AOB} , iar $[OD], [OE]$ bisectoarele unghiurilor \widehat{AOC} și \widehat{COB} . Să se arate că $[OC]$ este bisectoarea unghiului \widehat{DOE} .

15. Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri opuse la virf sunt semidrepte opuse.

16. Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare sunt perpendiculare.

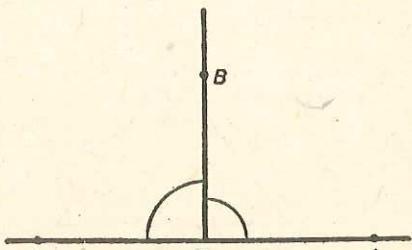


Fig. I.39

17. Dacă semidreptele (OA) , (OB) , (OC) sunt distințe două cîte două și $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COA}$, atunci bisectoarea unghiului \widehat{BOC} este semidreapta opusă cu $[OA]$.

18. Fie $[OA \perp [OA']$ și $[OB \perp [OB']$. Să se arate că unghiiurile \widehat{AOB} și $\widehat{A'OB'}$ sunt congruente sau suplementare.

§ 9. Congruența triunghiurilor

Definiție. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri. Dacă

$$(1) \quad (AB) \equiv (A'B'), (AC) \equiv (A'C'), (BC) \equiv (B'C'),$$

$$(2) \quad \hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}',$$

atunci spunem că există o *congruență* între triunghiurile ABC și $A'B'C'$ și scriem

$$(3) \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Observație. Relația $\triangle EFG \equiv \triangle LMN$ implică $\hat{E} \equiv \hat{L}$, $\hat{F} \equiv \hat{M}$, $\hat{G} \equiv \hat{N}$, deci nu este indiferentă ordinea în care sunt scrise vîrfurile triunghiurilor. Pentru a scoate în evidență acest lucru, folosim simbolul \triangle care atrage atenția asupra faptului că ordinea literelor este determinată. Perechile de vîrfuri E și L , F și M , G și N se numesc vîrfuri *omoloage* (sau *corespondente*). Perechile de lături congruente $[EF]$ și $[LM]$; $[EG]$ și $[LN]$; $[FG]$ și $[MN]$ se numesc *laturi omoloage*.

Exemplu. Pe figura I.40, între triunghiurile LMN și XYZ există congruență $\triangle LMN \equiv \triangle YXZ$; între PQR și LMN nu există nici o congruență; între PQR și UYW avem chiar două congruențe: $\triangle PQR \equiv \triangle UVW$ și $\triangle PQR \equiv \triangle UWV$. Comparând triunghiul PQR cu el însuși, pe lîngă congruența trivială $\triangle PQR \equiv \triangle PQR$ observăm și $\triangle PQR \equiv \triangle PRQ$.

Definiție. Triunghiurile ABC și DEF se numesc *congruente* dacă există (cel puțin) o congruență între ele.

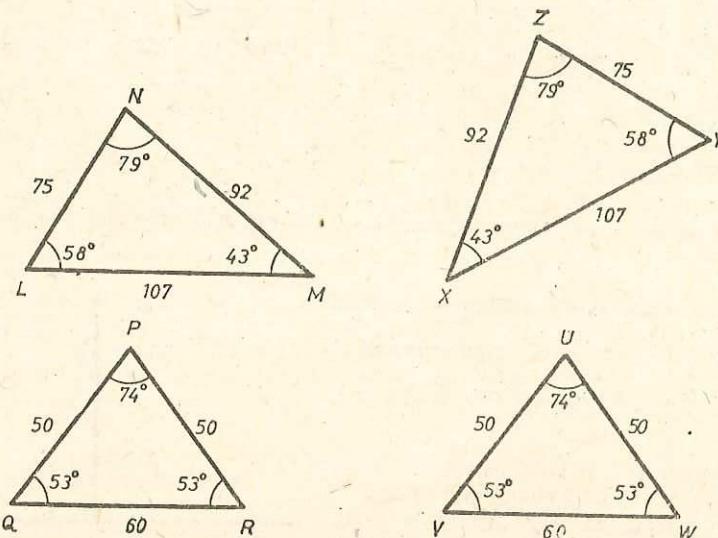


Fig. I.40

Exerciții

1. Care dintre următoarele relații sunt adevărate în cazul figurii I.41:

$$\triangle ADE \equiv \triangle BCE,$$

$$\triangle ADE \equiv \triangle EDC,$$

$$\triangle ADE \equiv \triangle DAE,$$

$$\triangle ADE \equiv \triangle EDA?$$

2. Aflați și alte perechi de triunghiuri congruente pe figura I.41.

3. Demonstrați

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \text{ și } \triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''.$$

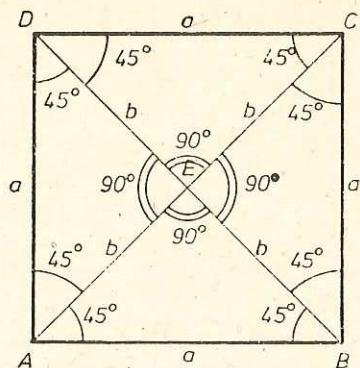


Fig. I.41

Admitem următoarea *axiomă de congruență*:

L.U.L. Fie $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ două triunghiuri (fig. I.42). Dacă

$$(5) \quad (AB) = (A'B'), \quad (AC) = (A'C') \text{ și } \hat{A} = \hat{A}'$$

atunci

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

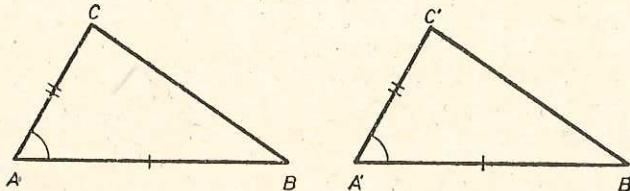


Fig. I.42

Observație: Intuitiv, această axiomă se justifică cu ajutorul ideii de „mișcare” („a unui rigid”). În cursul unei astfel de mișcări lungimile segmentelor și măsurile unghiurilor nu se schimbă, deci prin mișcare un segment se transformă într-un segment congruent, la fel un unghi într-un unghi congruent. Să ne imaginăm că triunghiul $A'B'C'$ este o placă cu o față neagră și cealaltă roșie. Ea se poate deplasa liber pe un plan cu fața roșie în sus, și poate fi și întoarsă cu față neagră în sus. Fie triunghiul ABC fixat în planul considerat și să presupunem că au loc relațiile (5). Deplasăm placă $A'B'C'$ cu față roșie în sus în așa fel ca A' să acopere pe A , iar B' pe B (ceea ce este posibil căci $[AB] \equiv [A'B']$ au lungimi egale). Deosebim două cazuri: 1) Placa se găsește acum în acel semiplan limitat de AB , în care se află C . Atunci: unghiul $\widehat{B'A'C'}$ va acoperi unghiul \widehat{BAC} , prin urmare semidreapta $[A'C']$ va acoperi pe $[AC]$ și punctul C' pe C . Rezultă $(BC) \equiv (B'C')$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, deci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. 2) Placa se găsește în semiplanul opus. Întorcindu-l, ajungem la aceeași situație ca și în cazul 1) cu deosebirea că fața neagră este sus.

T e o r e m a 1. (Teorema de congruență U.L.U.) Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au

$$(AB) = (A'B'), \quad \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}'$$

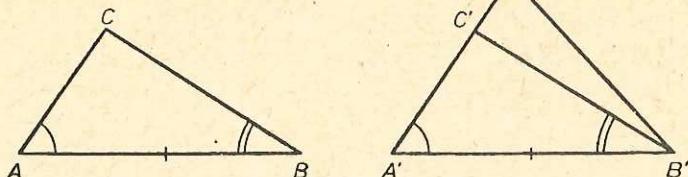


Fig. I.43

atunci

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \text{ (fig. I.43).}$$

Demonstrație. Determinăm conform teoremei de construcție a unui segment punctul $P \in (A'C')$ astfel ca $(AC) \equiv (A'P)$. Folosind axioma L.U.L. rezultă

$$(6) \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'P,$$

deci $\hat{B} \equiv \widehat{A'B'P}$. Pe de altă parte $\hat{B} \equiv \widehat{A'B'C'}$ (din ipoteză) și P, C' sunt de aceeași parte a lui $A'B'$, prin urmare $[B'C'] = [B'P]$ în virtutea axiomei U.2. Rezultă $C' = P$ și astfel relația (6) devine $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Teorema 2. (Teorema triunghiului isoscel.) Dacă pentru un triunghi ABC avem $(AB) \equiv (AC)$, atunci $\hat{B} = \hat{C}$, și reciproc (fig. I.44).

Demonstrație. Aplicând axioma L.U.L., din $(AB) \equiv (AC)$ rezultă $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$, deci $\hat{B} = \hat{C}$. Teorema U.L.U. ne arată că $\hat{B} = \hat{C}$ implică $(AB) \equiv (AC)$.

Lemă. Dacă punctele C și C' sunt de o parte și de alta a dreptei AB , $(CA) \equiv (C'A)$ și $(CB) \equiv (C'B)$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$.

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că segmentul (CC') intersectează dreapta AB într-un punct O . Deosebim următoarele cazuri:

a) $O \in (AB)$ (fig. I.45, a)). Triunghiurile ACC' și BCC' sunt isoscele, deci conform teoremei 2

$$(7) \quad \widehat{ACC'} = \widehat{AC'C} \text{ și } \widehat{BCC'} = \widehat{BC'C}.$$

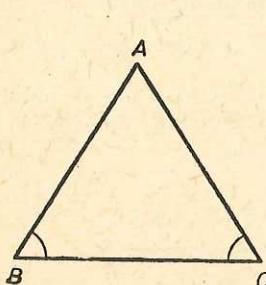
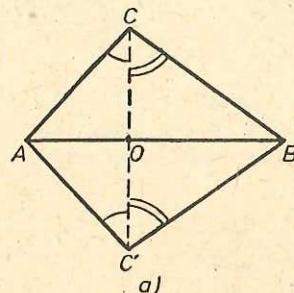
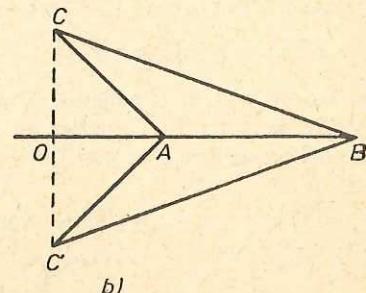


Fig. I.44



a)



b)

Cum $(CC' \subset \text{Int } \widehat{ACB})$, putem aplica teorema de adunare a unghiurilor (§ 8, teorema 6), deci $\widehat{ACB} = \widehat{AC'B}$. Din axioma L.U.L. rezultă $\triangle ABC \cong \triangle A'BC'$.

b) $A \in (OB)$ (fig. I.45, b). Relațiile (7) se deduc ca la punctul a). Din teorema 8 de la § 6 obținem $\widehat{ACB} = \widehat{AC'B}$. Așadar și în acest caz $\triangle ABC \cong \triangle A'BC'$.

c) $B \in (OA)$. Demonstrație ca la punctul b).

d) $O = A$ sau $O = B$. Lema rezultă imediat din teorema 2 și axioma L.U.L.

T e o r e m a 3. (Teorema de congruență L.L.L.) Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au

(8) $(AB) \cong (A'B')$, $(AC) \cong (A'C')$, $(BC) \cong (B'C')$,
atunci $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Demonstrație. În semiplanul limitat de BC care nu conține punctul A , ducem în conformitate cu teorema de construcție a unui unghi, semidreapta $(BP$ astfel ca $\widehat{CBP} = \widehat{B'}$, apoi determinăm pe $(BP$ punctul P astfel ca $(BP) \cong (B'A')$ (fig. I.46). Atunci $\triangle PBC \cong \triangle A'B'C'$ în virtutea axiomei L.U.L. Din $(PB) \cong (A'B')$, $(PC) \cong (A'C')$ și relațiile (8) obținem: $(AB) \cong (PB)$, $(AC) \cong (PC)$. Conform lemei avem $\triangle ABC \cong \triangle PBC$. Cum $\triangle PBC \cong \triangle A'B'C'$, rezultă că $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Exerciții

4. Fie $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Se iau punctele $D \in (BC)$ și $D' \in (B'C')$ astfel ca $(BD) \cong (B'D')$. Să se arate că $\widehat{BAD} \cong \widehat{B'A'D'}$ și $\widehat{DAC} \cong \widehat{D'A'C'}$.

5. Fie ABC un triunghi isoscel ($(AB) \cong (AC)$). Să se arate că bisectoarea unghiului \hat{A} tăie segmentul (BC) într-un punct A' și să se arate că A' este mijlocul lui (BC) și $AA' \perp BC$.

6. În triunghiul ABC avem $(AB) \cong (AC)$; bisectoarele unghiurilor \hat{B} , \hat{C} tăie laturile $[AC]$, $[AB]$ în B' , C' . Să se arate că $(BB') \cong (CC')$.

7. Fie $ABCDE$ un pentagon convex cu următoarele proprietăți: $(BC) \cong (ED)$, $(AC) \cong (AD)$, $\widehat{BCD} \cong \widehat{CDE}$. Să se arate că $\widehat{ABE} \cong \widehat{AEB}$.

8. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ astfel ca $(BP) \cong (CQ) \cong (AR)$. Demonstrați că triunghiul PQR este echilateral.

9. Se ia un punct M în interiorul triunghiului isoscel ABC ($(AB) \cong (AC)$) astfel ca $\widehat{ABM} \cong \widehat{ACM}$. Să se arate că M se găsește pe bisectoarea unghiului \widehat{BAC} .

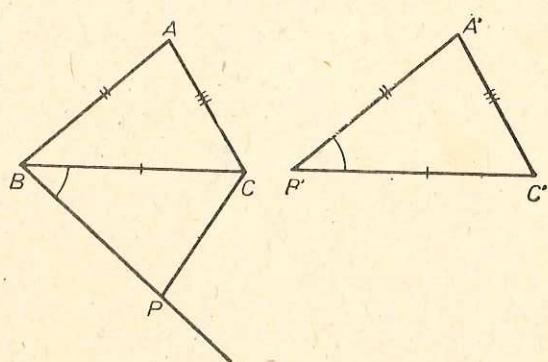


Fig. I.46

Indicație. Se va arăta că BMC este un triunghi isoscel, apoi $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ (L.L.L.).

10. Pe laturile congruente $[AB]$, $[AC]$ ale unui triunghi isoscel se iau punctele D și E astfel ca $(AD) \equiv (AE)$. Să se arate că segmentele (BE) și (CD) au un punct comun și că acesta este situat pe bisectoarea unghiului \widehat{BAC} .

11. De o parte și de alta a unei drepte AB se duc semidreptele $[AM]$ și $[BN]$ care formează cu $[AB]$ respectiv $[BA]$ unghiuri congruente. Pe aceste semidrepte se iau segmentele congruente (AC) și (BD) . Să se arate: a) (CD) și (AB) se intersectează într-un punct O ; b) O este mijlocul segmentului (AB) .

12. Fie punctul B interior unghiului AOC și A' , B' , C' cîte un punct pe semidreptele opuse lui (OA) , (OB) , (OC) astfel ca $(OA) \equiv (OA')$, $(OB) \equiv (OB')$, $(OC) \equiv (OC')$. Se presupune că punctele A , B , C nu sunt coliniare. Să se arate că nici A' , B' , C' nu sunt coliniare și $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

§ 10. Inegalități geometrice

Unghiul exterior al unui triunghi

Definiție. Un unghi se numește *unghi exterior* al unui triunghi dacă este adiacent cu unul din unghiurile triunghiului și suplémentar cu el.

În figura I.47, (BM) și (BC) sunt semidrepte opuse, unghiurile \widehat{ABC} și \widehat{ABM} sunt adiacente și suplementare, iar \widehat{ABC} este unghi al triunghiului, deci \widehat{ABM} este un unghi exterior al triunghiului ABC .

Un triunghi are șase unghiuri exterioare, cîte două cu același vîrf. Unghiurile exterioare cu același vîrf sunt congruente fiind și opuse la vîrf. Un unghi exterior al triunghiului ABC , cu vîrful în A , este neadiacent cu unghiurile \widehat{B} și \widehat{C} ale triunghiului (fig. I.48).

Teorema 1. (Teorema unghiului exterior.) Un unghi exterior al unui triunghi este mai mare decît oricare din unghiurile triunghiului, neadiacent cu acel unghi.

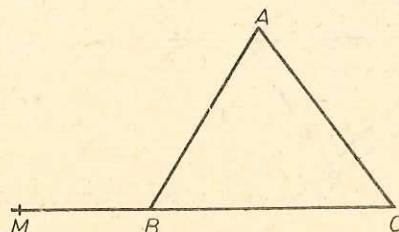


Fig. I.47

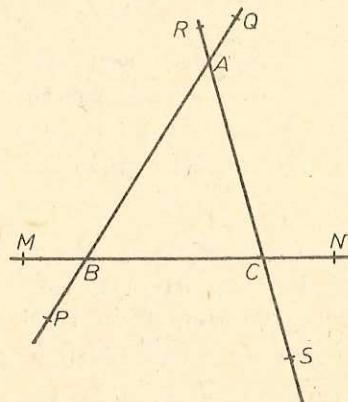


Fig. I.48

Demonstrație. Fie triunghiul ABC și \widehat{CAM} un unghi exterior (fig. I.49). Se va arăta că $m(\widehat{CAM}) > m(\widehat{ACB})$. D fiind mijlocul segmentului (AC) , pe semidreapta opusă semidreptei (DB) se consideră punctul E astfel încit $(BD) \equiv (DE)$.

Deoarece $E \in \text{Int } \widehat{CAM}$, (ex. 6, § 6), din teorema semidreptei interioare unui unghi rezultă că $\widehat{CAE} < \widehat{CAM}$; pe de altă parte $\triangle DAE \equiv \triangle DCB$ (din L.U.L.), deci $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DAE}) < m(\widehat{CAM})$. Pentru a arăta că $m(\widehat{CAM}) > m(\widehat{ABC})$ se face un raționament analog, folosind însă compararea cu celălalt unghi exterior cu vîrful în A .

Aplicație. Într-un triunghi cu două laturi necongruente, laturii cu lungimea mai mare i se opune unghiul mai mare și reciproc.

Demonstrație. În triunghiul ABC cu $AC > AB$ (fig. I.50), se consideră $D \in (AC)$ astfel încit $(AD) \equiv (AB)$. Atunci ABD este triunghi isoscel și $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB} > \widehat{ACB}$, \widehat{ADB} fiind unghi exterior triunghiului BDC . Pentru că $D \in (AC)$, $(BD) \subset \text{Int } \widehat{ABC}$, deci $\widehat{ABC} > \widehat{ABD} > \widehat{ACB}$. Demonstrația afirmației reciproce se face prin reducere la absurd.

Teorema 2. Suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decât lungimea celei de a treia laturi.

Demonstrație. ABC fiind un triunghi (fig. I.51), ne propunem să demonstrăm de exemplu că

$$AB + BC > AC.$$

Fie $M \in AB$, astfel încit $B \in (AM)$ și $(BC) \equiv (BM)$. Inegalitatea care trebuie demonstrată revine la:

$$AB + BM = AM > AC.$$

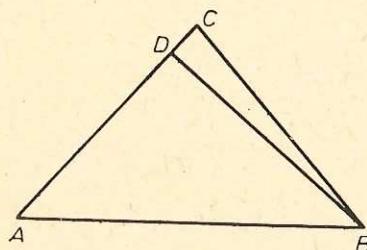


Fig. I.50

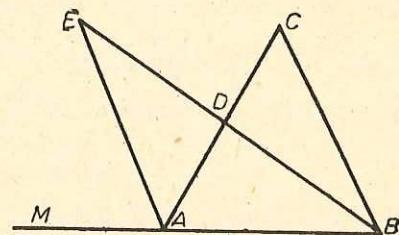


Fig. I.49

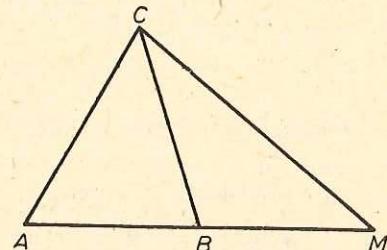


Fig. I.51

Pentru a demonstra că $AM > AC$ este suficient să se demonstreze că $m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{AMC})$. Prin construcție, triunghiul CBM este isoscel deci $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BCM}$. Deoarece $B \in \text{Int } \widehat{ACM}$,

$$m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{BCM}) = m(\widehat{AMC}),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Pentru un triunghi ABC au loc inegalitățile

$$AB + BC > AC,$$

$$AC + BC > AB,$$

care sunt echivalente cu

$$BC > AC - AB,$$

$$BC > AB - AC = -(AC - AB).$$

Deci

$$BC > |AC - AB|$$

sau: lungimea oricărei laturi a unui triunghi este mai mare decât valoarea absolută a diferenței lungimilor celorlalte două laturi.

Vom reaminti următoarele noțiuni: triunghiul cu un unghi drept se numește *triunghi dreptunghic*. Laturile care formează unghiul drept se numesc *cătete*, iar latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*.

Perimetrul unui poligon este suma lungimilor laturilor sale.

Exerciții

1. Două drepte distincte, perpendiculare pe aceeași dreaptă, nu sunt concurente.
2. Dacă un triunghi are un unghi drept (sau obtuz), celelalte două unghiuri sunt ascuțite.
3. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decât lungimea oricărei cătete.

4. Fie triunghiul ABC și M, N două puncte astfel încât $B \in (MC)$, $C \in (BN)$.

Să se demonstreze că $m(\widehat{MAN}) < m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$.

5. Să se arate că oricare ar fi unghiurile proprii hk și pq , există un triunghi ABC astfel încât $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) > m(hk)$ și $m(\widehat{A}) < m(pq)$.

6. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care (AD) este latura cea mai lungă și (BC) cea mai scurtă; atunci:

$$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ADC}) \text{ și } m(\widehat{BCD}) > m(\widehat{BAD}).$$

Indicație. În triunghiul ABD , $AD > AB$, deci $m(\widehat{ABD}) > m(\widehat{ADB})$ (fig. I.52). În triunghiul BCD , $BC < CD$, deci $m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{BDC})$. Adunând membru cu membru cele două inegalități, se obține:

$$m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BDC}) \text{ sau } m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ADC}).$$

La fel se demonstrează și cea de a doua inegalitate.

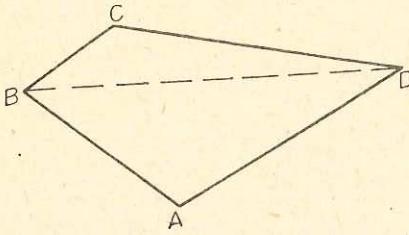


Fig. I.52

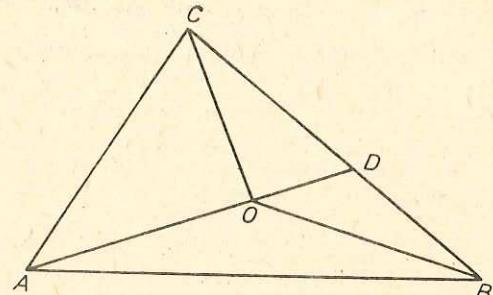


Fig. I.53

• 7*. În triunghiul ABC se consideră punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ astfel ca $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$. Să se arate că:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + AC + BC.$$

• 8*. Se consideră triunghiul ABC în care $AB < AC$ și punctul D , astfel că $C \in (AD)$. Să se arate că pentru orice punct M , $M \in (BC)$ are loc:

$$m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{BMA}) > m(\widehat{CMD}) + m(\widehat{MDC}).$$

, 9. Fie triunghiul ABC și $O \in \text{Int } ABC$. Să se demonstreze că

$$\frac{BC + CA + AB}{2} < OA + OB + OC < BC + CA + AB.$$

Indicație. În triunghiurile OAB , OAC , BOC au loc:

$$OA + OB > AB, OA + OC > AC, OB + OC > BC \text{ (fig. I.53).}$$

Adunând membru cu membru se obține:

$$OA + OB + OC > \frac{1}{2} (AB + AC + BC).$$

Pentru a doua inegalitate fie $\{D\} = AO \cap BC$. Avem $D \in (BC)$ și inegalitățile $AO + OC < AO + OD + DC = AD + DC$, $AD < AB + BD$; rezultă că $AO + OC < AB + BD + DC$ sau $AO + OC < AB + BC$. Se obțin în mod analog alte două inegalități și apoi se adună membru cu membru.

10*. Lungimea unui segment este mai mică decât lungimea oricărei linii poligonale care are extremitățile segmentului ca vîrfuri.

Indicație. Dacă linia poligonală are două laturi atunci se aplică direct teorema 2.

Dacă linia poligonală are vîrfurile A , M_1 , M_2 , ..., M_n , B , se scriu inegalitățile:

$$AB < AM_1 + M_1B, M_1B \leq M_1M_2 + M_2B, \dots, M_{n-2}B \leq M_{n-2}M_{n-1} + M_{n-1}B,$$

$$M_{n-1}B < M_{n-1}M_n + M_nB.$$

Se adună membru cu membru și se obține:

$$AB + M_1B + \dots + M_{n-1}B < AM_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n + M_nB + M_1B + M_2B + \dots + M_{n-1}B,$$

sau

$$AB < AM_1 + M_1M_2 + \dots + M_nB.$$

11*. Se consideră poligoanele convexe P' și P'' . Dacă suprafața poligonală determinată de P' este inclusă în suprafața poligonală determinată de P'' , atunci perimetru poligonului P' este mai mic sau egal decât perimetru poligonului P'' .

Indicație. Se consideră întii cazul cind P' și P'' au o latură comună.

12. Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii (BC) . Să se arate că:

$$AD < \frac{AB + AC}{2}.$$

13. Se consideră triunghiul ABC și A_1, B_1, C_1 respectiv mijloacele laturilor $(BC), (AC), (AB)$. Să se arate că:

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + AC + BC.$$

14*. Se consideră două puncte A și B și o dreaptă d care nu trece prin nici unul dintre ele. Să se determine un punct $C, C \in d$ astfel ca oricare ar fi $M, M \in d$, să aibă loc:

$$AC + CB \leq AM + MB.$$

Indicație. Se disting două cazuri: a) dreapta d nu separă punctele A și B . Fie $AA' \perp d$, $\{O\} = AA' \cap d$, $(OA) \equiv (OA')$ și $O \in (AA')$; A' și B fiind în semiplane opuse, există $C, (A'B) \cap d = \{C\}$ și

$$A'B = A'C + BC = AC + BC;$$

fie $M \in d, M \neq C$

$$A'M + MB > A'B = AC + BC;$$

b) dacă d separă pe A și B , $\{C\} = (AB) \cap d$.

15*. (Problema biliardului). Fie două mingi de biliard situate în punctele A și B și (CD) o latură a mesei. Să se determine punctul $M, M \in (CD)$ în care trebuie să atingă latura (CD) după lovire una din bile pentru ca să o ciocnească în continuare pe celalăt, știind că $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BMD}$.

§ 11. Alte cazuri de congruență ale triunghiurilor

Teorema de congruență a triunghiurilor L.U.U.

T e o r e m ă 1. Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt astfel încit $(AB) = (A'B')$, $\hat{A} = \hat{A}'$ și $\hat{C} = \hat{C}'$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demonstratie. Pe semidreapta $(A'C')$ se consideră punctul C'' astfel încit $(AC) \equiv (A'C'')$ (fig. I.54). Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$ (din L.U.L.).

a) Dacă $C' = C''$, teorema este demonstrată.

b) Dacă $C'' \in (A'C')$, atunci $\widehat{A'C''B'} = \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, ceea ce nu este posibil deoarece $\widehat{A'C''B'}$ este unghi exterior triunghiului $B'C'C''$.

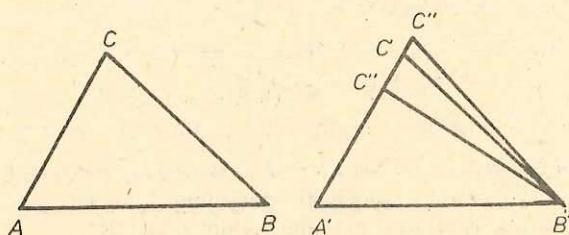


Fig. I.54

c) Dacă $C' \in (A'C'')$ atunci $\widehat{A'C''B'} = \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, ceea ce de asemenea nu este posibil întrucât $\widehat{A'C'B'}$ este unghi exterior triunghiului $B'C'C''$.

Deci singura poziție posibilă este $C' = C''$ adică $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Congruența triunghiurilor dreptunghice

În cazul particular al triunghiurilor dreptunghice, teoremele de congruență se pot formula astfel: se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$, $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$.

Cazul I (C.C.) Dacă $(AB) \equiv (A'B')$ și $(AC) \equiv (A'C')$ atunci triunghiurile sunt congruente.

Cazul II (C.U.) Dacă $(AB) \equiv (A'B')$ și $\hat{B} = \hat{B}'$, atunci triunghiurile sunt congruente.

Cazul II' (C.U.) Dacă $(AB) \equiv (A'B')$ și $\hat{C} = \hat{C}'$ atunci triunghiurile sunt congruente.

Cazul III (I.U.) Dacă $(BC) \equiv (B'C')$ și $\hat{B} = \hat{B}'$ atunci triunghiurile sunt congruente.

Pentru triunghiurile dreptunghice există și un caz special de congruență.

T e o r e m ă 2. (Cazul IV.C.I.) Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu $\hat{m}(\hat{A}) = \hat{m}(\hat{A}') = 90^\circ$, verifică condițiile $(AB) \equiv (A'B')$ și $(BC) \equiv (B'C')$, atunci triunghiurile sunt congruente.

Demonstratie. Pe semidreapta $(A'C)$ se consideră punctul C'' astfel încât $(AC) \equiv (A'C'')$ (fig. I.55). Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$ (din cazul C.C.).

a) Dacă $C' = C''$, teorema este demonstrată.

b) Dacă $C'' \in (A'C')$ atunci $(B'C'') \equiv (BC) \equiv (B'C')$ și triunghiul $B'C''C'$ este isoscel, $\widehat{B'C'C''} = \widehat{B'C''C'}$. Dar $\widehat{B'C''C'}$ este exterior triunghiului $A'B'C'$ deci $\widehat{B'C'C''} = \widehat{B'C''C'} > \hat{A}'$ ceea ce nu este posibil pentru că triunghiul $B'C'C''$ nu poate avea două unghiuri obtuze.

c) Dacă $C' \in (A'C'')$, în mod analog rezultă că triunghiul $B'C''C'$ este isoscel; dar $\widehat{B'C'C''}$ este exterior triunghiului $A'B'C'$ deci $\widehat{B'C'C''} = \widehat{B'C'C'} > \hat{A}$, ceea ce de asemenea nu este posibil.

Prin urmare singura poziție posibilă este $C' = C''$, deci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

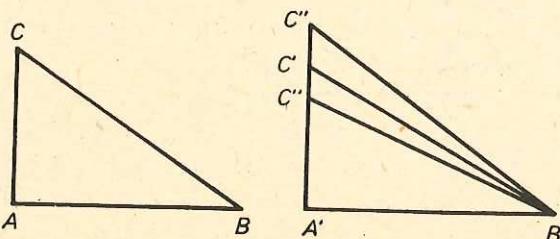


Fig. I.55

Exerciții

- Fie triunghiurile isoscele ABC și $A'B'C'$ ($(AB) \equiv (AC)$, $(A'B') \equiv (A'C')$), în care $(AB) \equiv (A'B')$ și $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Să se demonstreze că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.
- Dacă în patrulaterul convex $ABCD$, $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ și $[BD]$ este bisectoarea unghiului \widehat{B} , atunci $[DB]$ este bisectoarea unghiului \widehat{D} .
- Dacă în triunghiul ABC , $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ și $(AA') \equiv (BB')$, atunci triunghiul este isoscel.
- Să se arate că dacă $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ și $AA_1 \perp BC$, $DD_1 \perp EF$, $A_1 \in BC$, $D_1 \in EF$, atunci $(AA_1) \equiv (DD_1)$.
- Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ și punctele $M \in (BC)$, $N \in (DC)$. Să se arate că dacă $(AM) \equiv (AN)$ și $\widehat{BAM} \equiv \widehat{DAN}$, atunci $(BC) \equiv (DC)$.

§ 12. Distanța de la un punct la o dreaptă

Teorema 1. Fiind dată dreapta d și punctul M , $M \notin d$, există o singură dreaptă d' , astfel încât $M \in d'$ și $d' \perp d$.

Demonstrație. a) *Existența.* Se consideră A și B , $A \in d$, $B \in d$, $A \neq B$ (fig. 1.56). Dacă $MA \perp d$ sau $MB \perp d$, existența perpendicularei din M pe d este demonstrată. În caz contrar, fie în semiplanul determinat de d care nu conține pe M , semidreapta $(AP$ astfel încât $\widehat{MAB} = \widehat{PAB}$ și $C \in (AP$, $(AM) \equiv (AC)$. M și C fiind în semiplane opuse față de d , există punctul M' , $d \cap (MC) = \{M'\}$. $\triangle AM'M \equiv \triangle AM'C$ (din L.U.L.) deci $\widehat{AM'C} = \widehat{AM'M}$ și $\widehat{AM'C}$, $\widehat{AM'M}$ suplementare. Rezultă că $m(\widehat{AM'C}) = m(\widehat{AM'M}) = 90^\circ$ ceea ce demonstrează existența perpendicularei.

b) *Unicitatea.* Se arată prin reducere la absurd (fig. 1.57). Dacă $MA \perp d$, $MB \perp d$, $A \in d$, $B \in d$, $A \neq B$, atunci triunghiul MAB are două unghiuri drepte ceea ce nu este posibil.

a) și b) demonstrează teorema.

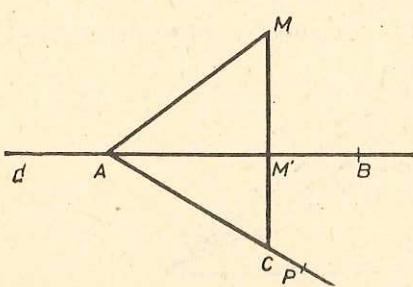


Fig. 1.56

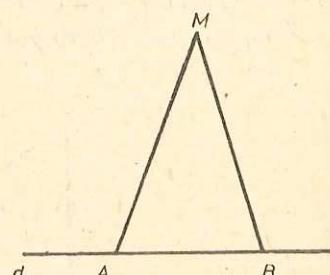


Fig. 1.57

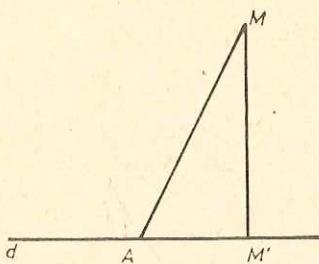


Fig. I.58

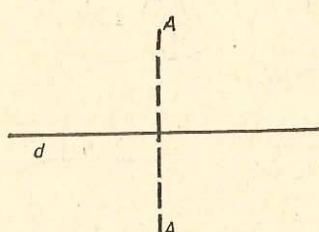


Fig. I.59

Punctul de intersecție al perpendicularei pe d din M , cu d , se numește *piciorul perpendicularei* duse din M pe dreapta d .

T e o r e m a 2. Se consideră dreapta d , punctul M , $M \notin d$ și M' piciorul perpendicularei din M pe d . Atunci, oricare ar fi punctul A , $A \in d$; $A \neq M'$, are loc $MM' < MA$.

Demonstrație. Triunghiul AMM' este dreptunghic (fig. I.58), (MM') fiind o catetă, lungimea catetei este mai mică decât lungimea ipotenuzei (MA).

Din teoremele 1 și 2 rezultă că există pe dreapta d un punct unic M' , astfel încit $MM' \leq MA$ oricare ar fi punctul A , $A \in d$.

Definiție. Se numește *distanța de la un punct la o dreaptă* căreia nu-i aparține, cea mai mică distanță dintre acel punct și punctele dreptei.

Din cele de mai sus rezultă că distanța de la un punct la o dreaptă este distanța dintre punct și piciorul perpendicularei duse din punct pe dreaptă. Se notează $d(M, d) = \min_{P \in d} MP = d(M, M') = MM'$, unde $M' \in d$ și $MM' \perp d$.

Dacă $M \in d$, se definește $d(M, d) = 0$.

Uneori se va utiliza și noțiunea de distanță de la un punct la o semidreaptă, înțelegindu-se distanța de la punct la suportul semidreptei.

Definiții. Punctele A și A' se numesc *simetrice față de dreapta* d , dacă $A = A' \in d$ sau $AA' \perp d$ și mijlocul lui (AA') se află pe d . În acest caz, punctul A' se numește *simetricul lui A față de d*.

Punctele A și A' se numesc *simetrice față de punctul O* dacă O este mijlocul lui (AA') sau $A = A' = O$. Mulțimile de puncte \mathcal{M} și \mathcal{M}' se numesc *simetrice față de dreapta* d (sau *punctul O*) dacă \mathcal{M}' este mulțimea simetricelor punctelor din \mathcal{M} față de dreapta d (sau față de punctul O).

În figura I.59 A și A' sunt simetrice față de d , în figura I.60 A și A' sunt simetrice față de O , iar în figurile I.61 și I.63 \mathcal{M} și \mathcal{M}' sunt simetrice față de d respectiv O . În figurile I.62 și I.64 $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$. În acest caz, d se numește *o axă de simetrie* a lui \mathcal{M} iar O centru de simetrie a lui \mathcal{M} .

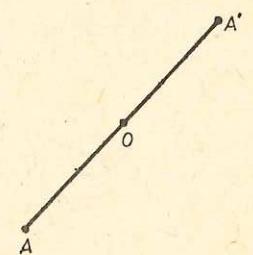


Fig. I.60

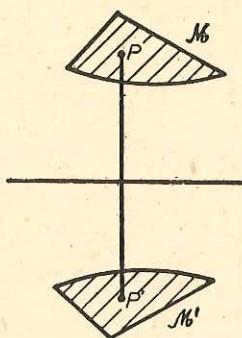


Fig. I.61

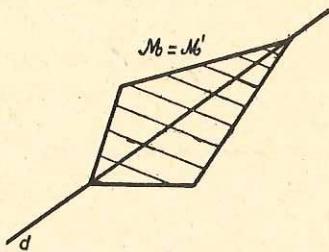


Fig. I.62

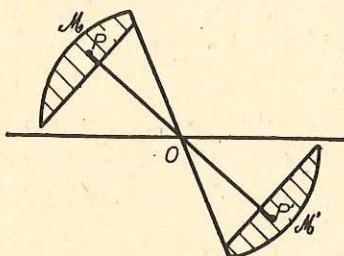


Fig. I.63

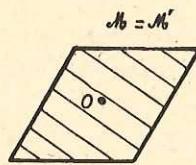


Fig. I.64

Exerciții

1. Fie triunghiul ABC și A_1 piciorul perpendicularei duse din A pe BC . Să se demonstreze că dacă \hat{B} și \hat{C} sunt ascuțite, atunci $A_1 \in (BC)$, iar dacă \hat{B} este obtuz, atunci $B \in (A_1 C)$.

2. Se consideră o dreaptă d , punctul A , $A \notin d$ și A' piciorul perpendicularei din A pe d . Să se demonstreze că dacă punctele B și C , $B \in d$, $C \in d$ sunt astfel încât $A'B' < A'C$ atunci $AB < AC$. Să se formuleze și să se demonstreze afirmația reciprocă acesteia.

3*. Dacă ABC este un triunghi isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$, atunci pentru orice punct $D \in (BC)$, are loc $AD < AB$.

4*. Dacă ABC este un triunghi isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$ și $D \in BC$ astfel încât $AD < AB$, atunci $D \in (BC)$.

5*. Se consideră triunghiul ABC în care $AB < AC$. Să se arate că pentru orice punct $D \in (BC)$, $AD < AC$.

6*. Fie A un punct situat pe o dreaptă d , $B \notin d$ și $C \in AB$. Se notează cu B' și C' simetricele lui B și C față de dreapta d . Să se demonstreze că punctele A , B' , C' sunt coliniare.

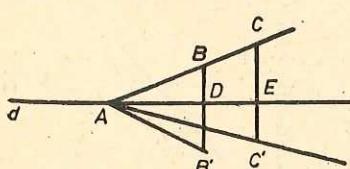


Fig. I.65

Indicație. Fie D și E picioarele perpendicularelor din B și C pe d . Se consideră două cazuri:
 1) $C \in (AB)$ (fig. I.65). Are loc: $(BD) \equiv (DB')$, $(CE) \equiv (EC')$ și astfel $\triangle ABD \equiv \triangle ABD'$, $\triangle ACE \equiv \triangle AC'E$. Rezultă $\widehat{EAB'} \equiv \widehat{EAC'}$ și deoarece B' , C' sunt de aceeași parte a lui d , din teorema de construcție a unui unghi se deduce că $(AB') = (AC')$.

2) $A \in (BC)$. Raționând în mod analog,
 $\widehat{DAB'} \equiv \widehat{EAC'}$ și din teorema 3, § 7, rezultă că
 (AB') și (AC') sunt semidrepte opuse (fig. I.66).

7*. Să se arate că: a) simetrica unei drepte față de o altă dreaptă, pe care o taie, este tot o dreaptă. b) O dreaptă admite o infinitate de axe de simetrie. Să se afle aceste axe. c) Simetricul unui segment față de o dreaptă este un segment de aceeași lungime. d) Să se afle axele de simetrie ale unui segment.

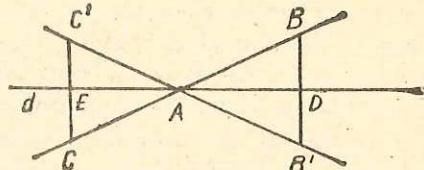


Fig. I.66

§ 13. Mediatoare. Bisectoare. Locuri geometrice

Definiție. Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment dusă prin mijlocul segmentului.

Existența și unicitatea mediatoarei rezultă din faptul că mijlocul unui segment există și este unic, perpendiculara printr-un punct al dreptei pe dreaptă există și este unică.

Teorema 1. Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.

Demonstrație. Se consideră (AB) , $O \in (AB)$, $(OA) \equiv (OB)$, și M un punct de pe mediatoarea segmentului (AB) (fig. I.67). Dacă $M = O$, afirmația este evidentă. Dacă $M \neq O$, $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ (C.C.) și rezultă $(AM) \equiv (BM)$ deci $AM \equiv BM$.

Teorema 2. (Reciprocă.) Orice punct egal depărtat de capetele unui segment aparține mediatoarei segmentului.

Demonstrație. Se consideră (AB) și M un punct astfel încât $(MA) \equiv (MB)$ (fig. I.68). Dacă $M \in AB$ atunci M este mijlocul segmentului (AB) și aparține mediatoarei. Dacă $M \notin AB$, fie O mijlocul segmentului (AB) . $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ (din L.L.L.). Deci $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$. Deoarece cele două unghiuri sunt și suplementare, rezultă că $MO \perp AB$, ceea ce înseamnă că MO este mediatoarea segmentului (AB) .

Din cele două teoreme rezultă că mediatoarea unui segment este mulțimea punctelor care au proprietatea că sint egal depărtate de capetele segmentului.

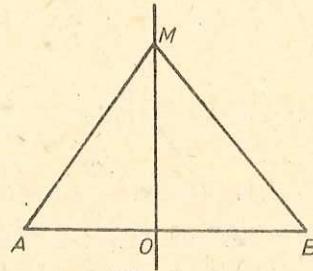


Fig. I.67

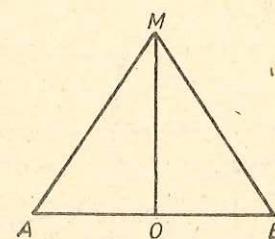


Fig. I.68

Pentru o mulțime de puncte care verifică o anumită proprietate \mathcal{P} se folosește și denumirea de „locul geometric” al punctelor care au proprietatea \mathcal{P} . Astfel mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egal depărtate de capetele segmentului.

În general, pentru a demonstra că o mulțime \mathcal{M} de puncte este locul geometric al punctelor care verifică o proprietate \mathcal{P} se va demonstra că orice element al mulțimii \mathcal{M} verifică proprietatea \mathcal{P} și că orice punct care verifică proprietatea \mathcal{P} aparține mulțimii \mathcal{M} .

Un alt exemplu de mulțime de puncte care verifică o anumită proprietate este bisectoarea unui unghi.

T e o r e m a 3. Bisectoarea unui unghi propriu este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului, reunit cu vîrful unghiului.

Demonstrație. a) Se va arăta că orice punct de pe bisectoare are proprietatea enunțată (fig. I.69). Fie \hat{hk} un unghi, O vîrful unghiului, s bisectoarea lui și $M \in s - \{O\}$. Se notează cu A și B picioarele perpendicularelor din M pe suporturile lui h și k . $A \in h$ căci altfel triunghiul OAM ar avea un unghi obtuz și unul drept; analog, $B \in k$. $\triangle OAM \cong \triangle OBM$ (din I.U.); rezultă $(MA) = (MB)$, deci $d(M, h) = d(M, k)$.

b) Se va arăta că orice punct M cu proprietatea $d(M, h) = d(M, k)$ și $M \in \text{Int } \hat{hk}$, aparține bisectoarei unghiului \hat{hk} . Dacă A și B sunt picioarele perpendicularelor din M pe suporturile lui h și k , se va demonstra că $A \in h$ și $B \in k$. Presupunând contrariul, de exemplu $A \notin h$, rezultă că segmentul (AM) intersectează latura k , deoarece din exercițiul 13, § 6 deducem că (AM) intersectează una din laturile unghiului și aceasta nu poate fi decât k . Fie $\{C\} = (AM) \cap k$. Deoarece $MC \geq MB$ (teorema 2, § 12) și $AM > CM$, rezultă că $AM > MB$, ceea ce contrazice ipoteza. La fel se arată că $B \in k$. Din $(MA) = (MB)$ rezultă că $\triangle OAM \cong \triangle OBM$ (C.1.), deci $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ și rezultă că (OM) este bisectoarea unghiului \hat{hk} .

Pe baza proprietăților de loc geometric ale bisectoarelor și mediatoarelor se pot demonstra următoarele două teoreme referitoare la concurența bisectoarelor și mediatoarelor unui triunghi.

T e o r e m a 4. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație. Din teorema transversalei rezultă că bisectoarele unghiurilor \hat{A} și \hat{B} intersectează pe (BC) și (AC) în cîte un punct D respectiv E (fig. I.70). Din aceeași teoremă rezultă că există punctul I ,

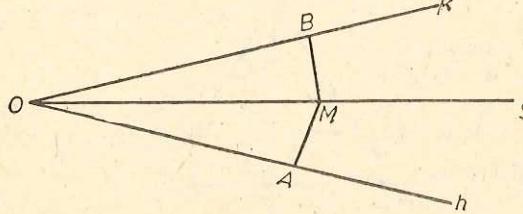


Fig. I.69

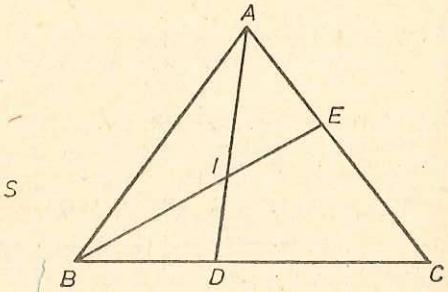


Fig. I.70

$\{I\} = (AD) \cap (BE) = (BE) \cap (AD)$. Așadar $I \in \text{Int } \widehat{ACB}$. Din proprietatea punctelor bisectoarei unui unghi rezultă $d(I, BC) = d(I, AB)$, $d(I, AB) = d(I, AC)$ și deci $d(I, BC) = d(I, AC)$ și pentru că $I \in \text{Int } \widehat{ACB}$ rezultă că $[CI]$ este bisectoarea unghiului \hat{C} .

Teorema 5. Dacă două dintre mediatorele laturilor unui triunghi sunt concurente, atunci cele trei mediatore ale laturilor triunghiului sunt concurente.

Demonstrație. Fie triunghiul ABC , d_1 și d_2 mediatorele segmentelor (AB) respectiv (BC) , $\{O\} = d_1 \cap d_2$ (fig. I.71.) Din proprietatea punctelor mediatorei rezultă că $(OA) \equiv (OB)$, $(OB) \equiv (OC)$ deci $(OA) \equiv (OC)$, ceea ce înseamnă că O aparține mediatorei segmentului (AC) .

Se observă că această teoremă nu asigură faptul că în orice triunghi mediatorele laturilor sunt concurente, ci exprimă doar o condiție suficientă pentru concurență. Cu axiomele admise, pînă acum, nu putem demonstra că mediatorele a două laturi ale unui triunghi sunt concurente. Acest lucru se va face în capitolul II după enunțarea unei alte axiome, „axioma paralelelor“.

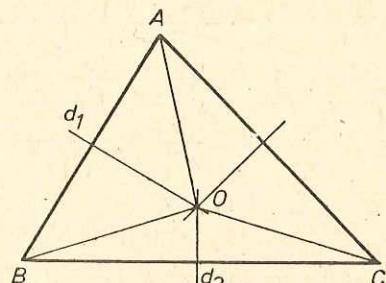


Fig. I.71

Exerciții

1. Fie punctele distințe A și B . Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $AM \perp AB$.
2. Fie punctele distințe A și B și numărul real $\alpha \in (0; 180)$. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $m(\widehat{MAB}) = \alpha^\circ$.
3. Fie triunghiul ABC și cele două unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură $[BC]$ respectiv $[CB]$. Să se demonstreze că dacă bisectoarele celor două unghiuri exterioare sunt concurente într-un punct M , atunci M aparține și bisectoarei unghiului \hat{A} .
4. Se consideră punctele A și B și o dreaptă d , $A \notin d$, $B \notin d$. Să se determine un punct C , $C \in d$ astfel ca $(AC) \equiv (BC)$. Discuție.
5. Fie unghiul hk și două puncte A și B . Să se determine un punct C astfel că $(AC) \equiv (CB)$ și $d(C, h) = d(C, k)$.

§ 14. Drepte neconcurante

Din axiomele de incidentă a rezultat că două drepte distințe au cel mult un punct comun, fără să se pună problema dacă există două drepte care să nu aibă nici un punct comun. Răspunsul la această întrebare este afirmativ și este justificat în următoarea:

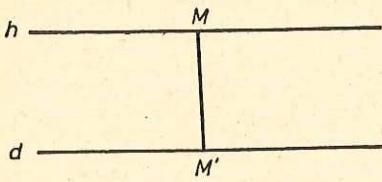


Fig. I.72

Teorema 1. Pentru orice dreaptă d și orice punct $M \notin d$, există o dreaptă h , astfel încât $M \in h$ și $d \cap h = \emptyset$

Demonstrație. Fie dreapta d , $M \notin d$ și $MM' \perp d$, $M' \in d$; se consideră dreapta h , $M \in h$ și $h \perp MM'$. Se va arăta că h și d nu sunt concurențe, prin reducere la absurd (fig. I.72).

Se presupune că $\{P\} = h \cap d$. Dacă M, M', P sunt necoliniare atunci triunghiul $MM'P$ are două unghiuri drepte ceea ce este absurd. Dacă M, M', P sunt coliniare atunci $h = d$ (pentru că $h = MP$ și $d = M'P$), deci $M \in d$, ceea ce contrazice ipoteza.

Observație. Din teoremă rezultă că, fiind dată o dreaptă d , prin orice punct M al planului care nu aparține dreptei d , trăce cel puțin o dreaptă neconcurrentă cu d , dar nu exclude existența mai multor drepte cu aceeași proprietate.

Utilizând ideea din demonstrația teoremei 1 se pot stabili condiții pentru ca două drepte să nu fie concurențe. Înainte de aceasta se vor introduce cîteva noțiuni.

Definiție. O dreaptă se numește *secantă* (sau transversală) pentru două sau mai multe drepte dacă intersectează fiecare din aceste drepte în puncte distincte.

În figura I.73 dreapta d este o transversală pentru d_1, d_2, d_3 , dreapta d_3 este o transversală pentru d_1, d_2, d .

Definiție. Două unghiuri se numesc *alterne interne* dacă intersecția a două laturi este un segment, iar celelalte două laturi sunt situate în semiplane opuse față de dreapta ce conține segmentul.

În figura I.74 \widehat{CAB} și \widehat{ABD} sunt unghiuri alterne interne, pentru că $(AB \cap BA = (AB)$, C și D fiind în semiplane opuse față de AB . Dreapta AB este o secantă pentru dreptele AC și BD . Se observă că în figura compusă

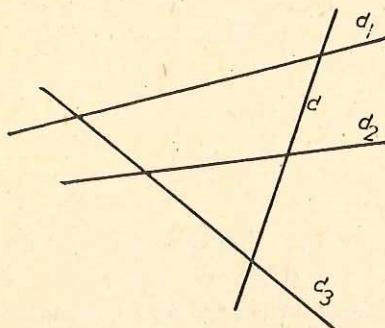


Fig. I.73

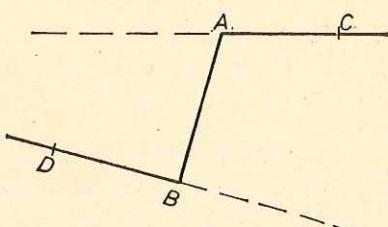


Fig. I.74

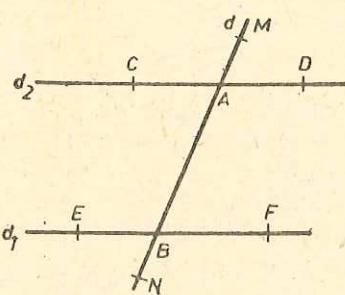


Fig. I.75

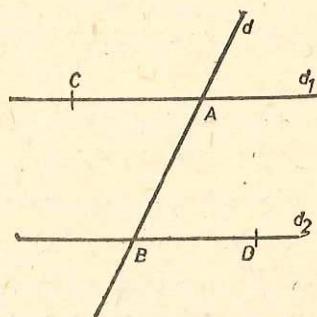


Fig. I.76

de două drepte și o secantă se formează două perechi de unghiuri alterne interne.

Fie dreptele d_1 , d_2 și secanta d (fig. I.75).

$C \in d_1$, $D \in d_1$, $E \in d_2$, $F \in d_2$, $d \cap d_1 = \{A\}$, $d \cap d_2 = \{B\}$, $A \in (CD)$, $B \in (EF)$, $M \in d$, $N \in d$, $A \in (MB)$, $B \in (AN)$.

Perechile de unghiuri $(\widehat{CAB}, \widehat{ABF})$, $(\widehat{DAB}, \widehat{ABE})$ se numesc *alterne interne*. Perechile de unghiuri $(\widehat{MAC}, \widehat{ABE})$, $(\widehat{CAB}, \widehat{EBN})$, $(\widehat{MAD}, \widehat{ABF})$, $(\widehat{DAB}, \widehat{FBN})$ se numesc *corespondente*. Perechile de unghiuri $(\widehat{FBA}, \widehat{DAB})$, $(\widehat{CAB}, \widehat{ABE})$ se numesc *interne de aceeași parte a secantei*:

Theoremă 2. Dacă pentru două drepte distincte există o secantă cu care formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente atunci dreptele nu sunt concurente.

Demonstratie. Fie $d_1 \neq d_2$, secanta d , $\{A\} = d_1 \cap d$, $\{B\} = d_2 \cap d$, $C \in d_1$, $D \in d_2$, d separă C și D , $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$ (fig. I.76). Se presupune prin absurd că $d_1 \cap d_2 = \{P\}$. Dacă A , B , P sunt necoliniare triunghiul ABP are un unghi exterior congruent cu un unghi interior neadiacent cu el, ceea ce este absurd. Dacă A , B , P sunt coliniare atunci $d_1 = d_2$, ceea ce contrazice ipoteza.

Exerciții

- Să se demonstreze că dacă două drepte distincte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente sau o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt nesecante.
- Să se demonstreze că dacă segmentele (AB) și (CD) nesituate pe aceeași dreaptă au mijlocul comun, atunci $AC \cap BD = \emptyset$, $AD \cap BC = \emptyset$.

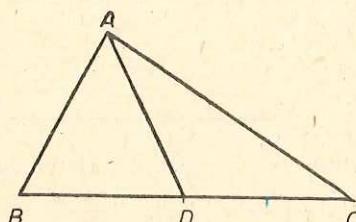


Fig. I.77

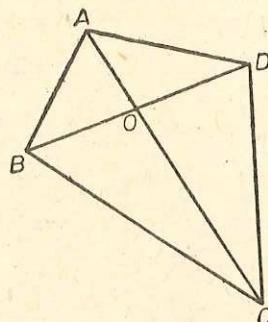


Fig. I.78

Exerciții recapitulative

1. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$ și D este mijlocul segmentului (BC) . Să se arate că $AD < \frac{BG}{2}$.

Indicație. Din ipoteză $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC}) > m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$ deci sau $m(\widehat{BAD}) > m(\widehat{ABC})$ și $BD > AD$ sau $m(\widehat{DAC}) > m(\widehat{ACB})$ și $CD > AD$ (fig. I.77).

- 2*. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$, $AB + BD < AC + CD$, atunci $AB < AC$.

Indicație. Se arată în prealabil că suma lungimilor a două laturi opuse este mai mică decât suma lungimilor diagonalelor. Se obține: $AB + CD < AC + BD$ și prin adunare membru cu membru cu inegalitatea din ipoteză se obține concluzia (fig. I.78).

3. Dacă pentru triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au loc: $(AB) \equiv (A'B')$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, atunci $d(A, BC) = d(A', B'C')$.

4. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ în care $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$. Să se arate că dacă unghiurile \hat{C} și \hat{C}' sunt ambele ascuțite (sau ambele obtuze) atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

5. Fie d bisectoarea unghiului propriu \widehat{BAC} și d' perpendiculara pe d , dusă prin B . Să se arate că $d' \cap (AC) \neq \emptyset$.

- Indicație.* Se ia $B' \in (AC)$ astfel ca $(AB) \equiv (AB')$ și se arată că d' coincide cu BB' .

- 6*. Reuniunea a două drepte concurente, are două axe de simetrie perpendiculare.

- 7*. Dacă dreptele OA și OB nu sunt perpendiculare, dreapta OC este o axă de simetrie a mulțimii $OA \cup OB$ dacă și numai dacă unghiurile \widehat{COA} și \widehat{COB} sunt congruente sau suplementare.

8*. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $A \equiv B$ și $(DA) \equiv (CB)$. Să se arate că mediatoarea d a segmentului (AB) intersectează segmentul (DC) și că d este o axă de simetrie a patrulaterului $ABCD$.

9*. Dacă două drepte au o perpendiculară comună atunci mulțimea formată din reuniunea celor două drepte are axă de simetrie.

10. Fie A un punct dat, d o dreaptă dată și P un punct variabil pe d . Să se afle locul geometric al simetricului punctului P față de A .

11. Se dă un unghi propriu \widehat{AOB} . Să se afle locul geometric al punctelor M astfel încât $(OB$ să fie bisectoarea unghiului \widehat{AOM} . În ce caz locul geometric este diferit de mulțimea vidă?

12*. Se consideră punctele M, N, P și Q pe laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este convex. Generalizare.

Paralelism. Asemănare

§ 1. Axioma paralelelor

Definiție. Două drepte d_1 și d_2 , situate în planul \mathcal{P} , se numesc *paralele* dacă nu au punct comun. Se notează $d_1 \parallel d_2$. Deci $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow d_1 \cap d_2 = \emptyset$.

Două segmente se numesc *paralele* dacă dreptele care le conțin sunt paralele. Teorema 1 din § 14 cap. I poate fi reformulată astfel: „Printr-un punct exterior unei drepte trece cel puțin o dreaptă paralelă cu ea“.

Să ne punem acum problema: fiind dată o dreaptă d și un punct M nesituat pe ea, există mai multe drepte care trec prin M și sint paralele cu d ? (fig. II.1).

Intuitiv se pare că răspunsul este negativ, adică există o singură paralelă cu d prin M . Încă din antichitate au existat încercări pentru a demonstra acest lucru. Matematicianul grec Euclid (sec. III. i.e.n.) în cartea sa „Elemente“ a prezentat proprietatea sub forma unei axiome admitând astfel, că nu poate fi demonstrată. Această soluție nu a mulțumit pe matematicieni care au încercat în continuare să o demonstreze, apărînd numeroase demonstrații, care ulterior s-au dovedit greșite. De-abia în secolul trecut, din lucrările matematicienilor Bolyai, Lobacevski, Gauss, precum și din modelele date de Beltrami, Klein, Poincaré se desprinde faptul că axiomele prezentate pînă aici nu sunt suficiente pentru a demonstra afirmația unicării paralelei la o dreaptă printr-un punct ce nu-i aparține, dar nici negația ei. Aceasta înseamnă că proprietatea este independentă de aceste axiome și va fi admisă ca o nouă axiomă.

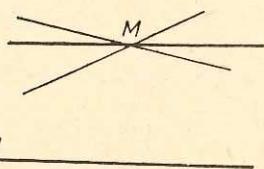


Fig. II.1

Axioma paralelelor. Printr-un punct A exterior unei drepte d , trece cel mult o dreaptă paralelă cu d .

O primă consecință a acestei axiome este:

Teorema 1. Printr-un punct A , exterior dreptei d , trece o singură paralelă cu d .

Demonstrație. Existența paralelei este asigurată de teorema 1 § 14 cap. I, iar unicitatea de axioma paralelelor.

Teoremele demonstrează fără a folosi „axioma paralelelor“ alcătuiesc ceea ce se numește „geometria absolută“. Prin admiterea axiomei paralelelor (numită și postulatul lui Euclid) și în consecință a tuturor teoremelor ce decurg din ea se obține „geometria euclidiană“. În continuare se vor relua unele teoreme din „geometria absolută“ care în „geometria euclidiană“ vor avea un conținut mai bogat și se vor demonstra noi teoreme. Trebuie totuși menționat că nu toate proprietățile care apar în continuare în acest manual sunt valabile numai în geometria „euclidiană“, dar prezentarea prin separare totală a rezultatelor geometriei „absolute“ de cea „euclidiană“ ar fi îngreunat expunerea.

Teorema 2. (Teorema paralelelor tăiate de o secantă.) Două drepte paralele formează cu orice secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.

Demonstrație. Fie $d_1 \parallel d_2$, secanta d , $d \cap d_1 = \{A\}$, $d \cap d_2 = \{B\}$, $C \in d_1$, $F \in d_2$, C și F de o parte și de alta a lui d (fig. II.2).

Se presupune că $\widehat{CAB} \not\equiv \widehat{ABF}$; atunci, în semiplanul $(dF$ există semidreapta unică $(BM$, $BM \neq d_2$, astfel încât $\widehat{CAB} \equiv \widehat{ABM}$. Rezultă că $BM \parallel d_1$, deci prin B trec d_2 și BM , paralele cu d_1 , ceea ce este în contradicție cu axioma paralelelor.

Definiție. Patrulaterul cu laturile opuse paralele se numește *paralelogram*.

Teorema 3. Într-un paralelogram $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, sunt verificate următoarele proprietăți:

- $(AB) \equiv (CD)$, $(BC) \equiv (AD)$,
- $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DCB}$, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ABC}$,
- Dacă $\{O\} = AC \cap BD$ atunci $(OA) \equiv (OC)$, $(OB) \equiv (OD)$,
- Dacă $\{O\} = AC \cap BD$ atunci O este centrul de simetrie al patrulaterului $ABCD$.

Teorema 4. Dacă în patrulaterul $ABCD$ este verificată una din proprietățile i), ii), iii), iv) atunci patrulaterul este paralelogram.

Demonstrațiile acestor două teoreme se lasă sub formă de exercițiu. Se disting următoarele paralelograme particulare.

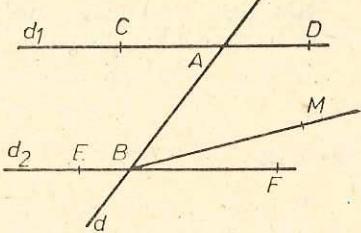


Fig. II.2

Definiții. Paralelogramul cu un unghi drept se numește *dreptunghi*. Paralelogramul cu două laturi alăturate congruente se numește *romb*.

Dreptunghiul cu două laturi alăturate congruente se numește *pătrat*.

Exerciții

1. Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri corespondente congruente și perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.
2. Două drepte distințe paralele cu a treia dreaptă sunt paralele între ele.
3. Unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.
4. Dacă $d \perp d_1$ atunci d este perpendiculară pe orice dreaptă paralelă cu d_1 .
5. Diagonalele unui dreptunghi sunt congruente.
6. Să se determine axele de simetrie ale unui dreptunghi, romb, pătrat.
7. Să se arate că diagonalele unui romb sunt bisectoarele unghiurilor rombului.
8. Fie triunghiul ABC , $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $M \in (BC)$, $(MB) \equiv (MC)$. Să se demonstreze că $AM = \frac{BC}{2}$.
9. Dacă în triunghiul ABC , M este mijlocul laturii (BC) și $AM = \frac{BC}{2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.
10. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor situate la aceeași distanță de o dreaptă dată este reuniunea a două drepte paralele cu acea dreaptă.
11. Diagonalele unui romb sunt perpendiculare.
12. Se dă paralelogramul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) în care $(BD) \equiv (AD)$. Fie M mijlocul laturii $[CD]$ și $(ME) \equiv (BM)$, $M \in (BE)$. Să se arate că: a) $BM \perp CD$ b) A, D, E coliniare c) $(AD) \equiv (DE)$.
13. Dacă două laturi opuse ale unui patrulater $ABCD$ sunt paralele și congruente atunci patrulaterul este paralelogram.

Observație. La aplicarea teoremei 4 și a exerc. 13 trebuie să verificăm cu atenție condiția ca $ABCD$ să fie *patrulater* în sensul definiției date: două laturi opuse să nu aibă un punct comun.

§ 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Teoremă 1. Într-un triunghi, măsura oricărui unghi exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el.

Demonstrație. Fie \widehat{ACD} un unghi exterior al triunghiului ABC și d paralela prin C la AB . Atunci A și B sunt de aceeași parte a lui d , iar C și D de o parte și de alta a lui d , de unde rezultă că segmentul (AD) intersectează dreapta d într-un punct E (fig. II.3).

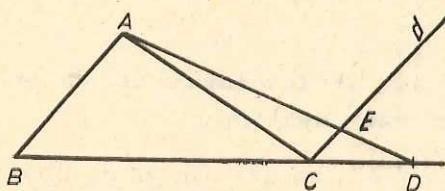


Fig. II.3

Rezultă $E \in \text{Int } \widehat{ACD}$ și $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ECD})$ (axioma U.3). Pe de altă parte $\widehat{ACE} \equiv \widehat{A}$ ca un-

ghiuri alterne interne și $\widehat{ECD} \equiv \widehat{B}$ ca unghiuri corespondente, deci $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$.

Această teoremă este o completare a teoremei unghiului exterior demonstrată în cap. I și ea permite determinarea sumei măsurilor unghiurilor unui triunghi.

Teorema 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° .

Demonstrație. În figura II.3 $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ECD}) + m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BCD}) = 180^\circ$.

Exerciții

1. Suma măsurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este 90° .

2. Măsura fiecărui unghi a unui triunghi echilateral este 60° .

3. Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC , $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$, atunci $AC = \frac{BC}{2}$.

4. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AA' ($A' \in BC$), iar prin A' se duc paralelele $A'M$ și $A'N$ la laturile (AB) și (AC) ($M \in AC$, $N \in AB$). Să se arate că $AMA'N$ este un romb.

5. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90^\circ$) se duce înălțimea AD ($D \in BC$). Se unește D cu mijloacele E și F ale laturilor AB și AC . Să se arate că $m(\widehat{FDE}) = 90^\circ$.

6. Fie AA' , BB' , CC' bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC ($A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$). Să se arate că $m(\widehat{AA'B}) + m(\widehat{BB'C}) + m(\widehat{CC'A}) = 270^\circ$.

7. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E astfel ca $(AD) \equiv (CE)$ și fie $\{M\} = (BE) \cap (CD)$. Să se arate că $m(\widehat{BMC}) = 120^\circ$.

8. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are două unghiuri opuse congruente atunci bisectoarele celorlalte două unghiuri sunt paralele și reciproc, dacă bisectoarele a două unghiuri opuse ale unui patrulater convex sunt paralele atunci celelalte două unghiuri sunt congruente.

9. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic și $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $\{M\} = AA' \cap BB'$.

Atunci $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$.

10. Bisectoarele unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi ale căruia diagonale sunt paralele cu laturile paralelogramului.

11. Două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sunt congruente sau suplementare.

12. Se consideră dreapta d , $O \notin d$ și O piciorul perpendicularării din O pe d . Fie $A \in d$, astfel încât $m(\widehat{OAP}) = 45^\circ$. Pentru fiecare punct M , $M \in d$, astfel încât $A \in (PM)$ se construiește segmentul (MN) astfel încât $MN \perp OM$ și $(MN) \equiv (OM)$, N fiind în

semiplanul și limitat de a și conținând O . Să se arate că locul geometric al punctului N cînd M descrie semidreapta opusă lui (AP , este o semidreaptă perpendiculară în A pe OA , situată în S .

18*. Să se demonstreze că dacă într-un patrulater convex două unghiuri opuse sunt obtuze atunci lungimea diagonalei determinată de vîrfurile lor este mai mică decît lungimea celeilalte diagonale.

§ 3. Linia mijlocie

Definiție. Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește *linie mijlocie a triunghiului*.

În figura II.4 $(MA) \equiv (MB)$, $(NA) \equiv (NC)$ și $(PB) \equiv (PC)$. (MN) , (NP) , (MP) sunt linii mijlocii ale triunghiului ABC . Are loc următoarea teoremă foarte utilă într-o serie de aplicații.

Teorema 1. Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de două laturi, este paralelă cu cea de a treia latură și are ca lungime $\frac{1}{2}$ din lungimea celei de a treia laturi.

Demonstrație. Se consideră triunghiul ABC , $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $(MA) \equiv (MB)$, $(NA) \equiv (NC)$. Fie P astfel încât $N \in (MP)$, $(MN) \equiv (NP)$, (fig. II.5). Din teorema 4, iii, § 1, rezultă că $AMCP$ este paralelogram. Deci $PC \parallel AB$ și $(PC) \equiv (MB)$. B și P sint de o parte și de alta a lui MC , deci $MBCP$ este un patrulater, care are laturile (PC) și (MB) paralele și congruente. Atunci, din ex. 13, § 1, rezultă că patrulaterul $MBCP$ este paralelogram, deci $MP \parallel BC$, $(MP) \equiv (BC)$ și deoarece $MP = 2 MN$ rezultă $MN = \frac{1}{2} BC$.

Teorema 2. (Reciprocă teoremei 1.) Dacă M este mijlocul laturii (AB) a triunghiului ABC și $MN \parallel BC$, $N \in (AC)$ atunci N este mijlocul laturii (AC) .

Se demonstrează ușor prin reducere la absurd.

Definiție. Un patrulater cu două laturi opuse paralele și celelalte două neparalele se numește *trapez*. Laturile paralele ale trapezului se numesc *baze*. Dacă laturile neparalele sunt congruente, trapezul se numește *isoscel*.

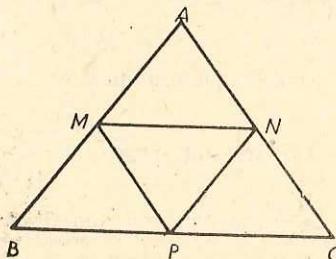


Fig. II.4

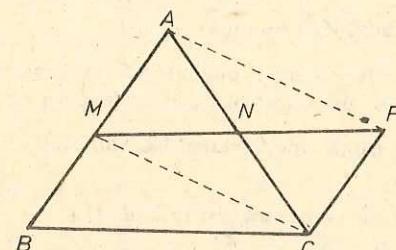


Fig. II.5

Definiție. Segmentul determinat de mijloacele lățurilor neparalele ale unui trapez se numește *linie mijlocie a trapezului*.

În figura II.6, $AB \parallel CD$, AD nu este paralel cu BC , $ABCD$ este trapez, (AB) baza mare (DC) baza mică. $(AM) \equiv (MD)$, $(BN) \equiv (NC)$, (MN) linie mijlocie a trapezului. (AC) și (BD) se numesc diagonale iar $\{O\} = (BD) \cap (AC)$, O este intersecția diagonalelor. Dacă unul dintre unghiuri este drept, trapezul se va numi *dreptunghic*.

Theoremă 3. Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele trapezului și are lungimea egală cu semisuma lungimilor celor două baze.

Demonstrație. Fie trapezul $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ și (MN) linia mijlocie, $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ (fig. II.7). Se notează cu E intersecția diagonalei (AC) cu (MN) . Se presupune prin absurd că E nu este mijlocul segmentului (AC) . Fie deci, $E' \neq E$ mijlocul segmentului (AC) . În triunghiul ABC , $(E'N)$ este linie mijlocie, deci $E'N \parallel AB$ iar în triunghiul ADC , $(E'M)$ este linie mijlocie, deci $E'M \parallel DC$; dar $AB \parallel DC$ deci $E'M \parallel AB$ și $E'N \parallel AB$. Din axioma de paralelism rezultă că M , E' , N sint coliniare deci $E = E'$ și $MN \parallel AB$, $MN \parallel DC$.

$$ME = \frac{1}{2} DC, \quad NE = \frac{1}{2} AB \text{ și } MN = ME + NE = \frac{1}{2} (AB + DC).$$

Exerciții

1. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se consideră punctele M , N , P , Q , mijloacele segmentelor (AB) , (BC) , (CD) , (DA) . Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

2. Pe laturile (AB) , (CD) ale paralelogramului $ABCD$ se iau arbitrar punctele M și N . Dreapta d , determinată de mijloacele laturilor (BC) și (AD) , intersectează succesiv segmentele (AN) , (MD) , (BN) , (MC) în E , F , G , H . Să se demonstreze că $(EF) \equiv (GH)$.

3. Fie triunghiul echilateral ABC și punctele D și E astfel ca $C \in (BD)$, $A \in (CE)$ și $(DC) \equiv (AE) \equiv (AB)$. Se notează $\{F\} = DE \cap AB$. Să se arate că $AF = \frac{1}{3} AB$.

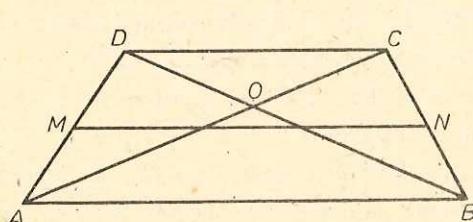


Fig. II.6

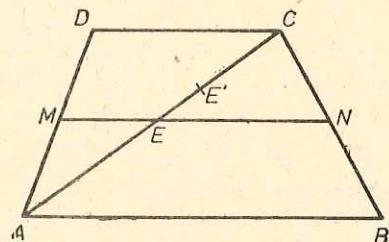


Fig. II.7

Indicație. Se construiește $CG \parallel AB$, $G \in DE$; (GC) este linie mijlocie în triunghiul BDF , iar (AF) este linie mijlocie în triunghiul ACG .

4. Să se demonstreze că diagonalele trapezului isoscel sunt congruente și unghiurile adiacente unei baze sunt de asemenea congruente.

5. Să se determine axa de simetrie a unui trapez isoscel.

6. Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ și $AD = AB + CD$. Să se demonstreze că dacă E este mijlocul segmentului (BC) atunci $m(\widehat{AED}) = 90^\circ$.

Indicație. Fie (EF) linia mijlocie a trapezului, $EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{AD}{2}$ deci triunghiurile DEF și AEF sunt isoscele și aplicând teorema relativă la suma măsurilor unghiurilor triunghiului AED rezultă că $m(\widehat{AED}) = 90^\circ$.

7. Se consideră un triunghi isoscel ABC , $(AB) \equiv (AC)$ și punctele variabile $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ astfel ca $(BP) \equiv (AQ)$. Fie O mijlocul segmentului (PQ) .

i) Să se demonstreze că $d(O, BC)$ este constantă.

ii) Să se afle locul geometric al punctului O .

§ 4. Concurența unor drepte în triunghi

În capitolul I, § 13 s-a demonstrat concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi și s-a enunțat o condiție suficientă pentru ca mediatorele laturilor triunghiului să fie concurente.

Dificultatea a constat în faptul că nu s-a putut afirma cu certitudine concurența a două dintre mediatorele laturilor triunghiului, în geometria absolută nefiind admisă axioma paralelelor. Se poate acum enunța:

Teorema 1. În orice triunghi, mediatorele laturilor sunt concurente.

Demonstrație. Este suficient să se demonstreze concurența a două mediatore. Fie triunghiul ABC , d_1 și d_2 mediatorele segmentelor (AB) respectiv (BC) (fig. II.8). Presupunind că d_1 și d_2 nu sunt concurente, rezultă $d_1 \parallel d_2$.

Pentru că $d_2 \perp BC$ rezultă și $d_1 \perp BC$. Dar $d_1 \perp BA$. Deci prin B trec două perpendiculare distincte pe dreapta d_1 , și anume $BA \perp d_1$, $BC \perp d_1$, ceea ce nu este posibil.

Prin urmare d_1 și d_2 sunt concurente. În continuare se aplică teorema 5 din cap. I, § 13.

Relativ la triunghi se definesc și alte drepte (linii) importante.

Definiții. Dreapta determinată de vîrful unui triunghi și mijlocul laturii opuse se numește *mediană*.

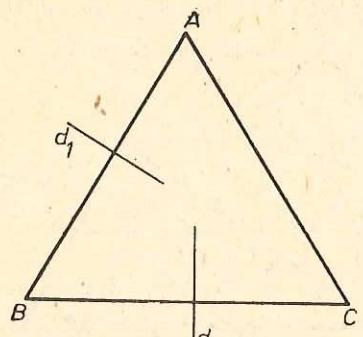


Fig. II.8

Perpendiculara prin vîrful unui triunghi pe dreapta determinată de latura opusă se numește *înălțime*.

Teorema 2. Înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație. Fie triunghiul ABC , A' , B' , C' pîncioarele perpendicularelor din A , B , C , respectiv pe BC , AC , AB și DEF triunghiul format de paralelele duse la laturile triunghiului ABC prin vîrfurile acestuia (fig. II.9).

Din construcție, $ABCF$ și $BCAD$ sunt paralelograme deci $(BC) \equiv (AF) \equiv (AD)$. Pentru că $BC \parallel DF$ și $AA' \perp BC$ rezultă că $AA' \perp DF$. Deci AA' este mediatoreala segmentului (DF) . În mod analog se arată că BB' și CC' sunt mediatoreale segmentelor (DE) respectiv, (EF) . Prin urmare înălțimile triunghiului ABC sunt mediatoreale laturilor triunghiului DEF și deci din teorema 1 rezultă că sunt concurente.

Teorema 3. Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție determină cu mijlocul fiecărei laturi un segment a cărui lungime este $1/2$ din lungimea segmentului pe care-l determină cu vîrful opus laturii.

Demonstrație. Fie triunghiul ABC , D și E mijloacele laturilor (BC) respectiv (AC) . Deoarece în triunghiul BAD , $(BE \subset \text{Int } \widehat{ABC})$, $A \in (BA$, $D \in (BC)$, rezultă că (BE) și (AD) au un punct comun G (fig. II.10).

Deoarece $(AD) \subset \text{Int } \widehat{BAE}$ rezultă că $\{G\} = (AD) \cap (BE)$. Fie M , N mijloacele segmentelor (AG) respectiv (BG) . În triunghiul ABG , (MN) este linie mijlocie, deci $MN \parallel AB$ și $MN = \frac{1}{2} AB$. În triunghiul ABC , (DE) este linie mijlocie, deci $DE \parallel AB$ și $DE = \frac{1}{2} AB$. Rezultă că $(DE) \equiv (MN)$ și $DE \parallel MN$. $MNDE$ este patrulater și deci este paralelogram (ex. 13, § 1, II). Rezultă $GD = MG = AM = \frac{1}{3} AD$. Fie acum F mijlocul laturii (AB) și $\{G'\} = (FC) \cap (AD)$. În mod analog rezultă $DG = \frac{1}{3} AD$. Deoarece G , $G' \in (DA)$, din teorema de construcție a unui segment rezultă $G = G'$.

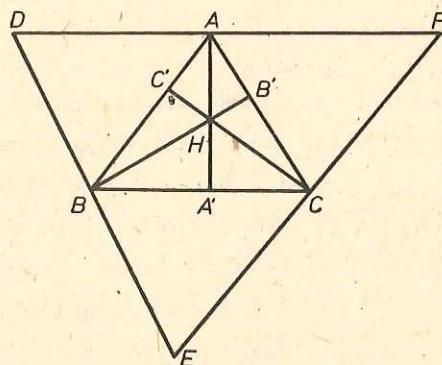


Fig. II.9

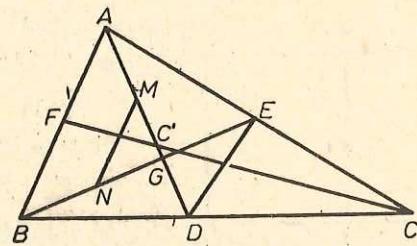


Fig. II.10

Observații. Punctul H de concurență al înălțimilor se numește *ortocentrul* triunghiului. Punctul G de concurență a medianelor se numește *centrul de greutate* al triunghiului. Centrul de greutate al triunghiului și punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor unui triunghi aparțin interiorului triunghiului. Ortocentrul triunghiului și punctul de concurență al medianoarelor triunghiului pot să nu aparțină interiorului triunghiului. În unele probleme de geometrie prin cuvintele „mediană“ sau „bisectoare“ se va înțelege segmentul determinat de vîrful triunghiului cu mijlocul laturii opuse, respectiv segmentul determinat de vîrful triunghiului și intersecția bisectoarei cu latura opusă unghiului. Termenul „înălțime“ va desemna segmentul determinat de vîrful triunghiului și piciorul perpendicularări din vîrf pe dreapta determinată de latura opusă. Se pot folosi de asemenea termenii de „mediană“, „bisectoare“, „înălțime“ și pentru lungimile acestor segmente fără a exista pericol de confuzie deoarece rezultă din text sensul care li se atribuie. Astfel, teorema 3 poate fi reformulată într-un enunț ușor de memorat: „Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct situat la $2/3$ de vîrf și $1/3$ de bază pe fiecare dintre ele“.

Exerciții

1. Să se determine poziția ortocentrului unui triunghi dreptunghic și poziția punctului de concurență a medianoarelor laturilor sale.

2. Fie triunghiul ABC și cele două unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură (BC respectiv (CB) . Să se demonstreze că bisectoarele acestor unghiuri exterioare și bisectoarea unghiului \widehat{BAC} sunt concurente (completarea ex. 1, § 13 cap. I).

3. Unghiurile opuse \hat{A} și \hat{C} ale patrulaterului convex $ABCD$ sunt drepte. $AD \cap BC = \{E\}$, $AB \cap DC = \{F\}$. Să se demonstreze că $BD \perp EF$.

4*. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , H ortocentrul și $A' \in (HA)$, $B' \in (HB)$, $C' \in (HC)$ astfel ca $(HA') \equiv (BC)$, $(HB') \equiv (CA)$, $(HC') \equiv (AB)$. Să se arate că:

i) dacă M , N , P sunt mijloacele laturilor (BC) , (AC) , (AB) atunci $B'C' = 2AM$, $A'C' = 2BN$, $A'B' = 2CP$.

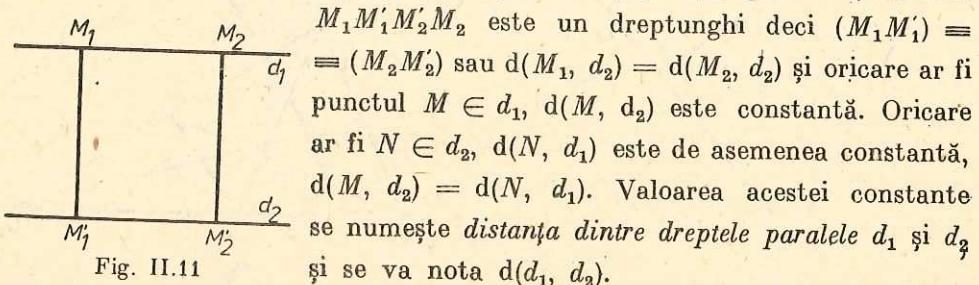
ii) H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

5. În paralelogramul $ABCD$ se duce $CE \perp BC$, $AE \perp AB$. Să se arate că $DE \perp AC$.

6*. În triunghiul ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) se duce înălțimea AD , $D \in BC$ și se consideră $F \in (AD)$. Perpendiculara în F pe FC intersectează pe AB în G . Paralela prin A la FG intersectează BC în H . Să se arate că patrulaterul $AGFH$ este paralelogram.

§ 5. Paralele echidistante

Fie d_1 și d_2 două drepte distincte, $d_1 \parallel d_2$ și $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_1$, M'_1 , M'_2 picioarele perpendicularelor din M_1 respectiv M_2 pe d_2 (fig. II. 11). Atunci



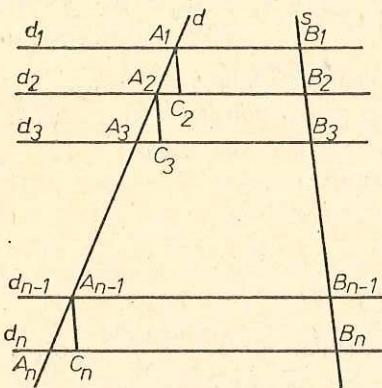


Fig. II.12

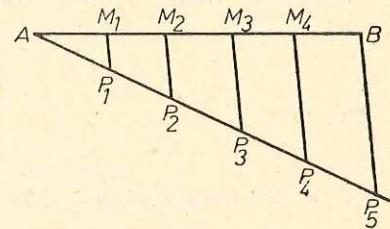


Fig. II.13

Teorema paralelelor echidistante. Fie pe dreapta d punctele distincte $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$), astfel ca $(A_1A_2) \equiv (A_2A_3) \equiv \dots \equiv (A_{n-1}A_n)$ și dreptele $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, $A_1 \in d_1, A_2 \in d_2, A_3 \in d_3, \dots, A_n \in d_n$. Dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \dots \parallel d_n$ atunci dreptele $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ determină pe orice secantă segmente congruente.

Demonstrație. Fie s secanta dreptelor $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ și $\{B_1\} = d_1 \cap s$, $\{B_2\} = d_2 \cap s$, $\{B_3\} = d_3 \cap s, \dots, \{B_n\} = d_n \cap s$ (fig. II.12). Se consideră punctele $C_2 \in d_2, C_3 \in d_3, \dots, C_n \in d_n$ astfel ca $A_1C_2 \parallel s, A_2C_3 \parallel s, \dots, A_{n-1}C_n \parallel s$. $\triangle A_1A_2C_2 \equiv \triangle A_2A_3C_3 \equiv \dots \equiv \triangle A_{n-1}A_nC_n$ (din L.U.L.), deci $(A_1C_2) \equiv (A_2C_3) \equiv \dots \equiv (A_{n-1}C_n)$. Din paralelogramele $A_1C_2B_2B_1, A_2C_3B_3B_2, \dots, A_{n-1}C_nB_nB_{n-1}$ rezultă că $(A_1C_2) \equiv (B_1B_2), (A_2C_3) \equiv (B_2B_3), \dots, (A_{n-1}C_n) \equiv (B_{n-1}B_n)$, deci $(B_1B_2) \equiv (B_2B_3) \equiv \dots \equiv (B_{n-1}B_n)$.

Observație. Dacă secanța s este perpendiculară pe dreptele paralele $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ atunci segmentele determinate pe secantă au lungimile egale și cu distanța dintre două drepte paralele consecutive. Din acest motiv trei sau mai multe drepte paralele care îndeplinesc condițiile teoremei se numesc paralele *echidistante*.

Exerciții

1. Fiind dat segmentul (AB) să se determine un segment (MN) astfel ca $5MN = AB$ (generalizare: $nMN = AB$).

Indicație: Se consideră pe semidreapta (AX) ($AX \neq AB$) (fig. II.13), un segment oarecare (AP_1) și punctele distincte P_2, P_3, P_4, P_5 astfel încit $(AP_1) \equiv (P_1P_2) \equiv (P_2P_3) \equiv (P_3P_4) \equiv (P_4P_5)$. Prin P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 se duc drepte paralele cu P_5 care intersectează (AB) în M_1, M_2, M_3, M_4 , $(AM_1) \equiv (M_1M_2) \equiv (M_2M_3) \equiv (M_3M_4) \equiv (M_4B)$ și $AM_1 = \frac{1}{5}AB$.

2. Să se formuleze o reciprocă a teoremei 3, § 3, folosind teorema paralelelor echidistante.

§ 6. Teorema lui Thales

Definiție. Fiind date mulțimile ordonate de numere reale $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ ele se numesc *proporționale* dacă există un număr real, nenul k , astfel încât $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2, \dots$, $a_n = kb_n$. k se numește în acest caz *coeficient de proporționalitate*.

Exemplu

$$A = (2, 5, 9), \quad B = (6, 15, 27),$$

A și B sunt proporționale, coeficientul de proporționalitate fiind $k = \frac{1}{3}$, pentru că $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$, $5 = \frac{1}{3} \cdot 15$, $9 = \frac{1}{3} \cdot 27$. Se poate spune că și $(6, 15, 27)$ sunt proporționale cu $(2, 5, 9)$, în acest caz coeficientul de proporționalitate fiind $k' = 3$. În cazul particular $k = 1$ cele două mulțimi de numere coincid. Dacă numerele b_1, b_2, \dots, b_n nu sunt nule atunci definiția dată este echivalentă cu egalitățile:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Definiție. Fiind date mulțimile ordonate de segmente

$$((A_1B_1), (A_2B_2), \dots, (A_nB_n))$$

$$((A'_1B'_1), (A'_2B'_2), \dots, (A'_nB'_n)), \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}$$

ele se numesc *proporționale* dacă mulțimile ordonate de numere $(A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n)$, $(A'_1B'_1, A'_2B'_2, \dots, A'_nB'_n)$ sunt proporționale.

Teorema 1. (Teorema lui Thales.) Fie triunghiul ABC și $DE \parallel BC$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Atunci

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Demonstrație

Cazul I. Se presupune că $\frac{AD}{AB} = \frac{m}{n}$ unde $m, n \in \mathbb{N}^*$; rezultă $\frac{AD}{m} = \frac{AB}{n}$ deci (AD, AB) și (m, n) sunt proporționale. Fie $k > 0$ coeficientul de proporționalitate. Deci $AD = k \cdot m$ și $AB = k \cdot n$. Se împarte segmentul (AB) în n segmente congruente,

prin punctele M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , astfel încât

$$AM_1 = k, \quad AM_2 = 2k, \dots,$$

$AM_{n-1} = (n-1)k$, $AB = n \cdot k$ (fig. II.14). Peñtru că $AD = m \cdot k$ rezultă că $D = M_m$. Prin punctele M_1, M_2, \dots, M_{n-1} se duc paralele la BC care intersectează (AC)

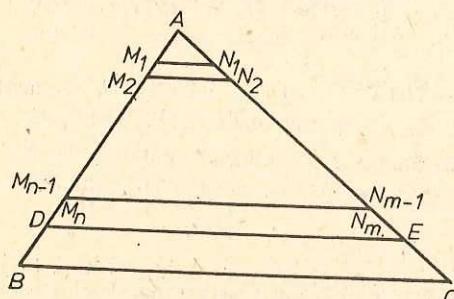


Fig. II.14

respectiv în N_1, N_2, \dots, N_{n-1} . Deoarece DE este una dintre aceste paralele, $E = N_m$. Din teorema paralelelor echidistante rezultă că

$$(AN_1) \equiv (N_1N_2) \equiv \dots \equiv (N_{n-1}C).$$

Atunci

$$AE = mAN_1 \text{ și } AC = nAN_1,$$

deci

$$\frac{AE}{AC} = \frac{m \cdot AN_1}{n \cdot AN_1} = \frac{m}{n} \text{ adică } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Cazul II. Fie $\frac{AD}{AB} = \alpha$ unde $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Se presupune că $\frac{AE}{AC} = \beta \neq \alpha$ (fig. II.15).

Cum $\beta < 1$, există punctul unic E' , $E' \in (AC)$, $E' \neq E$, astfel încât:

$$AE' = \alpha AC \text{ deci } \frac{AE'}{AC} = \alpha.$$

a) Dacă $\beta > \alpha$ atunci $E' \in (AE)$ și $AE' < AE$. Există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{AC}{n} < EE'$. Se construiesc pe (AC) punctele N_1, N_2, \dots, N_{n-1} care împart (AC) în n segmente congruente de lungime k unde $k = \frac{AC}{n}$ și

$$AN_1 = k, AN_2 = 2k, \dots, AN_{n-1} = (n-1)k, AC = n \cdot k.$$

Deoarece $EE' > k$, rezultă că cel puțin unul dintre punctele de diviziune, de exemplu $N_i \in (EE')$. Atunci

$$AN_i = ik > AE' \text{ și } \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} > \frac{AE'}{AC} = \alpha.$$

Prin N_i se duce $N_iM_i \parallel BC$, $M_i \in (AB)$. Aplicând rezultatul demonstrat în cazul I, rezultă:

$$(1) \quad \frac{AM_i}{AB} = \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} > \alpha.$$

Pe de altă parte, deoarece $M_iN_i \parallel DE$ punctul $M_i \in (AD)$ deci $AM_i < AD$ și

$$(2) \quad \frac{AM_i}{AB} < \frac{AD}{AB} = \alpha.$$

Inegalitățile (1) și (2) fiind contradictorii rezultă că nu este posibil $\beta > \alpha$.

b) Dacă $\beta < \alpha$ atunci $E' \in (EC)$ și există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{AC}{n} < EE'$ (fig. II.16). Analog cazului II. a) punctele N_1, N_2, \dots, N_{n-1} împart segmentul (AC)

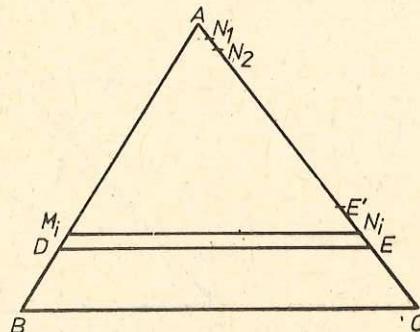


Fig. II.15

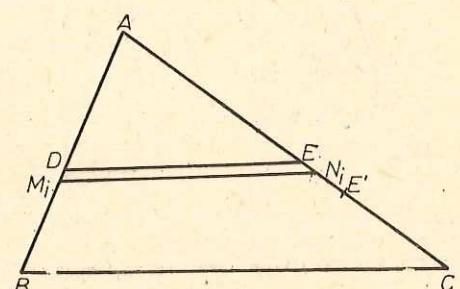


Fig. II.16

În n segmente congruente de lungime k , $k = \frac{AC}{n}$ și deoarece că $k < AE'$, există un punct de diviziune $N_i \in (EE')$. Atunci

$$AN_i = ik < AE' \text{ și } \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} < \frac{AE'}{AC} = \alpha.$$

Se construiește $N_iM_i \parallel BC$ și $M_i \in (AB)$. Aplicând rezultatul demonstrat la cazul I, rezultă

$$(3) \quad \frac{AM_i}{AB} = \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} < \alpha$$

și deoarece $M_iN_i \parallel DE$, $M_i \in (BD)$ deci $AM_i > AD$ adică

$$(4) \quad \frac{AM_i}{AB} > \frac{AD}{AB} = \alpha.$$

Inegalitățile (3) și (4) fiind contradictorii rezultă că nu este posibil $\beta < \alpha$. Din II a) și b) rezultă $\alpha = \beta$ ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Enunțul teoremei lui Thales este mai ușor de memorat în formularea: O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte laturi segmente proportionale.

Folosind proprietățile proporțiilor se pot obține și alte proporții echivalente cu

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ și anume: } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ sau } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

Teorema 2. (Consecință a teoremei lui Thales.) Fie triunghiul ABC $d \parallel BC$ și $\{D\} = d \cap AB$, $\{E\} = d \cap AC$, $A \notin d$. Atunci

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Demonstrație

Cazul I. Dacă $D \in (AB)$ se aplică teorema 1 (demonstrată anterior), triunghiului ABC și dreptei DE (fig. II. 17).

Cazul II. Dacă $B \in (AD)$ se aplică teorema 1 triunghiului ADE și dreptei BC (fig. II. 18).

Cazul III. Dacă $A \in (BD)$ se construiesc segmentele $(AM) \equiv (AD)$, $(AN) \equiv (AE)$, $(AM) \subset (AB)$, $(AN) \subset (AC)$ (fig. II.19). Atunci $EMND$ este paralelogram și $MN \parallel ED \parallel BC$. Dacă $M \in (AB)$ se aplică teorema 1

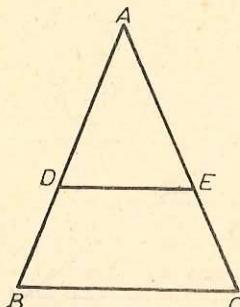


Fig. II.17

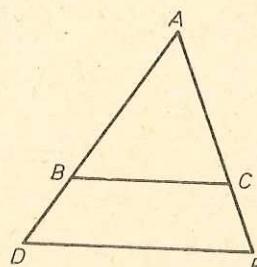


Fig. II.18

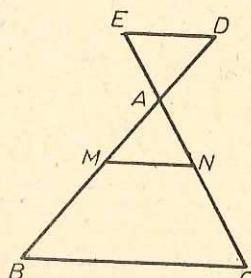


Fig. II.19

triunghiului ABC și dreptei MN , dacă $B \in (AM)$, se aplică teorema 1 triunghiului AMN și dreptei BC .

Teorema 3. (Reciproca teoremei 1.) Fie triunghiul ABC și $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ sau } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ sau } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

atunci $DE \parallel BC$.

Demonstrația se face folosind metoda reducerii la absurd.

Teoremele 1, 2, 3 pot fi enunțate și astfel:

Teorema lui Thales. Fie triunghiul ABC și punctele D, E distincte diferite de $A, D \in AB, E \in AC$ astfel încât D și E se află amândouă fie pe laturile unghiului \widehat{BAC} fie pe prelungirile acestora. Atunci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ dacă și numai dacă $DE \parallel BC$.

Această teoremă are numeroase aplicații în probleme care cer stabilirea unor relații între lungimi de segmente sau în demonstrarea paralelismului a două drepte.

Teorema 4. (Teorema paralelelor nenechidistante.) Se consideră dreptele $d_1, d_2, \dots, d_n, n > 2, d_1 \parallel d_2 \parallel \dots \parallel d_n$, secantele s și k și punctele $\{A_1\} = d_1 \cap s, \{A_2\} = d_2 \cap s, \dots, \{A_n\} = d_n \cap s, \{B_1\} = d_1 \cap k, \{B_2\} = d_2 \cap k, \dots, \{B_n\} = d_n \cap k$. Atunci

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2 A_3}{B_2 B_3} = \dots = \frac{A_{n-1} A_n}{B_{n-1} B_n}.$$

Demonstrație. Dacă $s \parallel k$, atunci

$A_1 A_2 B_2 B_1, A_2 A_3 B_3 B_2, \dots, A_{n-1} A_n B_n B_{n-1}$ sunt paralelograme și

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2 A_3}{B_2 B_3} = \dots = \frac{A_{n-1} A_n}{B_{n-1} B_n} = 1 \text{ (fig. II.20).}$$

Dacă s nu este paralel cu k , fie $\{O\} = s \cap k$. Se aplică teorema lui Thales triunghiului $OA_{i+1}B_{i+1}$ și dreptei $A_i B_i$

$$\frac{OA_i}{A_i A_{i+1}} = \frac{OB_i}{B_i B_{i+1}}$$

de unde se obține

$$(1) \quad \frac{OA_i}{OB_i} = \frac{A_i A_{i+1}}{B_i B_{i+1}}.$$

Aplicând teorema lui Thales triunghiului $OA_{i-1}B_{i-1}$ și dreptei $A_i B_i$ se obține:

$$(2) \quad \frac{OA_i}{OB_i} = \frac{A_{i-1} A_i}{B_{i-1} B_i}.$$

Din (1) și (2) rezultă că

$$\frac{A_{i-1} A_i}{B_{i-1} B_i} = \frac{A_i A_{i+1}}{B_i B_{i+1}}.$$

Scriind aceste proporții pentru $i = 1, 2, \dots, n - 1$, se obține sirul de rapoarte egale din teoremată.

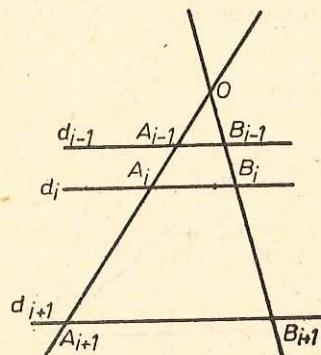


Fig. II.20

1. Fie triunghiul isoscel ABC , $(AB) \equiv (AC)$ și d o dreaptă paralelă cu BC , $A \notin d$. Dacă $\{M\} = d \cap AB$, $\{N\} = d \cap AC$ să se arate că triunghiul AMN este isoscel, iar dacă ABC este echilateral atunci și AMN este echilateral.

2. Se consideră trei semidrepte cu aceeași origine M , cuprinse în drepte distincte și punctele: A, B pe prima semidreaptă, C, D pe a două și N pe a treia, astfel ca $d(M, A) = 18$, $d(M, B) = 54$, $d(M, C) = 25$, $d(M, D) = 75$. O dreaptă ce trece prin A punctul C ?

3. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Paralela prin B la latura AD intersectează dreapta AC în E , iar paralela prin A la latura BC intersectează dreapta BD în F . Să se arate că $EF \parallel CD$.

4. Fie triunghiul ABC și $MN \parallel BC$, $M \in AB$, $N \in AC$. Se duc $MM' \parallel AC$, $NN' \parallel AB$ ($M' \in BC$, $N' \in BC$). Prin M' și N' se duc $M'P \parallel AB$ și $N'Q \parallel AC$, $P \in AC$, $Q \in AB$. Să se demonstreze că $PQ \parallel MN$.

5. Fie triunghiul ABC și D, E, F, G, H mijloacele segmentelor (BC) , (AD) , (BD) , (EF) , (ED) . Fie $GH \cap AC = \{I\}$ și $BE \cap AC = \{J\}$. Atunci

- $AI = 3IC$,
- $HI = 3GH$,
- $BE = 3EJ$.

§ 7. Teorema bisectoarei

T e o r e m ă. Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$. Atunci (AD) este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} dacă și numai dacă $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstratie. 1. Se arată că dacă (AD) este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} atunci $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Se construiește prin C paralela la AD care intersectează AB în E (fig. II.21). Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$. Triunghiul ACE este isoscel pentru că $\widehat{AEC} \equiv \widehat{BAD}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{ACE} \equiv \widehat{DAC}$ (unghiuri alterne interne) și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ (din ipoteză (AD) bisectoare). Deci $(AE) \equiv (AC)$ de unde rezultă egalitatea din teoremă.

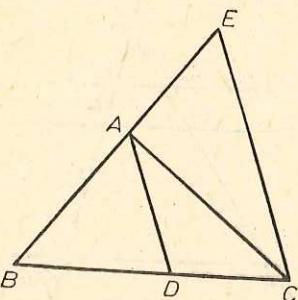


Fig. II.21

2. Se arată, prin reducere la absurd, că dacă $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ atunci $[AD]$ este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} (fig. II.22). Într-adevăr, dacă $[AD]$ nu este bisectoare, fie $D' \in (BC)$ astfel încât (AD') este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} . Atunci $\frac{BD'}{DC} = \frac{AB}{AC}$

și deci D' împarte segmentul (BC) în același raport ca și punctul D ceea ce nu este posibil decât dacă $D = D'$.

Și această teoremă se poate formula într-un fel ușor de memorat: „bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă unghiului segmente proporționale cu laturile unghiului și reciproc”.

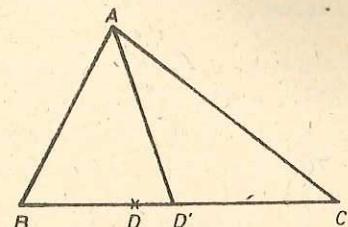


Fig. II.22

Exerciții

1. Fie triunghiul ABC , $D \in BC$ și $D \notin (BC)$. Atunci $[AD]$ este bisectoarea unuia din unghinurile cu vîrful în A și exterioare triunghiului, dacă și numai dacă $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (teorema bisectoarei unghiului exterior).

2. Lungimile laturilor unui triunghi ABC fiind $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, să se calculeze segmentele determinate de bisectoarea unui unghi a triunghiului pe latura opusă.

3. Într-un triunghi ABC , bisectoarele unghinilor formate de mediana AM ($M \in \widehat{(BC)}$) cu latura (BC) intersectează celelalte două laturi în P și Q . Să se arate că $PQ \parallel BC$. Reciproc, dacă $M \in \widehat{(BC)}$, MP și MQ sunt bisectoarele unghinilor \widehat{AMB} respectiv \widehat{AMC} ($P \in (AB)$, $Q \in (AC)$) și $PQ \parallel BC$, atunci M este mijlocul laturii (BC) .

4. Se dă triunghiul ABC cu $AB = 20$, $BC = 30$, $[BD]$ bisectoarea unghiului \hat{B} , $D \in (AC)$, dreapta $DE \parallel AB$ ($E \in (BC)$) și dreapta $EF \parallel BD$ ($F \in AC$). Să se determine AC dacă $AD = FC = 1$.

§ 8. Asemănarea triunghiurilor

Definiție. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Dacă

$$(1) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

$$(2) \quad \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

se spune că există o asemănare între triunghiurile ABC și $A'B'C'$ și se scrie $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Ca și în cazul congruenței, între două triunghiuri pot exista mai multe asemănări.

Definiție. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ se numesc asemenea dacă între ele există cel puțin o asemănare.

1*. Să se demonstreze că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

2*. Să se demonstreze că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Prin notația $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ se înțelege că ordinea virfurilor este dată și are loc asemănarea definită de egalitățile (1) și (2). În acest caz, perechile de virfuri (A, A') ; (B, B') ; (C, C') și perechile de laturi $((BC), (B'C'))$, $((AC), (A'C'))$, $((AB), (A'B'))$ se numesc *corespondente* sau *omoloage*. Raportul lungimilor a două laturi omoloage se numește *raportul de asemănare* al celor două triunghiuri. Evident, două triunghiuri congruente sunt asemenea, raportul de asemănare fiind egal cu 1 și oricare două triunghiuri echilaterale sunt asemenea. O altă situație în care sunt puse în evidență triunghiuri asemenea este dată de următoarea:

Theoremă 1. (Teorema fundamentală a asemănării). Fie triunghiul ABC și $DE \parallel BC$, $A \neq D$, $D \in AB$, $E \in AC$. Atunci $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Demonstrație. Există trei situații posibile: 1) $D \in (AB)$, 2) $B \in (AD)$, 3) $A \in (BD)$. Se va da demonstrația numai pentru cazul 1), întrucât celelalte cazuri se tratează în mod analog cazurilor considerate la consecința teoremei lui Thales.

Deoarece $DE \parallel BC$ rezultă $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ (fig. II.23). Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Se construiește $EF \parallel AB$, $F \in BC$ și atunci $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$. Deoarece $BDEF$ este paralelogram rezultă $(DE) \equiv (BF)$ și $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ deci se obține $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Fiind îndeplinite egalitățile din definiție, rezultă că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Notiunea de asemănare se poate extinde și pentru poligoane.

Definiție. Două poligoane convexe $A_1A_2A_3 \dots A_n$ și $B_1B_2B_3 \dots B_n$ se numesc *asemenea* dacă

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$$

$$\text{și } \hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_2 = \hat{B}_2, \dots, \hat{A}_n = \hat{B}_n.$$

Pe baza teoremei 1 se pot demonstra teoremele asemănării, numite și cazuri de asemănare, care stabilesc condiții necesare și suficiente pentru ca două triunghiuri să fie asemenea.

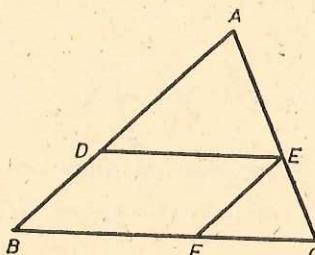


Fig. II.23

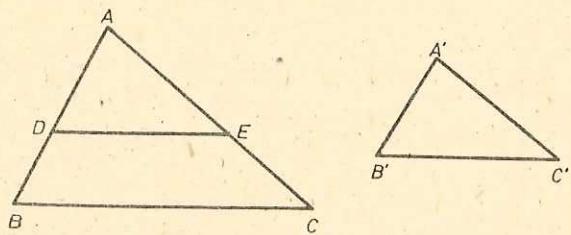


Fig. II.24

Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$:

Teorema 2. Dacă $\hat{A} = \hat{A}'$ și $\hat{B} = \hat{B}'$ atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema 3. Dacă $\hat{A} = \hat{A}'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema 4. Dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Demonstrații. Fie $D \in (AB)$ astfel încit $(A'B') \equiv (AD)$ și $DE \parallel BC$, $E \in (AC)$. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ conform teoremei fundamentale a asemănării (fig. II.24). Se va demonstra că în ipotezele fiecareia dintre cele trei teoreme $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ și deci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

1) $\hat{A} = \hat{A}'$ (din ipoteza teoremei 2)

$\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC} \equiv \hat{B}'$ (din construcție și ipoteza teoremei 2)

$(AD) \equiv (A'B')$ (din construcție).

Deci $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (din U.L.U.).

2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (din ipoteza teoremei 3)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (pentru că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$)

$(AD) \equiv (A'B')$ (din construcție)

rezultă $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AE}$

deci $(A'C') \equiv (AE)$, deoarece $\hat{A} = \hat{A}'$ și $(AD) \equiv (A'B')$ rezultă că $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (din L.U.L.).

3) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (din ipoteza teoremei 4)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ (pentru că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ și $(AD) \equiv (A'B')$,

rezultă că

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{DE}.$$

Egalitatea rapoartelor cu aceeași numărători implică egalitatea numitorilor deci $A'C' = AE$ și $B'C' = DE$ sau $(A'C') \equiv (AE)$ și $(B'C') \equiv (DE)$. Rezultă și în acest caz că $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (din L.L.L.)

Aplicații

1. Să se măsoare adincimea unei fintinii pînă la nivelul apei prin mijloace simple.

Rezolvare. Observatorul aflat în punctul D privește din punctul C (ochiul) bordura, punctul B , zărind suprafața apei în punctul A , astfel încît A , bordura B și ochiul C să fie în linie dreaptă (fig. II.25). În acest caz $\triangle BCD \sim \triangle ABE$ și $\frac{CD}{BE} = \frac{BD}{AE}$. Lungimile CD , BD , AE sint respectiv înălțimea observatorului, distanța de la acesta la bordură și lărgimea fintinii deci pot fi măsurate și rezultă $BE = \frac{CD \cdot AE}{BD}$.

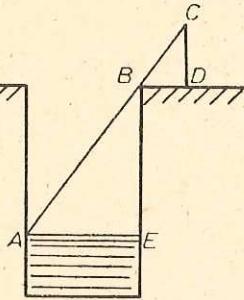


Fig. II.25

2. Determinarea înălțimii unui copac folosind legile reflexiei într-o oglindă plană.

Rezolvare. Într-un punct O este situată o oglindă plană, înălțimea copacului fiind AB , observatorul situat în punctul D , $O \in (AD)$ se deplasează astfel încît din punctul C (ochi) zărește în oglindă vîrful copacului (fig. II.26).

Știind că $\widehat{BOM} = \widehat{MOC}$ (unghiul de incidentă este congruent cu unghiul de reflexie) rezultă $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, deci $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO}$; AO , OD , CD fiind respectiv distanța de la copac la oglindă, distanța de la oglindă la observator și înălțimea observatorului; în urma înlocuirii acestora în proporție se obține: $AB = \frac{DC \cdot AO}{DO}$.

3. Determinarea înălțimii unui copac, despărțit de observator printr-un obstacol, folosind legile reflexiei într-o oglindă plană.

Rezolvare. Se aşază oglinda în O și observatorul se deplasează în punctul D , $O \in (AD)$, astfel încît din C (ochi) zărește în oglindă vîrful copacului

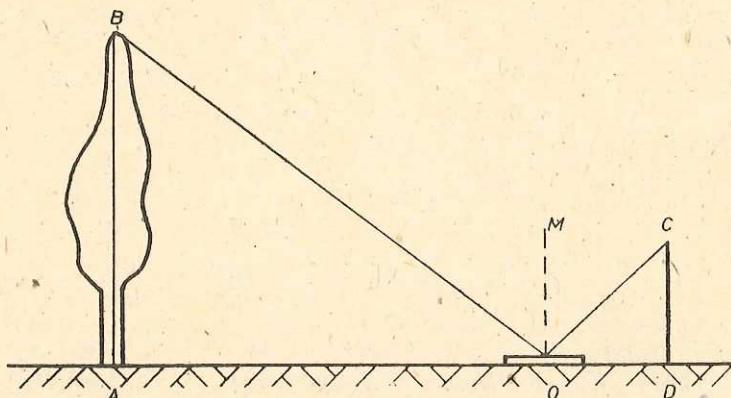


Fig. II.26

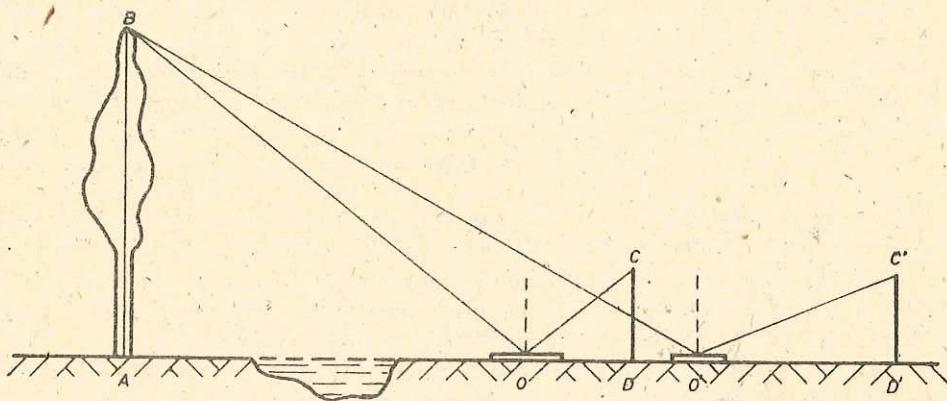


Fig. 11.27

(fig. 11.27). Atunci $\triangle AOB \sim \triangle DOC$. Se deplasează oglinda în O' , iar observatorul se deplasează în D' ; repetând observația, se obține $\triangle AO'B \sim \triangle D'O'C'$. Serind proporționalitatea laturilor triunghiurilor asemenea obținute, avem:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO} \text{ și } \frac{AB}{D'C'} = \frac{AO'}{D'O'} \text{ deoarece } DC = D'C' \text{ rezultă } \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO} = \frac{AB}{D'C'} = \frac{AO'}{D'O'} = \frac{AO' - AO}{D'O' - DO} = \frac{OO'}{D'O' - DO}.$$

Prin urmare

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OO'}{D'O' - DO}.$$

OO' , DC , $D'O'$, DO se determină cu mijloace simple deci $AB = \frac{DC \cdot OO'}{D'O' - DO}$.

Exerciții

3. Fie ABC un triunghi și fie A' , B' , C' trei puncte coliniare distințe astfel ca $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Să se arate că

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \text{ (teorema lui Menelaus).}$$

Indicație. Se duce o paralelă prin C la AB care intersectează pe $A'B'$ în P . Din proporționalitatea laturilor rezultată din asemănările $\triangle CPA' \sim \triangle BC'A'$, $\triangle AB'C' \sim \triangle CB'P$ se obține relația cerută.

4*. Se consideră punctele A' , B' , C' situate pe dreptele BC , AC , AB determinate de laturile triunghiului ABC . Dacă două dintre ele sunt situate pe laturile triunghiului și unul pe prelungirea laturii, sau nici unul nu e situat pe laturile triunghiului și este verificată relația din problema precedentă, atunci cele trei puncte sunt coliniare (reciproca teoremei lui Menelaus).

Indicație. Se arată că de exemplu $B'C'$ nu poate fi paralelă cu BC și se notează $\{A''\} = BC \cap B'C'$. Din relația dată și din exercițiul 3 rezultă $A' = A''$.

5. Se consideră un triunghi ABC și trei drepte concurente AM, BM, CM care mai intersectează suporturile laturilor triunghiului în punctele A', B', C' . Să se demonstreze relația

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \quad (\text{teorema lui Ceva}).$$

Indicație. Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul $B'BC$ pentru punctele coliniare A, M, A' și în triunghiul ABB' pentru punctele coliniare C, M, C' .

6*. Fie A', B', C' trei puncte situate pe laturile (BC) , (AB) , (AC) ale triunghiului ABC . Să se demonstreze că dacă este verificată relația din problema precedentă atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente (reciproca teoremei lui Ceva).

7. Să se demonstreze că într-un triunghi produsul dintre lungimea unei înălțimi și lungimea laturii corespunzătoare este același pentru fiecare înălțime.

8. Să se demonstreze că distanțele de la un punct M al medianei (AD) la laturile (AB) , (AC) ale unui triunghi sunt în raport invers cu lungimile acestor laturi. Se va deduce că distanțele de la centrul de greutate la laturi sunt invers proporționale cu lungimile laturilor.

9. Dintr-o tablă triunghiulară se cere să se tăie un pătrat cu o latură pe latura cea mai mare a triunghiului și cu celelalte două virfuri pe celelalte laturi ale triunghiului.

10. Pe latura (AB) a triunghiului ABC se consideră un punct C_1 . Prin A se duce paralela la CC_1 care intersectează BC în A_1 și prin B paralela la CC_1 care intersectează AC în B_1 . Să se demonstreze că $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}$.

Indicație

$$\frac{CC_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{AB}, \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{C_1B}{AB},$$

$$\frac{CC_1}{AA_1} + \frac{CC_1}{B_1B} = \frac{AC_1 + C_1B}{AB} = 1.$$

11*. În triunghiul ABC se consideră bisectoarea unghiului \hat{C} care intersectează latura (AB) în D . Demonstrați că $CD < \sqrt{AC \cdot BC}$.

Indicație. Fie $E \in (AC)$ astfel ca $\widehat{CDE} \equiv \widehat{CBD}$. Deoarece $\widehat{CDA} > \widehat{CBD}$ și

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE}, \quad CD^2 = CE \cdot CB < CB \cdot AC.$$

12. Prin punctul de intersecție O al diagonalelor unui trapez se duce o paralelă la baze, care tăie laturile neparalele în E și F . Să se arate că O este mijlocul segmentului (EF) .

13. Să se arate că dreapta determinată de punctul de intersecție al laturilor neparalele ale unui trapez și punctul de intersecție O al diagonalelor trece prin mijloacele bazelor trapezului.

§ 9. Relații metrice

Definiție. Fie o dreaptă d și un punct M , $M \notin d$. Se numește proiecție ortogonală a punctului M pe dreapta d piciorul perpendicularei din M pe d . Dacă $MM' \perp d$, $M' \in d$, se notează $M' = \text{pr}_d M$. Pentru $M \in d$ se definește

$\text{pr}_d M = M$. Pentru prescurtarea exprimării, în continuare, se va folosi doar termenul *proiecție* care va desemna proiecția ortogonală (fig. II.28).

Definiție Fie M o mulțime de puncte și d o dreaptă. Mulțimea M' se numește proiecția ortogonală a mulțimii M pe d dacă M' este mulțimea proiecțiilor pe d a punctelor mulțimii M . Se notează $M' = \text{pr}_d M$.

Exerciții

1. Să se arate că proiecția unui segment (AB) pe o dreaptă d este segmentul (CD) unde $C = \text{pr}_d A$ și $D = \text{pr}_d B$.

2. Să se arate că proiecția unui poligon pe o dreaptă este un segment închis.

Teorema 1. (Teorema catetei.) Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic este medie proporțională între lungimea ipotenuzei și a proiecției catetei pe ipotenuză.

Teorema 2. (Teorema înălțimii.) Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii duse din vîrful unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Se reamintește că numărul pozitiv „ a “ se numește *medie proporțională* (sau geometrică) a numerelor pozitive „ b “ și „ c “ dacă $a^2 = bc$.

Demonstrație. Fie triunghiul ABC , $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și fie $D = \text{pr}_{BC} A$ (fig. II.29).

Deoarece \hat{B} și \hat{C} sunt ascuțite rezultă că $D \in (BC)$ (ex. 1 § 12.1) și $(BD) = \text{pr}_{BC}(AB)$, $(CD) = \text{pr}_{BC}(AC)$. $\triangle BDA \sim \triangle BAC$ fiind dreptunghice și având unghiul \hat{B} comun, deci $\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$ de unde $AB^2 = CB \cdot BD$ ceea ce demonstrează teorema 1.

Analog $\triangle ADC \sim \triangle BAC$ de unde rezultă $\triangle BDA \sim \triangle ADC$ și $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC}$ deci $DA^2 = DB \cdot DC$ ceea ce demonstrează teorema 2.

Teorema 3. (Teorema lui Pitagora.) Într-un triunghi dreptunghic pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.



Fig. II.28

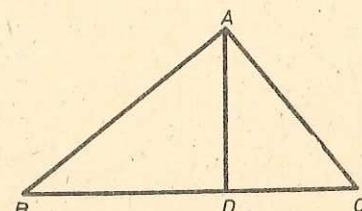


Fig. II.29

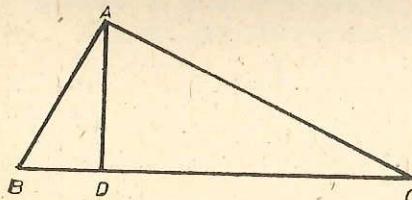


Fig. II.30

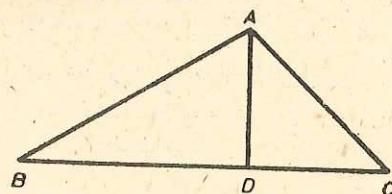


Fig. II.31

Demonstrație

Fie triunghiul ABC , $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $D = \text{pr}_{BC}A$ (fig. II.30). Atunci

$$AB^2 = BC \cdot BD,$$

$$AC^2 = BC \cdot DC.$$

Deci $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + DC) = BC^2$.

Teorema 4. (Reciprocele teoremelor 1, 2.) Se consideră triunghiul ABC , $D = \text{pr}_{BC}A$. Dacă $D \in (BC)$ și este verificată una din condițiile:

- i) $AB^2 = BC \cdot BD$,
- ii) $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci $m(\hat{A}) = 90^\circ$.

Demonstrația se face prin reducere la absurd și se lasă ca exercițiu.

Teorema 5. (Teorema lui Pitagora generalizată.) Dacă în triunghiul ABC , \hat{C} este un unghi ascuțit și $D = \text{pr}_{BC}A$, atunci

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

Demonstrație. Se consideră trei cazuri

a) \hat{B} ascuțit, atunci $D \in (BC)$ (fig. II.31). Triunghiurile ABD și ADC fiind dreptunghice au loc egalitățile:

$$(2) \quad AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$(3) \quad AD^2 = AC^2 - DC^2$$

$$(4) \quad BD = BC - DC.$$

Se înlocuiește în (2) AD și BD date de egalitățile (3) și (4), atunci

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (BC - DC)^2.$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

b) \hat{B} obtuz, atunci $B \in (DC)$, (fig. II.32) egalitățile (2) și (3) rămân adevărate și are loc

$$(5) \quad BD = DC - BC.$$

Înlocuind în (2) AD și BD date de (3) și (5) se obține

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (DC - BC)^2$$

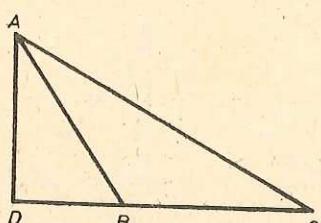


Fig. II.32

deci

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

c) $m(\hat{B}) = 90^\circ$, atunci (1) rezultă din teorema lui Pitagora.

Teorema 5". (Teorema lui Pitagora generalizată.) Dacă în triunghiul

ABC , \hat{C} este obtuz și $D = \text{pr}_{BC}A$, atunci

$$(6) \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC.$$

Demonstrație. \hat{C} fiind obtuz rezultă că $C \in (BD)$ (fig. II.33). Din triunghiurile dreptunghice ABD și ACD se obține:

$$(7) \quad AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

$$(8) \quad AD^2 = AC^2 - CD^2,$$

$$(9) \quad BD = BC + CD.$$

Înlocuind AD , BD din (8) și (9) în egalitatea (7) se obține:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC.$$

Teorema 6. (Reciproca teoremei lui Pitagora.) Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghie.

Demonstrație. Se consideră triunghiul ABC în care

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Fie D proiecția lui A pe BC . Dacă \widehat{ACB} nu este unghi drept atunci $D \neq C$. Înind seama de ipoteză și de relațiile (1) sau (6), (după cum \widehat{ACB} este ascuțit sau obtuz) rezultă $BC \cdot DC = 0$, adică $DC = 0$, ceea ce este în contradicție cu $C \neq D$. Rezultă că $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$.

Aplicație. Să se arate că fiind date trei numere reale pozitive a, b, c astfel încât $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, există un triunghi ABC pentru care $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Rezolvare. Se poate presupune că $a \leq b \leq c$, și pe o dreaptă d se consideră punctele A, B astfel ca $AB = c$. Se va arăta că se poate determina poziția unui punct M , $M \in (AB)$ și a unui punct C care aparține perpendicularei în M pe AB astfel ca $AC = b$ și $BC = a$. Poziția acestor puncte este determinată dacă se cunosc

numerele $x = AM$ și $y = MC$ (fig. II.34). În acest scop vom presupune că există triunghiul cerut ABC și notând cu \hat{M} proiecția lui C pe AB se calculează valorile lui x și y . Deoarece am presupus că $a \leq b \leq c$ rezultă că unghiurile A și B sunt ascuțite și deci $M \in (AB)$ (ex. 1, § 12, I). Aplicând teorema lui Pitagora generalizată se obține $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, deci:

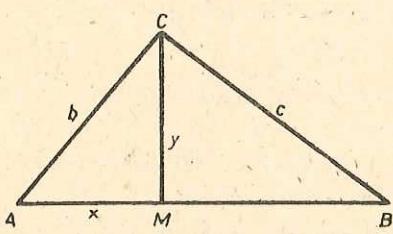


Fig. II.34

$$(10) \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ și } y = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

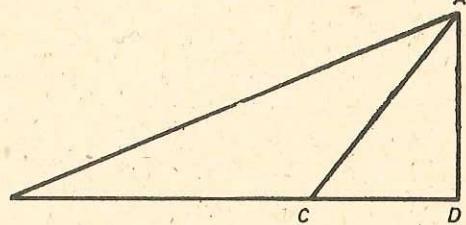


Fig. II.33

În ipoteza că triunghiul ABC există, rezultă că există și segmentele (AM) , (CM) , deci $x > 0$ și $x < b$.

Se trece acum la rezolvarea propriu-zisă a problemei propuse. Se va arăta că în ipotezele făcute în enunț și $a \leq b \leq c$, numerele x și y definite prin formulele (10) există și sunt pozitive ceea ce revine la $0 < x < b$. Din $b \geq a$ și $c > 0$ rezultă $x > 0$. Pe de altă parte, prin ipoteză $c < a + b$, deci $0 \leq c - b < a$ și astfel $(c - b)^2 < a^2$. De aici se deduce că $b^2 + c^2 - 2bc < a^2$ și $b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$, de unde rezultă

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} < b.$$

Se determină pe (AB) (pe baza teoremei de construcție a unui segment) punctul M astfel ca $AM = x$ și pe perpendiculara în M pe AB punctul C astfel ca $MC = y$. Cum $x < b \leq c$, rezultă $M \in (AB)$ și $AC^2 = x^2 + y^2 = x^2 + b^2 - x^2 = b^2$, $BC^2 = MB^2 + CM^2 = (c - x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = c^2 - 2c \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + x^2 + b^2 - x^2 = a^2$.

S-a demonstrat că triunghiul ABC astfel construit îndeplinește cerințele problemei.

Exerciții

3. Se consideră triunghiul ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) în care $AD \perp BC$, $D \in BC$. Să se arate că

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

4. Să se demonstreze că raportul lungimilor proiecțiilor catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză este egal cu raportul pătratelor lungimilor catetelor.

5. Se consideră un triunghi ABC și fie D proiecția lui A pe BC . Perpendiculara în A pe AB intersectează pe BC în E . Dacă $AB = 13$, $BC = 21$ și $AD = 12$ să se afle perimetru triunghiului ACE .

6. Prin vîrful A al triunghiului isoscel ABC se duce o paralelă la BC pe căre se consideră un punct M . Să se demonstreze că:

$$MB^2 + MC^2 = 2(MA^2 + AB^2).$$

Indicație. Se notează cu B' , C' proiecțiile lui B , C pe AM . Unul din triunghiurile MAB' și MAC' are unghiul din A obtuz și celălalt are unghiul din A ascuțit. Se calculează cu teorema lui Pitagora generalizată MB'^2 și MC'^2 și se adună.

7. În dreptunghiul $ABCD$, perpendiculara din A pe diagonala (BD) intersectează dreapta BC în F . Să se demonstreze că

$$AB^2 = BF \cdot BC.$$

8. Se consideră triunghiul ABC , $m(\hat{A}) = 90^\circ$ în care $AB = AC + 6$ și $BC = 30$.

Să se determine CD , (CD fiind bisectoarea unghiului \hat{C} , $D \in (AB)$).

9. Se consideră triunghiul ABC și înălțimea BD , $D \in (AC)$. Pe laturile (AB) și (BC) se construiesc triunghiurile dreptunghice ABE , BCF ,

$$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BCF}) = 90^\circ \text{ și } (AE) \equiv (DC), (FC) \equiv (AD).$$

Să se arate că $(BF) \equiv (BE)$.

10. Se consideră pătratul $ABCD$, cu $AB = 4$ și punctul $E \in (AD)$, astfel ca $AE = 1$. Să se afle distanța de la punctul B la dreapta CE .

Indicație: Se folosește proprietatea că într-un triunghi produsul dintre lungimea înălțimii și lungimea laturii corespunzătoare este constant.

Exerciții recapitulative

1. Lungimile bazelor unui trapez sunt a, b , $a > b$ și distanța dintre baze este h . Să se afle:

i) distanța dintre punctul de intersecție a laturilor neparalele și baza mică,

ii) distanța dintre punctul de intersecție a diagonalelor și baza mare.

2. Să se arate că lungimea medianei (AM) ($M \in (BC)$) a triunghiului ABC , este:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$

3. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 40$, $BC = 50$, $CA = 60$ și bisectoarea (AD) , $D \in (BC)$. Să se afle în ce raport împarte bisectoarea (BE) , segmentul (AD) .

4. Se dă un patrat $ABCD$ și $M \in \text{Int } ABCD$ astfel încât

$$\text{m}(\widehat{MCD}) = \text{m}(\widehat{MDC}) = 15^\circ.$$

Să se arate că triunghiul ABM este echilateral.

5. Se consideră patratul $ABCD$ și punctele E, F , care determină pe CD segmentele $(DE) \equiv (EF) \equiv (FC)$. Fie $\{G\} = AE \cap BC$ și H mijlocul lui (AG) . Să se arate că $DH = \frac{1}{2} AC$.

6. Fie (AC) cea mai lungă dintre diagonalele paralelogramului $ABCD$ și E, F , picioarele perpendicularelor din C pe AB și AD . Să se arate că:

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

7. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și D piciorul perpendicularei din A pe BC . Se notează cu E și F intersecția perpendicularelor pe BC în punctele B și C cu înălțimile din C și B . Să se demonstreze că dacă $(AD) \equiv (BC)$ atunci:

i) triunghiurile BDE și CDF sunt isoscele,

ii) triunghiul EDF este dreptunghic și (DA) este bisectoarea unghiului \widehat{EDF} .

8. Fie A, B, C, D , centrele de simetrie ale patratelor construite în exterior pe laturile unui romb. Să se arate că $ABCD$ este patrat.

9. Se consideră triunghiul ABC cu

$$AB = 34, BC = 56, M \in (AC), (AM) \equiv (MC), BM = 39.$$

Să se afle distanța de la M la dreapta BC .

10. Se consideră triunghiul ABC cu

$$AB = AC, \widehat{BAC} \text{ obtuz și } AD \perp AB, D \in (BC).$$

Să se afle $\frac{CD}{BD}$ știind că $BC = 32$ și distanța de la A la dreapta BC este 12.

11. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\text{m}(\widehat{A}) = 90^\circ$), M piciorul perpendicularei din A pe BC , N mijlocul laturii (BC) și P intersecția dreptei AN cu perpendiculara din M pe AC . Dacă $(AP) \equiv (PN)$, să se arate că unghiurile ascuțite ale triunghiului ABC au măsurile 60° și 30° .

12. Fie un dreptunghi $ABCD$. Să se demonstreze că pentru orice punct M este verificată relația $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Indicație. Se utilizează rezultatul exercițiului 2.

13. A, B, C fiind trei puncte coliniare B ∈ (AC) și O un punct exterior dreptei AC, să se demonstreze relația: $OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC$. (Relația lui Stewart.)

Indicație. Se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile OAB și OBC; relațiile obținute se înmulțesc respectiv cu BC și AB și se adună membru cu membru.

14*. Să se afle locul geometric al punctelor M, pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte date A, B să fie o constantă k.

Indicație. Fie O mijlocul segmentului (AB) și N proiecția lui M pe AB. Presupunând $k > 0$, avem $MA > MB$ și $N \in (BO)$. Aplicând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile AMO și BMO se deduce: $MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot NO = k$, $NO = \frac{k}{2AB}$ deci NO este constant și locul geometric este perpendiculara pe AB, dusă prin punctul fix N.

15. Se dă pătratul ABCD cu laturile de lungime a. Pe laturile (BC) și (CD) se iau punctele E, respectiv F astfel încât $BE = \frac{1}{3}a$ și $CF = \frac{2}{9}a$. Să se arate că triunghiul AEF este dreptunghic.

16. Să se demonstreze că într-un paralelogram, suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor.

17. Să se afle raportul dintre suma pătratelor lungimilor laturilor unui triunghi și suma pătratelor medianelor. Să se deducă de aici că într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor medianelor corespunzătoare catetelor este egală cu de cinci ori pătratul medianei relativă la ipotenuză.

18. Se consideră trapezul ABCD. Paralela cu bazele BC și AD ale trapezului ce trece prin punctul de intersecție al diagonalelor intersectează laturile neparalele în punctele E și F. Să se arate că:

$$EF = \frac{\frac{2}{BC} + \frac{1}{AD}}{1}.$$

19*. În patrulaterul convex ABCD, E este mijlocul laturii (AB) și F mijlocul laturii (CD). Să se demonstreze că mijloacele segmentelor (AF), (CE), (BF), (DE) sunt vîrfurile unui paralelogram.

20. Printr-un punct variabil D situat pe latura [BC] a unui triunghi ABC se duce o paralelă la mediana AM, M fiind mijlocul laturii (BC). Această paralelă intersectează dreptele AB și AC în punctele E, respectiv F. Să se arate că:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \text{ și } DE + DF = \text{const.}$$

21. Se consideră un trapez isoscel ABCD cu bazele (AB), (DC), $AB = 2a$, $DC = 2b$, în care diagonala AC este bisectoarea unghiului \hat{A} . Să se exprime cu a și b lungimile diagonalelor și lungimile laturilor neparalele ale trapezului. (Se presupune $b < a < 3b$.)

§ 1. Definiții

În capitolele precedente s-au definit și studiat diferite multimi de puncte din plan (unghi, poligon convex, mediatore, bisectoare etc.). Utilizând noțiunea de loc geometric se pot defini și alte tipuri de multimi de puncte dintre care, în acest capitol, vom studia cercul.

Definiție. Fie $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ și O un punct din plan. Se numește *cerc* de *centru* O și *rază* r locul geometric al punctelor M din plan pentru care $OM = r$. Se notează $\mathcal{C}(O, r) = \{M \mid OM = r\}$. Pentru trasarea cercului se folosește compasul (fig. III.1). Dacă $M \in \mathcal{C}(O, r)$ atunci pentru segmentul (OM) se va folosi denumirea de *raza* (OM) . Deci cuvântul „*rază*“ are două sensuri: poate fi un număr r sau un segment (OM) . În general, din text se înțelege despre care sens este vorba.

Definiție. Fieind dat cercul $\mathcal{C}(O, r)$ mulțimea punctelor P din plan pentru care $OP < r$ se numește *interiorul* cercului. Se notează

$$\text{Int } \mathcal{C}(O, r) = \{P \mid OP < r\}.$$

Se definește și *exteriorul* unui cerc și anume: $\text{Ext } \mathcal{C}(O, r) = \{Q \mid OQ > r\}$.

Teorema 1. Interiorul unui cerc este o mulțime convexă.

Demonstrație. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și $A \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, $B \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, deci $OA < r$, $OB < r$ (fig. III.2). Dacă $P \in (AB)$ atunci $OP < OA$ sau $OP < OB$ (vezi ex. 5 § 12, cap. I). În ambele cazuri rezultă $OP < r$, deci $P \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.

Definiție. Se numește *disc* de centru O și rază r , $r > 0$, mulțimea $\mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.

Se observă că $\mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(O, r) = \{M \mid OM \leq r\}$.

Două cercuri care au razele egale se numesc *congruente*.

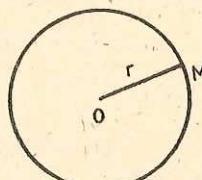


Fig. III.1

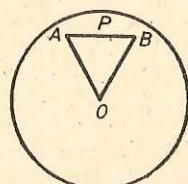


Fig. III.2

Teorema 2. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $r > 0$ și dreapta h .

- Dacă $d(O, h) < r$, atunci dreapta h și cercul $\mathcal{C}(O, r)$ au exact două puncte comune.
- Dacă $d(O, h) = r$, atunci dreapta h și cercul $\mathcal{C}(O, r)$ au exact un punct comun.
- Dacă $d(O, h) > r$ atunci dreapta h și cercul $\mathcal{C}(O, r)$ nu au puncte comune.

Demonstrație. a) Dacă $d(O, h) = 0$ deci $O \in h$, atunci pe cele două semidrepte h' și h'' determinate de O pe h , există cîte un singur punct $A \in h'$, $B \in h''$, astfel ca $OA = OB = r$ (fig. III.3).

Dacă $0 < d(O, h) = r_1 < r$, atunci se notează $O' = \text{pr}_h O$ (fig. III.4) și pe semidreptele h' și h'' determinate de O' pe h , există punctele unice $A \in h'$, $B \in h''$, astfel încît lungimile segmentelor $(O'A)$ și $(O'B)$ să fie de o anumită valoare, de exemplu $O'A = O'B = \sqrt{r^2 - r_1^2}$. Triunghiurile $OO'A$ și $OO'B$ fiind dreptunghice, din teorema lui Pitagora se determină $OA = OB = \sqrt{OO'^2 + O'A^2} = r$, deci puncte A și B aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Oricare ar fi punctul M , $M \in h$, astfel încât $O'M < \sqrt{r^2 - r_1^2}$, rezultă că $OM = \sqrt{OO'^2 + O'M^2} < r$ și $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, iar dacă $O'M > \sqrt{r^2 - r_1^2}$, atunci $OM > r$, și $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$.

b) Dacă $d(O, h) = r$, fie $O' = \text{pr}_h O$, deci $OO' = r$ adică $O' \in \mathcal{C}(O, r)$. Dacă $M \in h$, $M \neq O'$, atunci $OM > OO' = r$ și deci $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.5).

c) Dacă $d(O, h) > r$ atunci pentru orice punct M , $M \in h$, $OM \geq d(O, h) > r$ deci $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.6).

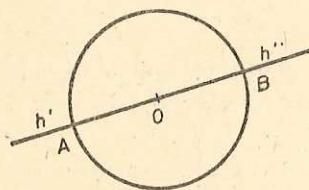


Fig. III.3

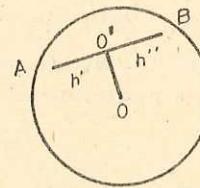


Fig. III.4

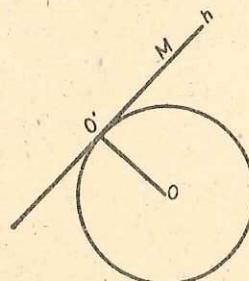


Fig. III.5

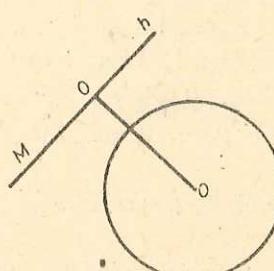


Fig. III.6

Definiție. Dreapta h se numește tangentă cercului $\mathcal{C}(O, r)$ dacă există exact un punct comun cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și dreptei h .

Din teorema 2 rezultă că dreapta h este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ dacă și numai dacă $d(O, h) = r$. Punctul O' comun tangentei h și cercului $\mathcal{C}(O, r)$ se numește punct de tangență. Din demonstrația punctului b) a teoremei 2 rezultă că

raza (OO') este perpendiculară pe tangentă prin O' .

O dreaptă h se numește secantă unui cerc dacă dreapta h și cercul au două puncte distințe comune. Dreapta h se numește exterioară unui cerc dacă dreapta h și cercul nu au nici un punct comun.

Exerciții

1. Să se arate că prin două puncte distințe trec o infinitate de cercuri, și să se determine locul geometric al centrelor acestor cercuri.

2. Fie A, B, C trei puncte distințe ale unui cerc. Să se arate că ele nu pot fi coliniare și că centrul cercului este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului ABC .

3. Să se arate că dacă două cercuri au trei puncte distințe comune, cercurile coincid.

4*. Să se arate că discul este o mulțime convexă.

5*. Să se demonstreze că centrul unui cerc este centru de simetrie al său și al discului pe care-l determină.

6*. Arătați că orice dreaptă care conține centrul cercului este axă de simetrie a cercului (și a discului).

Indicație. Se consideră un punct M pentru care $OM = r$ și o dreaptă d care conține centrul cercului; dacă M' este simetricul punctului M față de dreapta d , atunci $OM' = OM = r$.

7*. Să se arate că dacă punctele A și B aparțin unui disc de rază r atunci $AB \leq 2r$.

Indicație. În triunghiul OAB (O centrul cercului), $AB < OA + OB \leq 2r$.

Dacă A, O, B sunt coliniare și $O \in [AB]$, $AB = AO + OB \leq 2r$, iar dacă $A \in (OB)$ sau $B \in (OA)$ atunci $AB < OA + OB \leq 2r$.

8*. Să se arate că o dreaptă care conține un punct din interiorul unui cerc intersectează cercul.

9*. Fie d o tangentă sau o dreaptă exterioară cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Arătați că $\mathcal{C}(O, r) \subset [dO]$.

10. Să se afle locul geometric al centrelor cerurilor tangente la o dreaptă dată într-un punct dat.

11. Fie A, B două puncte fixe. Se consideră un cerc variabil de centru M , tangent dreptei AB în punctul B . Perpendiculara din B pe AM taie din nou cercul în T . Să se afle locul geometric al punctului T .

12. Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc un punct fix A cu un punct variabil M , situat pe un cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$.

13. Vîrfurile A, B ale triunghiului ABM sunt fixe, iar M este un punct variabil. Să se afle locul geometric al punctului M , știind că mediana (AA') a triunghiului ABM are o lungime dată l .

14. Dacă vîrfurile unui patrulater aparțin unui cerc, atunci patrulaterul este convex.

§ 2. Coarde. Arce. Unghiuri la centru

Segmentul determinat de două puncte ale unui cerc se numește coardă. Dacă coarda conține centrul cercului atunci ea se numește diametru, iar capetele unui diametru se numesc puncte diametral opuse. Pentru un cerc de

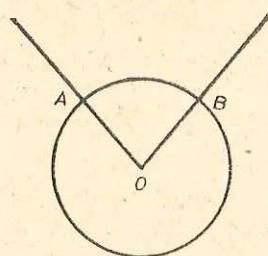


Fig. III.7

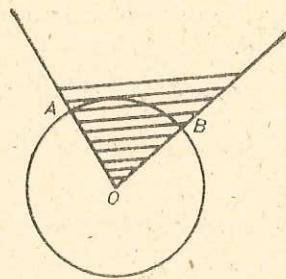


Fig. III.8

rază r , lungimea unui diametru este $2r$ și este mai mare sau egală decât lungimea oricărui coarde.

Definiție. Un unghi cu vîrful în centrul unui cerc se numește *unghi la centru* pentru acel cerc.

Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și punctele $A \in \mathcal{C}(O, r)$, $B \in \mathcal{C}(O, r)$; dacă A și B nu sunt diametral opuse atunci ele determină unghiul la centru propriu \widehat{AOB} (fig. III.7). Dacă A și B sunt diametral opuse atunci unghiul \widehat{AOB} este un unghi alungit.

Definiție. Fie A și B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ care nu sunt diametral opuse. Se numește *arc mic* \widehat{AB} mulțimea formată din A , B și punctele cercului $\mathcal{C}(O, r)$ care aparțin interiorului unghiului \widehat{AOB} . Se numește *arc mare* \widehat{AB} mulțimea punctelor cercului $\mathcal{C}(O, r)$ care nu aparțin interiorului unghiului \widehat{AOB} . A și B se numesc *capetele* celor două arce (fig. III.8).

Se introduce o notație a arcului folosind încă un punct M al lui, diferit de capete: \widehat{AMB} este arcul cu capetele A , B căreia îi aparține și punctul M . Dacă nu e pericol de confuzie, arcul \widehat{AMB} poate fi notat \widehat{AB} . De exemplu dacă se precizează arc mic, arc mare. Mulțimea $\widehat{AB} - \{A; B\}$ se numește *arc deschis*.

Definiție. Dacă A și B sunt puncte diametral opuse ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și M un punct al cercului diferit de acestea, atunci arcul \widehat{AMB} este mulțimea punctelor cercului situate în semiplanul închis determinat de dreapta AB căreia îi aparține punctul M și se numește *semicercul* \widehat{AMB} .

Evident, orice diametru determină două semicercuri.

În capitolul I fiecarei unghi i s-a pus în corespondență un număr real α , $\alpha \in [0, 180]$ care reprezintă măsura unghiului. Deoarece arcele unui cerc sunt determinate prin unghiuri, rezultă că fiecarei arc i se poate asocia un număr real, numit măsura arcului.

Definiție. Fie A și B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$.

- Dacă A și B nu sunt diametral opuse măsura arcului mic \widehat{AB} este egală cu măsura unghiului la centru \widehat{AOB} , adică $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AOB})$.
- Dacă A și B nu sunt diametral opuse, măsura arcului mare \widehat{AB} este egală cu 360 minus măsura unghiului la centru \widehat{AOB} , adică $m(\widehat{AB}) = 360 - m(\widehat{AOB})$.
- Dacă A și B sunt diametral opuse, măsura semicercului \widehat{AB} este 180 , adică $m(\widehat{AB}) = 180$.
Se poate considera convențional că un cerc este un arc mare \widehat{AB} ale cărui capete A și B coincid, deci $m(\widehat{AOB}) = 0$ și măsura cercului este conform definiției egală cu 360 .

Observație. Adoptând aceeași convenție de notație ca și pentru unghiuri se va scrie $m(\widehat{AB}) = \alpha^\circ$, unde $\alpha \in [0, 360]$.

Definiție. Două arce ale aceluiași cerc (sau din două cercuri congruente) se numesc *congruente* dacă au aceeași măsură.

În multe probleme teoretice și practice se pune problema determinării măsurii unui arc cind acesta poate fi considerat ca reuniune de două arce având comun doar unul din capete. Pentru o rezolvare corectă a problemelor de acest fel, reprezentarea intuitivă nefiind o justificare, se va stabili următoarea teoremă.

Teorema 1. Fie cercul $\odot(O, r)$, \widehat{AB} un arc al cercului și M un punct diferit de A și B al arcului \widehat{AB} . Atunci, $m(AMB) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM})$, unde $B \notin \widehat{AM}$ și $A \notin \widehat{BM}$.

Demonstrație.

- Dacă \widehat{AMB} este un arc mic, deoarece $(OM \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ (fig. III.9) are loc $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{MOB})$ adică $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM})$.
- Dacă \widehat{AMB} este un semicerc (fig. III.10) atunci $m(\widehat{AMB}) = 180^\circ$, iar \widehat{AOM} și \widehat{BOM} sunt suplementare, $m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{BOM}) = 180^\circ$, adică $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180^\circ$.
- Dacă \widehat{AMB} este un arc mare, punctele A și B fiind situate în același semiplan față de dreapta OM (fig. III.11) și presupunând că B aparține arcului mic \widehat{AM} , se

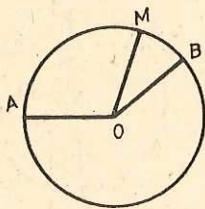


Fig. III.9

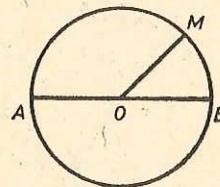


Fig. III.10

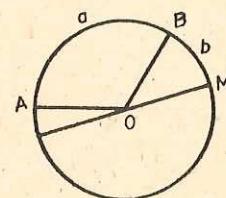


Fig. III.11

notează $m(\widehat{AOB}) = a^\circ$, $m(\widehat{MOB}) = b^\circ$. Atunci $m(\widehat{AMB}) = 360^\circ - a^\circ$; pentru arcul mare \widehat{AM} , $m(\widehat{AM}) = 360^\circ - m(\widehat{AOM}) = 360^\circ - (a^\circ + b^\circ)$. Deci

$$m(\widehat{AM}) + m(\widehat{MB}) = 360^\circ - (a^\circ + b^\circ) + b^\circ = 360^\circ - a^\circ = m(\widehat{AMB}).$$

Dacă B aparține arcului mare \widehat{AM} , demonstrația se face în mod analog.

4) Dacă \widehat{AMB} este un arc mare, iar punctele A și B sunt în semiplane opuse față de dreapta OM , M' fiind diametral opus lui M , (fig. III.12), avem ($OM' \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ căci $M \notin \text{Int } \widehat{AOB}$ (Cap. I., § 6, ex. 12)). Se notează $m(\widehat{AOB}) = a^\circ$, $m(\widehat{M'OA}) = b^\circ$.

$$m(\widehat{AMB}) = 360^\circ - m(\widehat{AOB}) = 360^\circ - a^\circ.$$

$$m(\widehat{M'OB}) = a^\circ - b^\circ, m(\widehat{MOB}) = 180^\circ - (a^\circ - b^\circ), m(\widehat{MOA}) = 180^\circ - b^\circ.$$

$$\text{Atunci } m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180^\circ - b^\circ + 180^\circ - (a^\circ - b^\circ) = 360^\circ - a^\circ = m(\widehat{AMB}).$$

5) Dacă \widehat{AMB} este un arc mare, M și A (sau M și B) fiind diametral opuse (fig. III.13), $m(\widehat{AM}) = 180^\circ$, $m(\widehat{MOB}) = 180^\circ - m(\widehat{AOB})$ deci

$$m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180^\circ + 180^\circ - m(\widehat{AOB}) = 360^\circ - m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AMB}).$$

Se vor stabili în continuare cîteva proprietăți relative la arce și coarde a căror demonstrație poate reprezenta și un exercițiu pentru cititor.

Punctul M se numește *mijlocul* arcului \widehat{AB} dacă aparține arcului \widehat{AB} și arcele mici \widehat{AM} și \widehat{BM} sunt congruente. Existența mijlocului unui arc rezultă din

Teorema 2. Dacă A și B sunt puncte distincte ale unui cerc, atunci diametrul perpendicular pe coarda (AB) conține mijlocul coardei (AB) și mijloacele arcelor \widehat{AB} (arcul mic și arcul mare).

Demonstrație. Dacă A și B nu sunt diametral opuse se notează $O' = \text{pr}_{AB}O$ (fig. III. 14). Fie $\{C\} = \mathcal{Q}(O, r) \cap (OO')$ și D punctul diametral opus lui C . $\triangle AOO' \cong \triangle BOO'$ (C.I.), deci $(AO') \cong (BO')$, $\widehat{AOC} \cong \widehat{BOC}$ și $\widehat{AOD} \cong \widehat{BOD}$

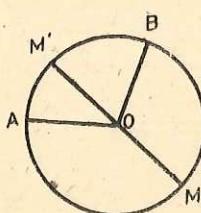


Fig. III.12

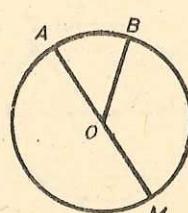


Fig. III.13

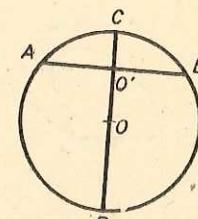


Fig. III.14

(având suplemente congruente) din care rezultă că C este mijlocul arcului mic \widehat{AB} și D mijlocul arcului mare \widehat{AB} . Evident, teorema este adevărată și dacă A și B sunt diametral opuse.

Teorema 3. Dacă două coarde (AB) și (CD) din același cerc $\mathcal{C}(O, r)$ sunt congruente, atunci arelele mici \widehat{AB} și \widehat{CD} sunt congruente și reciproc, dacă arelele mici \widehat{AB} și \widehat{CD} ale unui cerc sunt congruente, atunci coardele (AB) și (CD) sunt congruente.

Demonstrație. a) Dacă $(AB) \equiv (CD)$, $(AB), (CD)$ fiind coarde ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, atunci $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (L.L.L.), deci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$ deci $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ (fig. III.15). b) Dacă $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ atunci $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (L.U.L.) deci $(AB) \equiv (CD)$.

Teorema 4. Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente atunci distanțele de la centrul cercului la coarde sunt egale.

Demonstrație. Dacă $(AB) \equiv (CD)$, $(AB), (CD)$ fiind coarde ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, atunci $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ și înălțimile din O ale acestor triunghiuri sunt congruente (fig. III.16).

Teoremele 3 și 4 sunt adevărate și dacă cele două coarde aparțin la două cercuri congruente.

Teorema 5. Dacă două coarde (AB) și (CD) ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ sunt paralele, A și C fiind situate în același semiplan față de diametrul perpendicular pe cele două coarde, atunci arelele mici \widehat{AC} și \widehat{BD} sunt congruente și coardele (AC) și (BD) sunt congruente.

Demonstrație. Fie (MN) diametrul perpendicular pe coarda (AB) , M și N aparținând cercului astfel ca M și A să fie de aceeași parte a dreptei CD (fig. III.17).

Atunci $\widehat{AM} = \widehat{MB}$, $\widehat{CN} = \widehat{ND}$; folosind teorema 1 se obține $m(\widehat{AC}) = 180^\circ - [m(\widehat{AM}) + m(\widehat{CN})] = 180^\circ - [m(\widehat{MB}) + m(\widehat{ND})] = m(\widehat{BD})$. Deci $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$ și $(AC) \equiv (BD)$.

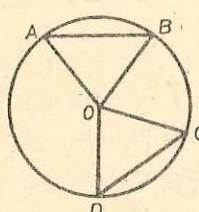


Fig. III.15

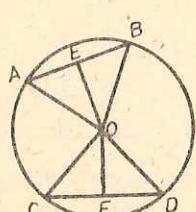


Fig. III.16

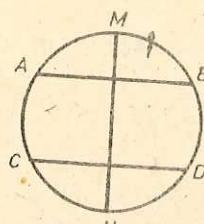


Fig. III.17

Teorema 5 poate fi formulată într-un enunț mai ușor de memorat, dar nu suficient de precis: „arcele situate între două coarde paralele sunt congruente“.

Exerciții

1. Să se demonstreze că dacă diametrul unui cerc conține mijlocul unui arc \widehat{AB} sau a coardei (AB) , atunci diametrul este perpendicular pe coarda (AB) (reciproca teoremei 2).
2. Dacă centrul unui cerc este la distanțe egale de două coarde ale cercului, atunci coardele sunt congruente (reciproca teoremei 4).
- 3*. Dacă coardele (AB) și (CD) ale unui cerc sunt congruente atunci $AC \parallel BD$ sau $AD \parallel BC$ (reciproca teoremei 5).
4. Se consideră cercul $C(O, r)$, punctul $M \in C(O, r)$ și h tangenta în M la cerc. Să se demonstreze că pentru orice coardă (AB) , $AB \parallel h$, punctul M este mijlocul arcului \widehat{AB} .
5. Se dau: un cerc $C(O, r)$, un punct $A \in C(O, r)$ și un număr real $\alpha \in (0, 360)$, $\alpha \neq 180$. Să se arate că există exact două puncte M , $M \notin C(O, r)$ astfel că $m(\widehat{AM}) = \alpha^\circ$.
6. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc, care au o lungime dată.
7. Se dau punctele distincte A, B și dreapta d perpendiculară pe AB . M fiind un punct variabil pe d , să se afle locul geometric al punctului diametral opus lui M în cercul care trece prin A, B și M .
- 8*. Două cercuri se intersecțează în A, B . O secantă variabilă trecând prin A taie cercurile în două oară în M, N . Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului (MN) .

§ 3. Unghi încris

Definiție. Unghiul \widehat{AMB} se numește *unghi încris* unui cerc $C(O, r)$ dacă A, M, B sunt puncte ale cercului $C(O, r)$.

Arcul \widehat{AB} căruia nu-i aparține punctul M se numește *arc cuprins între laturile unghiului*.

Teorema 1. Măsura unui unghi încris în cerc este $\frac{1}{2}$ din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Demonstrație. Se consideră unghiul \widehat{AMB} încris în cercul $C(O, r)$.

Cazul I. Una din laturile unghiului conține centrul cercului, de exemplu $O \in AM$ (fig. III.18); atunci \widehat{AOB} este exterior triunghiului isoscel OMB și $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AOB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$.

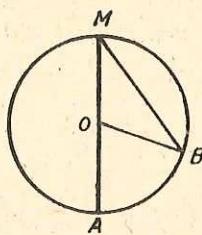


Fig. III.18

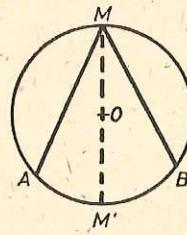


Fig. III.19

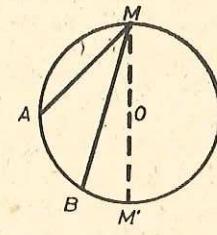


Fig. III.20

Cazul II. Centrul cercului este în interiorul unghiului \widehat{AMB} (fig. III.19). Atunci M' fiind diametral opus lui M , din cazul I și teorema 1 § 2 rezultă $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMM'}) + m(\widehat{M'MB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AM'}) + \frac{1}{2}m(\widehat{M'B}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB})$.

Cazul III. Centrul cercului nu aparține interiorului unghiului \widehat{AMB} (fig. III.20). Punctul M' fiind diametral opus punctului M și $(MB \subset \text{Int } \widehat{AMM'})$ prin aplicarea cazului I se obține:

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMM'}) - m(\widehat{BMM'}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AM'}) - \frac{1}{2}m(\widehat{BM'}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB}).$$

Cele trei cazuri demonstrează teorema.

Din teorema 1 rezultă că fiind date două puncte fixe A și B ale unui cerc și un punct M variabil pe arcul mare \widehat{AB} , diferit de A și B , unghiiurile \widehat{AMB} au aceeași măsură, egală cu $\frac{1}{2}m(\widehat{AOB})$, iar dacă M aparține arcului mic \widehat{AB} , măsura unghierilor \widehat{AMB} este de asemenea constantă egală cu $\frac{1}{2}(360^\circ - m(\widehat{AOB}))$. Dacă \widehat{AB} este semicerc, $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$.

Teorema 2. Măsura unui unghi cu vîrful pe cerc, una din laturi fiind secantă cercului, iar cealaltă tangentă cercului este $\frac{1}{2}$ din măsura areului de cerc inclus în interiorul unghiului.

Demonstrație. Fie unghiul \widehat{AMB} , $M \in \mathcal{C}(O, r)$, $B \in \mathcal{C}(O, r)$, MA tangentă cercului.

Cazul I. (fig. III.21) \widehat{AMB} este un unghi ascuțit; M' fiind punctul diametral opus lui M , ținând seama că B și M' sunt de aceeași parte a tangentei, rezultă $(MB \subset \text{Int } \widehat{AMM'})$, deci

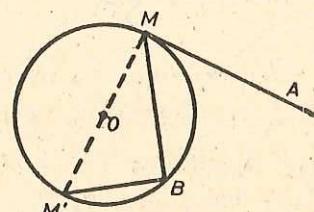


Fig. III.21

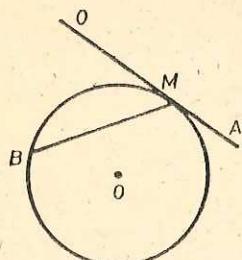


Fig. III.22

$\widehat{B'M'M} = \widehat{AMB}$ (având același complement $\widehat{BMM'}$), iar $\widehat{B'M'M}$ este un unghi inseris. Atunci $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{B'M'M}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BM})$, arcul \widehat{BM} fiind un arc mic.

Cazul II. \widehat{AMB} este un unghi obtuz (fig. III.22). Fie $C \in AM$, $M \in (AC)$, iar D un punct al arcului mare \widehat{BM} . Unghiurile \widehat{CMB} și \widehat{AMB} sunt suplementare; \widehat{CMB} fiind un unghi ascuțit, conform cazului I, $m(\widehat{CMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{MB})$ (arcul mic \widehat{MB}). Atunci

$$\begin{aligned} m(\widehat{AMB}) &= 180^\circ - m(\widehat{CMB}) = \frac{1}{2}[360^\circ - 2m(\widehat{CMB})] = \\ &= \frac{1}{2}[360^\circ - m(\widehat{MB})] = \frac{1}{2} m(\widehat{BDM}). \end{aligned}$$

Cazul III. Dacă \widehat{AMB} este unghi drept, atunci M, B sunt diametral opuse și \widehat{MB} este semicerc, deci $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ = \frac{1}{2} m(\widehat{MB})$.

Definiție. Unghiul \widehat{AMB} se numește *unghiul cu virful în interiorul unui cerc* $\mathcal{C}(O, r)$ dacă $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, iar A și B sunt puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$.

Dacă \widehat{AMB} este un unghi cu virful în interiorul unui cerc (fig. III. 23), dreptele MA și MB având un punct în interiorul cercului vor avea cîte două puncte comune cu cercul $A'A'$, respectiv $B'B'$. Unghiul $\widehat{A'MB'}$ este de asemenea un unghi cu virful în interiorul cercului și $\widehat{AMB} = \widehat{A'MB'}$ ca unghiuri opuse la virf. Arcele \widehat{AB} și $\widehat{A'B'}$ care sunt incluse în $\text{Int } \widehat{AMB}$ respectiv $\text{Int } \widehat{A'MB'}$ se numesc *arc cuprins între laturile unghiului*, respectiv *arc cuprins între prelungirile laturilor unghiului cu virful în interiorul cercului*.

Teorema 3. *Măsura unui unghi cu virful în interiorul unui cerc este $\frac{1}{2}$ din suma măsurilor arcului cuprins între laturile unghiului și a arcului cuprins între prelungirile acestora.*

Demonstrație. Fie unghiul \widehat{AMB} cu $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$ și $\widehat{A'MB'}$ opus la virf cu \widehat{AMB} , $A' \in AM$, $B' \in BM$, A' și B' fiind pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.24).

Unghiurile $\widehat{A'AB'}$ și $\widehat{A'B'B}$ fiind

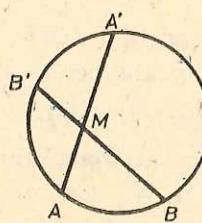


Fig. III.23

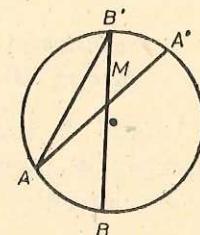


Fig. III.24

unghiuri inscrise în cerc, $m(\widehat{A'AB'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{A'B'})$ și $m(\widehat{AB'B}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$.

Unghiul \widehat{AMB} este un unghi exterior pentru triunghiul AMB' și deci

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{A'AB'}) + m(\widehat{AB'B}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{A'B'}) + m(\widehat{AB})].$$

Definiție. Unghiul \widehat{hk} se numește *unghi cu vîrful în exteriorul unui cerc* dacă vîrful său aparține exteriorului cercului, iar semidreptele h și k sint tangente sau secante cercului.

Laturile unui unghi exterior determină pe cerc două arce care aparțin interiorului unghiului; acestea se numesc *arce cuprinse între laturile unghiului*.

Teorema 4. *Măsura unui unghi cu vîrful în exteriorul unui cerc este egală cu $\frac{1}{2}$ din valoarea absolută a diferenței măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale.*

Demonstrație. Fie \widehat{hk} un unghi cu vîrful în M , $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$.

Cazul I. Laturile h și k sunt secante cercului în punctele A, C respectiv B, D , $A \in h$, $C \in h$, $A \in (MC)$, $B \in k$, $D \in k$, $B \in (MD)$ (fig. III.25).

Unghiurile \widehat{CAD} și \widehat{ADB} fiind unghiuri inscrise în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $m(\widehat{CAD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CD})$, $m(\widehat{ADB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$. Unghiul \widehat{CAD} este un unghi exterior triunghiului \widehat{AMD} , deci $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ADM}) + m(\widehat{CMD})$, de unde rezultă că $m(\widehat{CMD}) = m(\widehat{CAD}) - m(\widehat{ADM}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB})]$.

Cazul II. Latura h este tangentă cercului în A , iar k este secantă cercului $\mathcal{C}(O, r)$, B și D fiind punctele comune cercului și secantei, $B \in (MD)$ (fig. III.26). Se alege un punct C , $C \in h$, $A \in (CM)$; \widehat{CAD} fiind unghi exterior triunghiului \widehat{AMD} , $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{ADM})$.

$$\begin{aligned} \text{Dar, } m(\widehat{ADM}) &= \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) \\ \text{și } m(\widehat{CAD}) &= \frac{1}{2} m(\widehat{AD}). \text{ Rezultă} \\ m(\widehat{AMD}) &= m(\widehat{CAD}) - m(\widehat{ADM}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m(\widehat{AD}) - \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) = \\ &= \frac{1}{2} [m(\widehat{AD}) - m(\widehat{AB})]. \end{aligned}$$

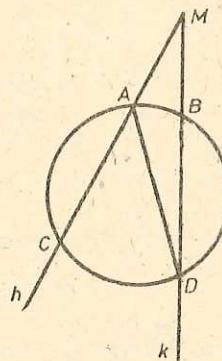


Fig. III.25

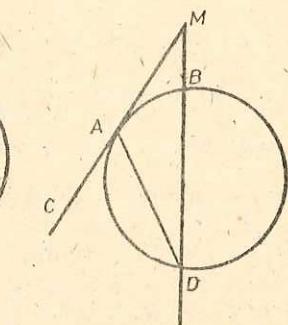


Fig. III.26

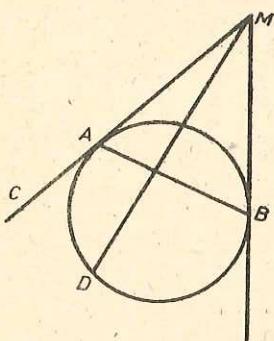


Fig. III.27

Cazul III. Laturile h și k sunt tangente cercului în punctele A și B , $A \in h$, $B \in k$ (fig. III.27). Se alege punctul C , $C \in h$, $A \in (CM)$ și un punct D al arcului mare \widehat{AB} . Unghiul \widehat{CAB} este exterior triunghiului ABM deci $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{MBA})$ și $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ADB})$, $m(\widehat{MBA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$.

Atunci

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{CAB}) - m(\widehat{MBA}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{ADB}) - m(\widehat{AB})].$$

Aplicație. Arc capabil de unghi dat

Se consideră punctele fixe A și B și un număr real α , $\alpha \in (0, 180)$. Să se determine locul geometric al punctelor M situate într-unul din semiplanele limitate de dreapta AB , pentru care $m(\widehat{AMB}) = \alpha^\circ$.

Rezolvare. Se consideră punctele, A , B , $A \neq B$ și S unul din semiplanele limitate de dreapta AB (fig. III. 28).

Fie semidreapta (AC) în semiplanul opus lui S astfel încât $m(\widehat{CAB}) = \alpha^\circ$ și O punctul de intersecție al mediatoarei segmentului (AB) cu perpendicularea prin A pe AC . Pe cercul de centru O și rază $r = OA$, punctele A și B determină arcul \widehat{AB} situat în semiplanul S . Se va arăta că *acest arc, fără capetele A , B este locul geometric căutat*. Fie M un punct al arcului \widehat{AB} din semiplanul S și N un punct al cercului care nu aparține semiplanului S . Atunci $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ANB})$. Deoarece AC este tangentă cercului ($AC \perp AO$), rezultă că $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ANB})$ deci $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha^\circ$.

Rămîne de arătat că pentru orice punct Q al semiplanului S nesituat pe arcul \widehat{AB} , $m(\widehat{AQB}) \neq \alpha^\circ$. Într-adevăr, dacă $Q \in \text{Int } \mathcal{O}(O, r) \cap S$, rezultă că $m(\widehat{AQB}) > \frac{1}{2} m(\widehat{ANB}) = \alpha^\circ$ deoarece \widehat{AQB} este un unghi cu vîrful în interiorul cercului, iar dacă $Q \in \text{Ext } \mathcal{O}(O, r) \cap S$ rezultă că $m(\widehat{AQB}) < \frac{1}{2} m(\widehat{ANB}) = \alpha^\circ$. Arcul deschis \widehat{AMB} din semiplanul S astfel construit este locul geometric

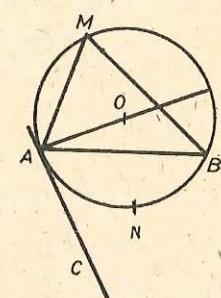


Fig. III.28

al punctelor M pentru care $m(\widehat{AMB}) = \alpha^\circ$ și se numește *arc capabil de α°* .

Arcul deschis \widehat{ANB} din semiplanul opus este arcul capabil de unghiul $180^\circ - \alpha^\circ$.

Exerciții

1. Pe cercul $C(O, r)$ se consideră coarda (AB) și unghiul \widehat{ABM} . Să se demonstreze că dacă $m(\widehat{ABM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$, arcul \widehat{AB} fiind inclus în $\text{Int } \widehat{ABM}$, atunci BM este tangentă cercului $C(O, r)$ în B .

2. Două cercuri se intersectează în M și N . Fie M' și M'' punctele diametral opuse lui M în cele două cercuri. Să se arate că M', N și M'' sunt coliniare.

3. Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare (AB) și (CD) . Fie M un punct al cercului situat pe arcul \widehat{BD} sau \widehat{AC} . Să se arate că $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{BMC}) = 90^\circ$.

4. Într-un cerc $C(O, r)$ se inscrie triunghiul ABC . Dacă $m(\widehat{B}) = 35^\circ$ și $m(\widehat{C}) = 43^\circ$, să se găsească măsurile unghiurilor \widehat{BAO} și \widehat{CAO} .

5. În triunghiul ABC inscris într-un cerc $C(O, r)$ se duc înălțimile corespunzătoare vîrfurile B și C și diametrul prin punctul A . Să se arate că cele două înălțimi și diametrul determină un triunghi asemenea cu ABC .

6. Pe un cerc se dau trei puncte oarecare A, B, C . Fie D mijlocul arcului \widehat{AB} , E mijlocul arcului \widehat{AC} ; dreapta DE intersectează pe AB în F și pe AC în G . Să se arate că $(AF) \equiv (AG)$.

7. Se dă triunghiul ABC inscris în cercul $C(O, r)$ și se notează cu D mijlocul arcuții \widehat{BC} . Să se demonstreze că măsura unghiului \widehat{ADO} este egală cu jumătatea diferenței dintre măsurile unghiurilor \widehat{ABC} și \widehat{ACB} .

8. Se dă un cerc $C(O, r)$ și un punct exterior A din care se duc tangențele AB și AC . Dreapta BO intersectează cercul a două oară în E . Să se arate că $\widehat{BAO} \equiv \widehat{ECF}$, unde F este intersecția dintre tangenta AC și dreapta BE .

9. În triunghiul ABC inscris într-un cerc $C(O, r)$ se duce perpendiculara din A pe BC care taie cercul a două oară în D . Notând cu E punctul diametral opus lui A , să se arate că unghiurile \widehat{BAC} și \widehat{DAE} au aceeași bisectoare.

10. Două cercuri se intersectează în A și B . O secantă variabilă trecând prin A taie cercurile a două oară respectiv în M și N . a) Să se arate că măsura unghiului \widehat{MBN} este constantă. b) Să se determine poziția secantei MN astfel ca distanța MN să fie maximă.

11. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc $C(O, r)$ care trec printr-un punct fix A .

12. Fie (AB) un diametru fix al unui cerc $C(O, r)$, iar M un punct variabil pe cerc. Se ia pe raza (OM) un punct P astfel ca OP să fie egală cu distanța de la M la dreapta AB . Să se afle locul geometric al punctului P .

13. Fie (AB) o coardă fixă a unui cerc, iar (PQ) o coardă variabilă ca poziție, dar de lungime fixă. Să se afle locurile geometrice ale punctelor $AP \cap BQ$ și $AQ \cap BP$.

14. (AB) fiind o coardă fixă, iar M un punct variabil al unui cerc, să se afle locul geometric al punctului P astfel încât $M \in (AP)$ și $(MP) \equiv (MB)$.

15*. Se dau un cerc, pe el un punct fix A , o dreaptă d și un punct fix $B \in d$. Prin A și B ducem un cerc variabil, care taie din nou cercul dat în P și dreapta dată în Q . Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

16. Fie ABC un triunghi, (CB') semidreapta opusă lui (CB) , iar $D \in \text{Int } \widehat{ACB'}$. Să se arate că dreapta CD este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC dacă și numai dacă $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$.

17. Fie (AB) un diametru al unui cerc, (AC) o coardă, $D \in (AB)$, $E = \text{pr}_{ACD}$ și F unul dintre punctele de intersecție ale dreptei DE cu cercul dat. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor FCE și FBD sunt tangente.

18. Triunghiul MAB inscris în cercul dat $\mathcal{C}(O, r)$ are vîrfurile A și B fixe, iar vîrful M variabil pe cerc. Să se afle locurile geometrice descrise de: a) ortocentrul, b) centrul cercului inscris și c) centrul de greutate al triunghiului MAB .

§ 4. Poligoane inscrise și circumscrise

Definiție. Un poligon se numește *înscris într-un cerc* dacă vîrfurile poligonului aparțin cercului. În acest caz cercul se numește *circumscris poligonului*.

Un poligon se numește *circumscris unui cerc* dacă laturile sale sunt tangente la cerc. În acest caz, cercul se numește *înscris în poligon*.

Fiind dat un triunghi ABC , există întotdeauna un cerc unic circumscris triunghiului și un cerc unic inscris în triunghi. Centrul cercului circumscris triunghiului este punctul de concurență al mediatoarelor laturilor triunghiului și centrul cercului inscris în triunghi este punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor triunghiului. În cazul poligoanelor cu mai mult de trei laturi nu întotdeauna există cerc inscris sau circumscris.

Teorema 1. Un poligon convex poate fi inseris într-un cerc dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente și reciproc, dacă un poligon convex este inseris într-un cerc, atunci mediatoarele laturilor sale sunt concurente.

Demonstrație. a) Se consideră poligonul $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ și se presupune că mediatoarele laturilor sale au un punct comun O (fig. III.29). Atunci pe baza proprietății punctelor mediatoarei rezultă că $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$. Deci vîrfurile A_1, A_2, \dots, A_n aparțin unui cerc de centru O și rază $r = OA_1$.

b) Dacă poligonul $A_1 A_2 \dots A_n$ are vîrfurile pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ atunci $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n = r$, deci O se află pe mediatoarele segmentelor $(A_1 A_2), (A_2 A_3), \dots, (A_{n-1} A_n), (A_n A_1)$.

Un poligon care poate fi inseris într-un cerc se numește poligon *inscriptibil*.

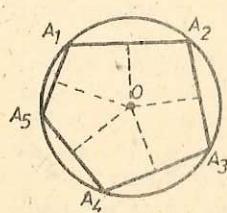


Fig. III.29

Teorema 2. Un poligon convex poate fi circumscris unui cerc dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente și reciproce, dacă un poligon convex este circumscris unui cerc atunci bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.

Demonstrație. a) Se consideră poligonul $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ și O punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor.

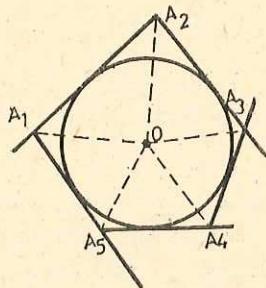


Fig. III.36.

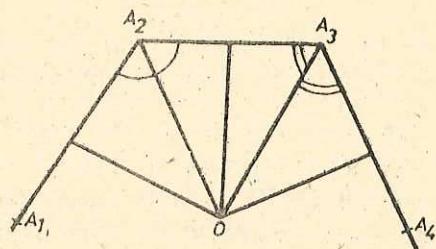


Fig. III.34

rilor sale (fig. III.30). Atunci pe baza proprietății punctelor bisectoarei rezultă că $d(O, A_1A_2) = d(O, A_2A_3) = \dots = d(O, A_nA_1)$. Cercul de centru O și rază $r = d(O, A_1A_2)$ este tangent fiecărei laturi a poligonului.
b) Dacă poligonul $A_1A_2A_3\dots A_n$ are laturile tangente cercului $\mathcal{C}(O, r)$ atunci $d(O, A_1A_2) = d(O, A_2A_3) = \dots = d(O, A_nA_1) = r$ deci O se află pe bisectoarele unghiurilor $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \dots, \hat{A}_n$.

Definiție. Un poligon convex se numește *poligon regulat* dacă toate laturile și toate unghiiurile sunt congruente.

Teorema 3. *Orice poligon regulat poate fi inseris într-un cerc și poate fi circumseris unui cerc.*

Demonstrație. a) Fie poligonul regulat $A_1A_2A_3\dots A_n$ (fig. III.31). Mediatoarele laturilor (A_1A_2) și (A_2A_3) sunt concurente într-un punct O . Triunghiurile OA_1A_2 și OA_2A_3 sunt isoscele și congruente, deci $\widehat{OA_1A_2} = \widehat{OA_2A_1} = \widehat{OA_2A_3} = \widehat{A_2A_3O}$. Deoarece $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \dots = \hat{A}_n$ rezultă că $\widehat{A_2A_3O} = \widehat{OA_3A_4}$, deci $\triangle OA_3A_4 \equiv \triangle OA_3A_2$ (L.U.L.). Rezultă că OA_3A_4 este isoscel, $(OA_3) = (OA_4)$, deci O aparține și mediatoarei segmentului (A_3A_4) . În mod analog se arată succesiv că triunghiurile OA_4A_5, \dots, OA_nA_1 sunt isoscele și congruente, deci O aparține mediatoarelor laturilor poligonului. Mediatoarele fiind concurente, conform teoremei 1, poligonul $A_1A_2A_3\dots A_n$ poate fi inseris într-un cerc.

b) Din demonstrația de la punctul a) rezultă că $(A_1O), (A_2O), (A_3O), \dots, (A_nO)$ sunt bisectoarele unghiurilor $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \dots, \hat{A}_n$. O fiind deci punctul lor comun, conform teoremei 2 poligonul $A_1A_2A_3\dots A_n$ poate fi circumseris unui cerc.

Se observă că în cazul poligoanelor regulate centrul cercului inseris coincide cu centrul cercului circumseris și se numește *centrul* poligonului. Raza cercului inseris într-un poligon regulat se mai numește și *apotema* poligonului regulat.

Patrulater inscriptibile

Stim că un patrulater inscriptibil este convex (§ 1, exer. 14). În cazul patrulaterelor convexe pot fi stabilite condiții de inscriptibilitate caracteristice.

Teorema 4. Dacă un patrulater este inscriptibil atunci orice unghi determinat de o diagonală și o latură este congruent cu unghial determinat de cealaltă diagonală cu latura opusă primei laturi și reciproc dacă un patrulater este convex și un unghi determinat de o latură și o diagonală este congruent cu unghialul determinat de latura opusă primei laturi și cealaltă diagonală, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Demonstrație. a) Fie patrulaterul $ABCD$ inscriptibil și $\mathcal{C}(O, r)$ cercul circumscris acestuia (fig. III.32); atunci $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DBC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{DC})$.

b) Fie patrulaterul $ABCD$ convex și $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD})$ (fig. III.33). Atunci ținând seama că B și C se află în același semiplan limitat de AD , din proprietatea arcului capabil de unghi dat, rezultă că punctele B și C aparțin unui cerc în care (AD) este coardă.

Teorema 5. Dacă un patrulater este inscriptibil atunci suma măsurilor a două unghiuri opuse este 180° și reciproc dacă suma măsurilor a două unghiuri opuse dintr-un patrulater convex este 180° , atunci patrulaterul este inscriptibil.

Demonstrația acestei teoreme se lasă ca exercițiu.

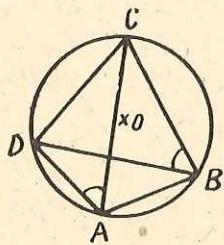


Fig. III.32

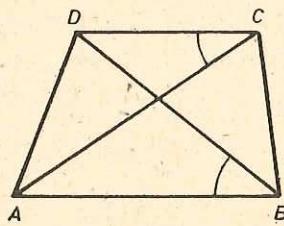


Fig. III.33

Exerciții

1. Fiind dat triunghiul ABC , să se arate că există patru cercuri tangente dreptelor AB , BC , CA (un cerc inscris și trei cercuri extinscise).
2. Să se calculeze apotema și lungimea laturii unui poligon regulat cu n laturi, inscris în cercul de rază r pentru $n = 3, 4, 6, 8$.
3. Să se arate că orice dreptunghi este inscriptibil.
4. Să se arate că dacă în trapezul isoscel $ABCD$ poate fi inscris un cerc, atunci distanța dintre cele două baze este medie proporțională între lungimile bazelor.
5. Să se arate că dacă un trapez este inscriptibil, atunci el este isoscel.
6. Să se determine măsura arcului mic determinat de o latură a unui poligon regulat cu n laturi inscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

7*. Fie un cerc $C(O, r)$. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 2$ există un poligon regulat cu n laturi înscris în cerc și un poligon regulat cu n laturi circumscris cercului.

Indicație. Se utilizează axioma de construcție a unghiurilor și faptul că măsura unghiului la centru ale cărui laturi trec prin două vîrfuri consecutive ale poligonului este $\alpha = \frac{2 \cdot 180}{n}$.

8*. Se consideră un cerc $C(O, r)$ și două poligoane regulate cu n laturi, unul înscris și celălalt circumscris cercului. Să se arate că dacă se notează cu l_n și L_n lungimile laturilor celor două poligoane, atunci

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}.$$

9. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil o bisectoare interioară se intersecțează cu bisectoarea exterioară a unghiului opus, pe cercul circumscris patrulaterului.

Indicație. Se arată că se obține un patrulater inscriptibil.

10. Prin punctele comune A și B a două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ se duc secantele arbitrar MAN și PBQ , $M \in C(O_1, r_1)$ și $P \in C(O_1, r_1)$. Să se demonstreze că $MP \parallel NQ$.

11. În cercul $C(O, r)$ se duce diametrul (AB) și tangenta în A , pe care se iau două puncte oarecare C și D , A separă C și D . Dreptele CB și DB intersecțează cercul $C(O, r)$ în E și F . Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil. Ce devine acest patrulater în cazul cind $(AC) \equiv (AD)$.

Indicație. Se arată că un unghi interior al patrulaterului este congruent cu unghiul opus exterior; în cazul particular se obține trapez isoscel.

12*. Să se arate că un paralelogram este inscriptibil dacă și numai dacă este un dreptunghi.

13. Fie A' , B' , C' mijloacele laturilor unui triunghi ABC , iar D piciorul unei înălțimi ($D = \text{pr}_{BC}A$). Să se arate că punctele A' , B' , C' și D sint pe un cerc.

14. Fie ABC un triunghi, A' , B' mijloacele laturilor (BC) și (AC) , D piciorul înălțimii duse din A , H ortocentrul, iar A_1 mijlocul segmentului (AH) . Să se arate că punctele A' , B' , A_1 și D sunt situate pe un cerc în fiecare din următoarele cazuri posibile: a) $H \in (AD)$, b) $H = D$, c) $A \in (HD)$.

15. Fie ABC un triunghi, D , E , F picioarele înălțimilor, A' , B' , C' mijloacele laturilor, H ortocentrul, iar A_1 , B_1 , C_1 mijloacele segmentelor (AH) , (BH) , (CH) . Să se arate că punctele D , E , F , A' , B' , C' , A_1 , B_1 , C_1 sunt pe un cerc (numit „cercul lui Euler“ sau „cercul celor nouă puncte“ al triunghiului ABC).

Indicație. Se vor folosi exercițiile 13 și 14.

16*. Folosind notațiile exercițiului 15 să se arate că dreptele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ sunt concurențe.

17. Fie ABC un triunghi și D , E , F picioarele înălțimilor. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AEF , BFD , CDE au un punct comun.

18. Se consideră un patrulater convex având diagonalele perpendiculare, care se intersecțează în punctul O . Să se arate că proiecțiile lui O pe laturi sunt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

19. Fie \widehat{AOB} un unghi drept, M și N puncte variabile respectiv pe (OA) și (OB) , iar $MNPQ$ un pătrat astfel ca MN să se separe punctele O și P . Să se afle locul geometric al centrului pătratului.

20*. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $D \in (BC)$ un punct fix. Paralela printr-o latură AB tăie AC în E . Fie M un punct variabil pe segmentul (AE) și $\{N\} = AB \cap DM$. Cerculuri circumscrise triunghiurilor CDM și AMN se intersecțează a două oară în P . Să se afle locul geometric al punctului P .

21*. Fie ABC un triunghi și D, E, F picioarele înălțimilor. Să se arate: a) triunghiurile AEF, DEC și DBF sunt asemenea cu triunghiul ABC . b) Bisectoarele triunghiului DEF (numit „triunghi ortic”) coincid cu înălțimile triunghiului ABC .

22*. Se ia un punct M pe cercul circumscris unui triunghi ascuțitunghic ABC . Să se arate că proiecțiile P, Q, R ale punctului M pe BC, CA, AB sunt trei puncte situate pe o dreaptă („dreapta lui Simson”). Să se considere apoi cazul triunghiului obtuzunghic.

§ 5. Poziția relativă a două cercuri

Fiind date două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$ se pune problema dacă există puncte comune cercurilor și cîte sint acestea. Din ex. 3 § 1 rezultă că două cercuri distințe nu pot avea decit cel mult două puncte comune. Stabilirea exactă a numărului de puncte comune a două cercuri se face prin următoarea teoremă:

Teoremă. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$ și $d = O_1O_2$.

Dacă 1) $d > r_1 + r_2$, cercurile nu au puncte comune

2) $d = r_1 + r_2$, cercurile au exact un punct comun

3) $d < r_1 + r_2$ și $d > |r_2 - r_1|$, cercurile au exact două puncte comune

4) $d = |r_1 - r_2|$, cercurile au exact un punct comun

5) $d < |r_1 - r_2|$, cercurile nu au puncte comune.

Demonstrație. 1. Presupunând că M este un punct comun celor două cercuri adică $O_1M = r_1$ și $O_2M = r_2$, are loc $O_1O_2 \leq O_1M + O_2M$ sau $d \leq r_1 + r_2$, ceea ce contrazice ipoteza (fig. III.34).

2. Pe semidreapta $(O_1O_2$ se construiește punctul unic M , astfel încât $O_1M = r_1$ (fig. III.35). Deoarece $d > r_1$, rezultă că $M \in (O_1O_2)$, deci $O_2M = d - r_1 = r_2$; aşadar M aparține celor două cercuri. Pentru orice alt punct Q , $Q \notin (O_1O_2)$, are loc inegalitatea: $O_1Q + O_2Q > O_1O_2 = r_1 + r_2$, deci Q nu poate fi comun celor două cercuri.

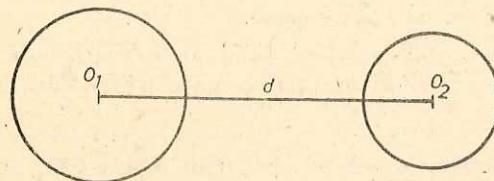


Fig. III.34

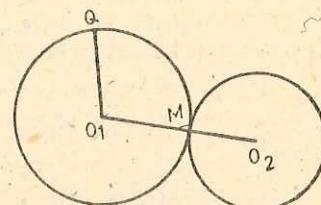


Fig. III.35

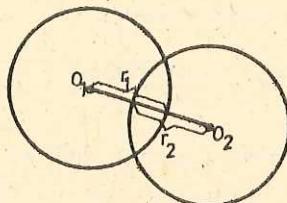


Fig. III.36

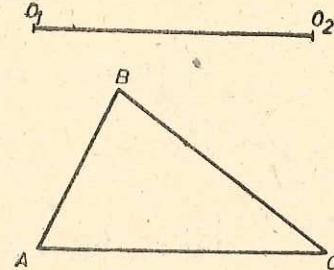


Fig. III.37

3. Se presupune că $r_2 \geq r_1$ și se va arăta că numerele r_1, r_2, d pot fi lungimile laturilor unui triunghi (fig. III.36). Din $d > |r_2 - r_1|$ rezultă $d > r_2 - r_1$ adică $r_2 < d + r_1$. Inegalitatea $d < r_1 + r_2$ este verificată prin ipoteză, iar $r_1 < r_2 + d$ rezultă din presupunerea $r_2 \geq r_1$. Din § 9 cap. II, aplicații, rezultă că există un triunghi ABC cu $AB = r_1$, $BC = r_2$, $AC = d = O_1O_2$ (fig. III.37). Într-unul din semiplanele determinate de dreapta O_1O_2 se construiesc semidreptele $(O_1M$ și $(O_2N$ astfel încit $\widehat{O_2O_1M} = \widehat{CAB}$ și $\widehat{O_1O_2N} = \widehat{BCA}$. Se notează cu P punctul de intersecție al semidreptelor $(O_1M$ și $(O_2N$. $\triangle O_1O_2P \equiv \triangle ACB$ deci $O_1P = r_1$ și $O_2P = r_2$. Fie P' simetricul lui P față de O_1O_2 .

Atunci $O_1P' = O_1P = r_1$, deci P și P' aparțin cercului $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $O_2P' = O_2P = r_2$, deci P și P' aparțin cercului $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Dacă $r_1 > r_2$ se face un raționament analog.

4. Se presupune $r_2 > r_1$, deci $r_2 = d + r_1$ (fig. III.38). Pe semidreapta $(O_2O_1$ există punctul unic M astfel încit $O_2M = r_2$. Atunci $O_1 \in (O_2M)$ și $O_1M = r_1$, deci M aparține celor două cercuri. Să arătăm că cercurile nu au nici un alt punct comun. Dacă M' este diametral opus lui M în cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, atunci $M'O_1 = r_2 + d > r_1$ deci pe dreapta O_1O_2 nu poate exista alt punct comun celor două cercuri. Fie P un punct pe cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $P \notin O_1O_2$. Atunci $O_1P > O_2P - O_1O_2 = r_2 - d = r_1$, deci P nu poate aparține și cercului $\mathcal{C}(O_1, r_1)$.

5. Presupunind că M este un punct comun celor două cercuri (fig. III.39), adică $O_1M = r_1$ și $O_2M = r_2$, are loc

$$O_1O_2 \geq |O_1M - O_2M|$$

sau $d \geq |r_1 - r_2|$, ceea ce contrazice ipoteza.

Definiție. Două cercuri se numesc *tangente* dacă au exact un punct comun și se numesc *secante* dacă au două puncte distincte comune.

În teorema precedentă s-a studiat cazul cercurilor cu centre diferite. Dacă centrele a două cercuri coincid, cercurile se vor numi *concentrice*. Este ușor de verificat că două cercuri concentrice sau coincid sau nu au nici un punct comun.

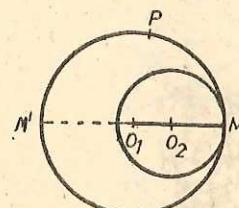


Fig. III.38

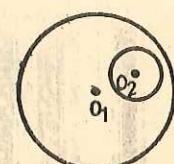


Fig. III.39

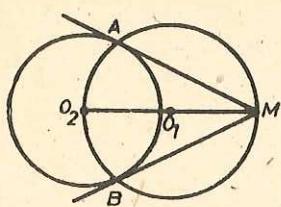


Fig. III.40

Demonstrație. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și un punct $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$. Fie O_1 mijlocul segmentului (OM) și $r_1 = \frac{OM}{2}$. Deoarece $O_1O = r_1$ și $OM > r$ rezultă că r, r_1, OO_1 verifică condițiile de la punctul 3 al teoremei, deci cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ sunt secante în punctele A și B (fig. III.40), $m(\widehat{OAM}) = m(\widehat{OBM}) = 90^\circ$ fiind inscrise în semicercurile \widehat{OAM} și \widehat{OBM} ; rezultă că $OA \perp AM$ și $OB \perp BM$, deci AM , și BM , sunt tangente din M la cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

Arătați că nu există alte tangente din M la cercul $\mathcal{C}(O, r)$!

2. Puterea unui punct față de un cerc

Teorema 1. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$. Atunci pentru orice coardă (AB) care conține punctul M , produsul $AM \cdot BM$ este constant.

Demonstrație. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră coardele (AB) și (CD) care conțin punctul M (fig. III.41). $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ deoarece $CMA \equiv \widehat{BMD}$ (opuse la virf) și $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CDB}$ (cuprind același arc între laturi).

Atunci $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$ și $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Valoarea constantă a acestui produs înmulțită cu (-1) se notează $\wp(M)$ și se numește *puterea punctului* M , interior cercului, față de cerc.

Teorema 2. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$. Atunci pentru orice secantă AB , $A \in \mathcal{C}(O, r)$, $B \in \mathcal{C}(O, r)$ care conține punctul M , produsul $MA \cdot MB$ este constant.

Demonstrație. Se consideră secantele AB și CD care conțin punctul M (fig. III.42), A, B, C, D fiind pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $A \in (BM)$ și $C \in (DM)$.

$\triangle MBC \sim \triangle MDA$ deoarece $\widehat{BMC} \equiv \widehat{DMA}$ și $\widehat{MBC} \equiv \widehat{MDA}$ (cuprind

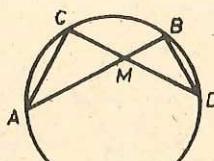


Fig. III.41

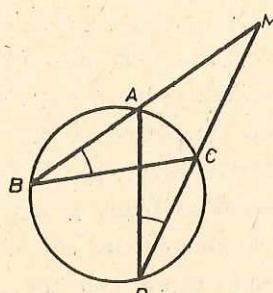


Fig. III.42

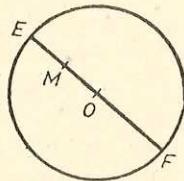


Fig. III.43

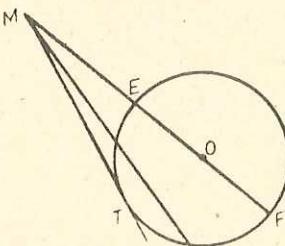


Fig. III.44

același arc între laturi). Atunci $\frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MA}$, deci $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Valoarea constantă a acestui produs se notează cu $\rho(M)$ și se numește *puterea punctului* M , exterior cercului, față de cerc.

Se va da în continuare expresia puterii unui punct față de cerc cind se cunoaște raza cercului r și distanța de la punct la centrul cercului.

a) $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.43). Fie (EF) diametrul prin M . Atunci $\rho(M) = -ME \cdot MF = -[r - OM] \cdot [r + OM] = -(r^2 - OM^2) = OM^2 - r^2$.

b) $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.44). (EF) fiind un diametru și $E \in (MF)$, are loc: $\rho(M) = ME \cdot MF = [OM - r] \cdot [OM + r] = OM^2 - r^2$.

Se observă că dacă MT este tangentă la cerc, T fiind punctul de tangență, $TM^2 = OM^2 - r^2 = \rho(M)$.

Observație. În mod convențional, dacă punctul M aparține cercului $\mathcal{C}(O, r)$, $\rho(M) = 0$.

În concluzie, oricare ar fi punctul M din planul cercului $\mathcal{C}(O, r)$, avem

$$\rho(M) = OM^2 - r^2.$$

3. Axa radicală a două cercuri

Se consideră două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$ și se pune problema să se găsească locul geometric al punctelor care au puteri egale față de cele două cercuri (fig. III.45). Această revine la găsirea punctelor M , pentru care

$$O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2.$$

Dacă $r_1 \geq r_2$, atunci se poate nota $a^2 = r_1^2 - r_2^2$ și condiția se scrie

$$O_1M^2 - O_2M^2 = a^2.$$

Deci trebuie găsit locul geometric al punctelor pentru care diferența patratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă. În exercițiul recapitulativ

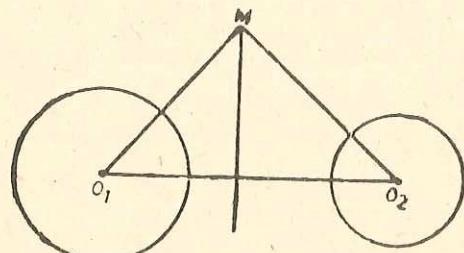


Fig. III.45

nr. 16, cap. II s-a rezolvat această problemă și s-a găsit că locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2 .

Dreapta astfel determinată se numește *axa radicală* a cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$.

4. Construcții geometrice

Se consideră următoarele operații numite construcții geometrice fundamentale:

- trasarea unei drepte cu rigla cînd se cunosc două puncte distincte care îi aparțin;
- determinarea punctului de intersecție a două drepte date;
- trasarea cu compasul a unui cerc cînd este dat centrul și un segment a cărui lungime este raza;
- determinarea punctelor de intersecție dintre o dreaptă și un cerc;
- determinarea punctelor de intersecție a două cercuri.

Prin construcție geometrică sau construcție cu rigla (negrădată) și compasul se va înțelege o succesiune de construcții geometrice fundamentale.

În clasele precedente s-au învățat diferite construcții geometrice.

O altă construcție geometrică, la care se aplică puterea punctului, este determinarea unui segment a cărui lungime este medie proporțională a două segmente date.

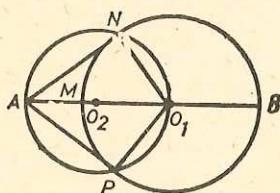


Fig. III.46

Fie segmentele (AB) și (CD) cu $AB = a$, $CD = b$, $a > b$ (fig. III.46). Să se construiască un segment de lungime $\sqrt{a \cdot b}$. Pe segmentul (AB) se construiește punctul M , astfel ca $AM = b$. Se construiesc în continuare punctele O_1 , mijlocul segmentului (MB) , și O_2 , mijlocul segmentului (AO_1) . Se notează cu N și P punctele de intersecție ale cercurilor cu centrele în O_1 și O_2 de raze O_1B , respectiv O_2A . Triunghiul ANO_1 este dreptunghic de unde rezultă că AN este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O_1, O_1B)$ și deci $AN^2 = AM \cdot AB = a \cdot b$. Analog, $AP^2 = a \cdot b$.

Exerciții

1. Două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ au razele $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $O_1O_2 = d$. Să se studieze pozițiile relative ale celor două cercuri după valorile lui d .
2. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 3$, și punctul O' , $OO' = 2$. Fie cercul $\mathcal{C}(O', x)$. Să se studieze pozițiile relative ale celor două cercuri după valorile lui x .
3. Fiind date cercurile $\mathcal{C}(O_1, r)$, $\mathcal{C}(O_2, 5)$ și $O_1O_2 = 2(r - 5)$, să se discute după valoările lui r pozițiile relative ale celor două cercuri.
4. Să se arate că două cercuri tangente au o tangentă comună în punctul comun.
5. Să se arate că două cercuri cu interioarele disjuncte au tangentă comună.

6. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Să se arate că dacă există punctele $A \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $B \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$ astfel încit $A \in \text{Int } \mathcal{C}(O_2, r_2)$ și $B \in \text{Ext } \mathcal{C}(O_2, r_2)$, atunci cercurile sunt secante.

7. Să se arate că, dacă cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sunt tangente, axa lor radicală este tangentă comună, iar dacă cercurile sunt secante, axa lor radicală este dreapta determinată de punctele comune celor două cercuri.

8*. Să se construiască tangentele comune la două cercuri date.

9*. Să se construiască tangentele la un cerc, paralele cu o dreaptă dată.

10*. Să se construiască cercul care trece prin două puncte date și este tangent unei drepte date.

11*. Să se construiască cercul care trece prin punctele A și B și este tangent unui cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$.

12*. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la două drepte date.

13. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ în care este inscris triunghiul isoscel ABC ($\{AB\} = \{AC\}$). Prin A se duce o secantă care intersectează BC în E și cercul în F . Să se arate că AB este tangentă la cercul circumscris triunghiului BEF .

14. Se dă cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și punctul exterior M a cărui distanță la centrul cercului este $2r$. Din M se duce tangenta MN la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și se prelungeste (MO) pînă ce intersectează cercul în P . Tangenta în P la cerc intersectează tangenta MN în Q . Să se arate că $2PQ = MQ$ și $QM = 2\sqrt{3}r$, iar triunghiul PQN este echilateral.

15. Fiind date punctele A , C și $B \in (AC)$, ducem tangenta CT la cercul de diametru (AB) . Cercul cu centru C și rază (CT) intersectează AB în M și N . Să se arate că avem relația $AM \cdot AN = AB \cdot AC$.

Indicație. Se scrie puterea punctului C față de cercul de diametru (AB) și apoi puterea punctului A față de cercul cu diametru (MN) sub forma $AM \cdot AN = (AC - CT) \cdot (AC + CT)$.

16*. O dreaptă arbitrară d tăie două cercuri în punctele A , B , C , D și axa lor radicală în O . Să se arate că avem relațiile:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB}.$$

§ 6. Lungimea cercului

Lungimea unui segment a fost considerată ca noțiune fundamentală, însă lungimea unui cerc sau a unui arc de cerc sunt noțiuni care se definesc.

Definiție. Lungimea unui cerc este un număr real pozitiv mai mare decît perimetrul oricărui poligon convex inscris în cerc și mai mic decît perimetrul oricărui poligon convex circumscris cercului.

Admitem că orice cerc are lungime.

O proprietate importantă a lungimii cercului este dată de:

Teorema 1. Raportul dintre lungimea unui cerc și lungimea razei este același pentru toate cercurile.

Vom accepta fără demonstrație această teoremă întrucât necesită cunoștințe suplimentare.

Numărul care reprezintă raportul dintre lungimea unui cerc oarecare și lungimea diametrului său se notează cu π . Acesta este un număr irațional și o aproximare a sa este $\pi \approx 3,1415$.

Cu această notație rezultă că lungimea unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ notată l_{cerc} este:

$$l_{\text{cerc}} = 2\pi r.$$

Pentru a defini lungimea unui arc al unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se poate proceda în mod analog considerindu-se linii poligonale inscrise în cerc și având aceleasi extremități cu arcul.

Calcularea lungimii unui arc se face îninț cont de faptul că arcele congruente au lungimi egale și dacă un arc este reuniunea a două arce care au un singur punct comun, atunci lungimea sa este suma lungimilor celor două arce. În acest mod va rezulta (prin analogie cu demonstrația teoremei lui Thales) că:

a) lungimea unui arc \widehat{AB} pentru care $m(\widehat{AB}) = p \cdot \frac{180}{n}$, $p, n \in \mathbb{N}^*$ este

$$l_{\widehat{AB}} = p \cdot \frac{\pi r}{n};$$

b) dacă $m(\widehat{AB}) = \alpha^\circ$, $\alpha \in [0, 180]$, atunci $l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r \alpha}{180}$;

c) lungimea unui arc mare \widehat{AB} pentru care $m(\widehat{AB}) = 360^\circ - \alpha^\circ$ este

$$l_{\widehat{AB}} = 2\pi r - \frac{\pi r}{180} \alpha = \frac{\pi r}{180} (360 - \alpha).$$

Astfel, rezultă:

Teorema 2. Pentru orice arc \widehat{AB} , $l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r}{180} \cdot m(\widehat{AB})$.

Din această teoremă rezultă că raportul dintre lungimea unui arc și raza cercului nu depinde decât de măsura arcului respectiv. Aceasta face posibilă introducerea unei noi măsuri pentru arce și unghiuri.

Definiție. Măsura în radiani a unui arc \widehat{AB} al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, notată $\mu(\widehat{AB})$ este

$$\mu(\widehat{AB}) = \frac{l_{\widehat{AB}}}{r} = \frac{\pi}{180} m(\widehat{AB})$$

Măsura în radiani a unui unghi \widehat{hk} este lungimea arcului de pe cercul de rază 1 și cu centrul în vîrful unghiului, aparținând interiorului unghiului.

Se observă că, de fapt, măsura în radiani a unui unghi este măsura în radiani a unui arc de pe un cerc de rază r cu centrul în vîrful unghiului, aparținând interiorului unghiului. Reamintim că măsura notată $m(\widehat{hk})$ este măsura în grade a unghiului.

Exerciții

1. Să se afle măsura în radiani a unghiurilor de 30° , 45° , 20° , 12° , 135° .

2. Să se calculeze o valoare aproximativă a lui π cu ajutorul unui octogon regulat inscris într-un cerc.

3. Fie cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ și patrulaterele convexe $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, inscrise respectiv în cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$. Să se arate că dacă patrulaterele sunt asemenea, atunci

$$\frac{\text{Perimetru} A_1B_1C_1D_1}{r_1} = \frac{\text{Perimetru} A_2B_2C_2D_2}{r_2}.$$

4. Să se afle lungimea unui arc cuprins între laturile unui unghi la centru cu măsura de 1 radian și măsura în grade a acestui unghi. (Se consideră cercul de rază 1.)

5. Fie cercurile $C(O_1, r_1)$, $C(O_2, r_2)$ pentru care $O_1O_2 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{3}$.

Să se arate că sunt secante și să se afle perimetrul figuri formate din cele două arce mici determinate de punctele comune celor două cercuri.

6. Fie (AB) un diametru al cercului $C(O, r)$ și M, N două puncte distincte, $M \in (AB)$, $N \in (AB)$ și cercurile $C(M, r_1)$, $C(O, r_1)$, $C(N, r_1)$, astfel încât perechile de cercuri $C(M, r_1)$, $C(O, r_1)$ și $C(O, r_1)$, $C(N, r_1)$ să fie tangente exterioare, iar cercurile $C(M, r_1)$ și $C(N, r_1)$ să fie tangente interior cu cercul $C(O, r)$. Să se calculeze suma lungimilor cercurilor $C(M, r_1)$, $C(O, r_1)$, $C(N, r_1)$ în funcție de r . Generalizare.

Exerciții recapitulative

1. Să se arate că lungimea segmentului determinat de punctele de tangență pe tangentă comună la două cercuri tangente exterioare este media geometrică a diametrelor celor două cercuri.

2. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi isoscel ABC , în care $AB = AC = 20$, $BC = 24$.

3*. Distanța de la un punct oarecare al unui cerc la o coardă dată este media geometrică a distanțelor de la același punct la tangentele duse la cerc prin extremitățile coardei.

4. Fie două puncte fixe A, B situate pe diametrul unui semicerc și egal depărtate de centru, iar M și N două puncte variabile pe semicerc, astfel ca $AM \parallel BN$. Să se demonstreze că produsul $AM \cdot BN$ este constant.

5. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC , iar A', B', C' picioarele înălțimilor. Să se arate că: $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.

6. Pe laturile unui hexagon regulat se construiesc în exterior pătrate care au cîte o latură comună cu hexagonul. Să se arate că virfurile acestor pătrate, diferite de virfurile hexagonului, formează un dodecagon regulat.

7. Dacă trei cercuri sunt două cîte două tangente exterioare, care este raportul între suma lungimilor acestor cercuri și perimetrul triunghiului format de centrele lor?

8. Considerăm trapezul $ABCD$ cu laturile paralele (AB) și (CD) ; fie E intersecția dreptei AD cu cercul circumscris triunghiului BCD și F intersecția dreptei AD cu paralela din C la BE . Presupunind că $D \in (AE)$, să se arate că

1) Patrulaterul $ABCF$ este inscriptibil

2) BC este medie geometrică între AD și EF .

9. Se dau cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangență T se duc două drepte arbitrară ATC și DTB care intersectează cercul $C(O_1, r_1)$ în A și D și cercul $C(O_2, r_2)$ în C și B . Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez

10*. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $O \in \text{Int } ABC$; se duce înălțimea AD și diametrul prin A . Se proiectează vîrfurile B și C pe acest diametru în E și F și se intersectează DE și DF cu AC și AB , respectiv, în G și H . Să se demonstreze că punctele A, H, D, G sunt conciclice.

11. Fie cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ secante în A și B . Prin punctele A și B se duc două secante paralele CAD și EBF care intersectează cele două cercuri, respectiv, în punctele C, D și E, F . Să se demonstreze că patrulaterul $CDFE$ este paralelogram.

12. Se dau două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ trecind prin centrul O_1 . Tangentele comune la aceste cercuri au punctele de contact cu cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în A și B . Să se demonstreze că dreapta AB este tangentă cercului $\mathcal{C}(O_1, r_1)$.

13. Se consideră două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ tangente exterioare în punctul T . Tangenta exterioară comună AB se intersectează cu tangentă în T la cele două cercuri în punctul C , iar cu linia centrelor O_1O_2 în punctul M .

1) Să se calculeze lungimea segmentelor (AB) și (TC) în funcție de r_1 și r_2 .

2) Să se arate că dreptele AT și BT sunt perpendiculare.

3) Să se calculeze lungimea segmentului (MO_1) și măsura unghiului \widehat{OMA} în cazul particular $r_1 = a$, $r_2 = 3a$.

§ 1. Coordonate în plan

Alegem în plan dreptele perpendiculare OA și OB , $OA = 1$, $OB = 1$ (fig. IV. 1) și considerăm cîte un sistem de coordonate pe OA , respectiv, OB astfel ca $x_O = 0$, $x_A > 0$ și $y_O = 0$, $y_B > 0$ (notăm coordonatele pe OA cu x și pe OB cu y). Cum $OA = 1$, $OB = 1$, rezultă $x_A = 1$, $y_B = 1$. Dacă P este un punct din plan, există o singură dreaptă paralelă cu OB care conține punctul P și care intersectează dreapta OA în M . De asemenea, există o singură dreaptă paralelă cu OA , care conține punctul P și care intersectează pe OB în N . Dacă $x = x_M$ și $y = y_N$, atunci punctului P i se asociază în acest fel o pereche ordonată unică de numere reale (x, y) . Numărul x se numește *abscisa* punctului P , iar numărul y se numește *ordonata* lui P . Axa OA o numim *axa absciselor*, iar axa OB *axa ordonatelor*.

Fiind date numerele reale x și y , conform axiomei riglei numărului x i se asociază un punct unic M pe OA cu $x_M = x$ și numărului y i se asociază un singur punct N pe OB cu $y_N = y$. Ducind prin M o paralelă la OB și prin N o paralelă la OA , cele două paralele se intersectează în punctul unic P . În acest fel, perechii de numere reale (x, y) i se asociază punctul unic P .

Constatăm deci că există o funcție bijectivă definită pe mulțimea punctelor planului și cu valori în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct P din plan o pereche ordonată de numere reale (x, y) .

Funcția descrisă mai sus ne definește așa-numitul *sistem de coordonate* în plan.

Punctele O , A , B determină sistemul de coordonate în mod unic. Tripletul ordonat

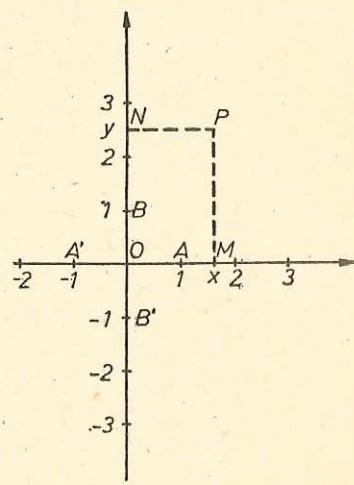


Fig. IV. 1

(O, A, B) se numește *reperul sistemului de coordonate*. Reperul determină în mod unic sistemul de coordonate.

Fie A' , B' cîte un punct pe semidreptele opuse lui $(OA$, respectiv, $(OB$. Mulțimile de puncte $\text{Int } \widehat{AOB}$, $\text{Int } \widehat{BOA}'$, $\text{Int } \widehat{A'OB'}$, $\text{Int } \widehat{B'OA}$ se numesc, respectiv, *cadranele I, II, III, IV*.

$(x, y) \in \text{Cadranele I} \Leftrightarrow x > 0 \text{ și } y > 0,$

$(x, y) \in \text{Cadranele II} \Leftrightarrow x < 0 \text{ și } y > 0,$

$(x, y) \in \text{Cadranele III} \Leftrightarrow x < 0 \text{ și } y < 0,$

$(x, y) \in \text{Cadranele IV} \Leftrightarrow x > 0 \text{ și } y < 0.$

Exemplu. Pe figura IV. 2 avem $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$, $B'(0, -1)$, $C(3, 2)$, $D(-2, 3)$, $E(0, -3)$, $F(-2, -1)$, $G(2, -1)$.

Exerciții

1. Figurați punctele $M(3, 5)$, $N(-1, 4)$, $P(2, -2)$, $Q(0, 4)$, $R(-6, 0)$.

2. Aflați locul geometric al punctelor $M(x, 2)$, cînd x ia toate valorile din \mathbf{R} .

3. Aflați locul geometric al punctelor care au abscisa egală cu 5.

Teorema 1. Fie $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ două puncte date și $P(x, y)$ mijlocul segmentului (MN) . Atunci coordonatele lui P se calculează din formulele

$$(1) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Demonstrație. Dacă $x_1 = x_2$, evident $x = x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Fie $x_1 \neq x_2$ și M_1, N_1, P_1 , proiecțiile pe axa absciselor a punctelor M, N, P (fig. IV.3).

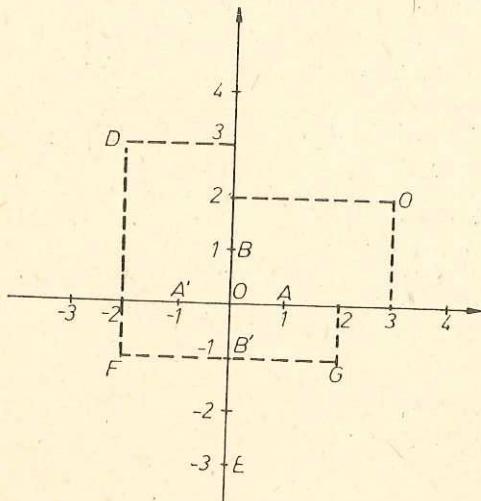


Fig. IV.2

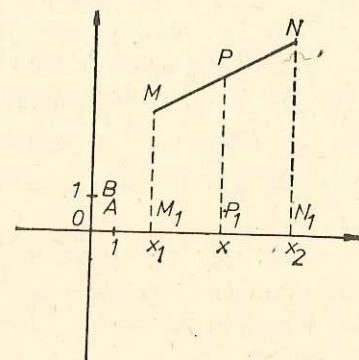


Fig. IV.3

Proprietatea liniei mijlocii în trapez ne arată că P_1 este mijlocul lui (M_1N_1) și prima formulă (1) rezultă din teorema 4, Cap. I. § 8. Analog se arată și a doua formulă.

Exerciții

4. Să se afle coordonatele mijlocului segmentului (CD) , știind că $C(1, 6)$, $D(5, 3)$.

5. Fie $M(2, -1)$ și $N(4, 3)$. Să se afle coordonatele simetricelor lui M față de originea O și față de punctul N . Să se arate că abscisele și ordonatele a două puncte simetrice față de originea O a axelor de coordonate sunt numere opuse.

Teorema 2. Distanța dintre punctele $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ este dată de formula

$$(2) \quad MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Demonstrație. Fie M_1, N_1 și M_2, N_2 proiecțiile punctelor M și N pe cele două axe de coordonate (fig. IV.4) și $\{Q\} = MM_2 \cap NN_1$. Dacă $x_1 = x_2$, atunci dreptele MN și OB sunt paralele și $|x_2 - x_1| = 0$. În acest caz, formula rezultă astfel:

$$MN = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Cazul $y_2 = y_1$ se demonstrează în mod analog.

Să presupunem că $x_1 \neq x_2$ și $y_1 \neq y_2$. Triunghiul MNQ (fig. IV.4) este dreptunghic în Q și $MQ = |x_2 - x_1|$, $QN = M_2N_2 = |y_2 - y_1|$. Conform teoremei lui Pitagora, $MN^2 = MQ^2 + QN^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ și formula (2) rezultă imediat.

Exemplu. 1. Aflați distanța dintre punctele $M(a+2, b-3)$ și $N(a-5, b+7)$.

Soluție. Aplicând formula demonstrată, rezultă:

$$MN^2 = (a-5-a-2)^2 + (b+7-b+3)^2 = 149.$$

Deci $MN = \sqrt{149}$.

2. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele $M(a, 2a-1)$, $N(5, -1)$ și $P(1, 1)$ este dreptunghic în P , oricare ar fi numărul real $a \neq 1$.

Soluție. Se calculează lungimile laturilor:

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{(a-1)^2 + (2a-2)^2} = \\ &= |a-1|\sqrt{5}, \quad PN = 2\sqrt{5} \text{ și} \\ MN &= \sqrt{(a-5)^2 + (2a)^2} = \\ &= \sqrt{5a^2 - 10a + 25}. \end{aligned}$$

Deoarece $PM^2 + PN^2 = 5a^2 - 10a + 25 = MN^2$, conform reciprocii teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic, oricare ar fi valorile lui a , $a \neq 1$. În cazul cînd $a = 1$, punctele P și M coincid și nu există triunghiul.

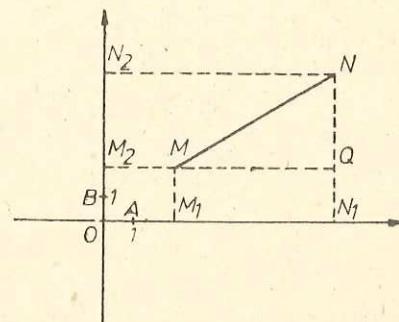


Fig. IV.4

Exerciții

6. Aflați distanța dintre punctele:

a) $M(-2, 7)$ și $N(5, -2)$; b) $P\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$ și $Q\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$;

c) $S(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$ și $T(6\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$;

d) $P(a, b+1)$ și $Q(a-3, b)$.

7. Să se determine x știind că distanța dintre punctele $P(-5, 2)$ și $Q(7, x)$ este 13.

8. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele $M(1, 2)$, $N(3, -4)$, și $P(5, -2)$ este dreptunghic.

9. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele $M(1, 2)$, $N(4, 5)$, $P(a, 6-a)$ este isoscel, oricare ar fi a numărul real, $a \neq \frac{5}{2}$.

10. Să se arate că patrulaterul cu vîrfurile în punctele $M(1, 5)$, $N\left(\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right)$, $P(2, 3)$, $Q\left(\frac{13}{5}, \frac{21}{5}\right)$ este dreptunghi.

Indicație. Se arată că laturile opuse sunt congruente și că diagonalele sunt și ele congruente.

Teorema 3. (Condiție de perpendicularitate.) Fie $P_0(x_0, y_0)$ punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 , iar $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ cîte un punct pe d_1 , respectiv, d_2 , diferite de P_0 (fig. IV.5). Atunci $d_1 \perp d_2$ dacă și numai dacă

$$(3) \quad (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0.$$

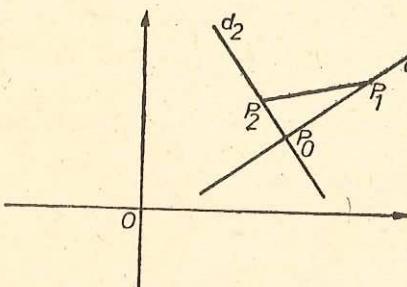


Fig. IV.5

Demonstratie. Avem $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow P_1P_0P_2$ triunghi dreptunghic $\Leftrightarrow P_0P_1^2 + P_0P_2^2 = P_1P_2^2$, ceea ce se scrie conform cu (2) sub forma

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

efectuind calculele, se obține relația (3).

Exerciții

11. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile $M(1, 2)$, $N(6, -1)$ și $P(5, -2)$ este dreptunghic.

12. Fie $M(2, 3)$, $N(3, 2)$. Să se afle punctul $P(x, 0)$, știind că $MP \perp MN$.

13. Fie $M(1, 3)$, $N(-3, 5)$. Să se afle intersecția axei ordonatelor cu mediatoarea segmentului (MN) .

§ 2. Ecuatia dreptei

Problema 1. Se dau punctele $P_1(3, 1)$, $P_2(5, 2)$ și se notează cu d perpendiculara pe P_1P_2 , dusă prin P_1 (fig. IV.6). Ce condiție trebuie să verifice x și y pentru ca punctul $P(x, y)$ să fie situat pe dreapta d ?

Soluție. Să ne ocupăm mai întii de punctele P , $P \neq P_1$. Atunci $P \in d \Leftrightarrow P_1P_2 \perp \perp P_1P$ și putem aplica teorema 3, § 1: $P \in d \Leftrightarrow (5-3)(x-3) + (2-1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) + (y-1) = 0$. Așadar un punct $P(x,y)$, diferit de $P_1(3, 1)$ atunci și numai atunci se află pe dreapta d dacă

$$(4) \quad 2x + y - 7 = 0.$$

Deoarece și coordonatele lui P_1 verifică această ecuație, am aflat soluția problemei:

$$(5) \quad P(x, y) \in d \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Echivalența (5) poate fi citită în mai multe feluri, de exemplu:

- a) $P(x, y) \in d$ dacă și numai dacă $2x + y - 7 = 0$.
- b) Coordonatele x, y ale unui punct aparținind dreptei d satisfac ecuația (4), iar cele ale unui punct nesituat pe d nu o satisfac.

Putem să scriem

$$d = \{P(x, y) \mid 2x + y - 7 = 0\},$$

adică dreapta d este locul geometric al punctelor din plan ale căror coordinate verifică ecuația $2x + y - 7 = 0$.

Definiție. Fie \mathcal{L} un loc geometric. O relație în x și y , care este satisfăcută dacă și numai dacă $P(x, y) \in \mathcal{L}$, se numește *ecuația lui \mathcal{L}* , iar \mathcal{L} se numește *graficul* ecuației respective.

Echivalența (5) arată că ecuația lui d este $2x + y - 7 = 0$. Graficul ecuației (4) este dreapta d .

Problema 2. Să se afle ecuația cercului $\mathcal{C}(0, 1)$ (fig. IV. 7).

Soluție. Deoarece $P(x, y) \in \mathcal{C}(0, 1) \Leftrightarrow OP = 1$ și $OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, găsim imediat:

$$P(x, y) \in \mathcal{C}(0, 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Așadar ecuația cercului $\mathcal{C}(0, 1)$ este

$$(6) \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Spre deosebire de acest rezultat, dreapta din problema 1 are o ecuație de gradul 1 în x și y (*ecuație liniară*). Vom arăta că același lucru este valabil pentru o dreaptă oarecare.

Teoremă 1. *Orice dreaptă are o ecuație de forma*

$$(7) \quad ax + by + c = 0,$$

unde a și b nu sunt ambele nule.

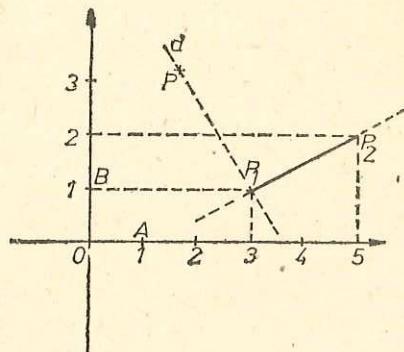


Fig. IV.6

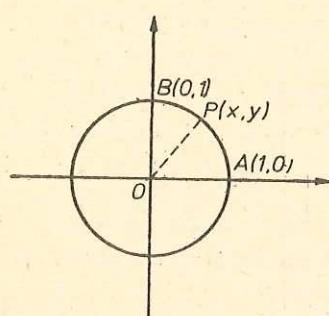


Fig. IV.7

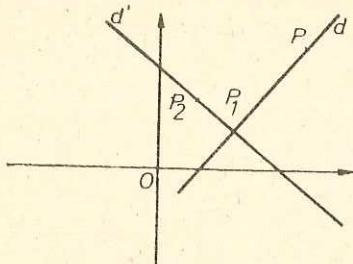


Fig. IV.8

Demonstrație. Fie d o dreaptă și $P_1(x_1, y_1) \in d$. Luăm un punct $P_2(x_2, y_2) \neq P_1$, aparținând perpendicularei pe d , dusă prin P_1 (fig. IV. 8). Atunci numerele $x_2 - x_1$ și $y_2 - y_1$ nu sunt ambele nule. Un punct $P(x, y) \neq P_1$ se găsește pe d dacă și numai dacă $P_1P_2 \perp P_1P$, ceea ce conform teoremei 3, § 1 se scrie

$$(8) \quad (x_2 - x_1)(x - x_1) + (y_2 - y_1)(y - y_1) = 0.$$

Deoarece relația (8) este verificată și de $P_1(x_1, y_1)$, ea este ecuația dreptei d . Dacă notăm $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ și $-ax_1 - by_1 = c$, obținem ecuația (7).

Observație. Dacă se cunosc două puncte distințe $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ și dacă P_1 este situat pe o dreaptă d , iar $P_1P_2 \perp d$, atunci ecuația dreptei d este de forma (8).

Demonstrăm reciproca teoremei 1.

T e o r e m a 2. *Graficul unei ecuații de forma (7), unde a, b nu sunt ambele nule, este o dreaptă.*

Demonstrație. Putem găsi numere reale x_1, y_1 care satisfac ecuația (7). Într-adevăr, dacă $a \neq 0$ putem lua y_1 arbitrar și $x_1 = -\frac{by_1 + c}{a}$; dacă $a = 0$ luăm x_1 în mod arbitrar și $y_1 = -\frac{c}{b}$. În toate cazurile avem $ax_1 + by_1 + c = 0$, deci

$$(9) \quad -ax_1 - by_1 = c.$$

Dacă punctul P_1 are coordonatele (x_1, y_1) determinate în acest fel, fie $P_2(x_1 + a, y_1 + b)$ (fig. IV.9). Atunci ecuația perpendicularei d pe P_1P_2 , dusă prin P_1 are, conform observației, următoarea formă:

$$(x_1 + a - x_1)(x - x_1) + (y_1 + b - y_1)(y - y_1) = 0$$

sau

$$ax + by - ax_1 - by_1 = 0$$

și în virtutea lui (9)

$$ax + by + c = 0.$$

Astfel am pus în evidență o dreaptă d a cărei ecuație este tocmai (7) și teorema este demonstrată.

Cazuri speciale. 1) În ecuația (8) putem avea $x_1 = x_2$; atunci $y_1 \neq y_2$ (căci $P_1 \neq P_2$). În acest

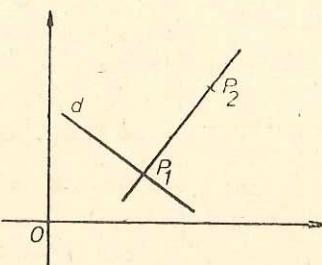


Fig. IV.9

caz $P_1P_2 \parallel OB$ (fig. IV.10) și $d \parallel OA$, iar ecuația (8) se reduce la $y = y_1$. Prin urmare, ecuația unei drepte paralele cu axa absciselor este

$$(10) \quad y = y_1$$

și în particular axa absciselor are ecuația $y = 0$.

2) Analog, o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor are o ecuație de forma

$$(11) \quad x = x_1$$

(fig. IV.11) și ecuația axei ordonatelor este $x = 0$.

3) Dacă dreapta d trece prin originea $O(0, 0)$ (fig. IV. 12) în ecuația (8), avem $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, deci conform cu (7), $c = 0$. Ecuația lui d se scrie în acest caz

$$(12) \quad ax + by = 0.$$

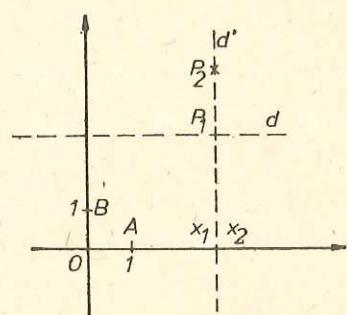


Fig. IV.10

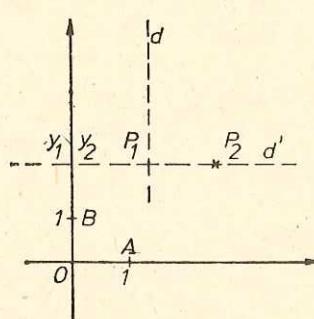


Fig. IV.11

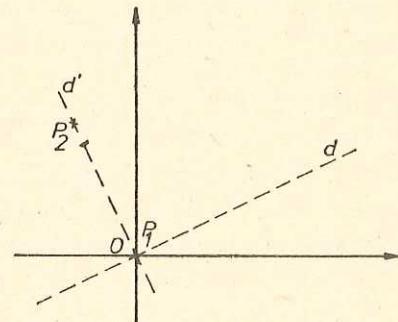


Fig. IV.12

Exercitii

14. Să se reprezinte grafic ecuațiile

- a) $2x - 3y = 1$;
- b) $2x = 3$;
- c) $5y - 4 = 0$;
- d) $3x - y = 0$.

15. Să se determine a și b astfel ca punctele $P_1(2, 3)$ și $P_2(1, -5)$ să fie situate pe dreapta de ecuație $3x - ay - b = 0$.

16. Fie P_1 punctul de abscisă 5 al dreptei d de ecuație $2x - 3y = 7$. Să se determine ecuația dreptei d' perpendiculară pe d în P_1 .

Soluție. Din $P_1 \in d$, rezultă $2 \cdot 5 - 3y = 7$, deci $y = 1$ și $P_1(5, 1)$. Pentru a scrie ecuația dreptei $d' \perp d$ mai avem nevoie de un punct P_2 al dreptei d diferit de P_1 . Din ecuația dreptei d pentru $x = 8$, de exemplu, se obține $y = 3$ și $P_2(8, 3)$. Ecuația dreptei d' , conform formulei (8), este $3x + 2y - 17 = 0$.

17. Fie $x - 2y = 5$ ecuația dreptei P_1P_2 , unde $P_1(2, y_1)$ și $P_2(x_2, 3)$. Să se scrie ecuația dreptei perpendiculare pe dreapta P_1P_2 în P_1 .

§ 3. Coeficientul unghiular al dreptei

Teorema 1. Ecuăția unei drepte d neparalelă cu axa ordonatelor se poate scrie sub forma

$$(13) \quad y = mx + n.$$

Demonstrație. Ecuăția dreptei d este o ecuație liniară în x și y de forma (7). Deoarece d nu este paralelă cu axa ordonatelor, $b \neq 0$. Așadar ecuația (7) este echivalentă cu $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Punând $m = -\frac{a}{b}$ și $n = -\frac{c}{b}$, ecuația obținută are forma (13).

Teorema 2. Dacă d este graficul ecuației $y = mx + n$, iar $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ sunt două puncte distincte pe d , atunci

$$(14) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Demonstrație. Într-adevăr, deoarece P_1 și P_2 sunt puncte pe d , avem $y_2 = mx_2 + n$ și $y_1 = mx_1 + n$. Așadar $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$. Dreapta d nefiind paralelă cu axa ordonatelor, $x_2 \neq x_1$ și împărțind cu $x_2 - x_1 \neq 0$, rezultă formula (14).

Coeficienții a , b , c în ecuația (7) nu sunt determinați în mod unic, cind dreapta d este dată. Putem, de exemplu, să înmulțim ambiii membri ai ecuației (4) cu un factor nenul și atunci a , b , c se schimbă.

Alta este situația în cazul ecuației (13).

Coeficientul m este determinat în mod unic cind dreapta d este dată. Într-adevăr, dacă avem pentru d și ecuația $y = m'x + n'$, din formula (14) rezultă

$$m' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

Numărul m se numește *panta* sau *coeficientul unghiular al dreptei* d .

Observație. O dreaptă paralelă cu axa ordonatelor nu are coeficient unghiular, iar dreptele paralele cu axa absciselor au coeficientul unghiular egal cu zero.

Teorema 3. Fie d și d' drepte neparalele cu axele de coordonate, de coeficienți unghiulari m , respectiv, m' . Dreptele d și d' sunt perpendiculare dacă și numai dacă

$$(15) \quad m' = -\frac{1}{m}.$$

Demonstrație. Dacă $P_0(x_0, y_0) \in d \cap d'$, $P_1(x_1, y_1) \in d$ și $P_2(x_2, y_2) \in d'$ sunt puncte distincte, atunci $x_1 \neq x_0$, $x_2 \neq x_0$ și conform teoremei 3, § 1, $d \perp d'$ dacă și numai dacă

$$1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = 0.$$

Tinând seama de (12), această condiție devine $1 + mm' = 0$, adică $m' = -\frac{1}{m}$.

Intersecția a două drepte. Fie dreptele d și d' de ecuații

d) $y = mx + n,$

d') $y = m'x + n'.$

Punctul lor de intersecție $P(x_0, y_0)$, dacă există, satisfac ambele ecuații, deci se obține prin rezolvarea acestui sistem de ecuații. Avem

(16) $(m - m')x_0 + n - n' = 0.$

1) Dacă $m \neq m'$, obținem

$$x_0 = -\frac{n - n'}{m - m'}, \quad y_0 = mx_0 + n$$

și cele două drepte sunt secante.

2) Dacă $m = m'$, $n \neq n'$, ecuația (16) devine $0 \cdot x = n' - n$, care nu are soluție. În acest caz $d \parallel d'$.

3) Dacă $m = m'$, $n = n'$, ecuația (16) devine $0 \cdot x = 0$, care este verificată de orice $x \in \mathbb{R}$. Evident $d = d'$.

Exerciții

18. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele $P_1(1, -1)$ și $P_2(-3, -3)$.

Soluție. Deoarece P_1P_2 nu este paralelă cu axa ordonatelor are ecuația de forma $y = mx + n$ (teorema 1). Din $P_1 \in P_1P_2$ și $P_2 \in P_1P_2$, rezultă $-1 = m \cdot 1 + n$ și $-3 = m \cdot (-3) + n$. Rezolvând sistemul format cu aceste două ecuații, se obține

$$m = \frac{1}{2} \text{ și } n = -\frac{3}{2}, \text{ deci ecuația dreptei } P_1P_2 \text{ este } x - 2y - 3 = 0.$$

19. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul $M(1, -5)$ și care este paralelă cu dreapta de ecuație $5x + 2y - 1 = 0$.

20. Să se arate că punctele $M(1, 2)$, $N(-5, 7)$ și $P(-1, 2)$ nu sunt coliniare.

Indicație. Se scrie ecuația dreptei determinată de două din aceste puncte și se arată că nu este verificată de coordonatele cehui de-al treilea punct.

21. Sunt coliniare punctele $M(1, 1)$, $N(-5, 5)$, $P\left(0, \frac{5}{3}\right)$?

22. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul $M(-1, 3)$ și care este perpendiculară pe dreapta $3x - 5y = 0$.

23. Să se determine numerele reale a și b , astfel ca dreapta $ax + by - 1 = 0$ să conțină punctul $P(2, 1)$ și să fie perpendiculară pe dreapta $ax + y - 5 = 0$.

24. Fie punctele $P_1(2, a + 1)$, $P_2(0, 1 - a)$, $P_3(1 - 2a, 3)$ și $P_4(1 + 2a, -1)$. Să se arate că dreptele P_1P_2 și P_3P_4 sunt perpendiculare, oricare ar fi numărul real a .

25. Să se arate că punctele $P_1(a, 2a + 3)$, $P_2(1 + a, 2a + 5)$, $P_3(b, 2b - 5)$ și $P_4(1 + b, 2b - 3)$ sunt vîrfurile unui paralelogram.

Indicație. Se arată, de exemplu, că segmentele (P_1P_2) și (P_3P_4) sunt paralele și au aceeași lungime.

26. Să se arate că ecuația unei drepte care conține punctul $P_1(x_1, y_1)$ și care are coeficientul unghiular m este

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Soluție. Se scrie că $P_1(x_1, y_1)$ verifică ecuația (13), deci $y_1 = mx_1 + n$. De aici se exprimă n și se înlocuiește în (13).

27. Fie $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Să se arate că ecuația lui P_1P_2 este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

28. Fie $P_1(a, 0)$, $a \neq 0$ și $P_2(0, b)$, $b \neq 0$. Să se arate că ecuația dreptei P_1P_2 este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$. (Se numește ecuația dreptei dată prin tăieturi. De ce?)

§ 4. Funcțiile sin și cos definite pe intervalul $[0, \pi]$

În acest paragraf vom introduce funcțiile sin și cos definite pe $[0, \pi]$. Funcțiile sin și cos, definite pe \mathbb{R} , vor fi studiate în capitolul următor. Studiul lor va face obiectul trigonometriei.

Termenul trigonometrie provine de la cuvintele grecești trigon „triunghi“ și metron „măsură“. Pentru a stabili poziția corporilor cerești grecii antici au descoperit relații între măsurile laturilor și măsurile unghiurilor triunghiurilor sferice.

Definiții. Să considerăm în plan un sistem de coordinate, reperul ales fiind (O, A, B) . Notăm cu S mulțimea punctelor din plan de ordinată $y \geq 0$. Punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$ se găsesc pe cercul $C = \mathcal{C}(0, 1)$ de centru O și rază 1 numit *cerc unitate*. Notăm cu s semicercul $S \cap C$.

Fie numărul $t \in [0, \pi]$. Pe semicercul s există un singur punct M (fig. IV.13), astfel ca $\widehat{AOM} = t$ (rezultă din axioma de construcție a unghiurilor). Am definit astfel o funcție care asociază fiecărui număr real $t \in [0, \pi]$ un punct al semicercului s . Numărul 0 este asociat cu punctul A , numărul $\frac{\pi}{2}$ cu punctul B , numărul π cu punctul A' și aşa mai departe. Dacă (x, y) sunt coordonatele punctului M , prin această funcție, fiecare număr real $t \in [0, \pi]$ este asociat cu o pereche ordonată de numere reale (x, y) .

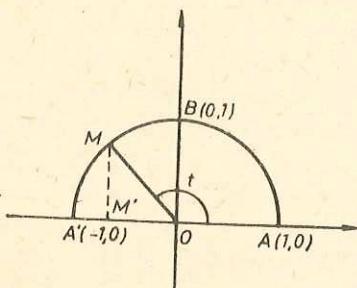


Fig. IV.13

Este util să se considere separat coordonatele x și y ale punctului M și să definim două funcții, una numită „cosinus“ și alta numită „sinus“, notate prescurtat prin cos și sin. Aceste două funcții sunt $\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\cos t = x$ și $\sin: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\sin t = y$, unde (x, y) sunt coordonatele punctului $M \in s$, asociat cu numărul real $t \in [0, \pi]$.

În definiția funcțiilor cos și sin intervine cercul unitate ales, dar valorile cos t și sin t nu depind de această alegere (căci considerind două cercuri unitate, triunghiurile respective OMM' , unde M' este proiecția lui M pe OA , figura IV.13, sunt congruente). Așadar funcțiile cos și sin sunt bine definite pe intervalul real $[0, \pi]$.

Citeva *valori particolare* ale acestor funcții sint:

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1;$$

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0.$$

Funcția cos se anulează numai în $\frac{\pi}{2}$ deoarece pe s nu există, în afară de B , alte puncte care au abscisa 0. De asemenea, funcția sin se anulează numai în 0 și π .

Cu ajutorul funcțiilor cos și sin se definesc funcțiile numite „tangentă“ și „cotangentă“, notate precurtat cu tg și ctg. Aceste funcții sint:

$$\operatorname{tg}: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow \mathbf{R}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

și

$$\operatorname{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Avem: $\operatorname{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ nu este definit, $\operatorname{tg} \pi = \frac{0}{-1} = 0$ și $\operatorname{ctg} 0$ nu este definit, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{ctg} \pi$ nu există.

De menționat este faptul că semicercul s este mulțimea punctelor $M(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, unde $t = \mu(\widehat{AOB})$ = lungimea arcului mic \widehat{AM} .

Deoarece abscisele acestor puncte sint cuprinse în intervalul $[-1, 1]$, iar ordonatele în intervalul $[0, 1]$, putem scrie

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \text{ și } 0 \leq \sin t \leq 1,$$

oricare ar fi $t \in [0, \pi]$.

După cadrul în care este situat punctul M se poate stabili seminul funcției cos: dacă $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \geq 0$, iar dacă $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos t < 0$.

Se constată ușor că funcțiile tg și ctg au același semn cu funcția cos, deoarece funcția sin are numai valori numerice pozitive.

Funcția $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ este bijectivă. Într-adevăr, numerele distincte din $[0, \pi]$ sunt asociate cu punctele de pe s de abscise distincte, deci cos este injectivă. Funcția este și surjectivă pentru că, oricare ar fi $x \in [-1, 1]$, există $t \in [0, \pi]$, astfel ca $x = \cos t$. Într-adevăr, oricare ar fi $x \in [-1, 1]$, pe axa OA există un punct de abscisă x și, ducând prin acest punct o paralelă la axa ordonatelor, aceasta intersectează semicercul s în M , abscisa acestui punct fiind $x = \cos t$ unde $t = \mu(\widehat{AOB})$.

Vom nota $(\cos t)^2$ cu $\cos^2 t$, $(\sin t)^2$, cu $\sin^2 t$ etc. Deoarece $OM = 1$, unde $M(\cos t, \sin t)$, rezultă

$$(17) \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad \forall t \in [0, \pi].$$

Dacă $m(\widehat{hk}) = \alpha^\circ = \beta^{\text{rad}}$, fără să se producă confuzii se fac convențiile de notații.

$$\sin \beta = \sin \alpha = \sin \widehat{hk}, \quad \cos \beta = \cos \alpha = \cos \widehat{hk} \quad \text{etc.}$$

$$\text{De exemplu: } \sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\text{rad}} = 1,$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\text{rad}}$$

Folosind anumite proprietăți geometrice, se pot calcula unele valori ale funcțiilor introduse.

Exemplu. Fie M punctul de intersecție al semicercului s cu dreapta de ecuație $3x + 4y = 0$. Să se calculeze $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{ctg} a$, unde $a = \mu(\widehat{AOM})$.

Soluție. Punctul M are coordonatele $(\cos a, \sin a)$. Deoarece coordonatele lui M verifică ecuația $3x + 4y = 0$, numerele $\cos a$ și $\sin a$ se obțin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \\ 3 \cos a + 4 \sin a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Tinând seama de faptul că } \sin a \geq 0, \text{ rezultă } \cos a = -\frac{4}{5}, \quad \sin a = \frac{3}{5}, \\ \operatorname{tg} a = -\frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} a = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Exerciții

29. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptei de ecuație $x - 3y = 0$ cu semicercul s . Dacă $t = \mu(\widehat{AOM})$, să se calculeze numerele $\cos t$, $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

30. Dacă $\cos a = -\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$.

31. Dacă $\operatorname{tg} a = -\frac{5}{12}$, să se calculeze $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{ctg} a$.

Unele valori ale funcțiilor \sin , \cos , tg , ctg . Valorile acestor funcții sunt trecute în tabele speciale, întâlnite în clasele anterioare. Unele valori pot fi determinate fără a utiliza aceste tabele.

1. $t = \frac{\pi}{4}$. Punctul $M\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$ este situat atât pe semicercul s , cât și pe bisectoarea unghiului \widehat{AOB} (fig. IV.14). Deci $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$. Dacă

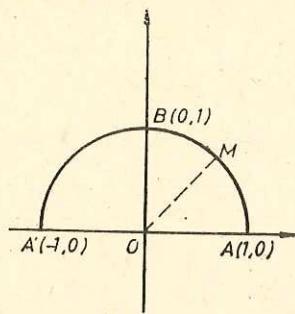


Fig. IV.14

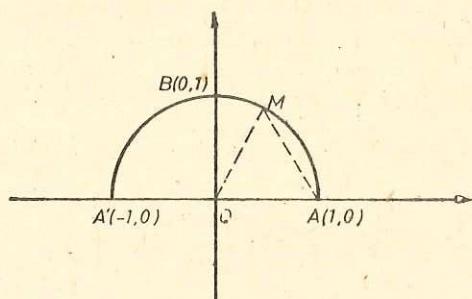


Fig. IV.15

$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = x$, din $OM = 1$, rezultă $x^2 + x^2 = 1$ sau $x^2 = \frac{1}{2}$. Deoarece $x > 0$ (punctul M este în cadrul întii), se obține $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.

2. $t = \frac{\pi}{3}$. Fie $M\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$. Triunghiul AOM este echilateral (fig. IV.15). Înseamnă că $AM = OA = 1$. Conform formulei (2), din $AM = 1$ și $A(1, 0)$, rezultă $\left(\cos \frac{\pi}{3} - 1\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3} - 0\right)^2 = 1$ sau $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{3} + 1 = 1$. Tinând seama de egalitatea (17), se obține $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $t = \frac{\pi}{6}$. Dacă $M\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right)$, triunghiul BOM (fig. IV.16) este echilateral, deci $MB = OB = 1$.

În mod analog se obține

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

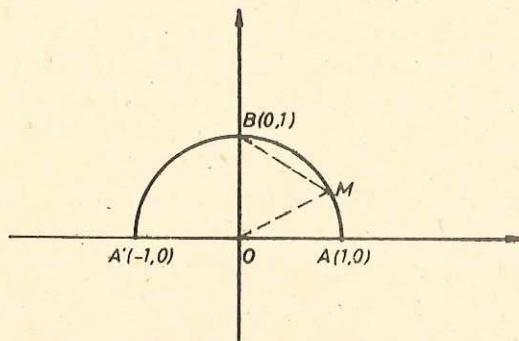


Fig. IV.16

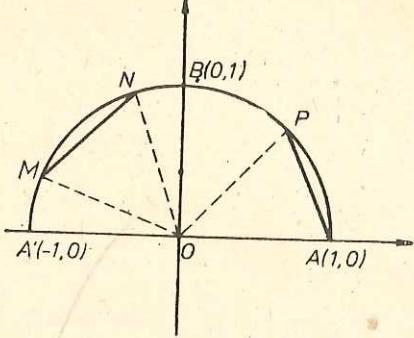


Fig. IV.17

Teoremă. Dacă $a, b \in [0, \pi]$, $a \geq b$, atunci

$$(16) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Demonstrație. Fie $M, N \in s$, astfel că $\mu(\widehat{AOM}) = a$ și $\mu(\widehat{AON}) = b$. (fig. IV.17).

Avem $\mu(\widehat{MON}) = \mu(\widehat{AOM}) - \mu(\widehat{AON}) = a - b$. Conform teoremei de construcție a unghiurilor, pe semicercul s există punctul P , astfel ca

$$\widehat{AOP} \equiv \widehat{MON}, \text{ deci } \mu(\widehat{AOP}) = a - b.$$

Triunghiurile isoscele MON și AOP fiind congruente, rezultă $MN = AP$. Coordonatele punctelor M, N, P sunt, respectiv, $(\cos a, \sin a)$, $(\cos b, \sin b)$, $(\cos(a - b), \sin(a - b))$; deci $MN^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$ și $AP^2 = [1 - \cos(a - b)]^2 + [0 - \sin(a - b)]^2 = 2 - 2 \cos(a - b)$. Egalând cele două rezultate, se obține egalitatea (18).

C o n s e c i ș t ă. Dacă $x \in [0, \pi]$, atunci $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Demonstrație. Avem succesiv $\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = (-1) \cos x + 0 \cdot \sin x = -\cos x$ și $\sin(\pi - x) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi - x)} = \sqrt{1 - (-\cos x)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x$.

În plus, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ și dacă $x \in (0, \pi)$, $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$.

Utilizând consecința, se pot calcula mai repede unele valori ale funcțiilor \cos , \sin , tg și ctg . De exemplu:

$$a) \cos \frac{2\pi}{6} = -\cos \left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$b) \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$c) \operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 135^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$$

$$d) \cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};$$

$$e) \sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$f) \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Dăm mai jos un tabel cu valorile funcțiilor sin, cos, tg și ctg pentru cîteva numere reale din intervalul $[0, \pi]$.

Numărul a	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$	Unghiul corespunzător lui a
0	0	1	0	nu există	0°
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	30°
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	45°
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	60°
$\frac{\pi}{2}$	1	0	nu există	0	90°
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	120°
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	135°
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	150°
π	0	-1	0	nu există	180°

Exerciții

32. Să se calculeze: a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; b) $\sin \frac{7\pi}{12}$; c) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$; d) $\operatorname{ctg} \frac{41\pi}{42}$.

33. Dacă $\cos a = 0,8$, $\cos b = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos(a - b)$.

34. Dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, să se demonstreze că: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. În plus, dacă $x \neq 0$ și $x \neq \frac{\pi}{2}$, să se arate că $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$ și $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

§ 5. Unghiul unei drepte cu axa absciselor

Fie d o dreaptă neparalelă cu axa OA (fig. IV.18). O paralelă prin originea O a axelor la dreapta d intersectează semicercul s în punctul M . Dacă $d \parallel OA$, atunci $M = A$.

Prin definiție, unghiul dreptei d cu axa OA este \widehat{AOM} . Notăm acest unghi cu (d, \widehat{OA}) .

Teoremă. Dacă o dreaptă d nu este paralelă cu axa ordonatelor, coeficientul său unghiular este $\operatorname{tg} a = \mu(d, \widehat{OA})$.

Demonstrație. Ecuția dreptei d poate fi scrisă sub formă $y = mx + n$. Dreapta OM (fig. IV.18) are același coeficient unghiular m , deoarece $OM \parallel d$. Punctul M are coordonatele $(\cos a, \sin a)$. Conform formulei (14), § 3, coeficientul unghiular al dreptei OM este

$$\frac{\sin a - 0}{\cos a - 0} = \operatorname{tg} a.$$

Deci $m = \operatorname{tg} a$, și teorema este demonstrată.

Se constată că, dacă $m > 0$, unghiul (d, \widehat{OA}) este ascuțit, iar dacă $m < 0$, acest unghi este obtuz.

Consecință. Fie triunghiul ABC dreptunghie în A . Dacă $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\mu(\widehat{ABC}) = B$, atunci

$$\sin B = \frac{b}{a}; \cos B = \frac{c}{a}, \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}.$$

Demonstrație. Alegem un sistem de axe cu originea în vîrful B al triunghiului (fig. IV.19), cu axele paralele cu catetele triunghiului, în aşa fel încit vîrful C să fie în cadranul I. Cu notațiile din enunț, punctul C are coordonatele (c, b) . Conform teoremei, coeficientul unghiular al dreptei BC este $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ și egalitatea a treia este demonstrată. Ultima egalitate rezultă imediat din $\operatorname{ctg} B = \frac{a}{\operatorname{tg} B}$. Pentru demonstrarea primei egalități pornim de la $c = b \operatorname{ctg} B$, de unde rezultă $c^2 = b^2 \operatorname{ctg}^2 B$. Folosind definiția funcției ctg , ajungem la $(b^2 + c^2) \sin^2 B = b^2$. Dar $b^2 + c^2 = a^2$, deci $a^2 \sin^2 B = b^2$. Din această egalitate rezultă prima formulă. Cea de-a doua egalitate rezultă din $a^2 \sin^2 B = b^2$ și din $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$, ținând seama de egalitatea $a^2 - b^2 = c^2$.

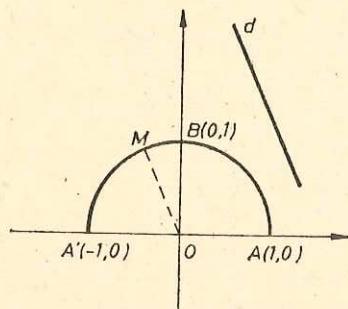


Fig. IV.18

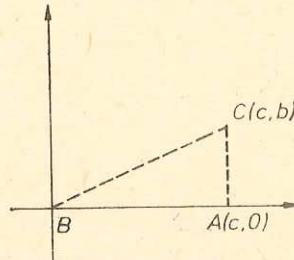


Fig. IV.19

Consecința se poate formula într-un enunț ușor de reținut. „Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este egală cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și sinusul unghiului opus sau cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și cosinusul unghiului alăturat“.

Aplicații. 1. Să se determine unghiul dreptei d de ecuație $3x + y\sqrt{3} + 2 = 0$ cu axa absciselor.

Soluție. Din $y = -\sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, rezultă $m = -\sqrt{3}$. Dacă $a = \mu(\widehat{dOA})$, din $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$, rezultă $\cos^2 a = \frac{1}{4}$. Deci $\cos a = -\frac{1}{2}$. Funcția cos fiind bijectivă, din tabel găsim $a = \frac{2\pi}{3}$. Deci $m = (\widehat{dOA}) = 120^\circ$.

2. Să se determine unghiurile triunghiului cu laturile de lungimi $8, 4, 4\sqrt{3}$.

Soluție. Deoarece $(4\sqrt{3})^2 + 4^2 = 8^2$, triunghiul este dreptunghic (fig. IV.19). $\cos B = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, deci $\mu(\hat{B}) = \frac{\pi}{3}$ sau $m(\hat{B}) = 60^\circ$. Apoi $\mu(\hat{C}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ sau $m(\hat{C}) = 30^\circ$.

Exerciții

85. Să se determine unghiul următoarelor drepte cu axa absciselor:

- a) $y = 0$; b) $x = 0$; c) $y = x\sqrt{3} + 1$; d) $y + x = 1$.

86. Se dă punctul $P\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $a > 0$.

Să se afle $m(\widehat{AOP})$ și $\mu(\widehat{AOP})$.

87. Dreptele de ecuații $x\sqrt{7} + y\sqrt{2} = 0$ și $3x - 4y = 0$ intersectează semicercul s , respectiv, în punctele M și N . Să se calculeze $\cos t$, unde $t = \mu(\widehat{MON})$.

Funcții trigonometrice

Acele indicațoare ale ceasului, în mișcarea lor continuă, indicind la nesfîrșit repetarea orelor, constituie un model simplu pentru toate fenomenele care se repetă periodic. În acest capitol se vor studia funcții ale căror valori se repetă în mod periodic. În special vor fi studiate funcțiile trigonometrice, o categorie de funcții definite prin intermediul unui cerc de rază 1. Aceste funcții sunt folosite ca modele matematice a mai multor feluri de situații practice. Vom vedea apoi cum se deduc formule referitoare la diferite valori ale acestor funcții și cum formulele stabilite pentru unele din ele pot fi folosite pentru a determina formule pentru alte funcții.

§ 1. Funcția de acoperire universală a cercului unitate

L e m a 1. Orice număr real t poate fi scris în mod unic sub forma

$$(1) \quad t = t^* + 2k\pi, \text{ unde } t^* \in [0, 2\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

Demonstrație. Fie k partea întreagă a numărului $\frac{t}{2\pi}$, adică

$$k \leq \frac{t}{2\pi} < k + 1.$$

Atunci $2k\pi \leq t < 2k\pi + 2\pi$, din care se obține imediat că $t^* = t - 2k\pi \in [0, 2\pi)$. Am determinat în acest fel numerele k și t^* verificând condițiile (1).

Pentru a arăta unicitatea, să presupunem că mai avem și $t = t_1 + 2k_1\pi$, $t_1 \in [0, 2\pi)$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. Rezultă că $t^* - t_1 = 2(k_1 - k)\pi$. Deoarece $t^* - t_1 \leq t^* < 2\pi$ și $t^* - t_1 \geq -t_1 > -2\pi$, rezultă $-2\pi < t^* - t_1 < 2\pi$ sau $-2\pi < (k_1 - k)2\pi < 2\pi$. Deci $-1 < k_1 - k < 1$ și în mod necesar $k_1 - k = 0$. Așadar $t_1 = t^*$ și t^* este unic.

Exemplu 1. Dacă $t = -\frac{112\pi}{17}$, atunci $\frac{t}{2\pi} = -\frac{56}{17}$. Din $-4 < \frac{t}{2\pi} < -3$, rezultă $0 < \frac{t}{2\pi} + 4 > 1$. Deci $\frac{t}{2\pi} + 4 = 4 - \frac{56}{17} = \frac{12}{17}$. Așadar $t = \frac{24\pi}{17} + 2(-4)\pi$, unde $t^* = \frac{24\pi}{17}$, $k = -4$.

2. Dacă $t = 31,45$, atunci $5 < \frac{t}{2\pi} < 6$. Deci $t = (31,45 - 10\pi) + 2 \cdot 5 \cdot \pi$, unde $t^* = 31,45 - 10\pi$, $k = 5$.

3. Dacă $t = -5$, atunci $-1 < \frac{t}{2\pi} < 0$. În acest caz $k = -1$ și $t = (2\pi - 5) + 2(-1)\pi$. Numărul t^* este $2\pi - 5$.

În capitolul IV, § 4 a fost prezentată o funcție care asociază fiecărui număr $t \in [0, \pi]$ un punct unic $M \in s$, astfel încât lungimea arcului mic \widehat{AM} să fie egală cu t .

Lema care urmează ne indică modul în care putem asocia unui număr $t \in (\pi, 2\pi)$, un punct $M \in C - s$.

L e m a 2. Dacă $t \in (\pi, 2\pi)$, și $x = -\cos(t - \pi)$, $y = -\sin(t - \pi)$, atunci punctul M de coordonate (x, y) este situat pe $C - s$, iar arcul mare \widehat{AM} are lungimea t .

Demonstrație. Deoarece $x^2 + y^2 = \cos^2(t - \pi) + \sin^2(t - \pi) = 1$ (coordonatele lui M verifică ecuația cercului unitate C) punctul M este situat pe C . Din $t \in (\pi, 2\pi)$, rezultă că $t - \pi \in (0, \pi)$. Fie $M'(x', y')$, unde $x' = \cos(t - \pi)$ și $y' = \sin(t - \pi)$. Înseamnă că $M' \in s$, conform definiției funcțiilor

\cos și \sin . Având abscisele, respectiv, ordonatele numere opuse, punctele M și M' sunt simetrice față de originea axelor de coordonate (fig. V.1). Deci M și M' sunt diametral opuse în C . Din $M' \in s$ rezultă $M \in C - s$.

Arcul mic $\widehat{AM'}$ are lungimea $t - \pi$ (conform definiției funcțiilor \cos și \sin), iar arcul $\widehat{M'A'M}$ are lungimea π , deci arcul mare \widehat{AM} are lungimea $(t - \pi) + \pi = t$ și lema este demonstrată.

Conform acestei leme, numărului $\frac{4\pi}{3}$ i se asociază pe $C - s$ punctul de coordonate $\left(-\cos \frac{\pi}{3}, -\sin \frac{\pi}{3}\right)$ sau $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Fie d tangentă în A la cercul unitate C (fig. V.2.) și $E \in d$, astfel ca B și E să fie în același semiplan față de OA . Considerăm un sistem de coordonate pentru d , astfel încât A să aibă

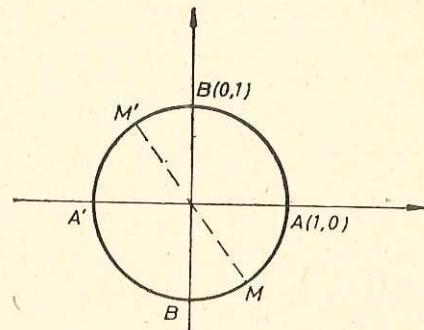


Fig. V.1

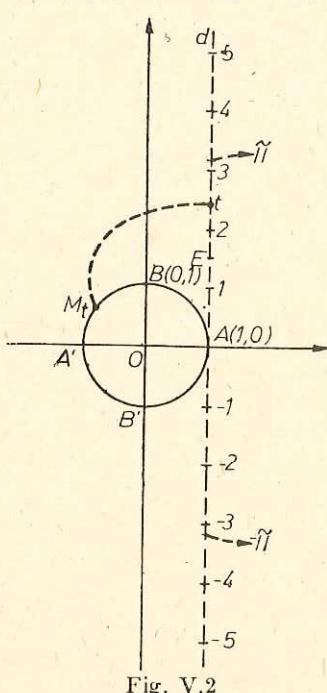


Fig. V.2

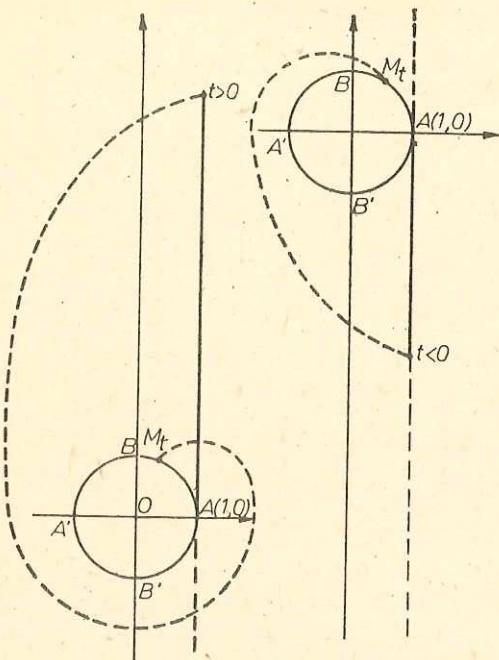


Fig. V.3

coordonata 0, iar $x_E > 0$. Pentru a simplifica notățiile, un punct al lui d va fi notat cu coordonata sa. Dreapta d devine o axă a numerelor reale.

Pentru a pregăti definiția unei funcții importante facem următoarele considerații intuitive. Dacă ne imaginăm că dreapta d este suficient de flexibilă, putem accepta procesul de înfășurare a ambelor ei jumătăți în jurul cercului. Semiaxa numerelor reale pozitive se înfășoară în sensul invers mișcării acelor de ceasornic, iar semiaxa numerelor reale negative în sensul mișcării acelor de cesornic.

Prin acest procedeu de înfășurare, fiecare punct de pe axa d ajunge într-un punct determinat pe C , deci fiecărui număr real t îi corespunde

un punct $M_t \in C$. Am definit astfel o funcție $f: d \rightarrow C$, care asociază lui $t \in \mathbb{R}$ punctul $f(t) = M_t$ de pe cerc. Știind că lungimea lui C este 2π , punctele $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ ale dreptei d și, de asemenea, punctele $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$ ajung în A' ; punctele $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ și $-2\pi, -4\pi, \dots$ ajung în A , punctele $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \dots$ ajung în B etc. În general, punctele $t, t + 2\pi, t - 2\pi, t + 4\pi, t - 4\pi, \dots$ ajung în același punct M_t , adică

$$(2) \quad f(t + 2k\pi) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Se observă că un segment cu originea în A și cu extremitatea într-un punct oarecare t (fig. V. 3) prin înfășurare, într-un sens sau altul, poate acoperi de mai multe ori cercul, punctul t ajungând în $M_t \in C$.

Folosind definiția funcțiilor cos și sin și lemele 2 și 1 putem defini o funcție F , care asociază oricărui număr real t un punct de pe cercul unitate C , fără a folosi procedeul intuitiv al înfășurării. Vom arăta că această funcție F va avea proprietățile funcției f .

Definim funcția

$$F: \mathbb{R} \rightarrow C, F(t) = M(x, y)$$

prin următoarele condiții:

1° Dacă $t \in [0, \pi]$, atunci $x = \cos t$, $y = \sin t$.

2° Dacă $t \in (\pi, 2\pi)$, atunci $x = -\cos(t - \pi)$, $y = -\sin(t - \pi)$

3* Dacă $t = t^* + 2k\pi$, $t^* \in [0, 2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $F(t) = F(t^*)$.

Functia F poartă numele de funcția de acoperire universală a cercului unitate.

A vom: $F(0) = M(\cos 0, \sin 0) = M(1, 0) = A$ (fig. V.4), $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = M(0, 1) = B$, $F(\pi) = M(\cos \pi, \sin \pi) = M(-1, 0) = A'$, $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = M\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right), -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)\right) = M\left(-\cos\frac{\pi}{2}, -\sin\frac{\pi}{2}\right) = M(0, -1) = B'$, $F\left(\frac{7\pi}{3}\right) = F\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

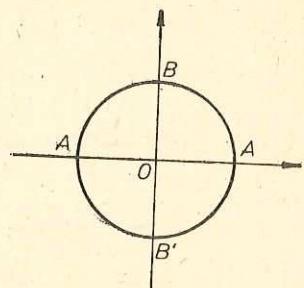


Fig. V.4

Dacă nu se fac alte precizări, conform definiției funcției F , prin $AF(t)$ vom înțelege arcul mic de lungime t , dacă $t \in [0, \pi]$, respectiv, arcul mare de lungime t , dacă $t \in (\pi, 2\pi)$.

Teorema 1. Avem proprietatea

$$(3) \quad F(t + 2k\pi) = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstrație. Conform lemei 1, există numerele unice

$$t^* \in [0, 2\pi] \text{ și } l \in \mathbb{Z}, \text{ astfel ca } t = t^* + 2l\pi.$$

Atunci

$$F(t + 2k\pi) = F(t^* + 2(k+l)\pi) = F(t^*) = F(t^* + 2l\pi) = F(t),$$

deci formula (3) este demonstrată.

Lema 3. Oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, $AF(t) = AF(-t)$.

Demonstrație. Dacă $t = t^* + 2k\pi$, $t^* \in [0, 2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $-t = 2\pi - t^* - 2(k+1)\pi$. Deoarece $F(t) = F(t^*)$ și $F(-t) = F(2\pi - t^*)$, demonstrația se reduce la să arăta că $AF(t^*) = AF(2\pi - t^*)$.

Dacă $t^* \in [0, \pi]$, atunci $2\pi - t^* \in [\pi, 2\pi]$. Arcul $\widehat{AF(t^*)}$ (fig. V.5) are lungimea t^* , iar arcul mare $\widehat{AF(2\pi - t^*)}$ are lungimea $2\pi - t^*$, deci arcul mic $\widehat{AF(2\pi - t^*)}$ are lungimea $2\pi - (2\pi - t^*) = t^*$. Deoarece arcele mici $\widehat{AF(t^*)}$ și $\widehat{AF(2\pi - t^*)}$ au aceeași lungime, coardele corespunzătoare lor sunt congruente și teorema este demonstrată în acest caz.

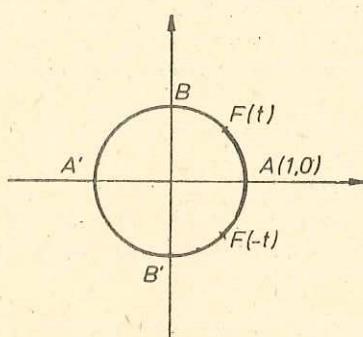


Fig. V.5

Cazul $t^* \in (\pi, 2\pi)$ se tratează în mod analog (se schimbă doar valoările numerelor t^* și $2\pi - t^*$).

Teorema 2. Oricare ar fi $t, u \in \mathbb{R}$, avem

$$(4) \quad F(t)F(u) = AF(t - u).$$

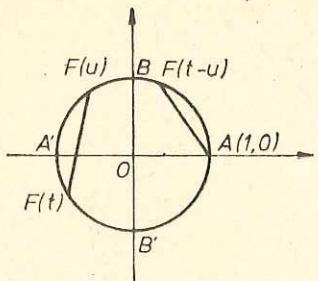


Fig. V.6

Demonstrăție. Scriem numerele t și u sub forma $t = t^* + 2k\pi$, $t^* \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ și $u = u^* + 2l\pi$, $u^* \in [0, 2\pi)$, $l \in \mathbb{Z}$, conform lemei 1. Deoarece $F(t) = F(t^*)$, $F(u) = F(u^*)$ și $F(t - u) = F(t^* - u^*)$, demonstrația se reduce la a arăta că $F(t^*)F(u^*) = AF(t^* - u^*)$.

Dacă $0 \leq u^* \leq t^* < 2\pi$, rezultă imediat (fig. V.6) că arcul $\widehat{F(t^*)F(u^*)}$ care nu-l conține pe A are lungimea $t^* - u^*$, ca și arcul $\widehat{AF(t^* - u^*)}$. Din congruența celor două arce rezultă congruența coardelor corespunzătoare, și teorema este demonstrată.

Dacă $0 \leq t^* \leq u^* < 2\pi$, se demonstrează în mod analog că $F(t^*)F(u^*) = AF(u^* - t^*)$ și ținind seama de lema 3, teorema este demonstrată în toate cazurile.

Definiție. Fie M o mulțime oarecare. O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ se numește periodică dacă există $T \neq 0$, astfel încât

$$(5) \quad f(x + T) = f(x) \text{ pentru orice } x \text{ din } \mathbb{R}.$$

Numărul T se numește perioadă a lui f . Dacă printre perioadele strict pozitive ale lui f există un cel mai mic număr T_0 , atunci T_0 se numește perioada principală.

Teoremă 4. Dacă T_0 este perioada principală a lui f , atunci perioadele lui f sunt numerele kT_0 , unde $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstrăție. Avem

$$f(x) = f(x + T_0) = f(x + T_0 + T_0) = \dots = F(x + T_0 + T_0 + \dots + T_0).$$

Pe de altă parte, $f(x - T_0) = f(x - T_0 + T_0) = f(x)$, deci

$$f(x) = f(x - T_0) = f(x - T_0 - T_0) = \dots = f(x - T_0 - T_0 - \dots - T_0).$$

Așadar numerele kT_0 , unde $k \in \mathbb{Z}$, sunt perioade. Rămîne de demonstrat că orice perioadă T este de forma kT_0 , $k \in \mathbb{Z}$. Fie k partea întreagă a numărului $\frac{T}{T_0}$, adică

$$k \leq \frac{T}{T_0} < k + 1.$$

De aici $kT_0 \leq T < kT_0 + T_0$ sau $0 \leq T - kT_0 < T_0$. Există deci numerele $k \in \mathbb{Z}$ și $T^* \in [0, T_0]$, astfel ca

$$(6) \quad T = T^* + kT_0.$$

Numărul T^* este și el perioadă, deoarece $f(x + T^*) = f(x + T - kT_0) = f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum $0 \leq T^* < T_0$ și T_0 este cea mai mică perioadă strict pozitivă, rezultă $T^* = 0$. Deci, conform cu (6), orice perioadă T este de forma kT_0 , $k \in \mathbb{Z}$, și lema este demonstrată.

Teorema 3. Funcția F de acoperire universală a cercului unitate este periodică de perioadă principală 2π .

Demonstrație. Formula (3) arată că F admite ca perioade numerele $2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Dintre acestea, cel mai mic număr strict pozitiv este 2π . O perioadă $T \in (0, 2\pi)$ nu poate exista, căci $F(0)$ și $F(T)$ fiind puncte diferite pe C , pentru $x = 0$, $F(x + T) \neq F(x)$. Rezultă că 2π este perioada principală a lui F .

Exerciții

1. Să se determine coordonatele punctelor:

$$F(5\pi), F(-7\pi), F\left(\frac{13\pi}{4}\right), F\left(-\frac{15\pi}{4}\right), F(103\pi), F\left(\frac{103\pi}{2}\right), F\left(\frac{103\pi}{4}\right).$$

2. Punctele P_1, P_3 și P_2, P_4 sunt respectiv pe bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate și pe cercul unitate C (fig V.7). Să se afle toate numerele reale t pentru care:

a) $F(t) = P_1$, b) $F(t) = P_2$, c) $F(t) = P_3$, d) $F(t) = P_4$.

3. Să se arate că $F(t)$ și $F(-t)$ sunt simetrice față de dreapta OA .

4. Să se arate că $F(t)$ și $F(\pi - t)$ sunt simetrice față de OB .

5. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ și $F\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

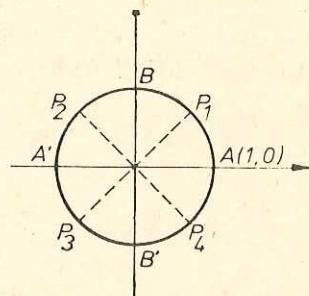


Fig. V.7

§ 2. Funcțiile trigonometrice sin și cos

Prin funcția F de acoperire universală fiecărui număr real t î se asociază un punct unic $F(t) = M(x, y)$ de pe cercul unitate C . Coordonatele x și y sunt și ele unic determinate, dacă t este dat. Vom nota

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

definind astfel două funcții

$$\cos: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ și } \sin: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

numite *funcții trigonometrice*, care prelungesc funcțiile cos și sin, introduse în Cap. IV, § 4, de la $[0, \pi]$ la \mathbf{R} .

Avem ca exemple de valori numerice ale acestor funcții:

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{2} = -\cos \left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{11\pi}{6} = -\cos \left(\frac{11\pi}{6} - \pi\right) = -\cos \frac{5\pi}{6} = \\ &= -\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \pi \cos \frac{\pi}{6} - \sin \pi \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{57\pi}{7} = \sin \left(8\pi + \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Deoarece $(\cos t, \sin t)$ sint coordonatele unui punct de pe cercul C , $\cos t$ respectiv $\sin t$ au valoarea maxima 1 si valoarea minima -1, deci

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \text{ și } -1 \leq \sin t \leq 1.$$

Funcția F fiind periodică, funcțiile cos și sin sint și ele periodice și orice perioadă a lui F este o perioadă pentru cos și sin. Deci

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \text{ și } \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Arătăm acum că funcțiile cos și sin nu mai au alte perioade.

T e o r e m a 1. Funcțiile sin și cos au perioada principală 2π .

Demonstrație. Să presupunem că funcția sin ar admite o perioadă $T' \in \subset (0, 2\pi)$. Am avea $\sin(t + T') = \sin t$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. În particular, pentru $t = 0$, am avea $\sin T' = \sin 0 = 0$. Singurul număr care satisface condițiile $0 < T' < 2\pi$ și $\sin T' = 0$ este π . Dar π nu este perioadă pentru sin, deoarece, de exemplu numerele $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ și $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$ sunt distincte. Deci cea mai mică perioadă strict pozitivă a funcției sin este 2π .

Să presupunem că funcția cos admite perioada $T'' \in (0, 2\pi)$. Am avea $\cos(t + T'') = \cos t$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. În particular, pentru $t = 0$, $\cos T'' = \cos 0 = 1$. Deoarece nu există un număr T'' astfel ca $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos T'' = 1$, perioada cea mai mică strict pozitivă a funcției cos este 2π și teorema este demonstrată.

Orice punct $F(t)$ fiind pe C , numerele $x = \cos t$ și $y = \sin t$ verifică ecuația cercului C : $x^2 + y^2 = 1$ (Cap. IV. § 2), deci

$$(1) \quad \boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \forall t \in \mathbb{R}.}$$

T e o r e m a 2. Oricare ar fi, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(2) \quad \boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.}$$

Demonstrație. Conform teoremei 2, § 1 din acest capitol, $F(a) F(b) = A F(a - b)$. Avem $F(a) = M(\cos a, \sin a)$, $F(b) = M(\cos b, \sin b)$, $F(a - b) = M(\cos(a - b), \sin(a - b))$. Aplicând formula distanței dintre două puncte pentru $F(a) F(b)$, $A F(a - b)$ (calculele sunt aceleași ca la demonstrația teoremei din capitolul IV, § 4) și egalind rezultatele se obține formula (2).

C o n s e c i n ț ă. Oricare ar fi numărul x avem

$$(3) \quad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ și } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.}$$

Demonstrație. Într-adevăr

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

și

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \\ &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \end{aligned}$$

Definiție. O funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *pară* dacă

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

și se numește *impară* dacă

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3. Funcția trigonometrică cos este pară, iar funcția trigonometrică sin este impară.

Demonstrație. Deoarece

$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x$,
funcția cos este pară.

Din (3), (2) și paritatea funcției cos avem

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos x + \\ &+ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin x = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right)\sin x = \\ &= \sin\frac{3\pi}{2}\sin x = -\sin x, \end{aligned}$$

rezultă că funcția sin este impară.

Observație. Utilizând definițiile funcțiilor sin și cos, consecințele teoremulor 2 și 3, numerelor $\sin x$ și $\cos x$ pot fi calculate cu ajutorul unor numere de forma $\cos t$ sau $\sin t$, unde $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Acest procedeu de calcul poartă numele de *reducere la primul cadran*, deoarece puncte de pe C corespunzătoare numerelor $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se află în cadranul întii al axelor de coordonate.

De exemplu: $\sin \frac{121\pi}{14} = \sin\left(8\pi + \frac{9\pi}{14}\right) = \sin\frac{9\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{14}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{14}\right) =$
 $= \cos\frac{\pi}{7}$ și $\sin \frac{121\pi}{14}$ se calculează cu ajutorul numărului $\cos \frac{\pi}{7}$ (care se citește cu aproximare din tabelele trigonometrice), unde $\frac{\pi}{7} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Apli c a t i e. Știind că $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\cos a = \frac{3}{5}$, $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
 $\sin b = \frac{5}{13}$, să se calculeze $\cos(a - b)$.

Soluție. Deoarece $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ punctul $F(a)$ este situat în cadrul IV, deci $\sin a < 0$. Știind că $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ și $\cos a = \frac{3}{5}$, rezultă $\sin a = -\frac{4}{5}$. În mod analog se obține $\cos b = \frac{12}{13}$. Așadar

$$\cos(a - b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{16}{65}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze:

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| a) $\sin \frac{13\pi}{2}$, | e) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$, | i) $\cos 4125\pi$, |
| b) $\cos \frac{18\pi}{5}$, | f) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$, | j) $\sin 2115\pi$, |
| c) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | g) $\sin 18\pi$, | k) $\cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{28\pi}{3}$, |
| d) $\cos(-\pi)$, | h) $\cos 13\pi$, | l) $\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{20\pi}{3}$. |

2. Dacă $x \in (\pi, 2\pi)$ și $\cos x = \frac{7}{25}$, să se calculeze $\sin x$.

3. Să se stabilească care din următoarele funcții este pară și care este impară:

- | |
|--|
| a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^4 x$ |
| b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, |
| c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + 1$, |
| d) $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = \frac{x}{1+x^2}$. |

4. Să se calculeze:

a) $\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{13\pi}{28} + \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{13\pi}{28}$,

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x$.

5. Dacă $\sin x > 0$, $\cos y < 0$, $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, să se calculeze $\cos(x - y)$.

6. Să se arate că, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$:

- | |
|---|
| a) $1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$, |
| b) $2(1 + \cos a) - \sin^2 a = (1 + \cos a)^2$, |
| c) $\cos^3 a + \sin^3 a = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a)$. |

7. Știind că $a, b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos a = -0,8$, $\sin b = 0,96$, să se determine coordonatele punctului $F(a - b)$.

8. Să se determine coordonatele punctului $F(x)$ știind că $\sin x + \cos x = 0,2$ și $\cos x < 0$.

§ 3. Formule pentru $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\sin(a+b)$ și formule deduse din acestea

Cosinusul sumei. Să demonstrăm că, oricare ar fi numerele reale a și b avem:

$$(4) \quad \boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{aligned}$$

(S-a ținut seama de paritatea funcției cos și imparitatea funcției sin.)

Sinusul diferenței. Oricare ar fi numerele reale a și b avem:

$$(5) \quad \boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$$

Formula rezultă din

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

În demonstrație au fost folosite formulele (3) din paragraful 2.

Sinusul sumei. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci

$$(6) \quad \boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

Pentru a obține egalitatea se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin[a - (-b)] = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{aligned}$$

Exerciții

1. Să se calculeze:

a) $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \sin x$.

2. Să se arate că oricare ar fi numerele reale x și y , avem:

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} = \sin x$,

b) $\cos(x-y) \cos y - \sin(x-y) \sin y = \cos x$,

- c) $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$.
d) $\cos(x+y) - \cos(x-y) = 2 \sin x \sin(-y)$,
e) $\cos^2(x-y) - \cos^2(x+y) = 4 \sin x \cos x \sin y \cos y$,
f) $\cos^2 x + \cos^2 y - (\cos x - \cos y)^2 = \cos(x+y) + \cos(x-y)$,
g) $\cos(x-y) \cdot \cos(x+y) = \cos^2 x - \sin^2 y$,

h) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x - y\right) = \cos x \sin y - \sin x \cos y$,

i) $\sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$,

j) $(\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 = 2(\sin(x+y) + 1)$,

k) $\sin(x+y) + \cos(x-y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y)$.

3. Știind că $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin b = \frac{1}{2}$, $\cos c = \frac{5,6}{20}$, $\cos a < 0$, $\cos b > 0$, $\sin c < 0$, să se calculeze numerele $\cos(a+b+c)$ și $\cos(a+b-c)$.

4. Să se arate că oricare ar fi x număr real și k număr întreg avem:

a) $\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^k \cos x$,

b) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^{k+1} \sin x$.

Din formulele (2), (4), (6) se obțin alte formule utile în aplicații.

Formule pentru $\cos 2x$ și $\sin 2x$. Dacă în formulele (4) și respectiv (6) punem $a = b = x$, rezultă

$$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

și

$$\sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x.$$

Obținem formulele

(7)

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$$

și

(8)

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

Formula (8) se mai utilizează și sub forme de

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{ sau } \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Tot din (8) se deduc formulele

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \text{ și } |\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}.$$

Aplicație. Să se arate că $\sin 3x$ se poate exprima în funcție de $\sin x$.

Soluție. Avem $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

În plus, procedind în mod analog se obține

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Exerciții

5. Să se calculeze:

a) $\cos \frac{\pi}{8}$, b) $\sin \frac{3\pi}{8}$, c) $\sin \frac{11\pi}{8}$,

d) $\cos \frac{5\pi}{24}$, e) $\cos \frac{7\pi}{8}$.

6. Să se verifice identitățile:

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$, b) $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \sin x$,

c) $\cos 2x + 2 \sin^2 x = 1$, d) $1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin 2x$,

e) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

f) $3 \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2\sqrt{3} \sin \left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.

7. Să se arate că

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ și } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Indicație. Se scrie $\sin \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right) = \sin \pi$ sau

$$\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} = 0$$

și se obține

$$16 \cos^4 \frac{\pi}{5} - 12 \cos^2 \frac{\pi}{5} + 1 = 0.$$

8. Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{10}$ și $\cos \frac{\pi}{10}$.

9. Să se arate că

$$\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

10. Să se arate că expresia

$$E = \cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - \cos 2a \cos 2b$$

este constantă.

§ 4. Funcțiile tg și ctg

Cu ajutorul funcțiilor \sin și \cos se pot defini alte funcții trigonometrice. Au utilitate mai mare funcțiile tangentă și cotangentă notate respectiv cu tg și ctg .

Funcția tg . Fie \mathcal{A} mulțimea numerelor reale de forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Funcția tg se definește astfel:

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} - \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Se verifică ușor că funcția tg este o funcție impară.

Teorema 1. Fie $M = F(t)$, $t \in \mathbb{R} - \mathcal{A}$, punctul asociat cu t prin funcția F de acoperire universală a cercului unitate, d dreapta tangentă la C

în $A(1, 0)$ și $\{T\}$ intersecția dreptelor OM și d . Atunci T are coordonatele $(1, \operatorname{tg} t)$.

Demonstrație. Deoarece $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$, punctul M nu poate coincide cu B sau cu B' , deci dreptele OM și d (fig. V.8) sunt concurente. Coordonatele punctului T se obțin rezolvând sistemul format cu

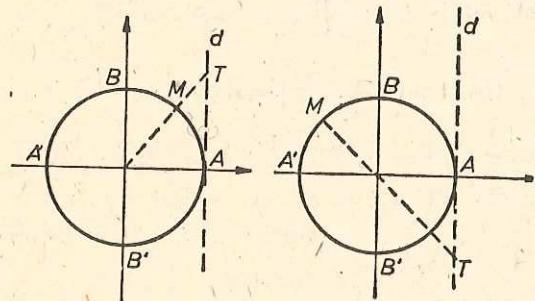


Fig. V.8

ecuațiile dreptelor OM și d . Deoarece M are coordonatele $(\cos t, \sin t)$ ecuația dreptei OM este $y = \frac{\sin t}{\cos t}x$. Ecuația dreptei d este $x = 1$. De aici rezultă că T are coordonatele $\left(1, \frac{\sin t}{\cos t}\right)$ și teorema este demonstrată.

Teorema 2. Funcția tg are perioada principală π .

Demonstrație. Deoarece, oricare ar fi x real,

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

numărul π este perioadă. Se pune problema de a decide dacă există perioade strict pozitive mai mici decât π . Ar însemna că, dacă T este o asemenea perioadă, $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$, rezultă $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0 = 0$. Am ajuns la o contradicție, deoarece nu există $T \in (0, \pi)$, astfel ca $\operatorname{tg} T = 0$. În consecință mulțimea perioadelor funcției tg este $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, perioada principală a ei fiind π .

Funcția ctg . Fie \mathcal{B} mulțimea numerelor reale de forma $k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Funcția ctg se definește astfel:

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Se verifică imediat că funcția ctg este impară.

De asemenea, se demonstrează în mod analog că are perioada principală π , deci are aceeași mulțime a perioadelor ca și funcția tg .

Din $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, rezultă că funcția ctg nu necesită un studiu separat deoarece este același cu studiul funcției

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

Formule în care apare funcția tg : Atunci cind sunt considerate expresii în care apar funcțiile tg și ctg , sau în care apar funcțiile tg , ctg , \sin și \cos la numitori, vom presupune că sunt excluse din considerații acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. Elevii vor determina în fiecare caz mulțimea valorilor care trebuie excluse.

Aveam

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Simplificând fracția cu $\cos a \cos b$ se obține:

(9)

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Procedind în mod analog ca în cazul formulei (9) se obține formula

(10)

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Din formula (9) pentru $a = b = x$ se deduce

(11)

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

De asemenea, din

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

rezultă

(12)

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

În continuare vom arăta că numerele $\sin x$ și $\cos x$ se exprimă fără radicali cu ajutorul numărului $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Avem

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1.$$

Din $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ deducem $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$. Înlocuind, se obține

(13)

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

De asemenea, pornind de la formula $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ se obține

(14)

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Apli c a t i e. Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$.

Soluție. Avem, conform formulei (12),

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{1 + \cos \frac{\pi}{12}}. \text{ Cum } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ și } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Rămîne ca exercițiu să se obțină acest rezultat utilizând formula (11).

Exerciții

1. Aflați $\operatorname{tg}(a + b)$, dacă $\sin a = \frac{1}{2}$, $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos a > 0$, $\sin b < 0$.

2. Să se verifice identitățile:

a) $\frac{\cos(a + b)}{\cos a \cos b} = 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b;$ b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x;$

c) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x};$ d) $\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{1 + \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b};$

$$\text{e) } \operatorname{ctg}(a+b) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}; \quad \text{f) } \frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \operatorname{ctg} 2x;$$

$$\text{g) } 2 \sin 2x - \frac{\sin 3x}{\cos x} = \operatorname{tg} x; \quad \text{h) } \operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a.$$

3. Se dau $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} b = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} c = \frac{1}{8}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b+c)$.

4. Știind că $\operatorname{tg} x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ să se calculeze expresia

$$E = m \sin 2x + n \cos 2x.$$

5. Dacă $5 \cos x + 10 \sin x - 11 = 0$, să se calculeze $\cos x$, $\sin x$ și $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

§ 5. Transformarea sumelor în produse

Folosind formule corespunzătoare, deducem

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b,$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b,$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b,$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b.$$

Dacă $a+b = p$ și $a-b = q$, atunci $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$.

Obținem următoarele formule de transformare a sumelor în produse:

$$(15) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(16) \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$(17) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(18) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Prin calcule simple se deduc formule de transformare a sumei și diferenței de tangente în produs.

$$(19) \quad \operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$$

În exerciții, uneori este util să se transforme produsele în sume. Asemenea formule se obțin din cele de mai sus:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2},$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2},$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

Formulele numerotate și puse în chenar trebuie memorate de către elev. Pentru a le aplica cu ușurință, este necesar să fie reținut și modul în care pot fi deduse.

Exerciții

1. Să se transforme în produs:

a) $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ,$ b) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ,$

c) $\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4},$ d) $\sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3},$

e) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x,$ f) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x.$

2. Să se verifice identitățile:

a) $\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \tg x \tg 4x,$ b) $\frac{1 + \cos 4x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{\cos 2x}{\sin x},$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 6 \cos x \cos 2x \cos 3x,$

d) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} = \tg 5x,$

e) $1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$

3. Să se transforme în produse următoarele sume:

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x,$$

$$T = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x + \cos 7x.$$

Indicație. Se recomandă, de exemplu, pentru suma S , să se calculeze $S \sin \frac{x}{2}$, să se transforme fiecare produs în sumă și aşa mai departe.

§ 6. Graficele funcțiilor sin, cos și tg

În paragrafele precedente am văzut cum fiecare număr real t poate fi asociat cu una sau alta dintre coordonatele punctelor de pe cercul unitate C pentru a defini funcțiile cos și sin. În acest paragraf vom învăța să trasăm graficul funcțiilor trigonometrice sin, cos și tg.

Graficul funcției sin. Să considerăm într-un plan un sistem de coordonate de reper (O, A, B) . Ne propunem să trasăm locul geometric al punctelor M din acest plan care au coordonatele de forma $x = t$, $y = \sin t$. Deoarece, din aceste egalități deducem $y = \sin x$, acest loc geometric este graficul funcției

$$\sin : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \rightarrow \sin x.$$

Proprietatea de periodicitate a acestei funcții dă graficului ei caracteristici speciale. Faptul că punctele de abscise $x + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, au aceeași ordonată $\sin x$, face posibilă trasarea graficului în intervalul $[0, 2\pi]$ și apoi să reproducem acest grafic în ambele sensuri de-a lungul axei absciselor pentru a obține ceea ce dorim din el.

Cind x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x$ crește de la valoarea $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ la valoarea $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Într-adevăr avem

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dacă $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci

$$0 < \frac{x_1 - x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ și } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2},$$

deci

$$\sin \frac{x_1 - x_2}{2} > 0, \quad \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$$

și astfel $\sin x_1 - \sin x_2 > 0$. Așadar în cazul $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x_1 > x_2 \Rightarrow \sin x_1 > \sin x_2$.

Se arată în mod analog că funcția sin este descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (în formula de mai sus factorul $\cos \frac{x_1 + x_2}{2}$ este negativ).

Tinând seama de periodicitate, funcția sin este crescătoare pe fiecare interval de formă $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ și este descrescătoare pe intervalele $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. Acestea sunt intervalele de monotonie ale funcției sin.

În tabelul următor sunt trecute valorile lui x multiplii de $\frac{\pi}{6}$ și valorile corespunzătoare lui $\sin x$. Săgețile \nearrow și \searrow indică creșterea, respectiv descreșterea valorilor funcției sin.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$0 \nearrow \frac{1}{2} \nearrow \frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow 1 \searrow \frac{\sqrt{3}}{2} \searrow \frac{1}{2} \searrow 0 \searrow -\frac{1}{2} \searrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow -1 \nearrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow -\frac{1}{2} \nearrow 0$												

Punctele ale căror coordonate se află în tabel sunt reprezentate în figura V.9, iar graficul funcției sin cînd $x \in [0, 2\pi]$ este trasat în figura V.10. Reproducînd cît dorim din graficul din figura V.10 în ambele sensuri de-a

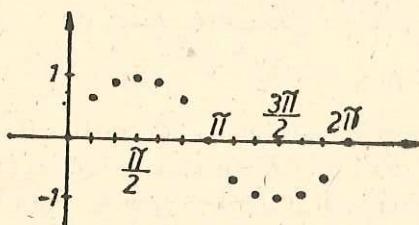


Fig. V.9

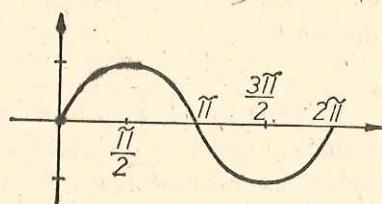


Fig. V.10

lungul axei absciselor se obține graficul funcției sin, figura V.11. Graficul funcției sin este inclus în portiunea de plan cuprinsă între dreptele de ecuații $y = 1$ și $y = -1$.

Semnul funcției sin. Funcția sin are valori numerice pozitive pe fiecare interval de forma $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ și are valori numerice negative pe fiecare interval de forma $(\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

Amplitudinea. Dacă M este valoarea maximă a unei funcții periodice, iar m este valoarea minimă, numărul $\frac{1}{2}(M-m)$ se numește *amplitudinea* acelei funcții. Rezultă că, deoarece $-1 \leq \sin x \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, amplitudinea funcției sin este $\frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$.

Aplicații

1. Să se stabilească semnul:

a) $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{12}$. b) $\sin \frac{\pi}{1,5} - \sin \frac{8\pi}{7}$. c) $\sin 2 - \sin \frac{2\pi}{3}$.

Soluție. a) Deoarece pe intervalul $[0, \frac{\pi}{7}]$ funcția sin este crescătoare și deoarece $\frac{\pi}{7} > \frac{\pi}{12}$, rezultă: $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{12} > 0$. b) Din $\sin \frac{\pi}{1,5} > 0$ și $\sin \frac{8\pi}{7} = \sin(\pi + \frac{\pi}{7}) < 0$, rezultă: $\sin \frac{\pi}{1,5} - \sin \frac{8\pi}{7} > 0$. c) Din $3,141 < \pi < 3,142$, rezultă $2,096 < \frac{2\pi}{3} < 2,097$. Deci $2 < \frac{2\pi}{3} < 3$ și $\sin 2 - \sin \frac{2\pi}{3} < 0$.

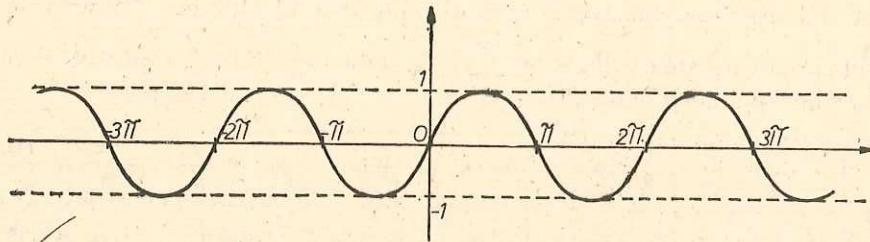


Fig. V.11

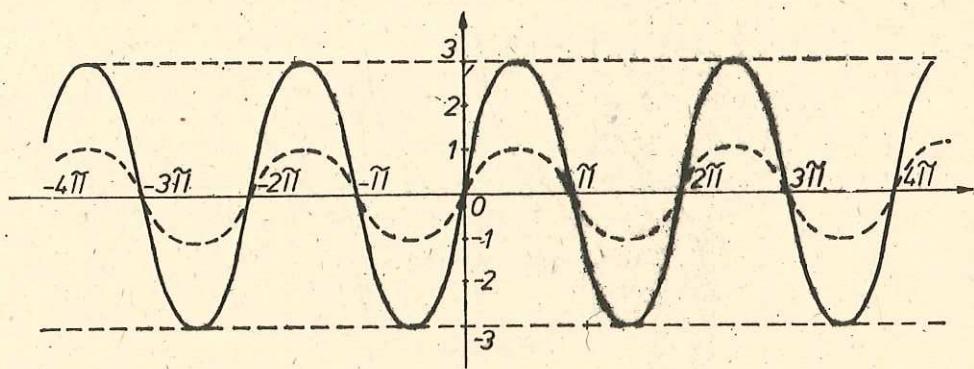


Fig. V.12

2. Să se reprezinte grafic funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3 \sin x.$$

Soluție. Funcția f are aceeași perioadă ca funcția sin și aceleași intervale de monotonie. Amplitudinea ei este

$$\frac{\max f - \min f}{2} = \frac{3 - (-3)}{2} = 3.$$

Valorile funcției f se obțin din valorile funcției sin prin înmulțirea cu 3, adică graficul funcției f este dilatat în lungul axei ordonatelor față de graficul funcției sin. Graficul funcției f este reprezentat în figura V.12 prin linie continuă pentru a-l deosebi de graficul funcției sin care este reprezentat prin linie întreruptă.

Graficul funcției cos. În tabelul următor sunt trecute cîteva perechi ordonate de numere de forma $(x, \cos x)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Funcția cos are aceeași perioadă principală și aceeași amplitudine ca și funcția sin. Graficul ei este schițat în figura V.13.

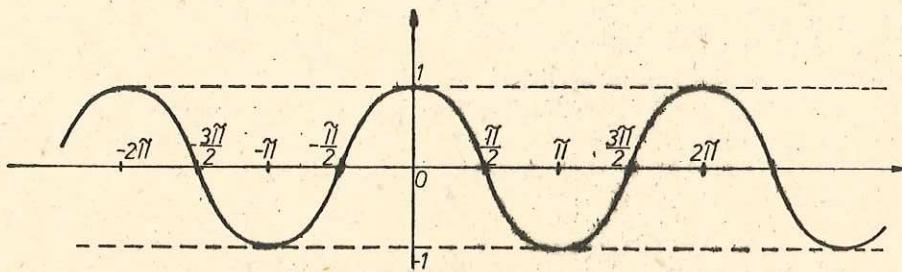


Fig. V.13

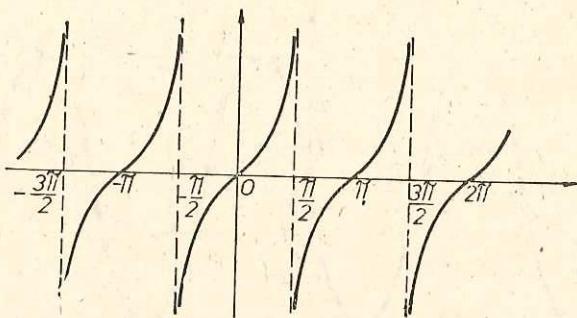


Fig. V.14

Intervale de monotonie. Funcția cos este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ și este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Semnul funcției cos. Funcția cos are valori numerice pozitive pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ și este negativă pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graficul funcției tg. Funcția tg fiind periodică de perioadă principală π se comportă la fel pe orice interval de lungime π de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Monotonie. Dacă $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x_1 < x_2$, atunci $x_1 - x_2 \in (-\pi, 0)$.

Din $\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2 = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2}$, $\sin(x_1 - x_2) < 0$, $\cos x_1 > 0$ și $\cos x_2 > 0$, rezultă $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

Funcția tg este deci strict crescătoare pe orice interval din domeniul ei de definiție.

Graficul. Din proprietatea de periodicitate rezultă că este suficient să construim graficul pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și apoi să-l reproducem în ambele sensuri de-a lungul axei absciselor (figura V.14).

Exerciții

1. Să se precizeze semnul numerelor:

a) $\sin 5 + \sin 4$, b) $\cos 2 + \cos 4$,

c) $\sin \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3}$, d) $\cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{11\pi}{6}$,

e) $\sin 7 \cos 13 \frac{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5}}{\sin \frac{23\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{9}}$, f) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{9\pi}{14}$.

2. Folosind graficul funcției sin, schițați graficele funcțiilor

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin x|,$ b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin |x|.$

3. Să se reprezinte grafic funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \sin x - 2.$$

4. Folosind graficul funcției tg, să se schițeze graficul funcției

$$f : \mathbb{R} - \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\operatorname{tg} x|.$$

§ 7. Identități condiționate

Unei egalități între două funcții i se mai spune *identitate*. De exemplu, toate formulele din § 2 – § 5, puse în chenare, sunt identități.

Dacă valorile funcțiilor f și g sunt egale numai pentru o submulțime din domeniul lor de definiție, atunci $g(x) = f(x)$ se numește *identitate condiționată*. Această noțiune se extinde și la cazul mai multor variabile.

Exemple

1. Dacă a, b, c sunt măsurile unghiurilor unui triunghi, atunci

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$$

Soluție. Egalitatea este o identitate condiționată, deoarece este verificată numai de acele valori ale lui a, b, c pentru care $a + b + c = \pi$. Din $c = \pi - (a + b)$, rezultă

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b + \cos c &= (\cos a + \cos b) - \cos(a + b) = \\ &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{a+b}{2} - 1 \right) = \\ &= 1 + 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b}{2} \right) = \\ &= 1 + 4 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Observație. Identitatea putea fi demonstrată și pornind de la transformarea sumei $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a + b + c)$ în produs, aşa cum se va proceda în exemplul următor.

2. Să se transforme în produs sumă

$$S = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$$

și să se scrie identitatea condiționată de $x + y + z = \pi$.

Soluție. Se scrie succesiv

$$\begin{aligned} S &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \cos \frac{x+y+2z}{2} \sin \frac{x+y}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y+2z}{2} \right) = \\ &= 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x+z}{2} \sin \frac{y+z}{2}. \end{aligned}$$

Scriind sub această formă suma, se obține identitatea condiționată dacă $x+y+z=\pi$, atunci

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}.$$

Identitatea condiționată poate fi demonstrată prin procedeul de la exemplul 1, fără a folosi suma S .

3. Dacă $a+b+c=\frac{\pi}{2}$ și $a, b, c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ atunci

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = 1.$$

Soluție. Dacă $a+b \neq \frac{\pi}{2}$, rezultă $c \neq 0$. Deci

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \\ &+ (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - a - b \right) = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a+b)} = \\ &= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 1. \end{aligned}$$

Dacă $a+b=\frac{\pi}{2}$, rezultă $c=0$. Din $a=\frac{\pi}{2}-b$, rezultă $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} b = 1$.

4. Dacă $a+b+c+d=2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, să se arate că $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = (-1)^{k+1} 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{a+d}{2}$.

Soluție. Din $d=2k\pi-(a+b+c)$, rezultă $\sin d = -\sin(a+b+c)$. Conform exemplului 2 avem

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}.$$

Deoarece $\frac{b+c}{2}=k\pi-\frac{a+d}{2}$, rezultă

$$\sin \frac{b+c}{2} = \sin \left(k\pi - \frac{a+d}{2} \right) = -\cos k\pi \sin \frac{a+d}{2} = -(-1)^k \sin \frac{a+d}{2}$$

și egalitatea este demonstrată.

Exercițiil

1. Dacă $x = y + z$, să se arate că:

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z$ pentru $\cos x \neq 0, \sin y \neq 0, \sin z \neq 0$.

b) $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$.

2. Dacă $a + b + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, atunci:

a) $\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^{k+1} 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$.

b) $\cos a + \cos b + \cos c + 1 = (-1)^k 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$.

3. Dacă $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$, atunci $3 \operatorname{tg} t + 4 \operatorname{ctg} t - 7 = 0$.

Indicație: Dacă $x = \cos t$ și $y = \sin t$, rezolvând sistemul $3x + 4y + 5 = 0$ și $x^2 + y^2 = 1$, se obține $\cos t = -\frac{3}{5}$ și $\sin t = -\frac{4}{5}$. Cu aceste valori egalitatea a doua este verificată.

4. Dacă $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$, să se arate că $\sin 2t = \frac{24}{25}$. Reciproca este adevărată?

Indicație: Prima egalitate este aceeași ca și în exercițiul precedent, deci $\cos t = -\frac{3}{5}, \sin t = -\frac{4}{5}$. Deoarece egalitatea $\sin 2t = \frac{24}{25}$ este adevărată și pentru $\cos t = \frac{3}{5}, \sin t = \frac{4}{5}$, reciproca nu este adevărată.

Ecuații trigonometrice

§ 1. Relații, funcții

Fie două multimi M_1 și M_2 și o proprietate referitoare la perechile ordonate (x, y) , unde $x \in M_1$ și $y \in M_2$. Multimea tuturor perechilor ordonate (x, y) ale produsului cartezian $M_1 \times M_2$ care fac adevărată proprietatea dată se numește relație.

Exemplu 1. Dacă $x \in \{-2, 1, 2, 3\}$, $y \in \{-1, 2, 5, 8, 12, 15\}$ și proprietatea dată este $y = 3x - 1$, avem relația

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8)\}.$$

2. Dacă $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ și proprietatea dată este $y = 3x - 1$, avem relația

$$R_2 = \{(x, y) \mid y = 3x - 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

3. Dacă $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0, +\infty)$ și proprietatea dată este $y = x^2$, avem relația

$$R_3 = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbb{R}, y \in [0, +\infty)\}.$$

4. Dacă $x \in \{-3, 3, 4\}$, $y \in \{-4, -3, 3, 4\}$ și proprietatea dată este $x^2 + y^2 = 25$, avem relația

$$R_4 = \{(-3, -4), (-3, 4), (3, -4), (3, 4), (4, -3), (4, 3)\}.$$

Relațiile R_1 , R_2 , R_3 din exemplele 1, 2, 3 sunt relații funcționale sau funcții, deoarece orice element din prima mulțime este asociat cu un singur element din mulțimea a două. Relația R_4 din exemplul 4 nu este funcție, deoarece un element din prima mulțime, de exemplu 3, este asociat atât cu -4 cât și cu 4. Deci în timp ce orice funcție este o relație, nu orice relație este funcție.

Dacă într-o relație se schimbă între ele elementele componente ale fiecărei perechi ordonate se obține așa-numita *relație inversă* a relației respective. Dacă R este o relație, inversa ei se notează cu R^{-1} . Relațiile inverse ale relațiilor din exemplele 1, 2, 3, 4 sunt: $R_1^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (8, 3)\}$,

$$R_2^{-1} = \{(x, y) \mid x = 3y - 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

$$R_3^{-1} = \{(x, y) \mid x = y^2, y \in \mathbb{R}, x \in [0, +\infty)\},$$

$$R_4^{-1} = \{(-4, -3), (4, -3), (-4, 3), (4, 3), (-3, 4), (3, 4)\}.$$

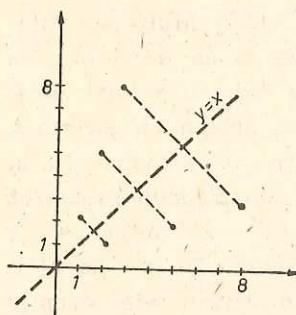


Fig. VI.1

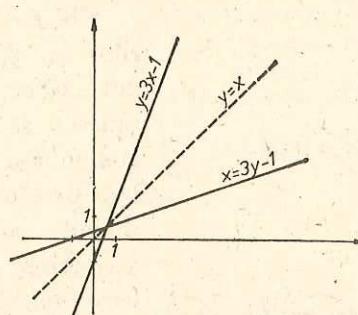


Fig. VI.2

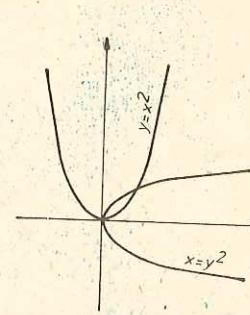


Fig. VI.3

Funcțiile fiind relații, ele au relație inversă. Dacă și aceasta este funcție, atunci ea este funcția inversă a funcției date.

De menționat este faptul că, deși R_3 este funcție, inversa ei R_3^{-1} nu este funcție. Într-adevăr, de exemplu, numărul 9 este asociat prin R_3^{-1} atât cu -3 cât și cu 3 și nu se respectă cerințele definiției unei funcții.

Relațiile ale căror elemente sint perechi de numere se numesc relații numerice. În acest capitol ne vom ocupa numai cu relații numerice.

Locul geometric al punctelor din plan ale căror coordonate sint elementele unei relații se numește graficul relației.

Graficele relațiilor R și R^{-1} sint simetrice față de prima bisectoare (dreapta de ecuație $y = x$). Într-adevăr dacă $P(a, b)$ este punct al graficului lui R , atunci $P'(b, a)$ este punct al graficului lui R^{-1} și ecuația dreptei perpendiculare pe dreapta PP' prin mijlocul segmentului (PP') este $y = x$.

Graficele relațiilor R_1 și R_1^{-1} din exemplul 1 sint reprezentate în figura VI.1, cele ale relațiilor R_2 și R_2^{-1} din exemplul 2 în figura VI.2 și cele ale relațiilor R_3 și R_3^{-1} din exemplul 3 în figura VI.3.

§ 2. Inversarea funcțiilor trigonometrice

Funcția $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $y = \sin x$ nu admite funcție inversă. Într-adevăr în relația

$$\sin^{-1} = \{(x, y) \mid x = \sin y, x \in [-1, 1], y \in \mathbb{R}\}$$

același număr, de exemplu $\frac{1}{2}$, este asociat cu o infinitate de numere distincte de forma $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ și de asemenea, cu $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ și se contrazice definiția funcției.

Graficele funcției \sin și cel al relației \sin^{-1} sint reprezentate în figura VI.4 (sint simetrice față de prima bisectoare). Din grafic rezultă că unei valori date lui x din intervalul $[-1, 1]$ i se asociază o infinitate de valori ale lui y astfel ca $x = \sin y$.

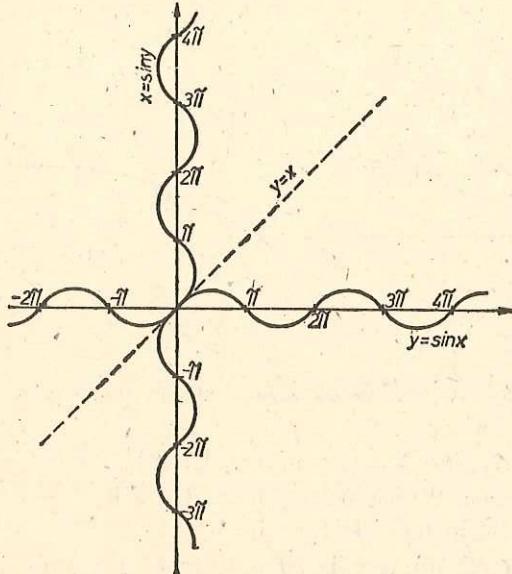
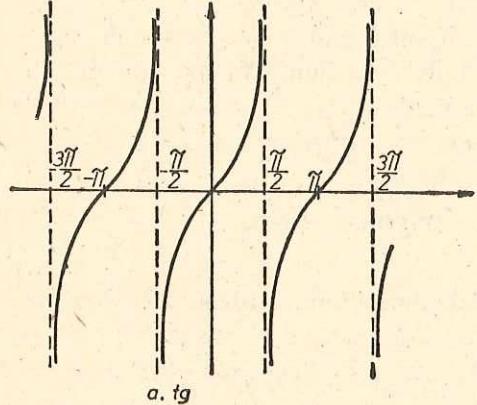


Fig. VI.4

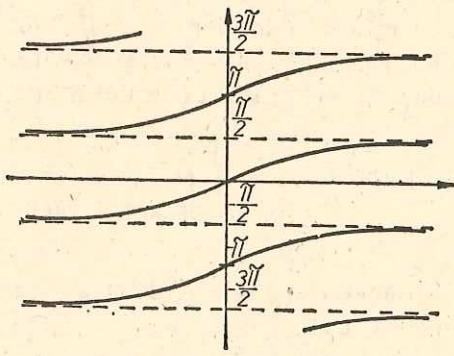
Fie $a \in [-1, 1]$. Multimea valorilor lui y , astfel ca $a = \sin y$, se notează cu $\sin^{-1} a$ sau se mai obișnuiește să se noteze cu Arcsin a . Denumirea Arcsin provine de la faptul că funcțiile trigonometrice sunt definite cu ajutorul funcției F de acoperire universală a cercului, care aplică intervale ale dreptei reale \mathbb{R} pe arce ale cercului unitate C .

În mod analog, funcția $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $y = \cos x$, nu admite funcție inversă. Vom folosi notații analoage cu cele de la funcția sin. Multimea valorilor lui y astfel ca $b = \cos y$ se notează cu $\cos^{-1} b$ sau Arccos b .

Graficul funcției $\operatorname{tg}: \mathbb{R} - \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = \operatorname{tg} x$ și cel al relației $\operatorname{tg}^{-1} = \{(x, y) \mid x = \operatorname{tg} y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} - \mathcal{A}\}$ sunt reprezentate în figura VI.5, a și respectiv VI.5.b. Se observă că relația tg^{-1} nu este funcție. Dacă $c = \operatorname{tg} y$, atunci $y \in \operatorname{tg}^{-1} c$ sau $y \in \operatorname{Arctg} c$.



a. tg



b. tg^{-1}

Fig. VI.5

§ 3. Funcțiile arcsin, arccos, arctg

Fie numerele reale date a, b, c , ($a, b \in [-1, 1]$, $c \in \mathbb{R}$). Multimile Arcsin a , Arccos b , Arctg c introduse în păragraful precedent au o infinitate de elemente. Ne propunem să distingem în fiecare din aceste multimi cite un element, cu ajutorul căruia să putem exprima toate celelalte elemente. Rezolv-

varea acestei probleme se poate face folosind alte funcții care sunt restricții potrivite ale funcțiilor \sin , \cos , tg și care să fie inversabile. Aceste restricții sunt:

$$\overline{\sin}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [1, 1], \quad y = \overline{\sin} x = \sin x,$$

$$\overline{\cos}: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad y = \overline{\cos} x = \cos x,$$

$$\overline{\operatorname{tg}}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = \overline{\operatorname{tg}} x = \operatorname{tg} x.$$

Dacă numărul real x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$ numărul $\overline{\sin} x$ parcurge intervalul $[1, 1]$, de la -1 la 1 , trecând prin fiecare punct al acestui interval o singură dată. Deci funcția $\overline{\sin}$ este bijectivă și admite inversă $\overline{\sin}^{-1}$, care se notează cu \arcsin și se scrie

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad y = \arcsin x.$$

În mod analog se poate arăta că există funcțiile inverse ale funcțiilor $\overline{\cos}$ și $\overline{\operatorname{tg}}$, care se notează cu \arccos și \arctg și se scriu astfel:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad y = \arccos x \text{ și } \arctg: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad y = \arctg x.$$

Graficele funcțiilor \arcsin , \arccos și \arctg sunt trăsate cu linie continuă respectiv în figurile VI.6, VI.7, VI.8. Cu linie întreruptă sunt trăsate graficele funcțiilor $\overline{\sin}$, $\overline{\cos}$ și $\overline{\operatorname{tg}}$ pentru a se vedea simetria față de dreapta de ecuație $y = x$.

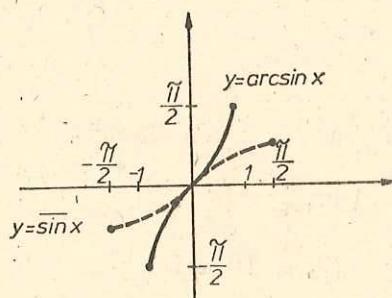


Fig. VI.6

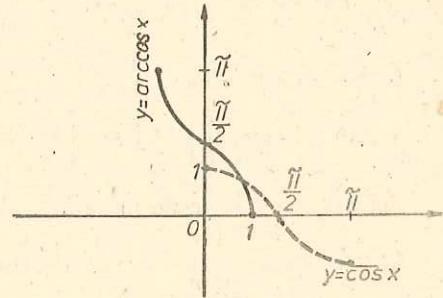


Fig. VI.7

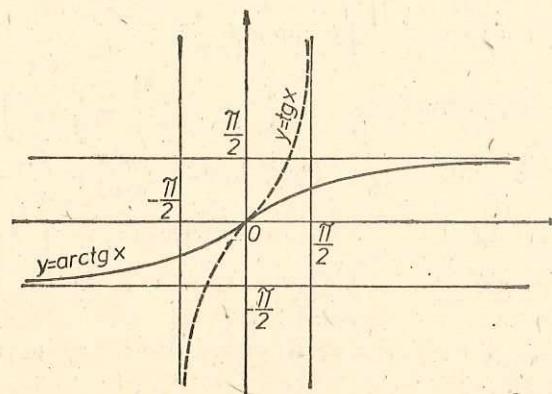


Fig. VI.8

1. Să se calculeze:

a) $\arcsin 1$, b) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, c) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, d) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Soluție. a) Din $\arcsin 1 = y$, rezultă $\sin y = 1$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci $y = \frac{\pi}{2}$ și $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

b) Din $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$, rezultă $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dar $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci $y = \frac{\pi}{3}$ și $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

c) Din $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, rezultă $\cos y = -\frac{1}{2}$ și $y \in [0, \pi]$. Dar $(-1) \cos y = -\frac{1}{2}$ și $-1 = \cos \pi$, $0 = \sin \pi$. Deci $\cos \pi \cos y + \sin \pi \sin y = \cos \frac{\pi}{3}$,

$$\cos(\pi - y) = \cos \frac{\pi}{3}, \pi - y = \frac{\pi}{3}. \text{ Așadar } y = \pi - \frac{\pi}{3} \text{ și } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

d) Din $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = y$, rezultă $\operatorname{tg} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ și $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dar $-\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}(-y) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $-y = \frac{\pi}{6}$. Deci $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -y = -\frac{\pi}{6}$.

2. Să se calculeze:

a) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$, b) $\sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$, c) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{24}\right)$.

Soluție. a) Deoarece $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, rezultă $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Din $\arccos \frac{5}{13} = x$, rezultă $\cos x = \frac{5}{13}$ și $x \in [0, \pi]$. Deoarece $\sin x \geq 0$,

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{12}{13}. \text{ Deci}$$

$$\sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right) = \sin x = \frac{12}{13}.$$

c) Dacă $\arcsin \frac{4}{5} = x$, atunci $\sin x = \frac{4}{5}$ și $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Deoarece $\cos x \geq 0$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{5}$. Deci $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$. La fel, din $\operatorname{arctg} \frac{7}{24} = y$, rezultă $\operatorname{tg} y = \frac{7}{24}$. Așadar $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{24}\right) = \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{3(32 + 7)}{72 - 28} = \frac{117}{44}$.

3. Dacă $a \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$, $c \in \mathbf{R}$, să se arate că: a) $\sin(\arcsin a) = a$, b) $\cos(\arccos b) = b$,

$$c) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} c) = c. \quad d) \sin(\arccos b) = \sqrt{1 - b^2},$$

$$e) \cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}. \quad f) \operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad a \neq 0.$$

$$g) \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Soluție. a) Din $\arcsin a = x$, rezultă $\sin x = a$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Deci $\sin(\arcsin a) = \sin x = a$.

Egalitățile b) și c) se demonstrează în mod analog.

d) Din $\arccos b = x$ rezultă $\cos x = b$, $x \in [0, \pi]$.

Deci $\sin x \geq 0$ și $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - b^2}$. Așadar $\sin(\arccos b) = \sin x$ și egalitatea este demonstrată.

e) Se demonstrează ca în cazul d).

f) Din $\arccos a = y$, rezultă $\cos y = a$, $y \in [0, \pi]$. Deci $\sin y \geq 0$.

Dar $a \neq 0$, deci $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Așadar

$$\operatorname{tg}(\arccos a) = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

g) Egalitatea rezultă din $\sin(\arcsin a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = a$.

4. Să se arate că, dacă $a \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$, $c \in \mathbb{R}$, atunci:

a) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, b) $\arccos(-b) = \pi - \arccos b$, c) $\operatorname{arctg}(-c) = -\operatorname{arctg} c$, d) $\cos(4 \arccos b) = 8b^4 - 8b^2 + 1$.

Soluție. a) Din $\arcsin(-a) = x$, rezultă $\sin x = -a$, $-\sin x = a$, $\sin(-x) = a$, $-x = \arcsin a$. Deci $\arcsin(-a) = x = -\arcsin a$.

b) Din $\arccos(-b) = x$, rezultă $\cos x = -b$, $-\cos x = b$, $\cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = b$, $\cos(\pi - x) = b$. Deci $\pi - x = \arccos b$ și $\arccos(-b) = x = \pi - \arccos b$.

c) Se demonstrează ca în cazul a).

d) Din $\arccos b = x$, rezultă $\cos x = b$. Deci

$$\cos(4 \arccos b) = \cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 = 8b^4 - 8b^2 + 1.$$

5. Dacă $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, să se arate că:

$$\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Soluție. Se observă că $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x^2) = x^2$ și $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{\frac{1}{x^2}} = -x^2$.

Înseamnă că $\operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, egalitate care se mai scrie:

$$\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Deoarece $x^2 > 0$, $\arctg x^2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\arctg \frac{1}{x^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Deci $\arctg x^2 + \arctg \frac{1}{x^2} \in (0, \pi)$. Așadar egalitatea poate avea loc numai pentru $k = 0$.

6. Dacă $x \geq 1$, să se arate că

$$2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi.$$

Soluție. Pentru $x = 1$, egalitatea este verificată. Presupunem că $x > 1$ și fie $y = 2 \arctg x$, $z = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Atunci $\tg y = \frac{2 \tg(\arctg x)}{1 - \tg^2(\arctg x)} = \frac{2x}{1-x^2}$ și $\tg(\pi - z) = -\tg z$. Deoarece $x > 1$, $z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos z > 0$. Avem $\sin z = \frac{2x}{1+x^2}$ și $\cos z = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Deci $\tg z = \frac{2x}{x^2 - 1}$ și $\tg(\pi - z) = -\frac{2x}{1-x^2}$. Din $\tg y = \tg(\pi - z)$, rezultă $y = \pi - z + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Singura posibilitate este $k = 0$, deoarece $\frac{\pi}{4} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$, iar z este situat în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Așadar egalitatea este demonstrată.

Enunțul se putea da și sub forma: Să se arate că

$$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

este o funcție constantă.

Rămîne ca exercițiul să se arate că

$$g: (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

este o funcție constantă și să se determine acea constantă.

Funcția $h: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ nu este constantă. Într-adevăr se pot găsi două valori distincte ale ei. De exemplu, $h(0) = 0$ și $h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

Exerciții

1. Să se afle numerele:

a) $\arccos \frac{1}{2}$, b) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, c) $\sin(\arctg \sqrt{3})$,

d) $\tg\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, e) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5}\right)$,

f) $\sin\left(3 \arcsin \frac{1}{4}\right)$.

2. Dacă $x = 2 \arctg \frac{1}{3}$ să se calculeze $\sin x$ și $\cos x$.

3. Să se determine x astfel ca

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Să se arate că:

a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

b) $\arcsin \frac{7}{25} + \arccos \frac{24}{25} = \arcsin \frac{336}{625}$.

c) Dacă a și b sunt numere reale, $a \neq 0$, să se arate că

$$\arcsin \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} + \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2} = \frac{\pi}{2},$$

d) $\arcsin \frac{\sqrt{330}}{22} + \arccos \frac{\sqrt{154}}{22} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{105}}{4} = \pi$,

e) $\arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$,

f*) $\operatorname{arctg} \frac{4x}{5 - 3x} - \operatorname{arctg} \frac{5x - 3}{4} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}, \quad x < \frac{5}{3}$. (De ce?)

g) $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = \operatorname{tg}(x + \operatorname{arctg} 2), \quad \operatorname{tg} x \neq \frac{1}{2}$.

5. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\arcsin \frac{1}{1+x^2} + \arccos \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$,

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$,

c) $\cos(3 \arccos x) = \cos(2 \arccos x) + 1$.

§ 4. Ecuății trigonometrice fundamentale

Fie funcția $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$, unde $E \subset \mathbb{R}$, iar $f(x)$ depinde de x numai prin intermediul funcțiilor sin, cos, tg, ctg. O egalitate de forma

$$f(x) = 0$$

se numește *ecuație trigonometrică*.

Există ecuații trigonometrice verificate pentru orice valori date variabilei (identități), ecuații verificate numai pentru anumite valori date variabilei și ecuații care nu sunt verificate pentru nici o valoare dată variabilelor (de exemplu $\sin x = 2$).

Valorile variabilei care verifică ecuația trigonometrică se numesc soluții ale ecuației. A rezolva ecuația înseamnă a-i afla soluțiile.

Ecuății trigonometrice $\sin t = a$, $\cos t = b$, $\operatorname{tg} t = c$ se numesc *ecuații trigonometrice fundamentale*. Conform paragrafului 2, soluțiile acestor ecuații sunt respectiv elementele mulțimilor $\operatorname{Arcsin} a$, $\operatorname{Arccos} b$, $\operatorname{Arctg} c$.

Ecuția $\sin t = a$. Deoarece $\sin t \in [-1, 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ecuația are soluții dacă și numai dacă $a \in [-1, 1]$. Pentru fiecare valoare dată lui a , pe cercul

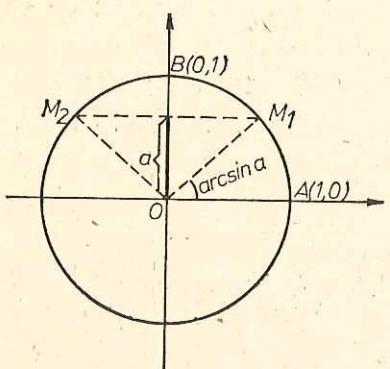


Fig. VI.9

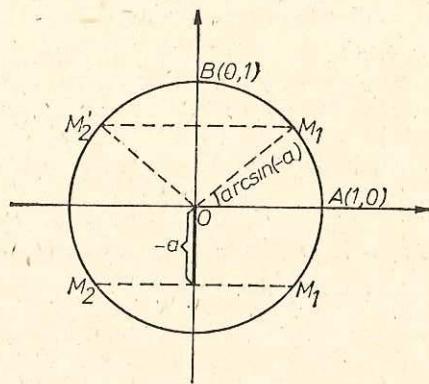


Fig. VI.10

unitate C există cel mult două puncte de ordonată a . Într-adevăr, din $\sin t = a$, rezultă $\cos t = \pm \sqrt{1 - a^2}$. Deci cele două puncte sunt $M_1(\sqrt{1 - a^2}, a)$, $M_2(-\sqrt{1 - a^2}, a)$ și având abscisele numere opuse și aceeași ordonată, sunt simetrice față de axa ordonatelor (figura VI.9 pentru $0 < a < 1$ și figura VI.10 pentru $-1 < a < 0$). Există un singur punct cind $a = 1$ sau $a = -1$.

Dacă se cunosc două soluții ale ecuației, corespunzătoare celor două puncte M_1 și M_2 , celelalte soluții se pot scrie cu ajutorul lor. Conform definiției funcției arccosin, o soluție a ecuației $\sin t = a$, este $t_1 = \arcsin a$, deoarece $\sin t_1 = \sin(\arcsin a) = a$. Deci $F(t_1) = M_1(\sqrt{1 - a^2}, a)$. De asemenea, deoarece $\sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a$, $t_2 = \pi - t_1 = \pi - \arcsin a$ este o a doua soluție și $F(t_2) = M_2(-\sqrt{1 - a^2}, a)$. Înțînd seama de periodicitatea funcției F , soluțiile ecuației $\sin t = a$, sunt $\text{Arcsin } a = \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, ecuația $\sin t = 1$ are soluțiile

$$\text{Arcsin } 1 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ecuația $\sin t = -1$ are soluțiile

$$\text{Arcsin } (-1) = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

și ecuația $\sin t = 0$ are soluțiile

$$\text{Arcsin } 0 = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplu. 1. $\sin x = \frac{3}{4}$. Ecuația are ca mulțime a soluțiilor $\text{Arcsin } \frac{3}{4} = \sin^{-1} \frac{3}{4} = \left\{ \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. $\sin x = -\frac{1}{2}$. Deoarece $\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{6}$, ecuația are ca mulțime a soluțiilor.

$$\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Observație. Deoarece

$\text{Arcsin } a = \{(-1)^{2k} \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1)^{2k+1} \arcsin a + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
prin efectuarea operației de reuniune, rezultă

$$(1) \quad \text{Arcsin } a = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

De multe ori este comod ca mulțimea soluțiilor ecuației $\sin t = a$, $a \in [-1, 1]$ să se rețină sub forma (1).

Exemplu 3. $\sin x = -\frac{1}{3}$. Deoarece $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arcsin\frac{1}{3}$, avem

$$x \in \left\{ (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ecuația $\cos t = b$. Deoarece $\cos t \in [-1, 1]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ecuația are soluții dacă și numai dacă $b \in [-1, 1]$.

Dacă b este dat, din $\cos t = b$, rezultă $\sin t = \pm \sqrt{1 - b^2}$. Înseamnă că pe cercul unitate C există numai două puncte $M_1(b, \sqrt{1 - b^2})$ și $M_2(b, -\sqrt{1 - b^2})$ de abscisă b . Aceste puncte sunt simetrice față de axa absciselor (figura VI.11, pentru $b \geq 0$ și figura VI.12, pentru $b < 0$). Deoarece $\cos t = b$ și $\cos(-t) = \cos t = b$, numerele $t_1 = \arccos b$ și $t_2 = -t_1 = -\arccos b$ aparțin mulțimii $\text{Arccos } b$ și $F(t_1) = M_1$, $F(t_2) = M_2$. Periodicitatea funcției F ne dă posibilitatea să scriem

$$(2) \quad \text{Arccos } b = \{\arccos b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

În particular, soluțiile ecuațiilor $\cos t = 1$, $\cos t = -1$ și $\cos t = 0$ sunt respectiv:

$$\text{Arccos } 1 = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{Arccos}(-1) = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ și}$$

$$\text{Arccos } 0 = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemplu 1. $\cos x = \frac{1}{2}$. Deoarece $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, rezultă

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

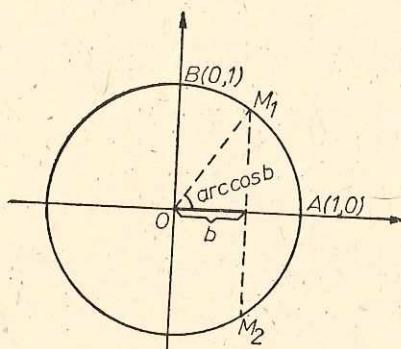


Fig. VI. 11

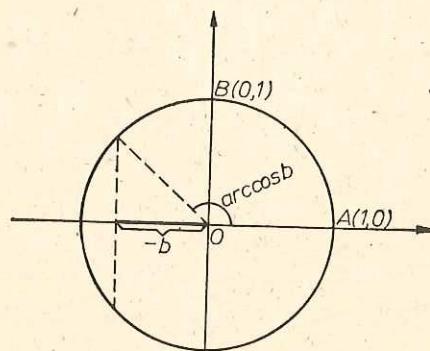


Fig. VI.12

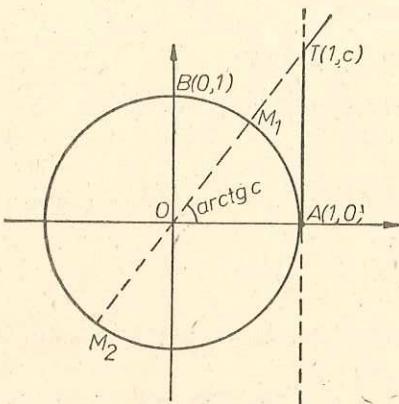


Fig. VI.13

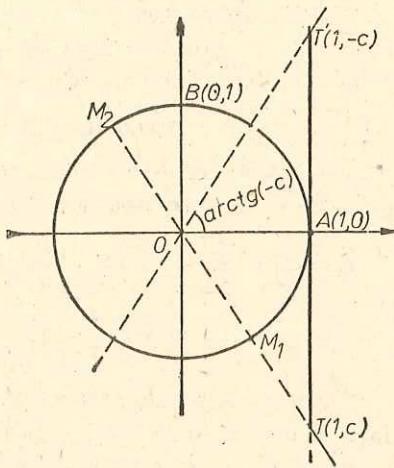


Fig. VI.14

2. $\cos x = -\frac{3}{4}$. Deoarece $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{4}$, rezultă

$$x \in \left\{ \pi - \arccos \frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\pi + \arccos \frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ecuatia $\operatorname{tg} t = c$. Deoarece $\operatorname{tg} t$ ia toate valorile reale cind $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ecuația are soluții, oricare ar fi valorile reale ale lui c . Atunci cind c este dat, pe dreapta de ecuație, $x = 1$, există un singur punct T , care are coordinatele $(1, c)$. Dreapta OT (figura VI.13 pentru $c \geq 0$ și figura VI.14 pentru $c < 0$) intersectează cercul C în punctele M_1 și M_2 . Dacă $t_1 = \operatorname{arctg} c$, atunci $F(t_1) = M_1$ și $F(\pi + t_1) = M_2$. Deci $\operatorname{tg} t_1 = c$ și $\operatorname{tg}(\pi + t_1) = c$. Înținând seama de periodicitatea funcției tg , soluțiile ecuației $\operatorname{tg} t = c$ sunt

$$(3) \quad \operatorname{Arctg} c = \{\operatorname{arctg} c + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple. 1. $\operatorname{tg} x = 5$. Multimea soluțiilor este

$$\operatorname{Arctg} 5 = \{\operatorname{arctg} 5 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$. Deoarece $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ rezultă

$$t \in \operatorname{Arctg}(-\sqrt{3}) = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. $\operatorname{ctg} x = -4$. Din $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -4$, rezultă $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}$ și

$$x \in \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) = \left\{ -\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. $\operatorname{ctg} x = 0$. În acest caz nu se poate apela la funcția tg , dăr $\frac{\cos x}{\sin x} = 0$.

De aici $\cos x = 0$ și $\sin x \neq 0$, sau

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A p l i c a t i i . 1. Să se rezolve ecuațiile

- a) $\sin f(x) = \sin g(x)$, b) $\cos f(x) = \cos g(x)$, c) $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$, unde f și g sunt funcții definite pe aceeași mulțime $A \subset \mathbb{R}$.

Soluție. a) Ecuația se scrie succesiv: $\sin f(x) - \sin g(x) = 0$,

$2 \cos \frac{f(x) + g(x)}{2} \sin \frac{f(x) - g(x)}{2} = 0$. Ecuația are soluții dacă și numai dacă există un număr întreg k astfel ca

$$f(x) + g(x) = \pi + 2k\pi \text{ sau } f(x) - g(x) = 2k\pi.$$

b) Scriem ecuația succesiv: $\cos f(x) - \cos g(x) = 0$,

$$2 \sin \frac{f(x) + g(x)}{2} \sin \frac{g(x) - f(x)}{2} = 0.$$

Constatăm că are soluții dacă și numai dacă există numărul întreg k astfel ca

$$f(x) + g(x) = 2k\pi \text{ sau } g(x) - f(x) = 2k\pi.$$

c) Ecuația se scrie $\frac{\sin[f(x) - g(x)]}{\cos f(x) \cos g(x)} = 0$. Are soluții dacă și numai dacă

există numărul întreg k astfel ca

$$f(x) - g(x) = k\pi, \cos f(x) \neq 0, \cos g(x) \neq 0.$$

2. Să se determine mulțimea valorilor lui x astfel ca:

a) $\cos 4x = \cos x$, b) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$,

c) $\sin 5x = \cos 2x$, d) $\sin(x^2 + x) = \sin(x + 1)$.

Soluție. a) Conform aplicației 1. obținem $4x_k = \pm x_h + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deci, $x'_k = \frac{2k\pi}{3}$ sau $x''_k = \frac{2k\pi}{5}$. Soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\left\{ \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Se obține $3x_k = x_h + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $x_k = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dar $\cos x \neq 0$ și $\cos 3x \neq 0$. Așadar $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Din $\sin 5x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$, rezultă $5x_k = (-1)^h \left(\frac{\pi}{2} - 2x_h \right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\left\{ \frac{(-1)^h \frac{\pi}{2} + k\pi}{5 + 2(-1)^h} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) Avem $x_k^2 + x_k = x_h + 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $x_k^2 + x_k = \pi - x_h - 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezolvând ecuațiile de gradul doi și punind condițiile de existență ale radicalilor, soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\begin{aligned} & \left\{ \sqrt{1 + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -\sqrt{1 + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup \\ & \cup \left\{ -1 + \sqrt{(2k+1)\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -1 - \sqrt{(2k+1)\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Exerciții

Să se rezolve ecuațiile:

a) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$,

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$,

c) $\sin 3x = \cos x$,

d) $\operatorname{tg} 5x = -1$,

e) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$,

f) $\sin(x^2) = \sin x$,

g) $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Soluție. Calculând $\sin 5x$, se obține $\sin 5x = 1$, deci $x_k = \frac{(4k+1)\pi}{10}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deoarece $0 < \sin x < \frac{1}{2}$, se păstrează din intervalul $[0, 2\pi]$ numai soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{10}$

și $x_2 = \pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$. Înțînd seama de periodicitatea funcției sin, soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\left\{ \frac{\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

§ 5. Ecuații trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebră

Cîteva exemple sănt suficiente pentru a lămuri unele situații mai importante care apar atunci cînd se rezolvă asemenea ecuații.

1. $2\sin^2 x + \sin x + 3 = 0$. Se notează $\sin x = y$. Rezultă $2y^2 + y + 3 = 0$. Deoarece $\Delta = (-1)^2 - 24 = -23 < 0$ și deoarece $\sin x$ este număr real, ecuația nu are soluții.

2. $\cos^2 x - 5 \cos x + 6 = 0$. Dacă $\cos x = y$, rezultă $y^2 - 5y + 6 = 0$. Deoarece $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ și deoarece $\cos x \neq 2$, $\cos x \neq 3$, ecuația nu are soluții.

3. $2\cos^2 t - 11 \cos t + 5 = 0$. Dacă $\cos t = x$, rezultă $2x^2 - 11x + 5 = 0$. Așadar $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = 5$. Cum $\cos t \neq 5$, rezultă $\cos t = \frac{1}{2}$ și ecuația are soluții. Deci

$$t \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. $\sin^2 t - 14 \cos^2 t - 11 \sin t + 16 = 0$. Ecuația se mai scrie $\sin^2 t - 14(1 - \sin^2 t) - 11 \sin t + 16 = 0$, $15 \sin^2 t - 11 \sin t + 2 = 0$. Punind $\sin t = x$, rezultă $15x^2 - 11x + 2 = 0$. Deci $x_1 = \frac{1}{3}$ sau $x_2 = \frac{2}{5}$. Din

$\sin t = \frac{1}{3}$ și $\sin t = \frac{2}{5}$, rezultă că soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\left\{ (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{2}{5} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5. $\operatorname{tg}^2 t - 3 \operatorname{tg} t + 2 = 0$. Dacă $\operatorname{tg} t = x$, rezultă $x^2 - 3x + 2 = 0$. Deci $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$. Rezolvând ecuațiile $\operatorname{tg} t = 1$ și $\operatorname{tg} t = 2$, rezultă

$$t \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ \operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

6. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$. Ecuația se poate scrie sub forma $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2}$ sau $2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 2 = 0$. Se obține $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ și $\operatorname{tg} x = 2$. Soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ \operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

7. $a \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{a+2}{2}$, $a \in [2, +\infty)$. Făcind substituția $\operatorname{tg} x = y$ se obține ecuația $2y^4 - ay^2 + a - 2 = 0$. Rezolvând ecuația în y^2 și apoi revenind la substituția făcută, rezultă $\operatorname{tg}^2 x = 1$ sau $\operatorname{tg}^2 x = \frac{a-2}{2}$. Deoarece $a \in [2, +\infty)$, rezultă că $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a-2}{2}}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{\frac{a-2}{2}}$. Soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ & \cup \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-2}{2}} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-2}{2}} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Exerciții

Să se rezolve ecuațiile:

1. $3 \sin^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$

2. $2 \cos^2 x - (2a + 1) \cos x + a = 0$

Indicație. Rezolvând ecuația de gradul doi se obține $\cos x = \frac{1}{2}$ sau $\cos x = a$. Soluțiile acestor două ecuații sunt și soluții ale ecuației date (ecuația $\cos x = a$ are soluții dacă și numai dacă $a \in [-1, 1]$).

3. $\cos 2x + 2 \sin x - \frac{3}{2} = 0$. 4. $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}$. 5. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

6. $\operatorname{tg} x + \sin 2x - 2 = 0$.

Indicație. Se face substituția $\operatorname{tg} x = y$ și se obține

$$(y - 1)(y^2 - y + 2) = 0.$$

Rezultă

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. $6 \operatorname{ctg} x + 6 \operatorname{tg} 2x + 5 = 0$.

8. $\sin x + 2 \cos^2 x + \frac{1}{\sin x} = 2$, $\sin x \neq 0$.

Indicație. Se face substituția $\sin x = t$ și se obține
 $(t - 1)(2t^2 + t + 1) = 0$.

Rezultă

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$9. \cos x + \sin^2 x + \frac{2}{1 + \cos x} = 3.$$

§ 6. Ecuări de forma $a \cos t + b \sin t + c = 0$

Presupunem că $a \neq 0$ și $b \neq 0$. În caz contrar ecuația ar fi de tip fundamental.

Pentru rezolvarea acestei ecuații există mai multe metode. Prezentăm numai unele dintre ele.

Metoda I. Constă în determinarea punctelor $F(t) = M(\cos t, \sin t)$ situate pe dreapta de ecuație $ax + by + c = 0$. Deoarece $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, punind $x = \cos t$, $y = \sin t$, determinarea numerelor $\cos t$ și $\sin t$ se reduce la rezolvarea sistemului format din ecuațiile $ax + by + c = 0$ și $x^2 + y^2 = 1$. Sistemul este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)x^2 + 2acx + c^2 - b^2 = 0, \\ y = -\frac{dx + c}{b}. \end{cases}$$

Ecuăția de gradul doi în x are soluții reale dacă și numai dacă $(ac)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 - b^2) \geq 0$ sau

$$(4) \quad a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Dacă $a^2 + b^2 > c^2$ sistemul are două soluții distințe (x_1, y_1) și (x_2, y_2) , iar dacă $a^2 + b^2 = c^2$ sistemul are o singură soluție (x_0, y_0) . Soluțiile ecuației se determină ținând seama de poziția punctului corespunzător fiecărei soluții pe cercul unitate C .

Exemplu 1. $\cos t + 8 \sin t - 7 = 0$. În acest caz $a = 1$, $b = 8$, $c = -7$, $a^2 + b^2 = 65$ și $c^2 = 49$. Ecuăția are soluții deoarece $a^2 + b^2 > c^2$. Rezolvând sistemul format din ecuațiile $x + 8y - 7 = 0$ și $x^2 + y^2 = 1$, unde $x = \cos t$ și $y = \sin t$, se obțin soluțiile $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ și $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$. Punctul $M_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ este situat în cadranul I al axelor de coordonate, iar punctul $M_2\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

în cadranul II. Din $\sin t = \frac{4}{5}$, rezultă $t \in \left\{ \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, iar

din $\sin t = \frac{12}{13}$, rezultă $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{12}{13} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Soluțiile ecuației date sunt elementele mulțimii

$$\left\{ \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{12}{13} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. $\sqrt{5} \cos t - 2 \sin t - 3 = 0$. Avem $a = \sqrt{5}$, $b = -2$, $C = -3$, $a^2 + b^2 = 9$, $c^2 = 9$. Deoarece $a^2 + b^2 = c^2$, sistemul $x\sqrt{5} - 2y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, unde $x = \cos t$, $y = \sin t$ are singura soluție $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Punctul corespunzător acestei soluții este situat în cadranul IV, deci

$$t \in \left\{-\arcsin \frac{2}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3. $(m^2 - n^2) \cos t + 2mn \sin t - 1 - m^2 - n^2 = 0$. Avem $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = -1 - m^2 - n^2$, $a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)^2$, $c^2 = (1 + m^2 + n^2)^2$. Deoarece $a^2 + b^2 < c^2$, $\forall m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, ecuația nu are soluții.

Metoda II. Teoremă. Oricare ar fi numerele reale t , a , b , $a^2 + b^2 \neq 0$, există numărul real unic $\alpha \in [0, 2\pi)$ astfel că $a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha)$.

Demonstrație. Dacă $S = a \cos t + b \sin t$, rezultă

$$\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t.$$

Numerele $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ reprezintă sinusul respectiv cosinusul aceluiași număr real α , $\alpha \in [0, 2\pi)$ deoarece suma pătratelor lor este egală cu 1. Așadar $\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha \cos t + \cos \alpha \sin t = \sin(\alpha + t)$ și existența lui α este demonstrată. Unicitatea lui α , $\alpha \in [0, 2\pi)$ rezultă înlocuind $t = 0$ și $t = \frac{\pi}{2}$ în relația $a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha)$.

Ca aplicație a acestei teoreme este metoda II de rezolvare a ecuației $a \cos t + b \sin t + c = 0$.

Exemplu. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$. Avem $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Înseamnă că

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sau } \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$. Așadar $x_k + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $\pi - \left(x_k + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. Soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Un exemplu pentru cazul când ecuația nu are soluții este următorul: $2 \sin t + 3 \cos t + 15 = 0$. Condiția de existență a soluțiilor stabilită la metoda I arată că această ecuație nu are soluții. Folosind metoda II, ecuația

se scrie sub forma $\sin(\alpha + t) = -\frac{15}{\sqrt{13}}$, unde $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$. Deoarece $-\frac{15}{\sqrt{13}}$ nu aparține intervalului $[-1, 1]$ ecuația nu are soluții.

Observații. 1° De la caz la caz se utilizează prima sau a doua metodă în funcție de dificultatea calculelor numerice.

2° Se poate utiliza o a treia metodă, făcind substituția $\tg \frac{x}{2} = y$, dacă ecuația are necunoscuta x . Prin această metodă se pot pierde eventualele soluții de formă $x_k = (2k + + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dat fiind faptul că funcția \tg nu este definită pe toată mulțimea numerelor reale.

Exemplu. $\cos x + 2 \sin x + 1 = 0$. Dacă $\tg \frac{x}{2} = t$, atunci $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ și $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ (formulele (13) și (14) Cap. V). Ecuația se scrie succesiv $\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{4t}{1 + t^2} + 1 = 0$, $t = -\frac{1}{2}$. Din $\tg \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, ar rezulta că mulțimea soluțiilor ecuației este $\left\{-2 \arctg \frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Rezolvând însă ecuația, de exemplu prin prima metodă, se obțin și soluțiile $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, soluții, care prin substituția făcută au fost pierdute deoarece $\tg \frac{x}{2}$ este ne-definită pentru $x_k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. În concluzie, înainte de a rezolva ecuația prin această metodă se verifică dacă $x_k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt sau nu soluții ale ecuației pentru a evita pierderea lor.

3° În unele cazuri este indicat ca, după ce se găsesc numerele $\sin x$ și $\cos x$ prin prima metodă, să se aplique formula $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ pentru a scrie soluțiile ecuației sub o formă mai potrivită. De exemplu, dacă avem ecuația

$$(2 + \sqrt{3}) \cos x - \sin x - \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) = 0,$$

utilizând prima metodă rezultă $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Punctul $M\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$ este situat în cadranul IV. Deoarece $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{1}{2}$, s-ar părea că soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii $\left\{(-4)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. În realitate, deoarece $\cos x > 0$ și $\sin x < 0$ și deoarece $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$, soluțiile ecuației se obțin din soluția particulară $2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$ a ecuației $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ pentru $k = 4$.

Deci

$$x \in \left\{ \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se rezolve ecuațiile:

1. $2 \cos t - \sin t + 2 = 0$.
2. $(\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \cos t - \sin t + 1 = 0$.
3. $\cos t + \sin t + \sqrt{2} = 0$.
4. $5(4 + \sqrt{21}) \cos t - 5 \sin t + 8 + 3\sqrt{21} = 0$.
5. $\sqrt{3} \cos t - \sin t - 2 = 0$.
6. $\sqrt{3} \cos t - \sin t - \sqrt{3} = 0$.

Apli c ații

1. Să se reprezinte grafic funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 2x.$$

Soluție. Funcția este periodică de perioadă principală π . Într-adevăr din $\sin 2(x + T) = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, punând $2x = y$, se obține $\sin(y + 2T) = \sin y, \forall y \in \mathbb{R}$. Deci, dacă T este perioadă pentru f , $2T$ este perioadă pentru sin. Funcția sin avind perioada principală 2π , funcția f are perioada principală π .

Funcția f are amplitudinea egală cu 1. Punctele de pe grafic care sunt de ordonată maximă 1 au abscisele $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Graficul lui f se obține din graficul funcției sin printr-o contracție de-a lungul axei absciselor. În figura VI.15 este reprezentat acest grafic.

Observație. Mișcarea oscilatorie armonică simplă este descrisă complet cu ajutorul unui model matematic implicând mișcarea circulară uniformă. Pot fi considerate cu aproximatie mișcări armonice simple următoarele: mișcarea geamandurii în apă în sus și în jos, pistonul unui motor cu combustie internă, particula de aer în timpul trecerii unei unde sonore simple etc. Toate acestea și multe altele cer schițarea graficului unei funcții de forma

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \cos(\omega x + b), \omega \neq 0,$$

unde a este amplitudinea, ω se numește pulsărie, iar b se numește fază inițială. Perioada principală a acestei funcții este $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

2. Să se arate că funcția

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin 6x + \cos 15x$$

este periodică și are perioada principală $\frac{2\pi}{3}$.

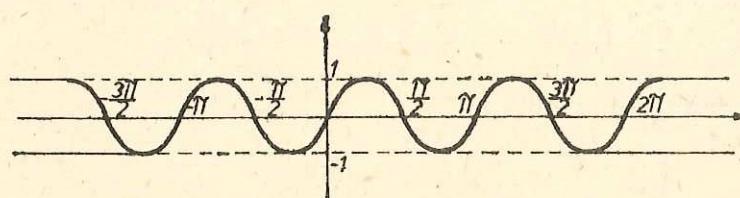


Fig. VI.15

Soluție. Fie T o perioadă. Atunci

$$\sin 6(x+T) + \cos 15(x+T) = \sin 6x + \cos 15x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

În particular, pentru $x=0$ și respectiv pentru $x=\frac{\pi}{3}$ se obține

$$\begin{cases} \sin 6T + \cos 15T = 1 \\ \sin 6T - \cos 15T = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 6T = 0 \\ \cos 15T = 1. \end{cases}$$

Din $\sin 6T = 0$, rezultă $T = \frac{k'\pi}{6}$, $k' \in \mathbb{Z}$, iar din $\cos 15T = 1$, rezultă

$T = \frac{2k''\pi}{15}$, $k'' \in \mathbb{Z}$. Prin egalare se obține $k' = \frac{4k''}{3}$. Deoarece $k' \in \mathbb{Z}$, rezultă $k'' = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$. Așadar $T = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că orice perioadă a funcției g este un număr de forma $\frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Să arătăm că toate numerele de această formă sunt perioade:

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{2k\pi}{3}\right) &= \sin 6\left(x + \frac{2k\pi}{3}\right) + \cos 15\left(x + \frac{2k\pi}{3}\right) = \\ &= \sin(6x + 6k\pi) + \cos(15x + 10k\pi) = \\ &= \sin 6x + \cos 15x = g(x). \end{aligned}$$

Perioada principală este $\frac{2\pi}{3}$.

3. Să se reprezinte grafic funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x + \sin x$.

Soluție. Pentru a localiza punctul $(x, \cos x + \sin x)$ se adună ordonatele punctelor $(x, \cos x)$ și $(x, \sin x)$ pentru fiecare valoare a lui x . În figura VI.16 se poate observa cum se obțin punctele graficului funcției h din graficele funcțiilor sin și cos, iar în figura VI.17 este trasat graficul funcției f pentru $x \in [0, 2\pi]$. Perioada principală a acestei funcții fiind 2π , pentru a obține cit dorim din graficul ei se reproduce în lungul axei absciselor graficul din figura VI.17. Aceeași figură ne indică faptul că $\max h = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, iar

$\min h = h\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$. Într-adevăr, din $h(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă că amplitudinea acestei funcții este $\sqrt{2}$, adică $\frac{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})}{2}$.

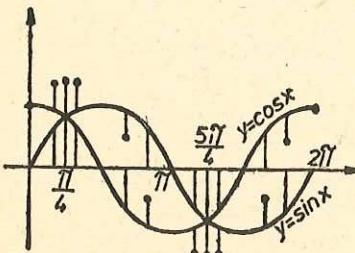


Fig. VI.16

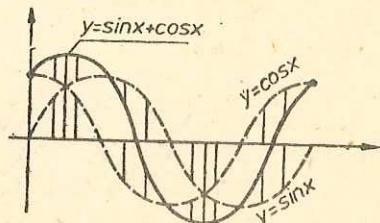


Fig. VI.17

Observație. Balansarea pendulei, oscilațiile dintr-un circuit electric, vibrațiile corzilor viorii sau ale altor instrumente muzicale generatoare de unde sonore, mișcările electronilor în atomi și multe alte fenomene fizice și biologice pot fi descrise, cel puțin în parte, prin funcții de forma

$$H_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

$$H_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H_2(x) = H_1(x) + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x,$$

$$H_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H_3(x) = H_2(x) + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x$$

și celelalte, funcții ale căror grafice se pot schița ca în cazul funcției h .

4. Să se reprezinte grafic funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3} \sin 4x - 8 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Soluție. Deoarece $8 \sin^2 x \cos^2 x = 2(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) = 2(1 - \cos^2 2x) = 2 - 2 \cos^2 2x = 2 - (1 + \cos 4x) = 1 - \cos 4x$, $f(x)$ se scrie sub forma $f(x) = \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x - 1$.

$$\text{Deci } f(x) = 2\left(\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x\right) - 1 =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos 4x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 4x\right) - 1 = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

Amplitudinea funcției este

$$\frac{\max f - \min f}{2} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2.$$

Funcția este periodică. Într-adevăr, dacă T este o perioadă, din

$$2 \cos\left[4(x + T) - \frac{\pi}{3}\right] - 1 = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right), \forall x \in \mathbb{R} \text{ și din } 4x - \frac{\pi}{3} = y,$$

rezultă

$$\cos(y + 4T) = \cos y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Perioada principală a funcției cos fiind 2π , rezultă că perioada principală a funcției f este $\frac{\pi}{2}$.

Se figurează mai întii punctele ale căror coordonate sint trecute în tabelul:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	1	0	-2	-3	-2	0

Graficul funcției pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ este trasat în figura VI.18.

Exerciții

7. Să se determine perioada principală a funcțiilor:

a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sin 5x$,

b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \cos \frac{x}{5}$,

c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \sin 35x + \cos 42x$.

8. Să se arate că funcția

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin 4x + \cos \sqrt{2x}$$

nu este periodică.

9. Să se reprezinte grafic funcția

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 4 \sin x \cos x - 4\sqrt{3} \cos^2 x + 2\sqrt{3} - 3.$$

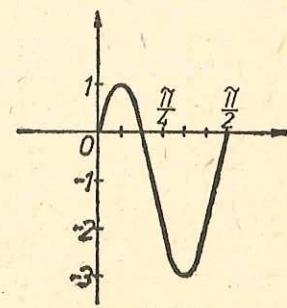


Fig. VI.18

Probleme recapitulative

1. Fie A și B două puncte distincte, M un punct situat pe dreapta AB și numărul real $a \geq \frac{1}{2} AB$. Să se arate că există un singur punct $M \in AB$ astfel ca $AM = a$ și $AM \geq BM$. Să se studieze și cazul $0 < a < \frac{1}{2} AB$.

2. Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 0,$$

unde s-a notat $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

3. Dacă A, B, C, D sunt patru puncte coliniare și F, G, H, I sunt respectiv mijloacele segmentelor (AB) , (BC) , (CD) , (DA) , atunci segmentele (FH) și (IG) au același mijloc.

4. Se consideră o dreaptă d și un punct A nesituat pe dreapta d . Din A se duce $AB \perp d$ ($B \in d$) și oblicile (AM) și (AN) astfel că M să fie mijlocul segmentului (BN) ($B, M, N \in d$). Să se arate că $\widehat{BAM} > \widehat{MAN}$.

5*. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Dacă D este piciorul înălțimii duse din vîrful A , să se arate că punctul D este între punctele B și C .

6*. Fie AM o mediană în triunghiul ABC . Dacă $(AB) < (AC)$, să se arate că $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$.

7*. Să se arate că punctul de intersecție al diagonalelor unui patrulater convex este acel punct din plan ale cărui distanțe la cele patru vîrfuri ale patrulaterului au suma minimă. Rămâne valabilă această proprietate pentru un patrulater concav?

8*. Fie ABC un triunghi, iar O un punct din planul triunghiului. Dacă punctele B și C sunt de o parte și de alta a dreptei AO , iar punctele C și A de o parte și de alta a dreptei OB , atunci A și B sunt de o parte și de alta a dreptei OC .

9. Fie O un punct în interiorul triunghiului ABC . Dreptele BO și CO intersectează AC și AB în D respectiv E . Stănd că unghiul \widehat{BAC} este obtuz, să se arate că

$$BD + CE > BE + ED + DC.$$

10. Fie (AD) cea mai mare, iar (BC) cea mai mică latură a patrulaterului convex $ABCD$. Să se arate că:

$$\widehat{ABC} > \widehat{ADC} \text{ și } \widehat{BCD} > \widehat{BAD}.$$

11. Se dă un triunghi OAB , un punct C pe semidreapta opusă lui (OA) și un punct $D \in (OB)$. Să se demonstreze că semidreapta (CD) și segmentul (AB) au un punct comun.

12. Fie \widehat{AOB} și $\widehat{A'OB'}$ unghiuri opuse la vîrf ($O \in (AA')$), $C \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$, $D \in (OA)$ și $P \in CD$.

Să se arate:

$$P \in \text{Int } \widehat{AOB} \Leftrightarrow D \in (CP).$$

13*. Să se arate că două diagonale oarecare ale unui pentagon convex, considerate ca segmente închise, au un punct comun.

14. Să se arate că două triunghiuri dreptunghice care au respectiv înălțimile și medianele corespunzătoare unghiurilor drepte congruente, sunt congruente.

15. Se consideră trapezul $ABCD$ ((AB) baza mare, (CD) baza mică) și se notează cu O intersecția diagonalelor, iar cu E, F punctele în care paralela prin O la baze intersectează respectiv pe AD și BC . Pe bazele trapezului se construiesc în exterior pătratele $AA'B'B$ și $CC'D'D$. Să se demonstreze că:

a) dreptele $A'B'$ și $B'D'$ conțin punctul O ,

b) dreptele $A'D'$ și $B'C'$ conțin respectiv punctele E și F .

16. Prin vîrful C al triunghiului ABC , se construiește o dreaptă d_2 care nu mai are alte puncte comune cu triunghiul și se notează cu A_1, B_1, G_1 proiecțiile pe dreapta d_1 , respectiv ale punctelor A, B, G unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC . Să se arate că:

i) $AA_1 + BB_1 = 3 GG_1$,

ii) dacă d_2 este o dreaptă ce nu are nici un punct comun cu triunghiul ABC iar A_2, B_2, C_2, G_2 sunt proiecțiile pe d_2 respectiv ale punctelor A, B, C, G atunci:

$$AA_2 + BB_2 + CC_2 = 3GG_2.$$

17. Un trapez dreptunghic în care distanța dintre baze este medie proporțională între lungimile bazelor este ortodiagonal (diagonalele sunt perpendiculare).

18*. Într-un triunghi isoscel ABC ($(AB) \equiv (AC)$), $AB > BC$ se construiește înălțimea AD , $D \in BC$ și bisectoarea BE , $E \in (AC)$. Dreptele AB și DE se intersectează în F . Să se arate că

$$\frac{DF}{DF} = \frac{AB - BC}{AB + BC}.$$

19*. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc, cu vîrfurile în exterior, triunghiurile ADB , BEC și CFA astfel încât

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k \text{ și } m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{CFA}) = \alpha$$

Să se demonstreze că:

i) mijloacele M, N, P, O ale segmentelor (AC) , (DC) , (BC) și (EF) sunt vîrfurile unui paralelogram.

ii) în acest paralelogram două unghiuri au măsura α și raportul lungimilor a două laturi este k .

Indicație. S și T fiind mijloacele segmentelor (CE) , (CF) , se va arăta că triunghiurile SPO și TOM sunt asemenea cu CBA .

20*. Se dau punctele A și B . Să se construiască un pătrat pe ale cărui laturi să se afle punctele A, B și suma distanțelor de la punctul A la vîrfurile pătratului să fie minimă.

21. Fie M un punct în interiorul sau exteriorul unui cerc. Notăm cu (AB) diametrul ce trece prin M ($M \in (OA)$). Să se demonstreze că pentru orice punct N al cercului, distinct de A și de B avem: $MA < MN < MB$.

22. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}'(O', r')$ două cercuri tangente în A ; o dreaptă n care conține pe A mai tâia cercurile respectiv în B și B' . Să se demonstreze că dreptele OB și $O'B'$ sunt paralele.

23. Fie \mathcal{C} și \mathcal{C}' două cercuri tangente în A , h tangentă comună la \mathcal{C} și \mathcal{C}' care conține pe A ; M fiind un punct al lui h , diferit de A , cercul de centru M și rază MA , tăie pe \mathcal{C} în A și B , iar pe \mathcal{C}' în A și B' . Să se demonstreze că dreptele MB și MB' sunt respectiv tangente la \mathcal{C} și \mathcal{C}' .

24. Într-un cerc se înscrie triunghiul isoscel ABC cu $(AB) \equiv (AC)$. Două drepte ce trec prin A intersectează latura (BC) în M și N și cercul în M' și N' . Să se arate că patrulaterul $MM'N'N$ este inscriptibil.

25. Se dă cercul cu centrul în O și diametrul (AB) care se prelungesc cu $(BC) \equiv (OA)$ ($AC = 3OA$). Perpendiculara în mijlocul lui (AC) tăie cercul în D și D' . Să se arate că CD este tangentă la cerc.

26. Fie A un punct fix, iar P un punct variabil al unui cerc. Să se afle locul geometric al punctului M de intersecție a bisectoarei unghiului \widehat{POA} cu cercul circumscris triunghiului POA .

27*. Trei cercuri congruente care au un punct comun H , se mai intersectează două cîte două în punctele A , B și C . Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercurile date („problema piesei de 5 lei a lui Gh. Tîțeica“).

28. Vîrfurile B și C ale triunghiului ABC sunt fixe și $m(\widehat{BAC})$ este constantă. Să se afle locul geometric al proiecției M al ortocentrului triunghiului ABC pe mediana (AD) .

29. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ are loc relația $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (Teorema lui Ptolemeu).

30. Se dau cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$: Fie CD o tangentă comună exterioară, C și D fiind punctele de tangență. Să se demonstreze că cercul de diametru CD intersectează dreapta O_1O_2 dacă și numai dacă cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sunt exterioare.

31. Se dau punctele $A(1 - a, 1 + a)$, $B(5 - a, 1 + 5a)$, $C(1 - 5a, 5 + a)$, $D(5 - 5a, 5 + 5a)$. Să se arate că segmentele (AD) și (BC) sunt congruente și să se explice geometric acest rezultat.

32. Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului determinat de dreptele $y = 2x$, $y = -10x$, $y = ax + b$, $a \neq 2$, $a \neq 10$, $b \neq 0$. Să se verifice că mediatorele acestui triunghi sunt concurente.

33. Să se determine numerele reale $t \in (0, 6\pi)$, astfel ca $F(t) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

34. Să se determine numerele reale t astfel ca:

a) $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, b) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d) $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

35. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 \sin x$,

b) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sin x - |\sin x|$,

c) $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = 2 \cos x - |\cos x|$,

d) $j : \mathbb{R} \rightarrow \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $j(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$,

e) $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin x + 2 \cos x$,

f) $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $l(x) = \max(\sin x, \cos x)$.

36. Dacă $\operatorname{tg} x = \frac{2}{5}$, să se calculeze: $\sin 2x$, $\cos 4x$, $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

37. Să se verifice identitățile:

a) $\cos a + \sqrt{3} \sin a = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - a \right)$,

b) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{ctg} (a + b) = 1$,

c) $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a = 2 \frac{3 + \cos 4a}{1 - \cos 4a}$,

d) $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2}}{1 + \cos \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{4}}{1 + \cos \frac{a}{4}} = \operatorname{tg} \frac{a}{8}$.

38. Să se transforme în produs:

a) $\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) + \cos(b + c - a)$,

b) $1 + \cos a + \cos 2a$, c) $1 + \cos a + \sin a$, d) $1 - \sin a - \cos 2a$.

39. Să se calculeze:

a) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$,

b) $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$,

c) $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$;

d) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12}$.

40. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin 2x = \cos^2 x$, b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 2x$,

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}$, d) $\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$.

e) $4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cos x - 3 \sin x - 1 = 0$.

41. Să se discute și să se rezolve ecuațiile:

a) $\cos 2x + (2m - 1) \sin x + m - 1 = 0$,

b) $m \cos x - (m + 1) \sin x - m = 0$,

c) $3m \sin 2x + (m - 1) \cos 2x - 1 = 0$.

42. După ce se aduc la forma $a \cos 2x + b \sin 2x + c = 0$ să se rezolve și să se discute, atunci cind este cazul, ecuațiile:

a) $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0$,

b) $2\sqrt{3} \sin^2 x + 8 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 5 = 0$,

c) $\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 2 = 0$,

d) $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = m$,

e) $4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = m$.

Indicație. Deoarece $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, ecuația se scrie sub forma $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = m - 3$. Deci $\cos 2x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin 2x = m - 3$. Se obține $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m-3}{2}$. Ecuația are soluții dacă și numai dacă $1 \leq m \leq 5$.

43. Să se rezolve ecuațiile:

a) $4 \sin t \cos t - 2(\sin t + \cos t) + 1 = 0$.

Soluție. Dacă $\sin t + \cos t = x$, atunci $\sin t \cos t = \frac{x^2 - 1}{2}$. Deci $4 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} -$

$$-2x + 1 = 0. \text{ Ecuția } 2x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ are soluțiile } x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ și } x_2 =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2}. \text{ Revenind la substituție, din } \sin t + \cos t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \text{ rezultă } \sin t =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos t = \frac{1}{2} \text{ sau } \sin t = \frac{1}{2}, \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ De asemenea, din } \sin t + \cos t =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \text{ rezultă } \cos t = \frac{1}{2}, \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ sau } \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin t = -\frac{1}{2}.$$

Soluțiile ecuației sunt elementele mulțimii

$$\left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $25 \sin t \cos t - 35 (\sin t + \cos t) + 37 = 0$.

c) $\sin^3 t + \cos^3 t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Indicație. Din $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, rezultă $(\sin t + \cos t)^2 - 2 \sin t \cos t = 1$ sau $2 \sin t \cos t = (\sin t + \cos t)^2 - 1$. Se face substituția $\sin t + \cos t = x$ și se obține $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ sau $(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x - 1) = 0$.

d) $\sin^3 t + \cos^3 t + \sin t \cos t = \frac{5}{16}$.

Indicație. Ecuația se scrie sub forma

$$(\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) + \sin t \cos t = \frac{5}{16}. \text{ Dacă } \sin t + \cos t = x \text{ se obține}$$

$$(2x - 1)(8x^2 - 4x - 26) = 0, \text{ cu soluțiile } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{53}}{4}, x_3 = \frac{1 - \sqrt{53}}{4}.$$

Deoarece $\sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă $x \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$. Singura soluție situată în acest interval este x_1 . Soluțiile ecuației rezultă deci din rezolvarea ecuației $\sin t + \cos t = \frac{1}{2}$.

44. Se dă punctele $M\left(\frac{a\sqrt{3}-a}{2}, \frac{3a-a\sqrt{3}}{2}\right)$ și $N\left(\frac{a-a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}-a}{2}\right)$.

Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului OMN , unde O este originea axelor de coordonate.

45. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului determinat de dreptele de ecuații:

$$2x - y + 3 = 0, \quad 5x + y - 2 = 0, \quad y = 1.$$

46. Fie P punctul de intersecție al dreptelor d' și d'' de ecuații $x + 4y - 5 = 0$ și $2x + 5y - 7 = 0$. Dacă $M \in d'$ și $N \in d''$ sunt două puncte de abscise mai mari decât abscisa lui P , să se calculeze numărul $t = \mu(\widehat{MPN})$.

Indicație. Punctul P are coordonatele $(1, 1)$. Numărul t nu depinde de poziția punctelor M și N respectiv pe cele două drepte. Luând ca puncte M și N punctele de intersecție ale celor două drepte cu axa absciselor, din triunghiul MNP se obține $t = \arctg \frac{3}{22}$.

Indicații și răspunsuri

Capitolul I

§ 2.

2. Dacă am avea $AB = BC$, ar rezulta că $A, B, C \in AB$ în contradicție cu ipoteza; în mod analog nici $AB = AC$, nici $AC = BC$ nu este posibil.

4. 8; dacă $A \in DE$, şase drepte sunt distințte.

5. Nu. Se ține seauă de exerc. 4.

§ 3.

1. Nu, căci $AB = 4 \neq |x_B - x_A| = 3$.

2. $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 7$.

3. a) $x_B = -2$, b) $x_C = 5$.

4. $x_M = 2$, $x_N = 3$.

5. $x_M = 2$, $x_N = 6$.

§ 4.

9. Alegem un sistem de coordinate pe AB astfel ca $x_A < x_B$. Atunci $x_A < x_C < x_B$ și $x_A < x_D < x_C$, din care rezultă $x_A < x_D < x_C < x_B$.

10. Fie D un punct orice pe (AC) . Atunci din exerc. 9 rezultă că $D \in (AB)$.

13. Fie (AB) un segment, $x_A = 0$, $x_B = b > 0$. Punctele cu abscisele $\frac{b}{2}$, $\frac{b}{3}$, ..., $\frac{b}{n}$, ... aparțin segmentului (AB) .

§ 5.

3. d separă B, A și nu separă A, C , deci separă B, C . Pe de altă parte separă C, D , aşadar conform teoremei 1 nu separă B, D .

4. Nu.

5. Fie $M \in (AB)$ și să presupunem că $M \notin S$. Atunci există $N \in [AM] \cap d$; dar $N \in (AB)$ (§ 4, exerc. 9), ceea ce este în contradicție cu $A, B \in S$. Așadar $(AB) \subset S$ și $[AB] \subset S$.

8. Deosebim cazurile: a) d este inclusă în semiplanul S sau în cel opus S' ; atunci intersecția este d sau \emptyset ; b) d are un punct în S și un punct în S' ; atunci d intersecțează frontieră lui S și se aplică exerc. 7.

10. Se deduce că C și C' sunt de o parte și de alta a dreptei BB' , deci $(CC') \cap (BB') = \{Q\}$. Se va arăta că $Q \in (BB')$.

§ 6.

9. Fie S un semiplan deschis limitat de dreapta d . $P, Q \in S$ implică $(PQ) \subset S$ (§ 5, exerc. 5), deci S este o mulțime convexă. Pentru a arăta că $\bar{S} = S \cup d$ este o mulțime convexă se consideră cazurile: 1° $P, Q \in d$, atunci evident $(PQ) \subset d \subset \bar{S}$; 2° Dacă $P, Q \in S$, precum am văzut, $(PQ) \subset S \subset \bar{S}$; 3° $P \in d, Q \in S$, atunci conform exercițiului 6, § 5 $(PQ) \subset S \subset \bar{S}$.

4. a) Fie $b = AB$, $c = AC$; avem $(BC) \subset (bC)$ și $(BC) \subset (cB)$ (§ 5, exerc. 6), deci $(BC) \subset (bC \cap cB = \text{Int } \widehat{BAC})$. b) Se aplică exerc. 7, § 5.

11. Conform exercițiului 10 avem $AP \cap [BC] = \{A'\}$ și $P \in (AA')$. Se aplică corolarul teoremei 1, § 5 triunghiurilor ABA' și $AA'C$.

12. Dreapta BB' taie segmentul (AC) într-un punct P și $P \in \text{Int } \widehat{AOC}$ (vezi exerc. 4a). Cum $O \notin AC$, avem $P \in (OB)$ sau $P \in (OB')$ și se aplică exerc. 4b).

13. Fie $A'B'$ astfel ca $O \in (AA')$, $O \in (BB')$. Cazurile $Q \in \text{Int } \widehat{AOB}$, $Q \in \text{Int } \widehat{AOB'}$, $Q \in (OA')$, $Q \in (OB')$ se rezolvă ușor. Fie $Q \in \text{Int } \widehat{AOB'}$. Atunci există $\{R\} = AA' \cap (PQ)$ și $\{R_1\} = BB' \cap (PQ)$. Dacă am avea $R \in (OA')$ și $R_1 \in (OB')$, atunci întreaga mulțime $\text{Int } \widehat{AOB}$ s-ar găsi de aceeași parte a dreptei RR_1 , ceea ce este imposibil deoarece $P \in RR_1$.

14. Deoarece patrulaterul este convex, $C \in \text{Int } \widehat{BAD}$. Din teorema transversalei rezultă că există $\{O\} \in (AC \cap BD)$. Folosind același raționament cu alt virf se deduce că $O \in (AC)$.

15. Fie $\{O\} = [AC] \cap [BD]$. Cum $(OC) \cap AB = \emptyset$ și $(OD) \cap AB = \emptyset$, punctele C și D sunt de aceeași parte a dreptei AB . La fel se arată proprietatea analoagă pentru dreptele BC , CD și DA .

16. Fie I intersecția considerată. Este clar că $\text{Int } P \subset I$; iar din convexitatea poligonului rezultă că $P \subset I$, aşadar $\text{Int } P \cup P \subset I$. Pentru a demonstra incluziunea contrară se ia un punct $M \in I$. Dacă M nu aparține suportului unei laturi evident $M \in \text{Int } P$. Dacă

$M \in P_k P_{k+1}$, unde $[P_k P_{k+1}]$ este o latură a lui P , atunci \hat{M} și P_{k+1} sint de aceeași parte a dreptei $P_{k-1} P_k$ sau $M = P_k$, deci $M \in [P_k P_{k+1}]$ și analog $M \in [P_{k+1} P_k]$, deci $M \in [P_k P_{k+1}] \subset P$.

17. Se folosește exerc. 17 și Teorema 1.

18. Avem $P_{n+1} \notin (dP_1)$ și $P_1 \in (dP_1)$. Fie k cel mai mic indice pentru care $P_k \notin (dP_1)$. Atunci $k \geq 2$ și $[P_{k-1} P_k] \cap d \neq \emptyset$.

19. Presupunind că d are în comun cu poligonul dat punctele distincte A , B , C , unul dintre aceste puncte este situat între celelalte două, de exemplu $B \in (AC)$. Punctul B se află pe o latură $[P_kP_{k+1}]$ a poligonului și din ipoteză rezultă că $[P_kP_{k+1}] \not\subset d$. Așadar $d \cap [P_kP_{k+1}] = \{B\}$ și $(AC) \cap P_kP_{k+1} = \{B\}$, deci A și C sunt de o parte și de alta a lui P_kP_{k+1} , ceea ce nu e posibil la un poligon convex.

20. Notând $d = P_2P_n$, avem $[P_3P_4] \cap d = \emptyset$, căci altfel d ar avea trei puncte comune cu poligonul, în contradicție cu exerc. 20. Rezultă că $P_4 \in (dP_3)$ și la fel $P_5 \in (dP_4) = (dP_3)$ etc. Așadar punctele P_3, P_4, \dots, P_{n-1} se găsesc de aceeași parte a lui P_2P_n .

§ 7.

1. Nu.

2. a), b).

5. $m(\widehat{AOB'}) = 180^\circ - m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{B'OC}) = 180^\circ - m(\widehat{BOC})$, deci din $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) < 180^\circ$ se obține:

$$360^\circ - m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{BOC}) < 180^\circ \text{ și } m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) > 180^\circ$$

în contradicție cu ipoteza. Rezultă că $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC})$.

§ 8.

8. Fie $(AB) > (CD)$, adică $AB > CD$. Există un punct unic $M \in (AB)$ astfel ca $AM = CD$. Dacă am avea $B \in [AM]$, ar rezulta $CD = AM = AB + BM > AB$ în contradicție cu ipoteza. Deci $M \in (AB)$. Reciproca rezultă ușor.

12. Se construiește semidreapta $(OM$ în semiplanul limitat de OA și conținând B în așa fel încât $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$ și se folosește teorema semidreptei interioare unui unghi.

14. $m(\widehat{DOC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AOC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{COB}) = m(\widehat{COE})$ și $m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{COE}) = 2m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{AOC}) < 180^\circ$; ținând seama și de faptul că D și E sunt de o parte și de alta a lui OC , din exerc. 5 § 7 rezultă că $(OC \subset \text{Int } \widehat{DOE})$, ceea ce împreună cu $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{COE})$ demonstrează că $(OC$ este bisectoarea unghiului \widehat{DOE} .

15. Fie unghiurile opuse la vîrf \widehat{AOB} și $\widehat{A'OB'}$ ($O \in (AA')$), $[OC$ bisectoarea unghiului \widehat{AOB} și $[OD$ semidreapta opusă cu $[OC$. Se deduce ușor că $(OD \subset \text{Int } \widehat{A'OB'})$. $\widehat{A'OD} \equiv \widehat{AOC} \equiv \widehat{COB} \equiv \widehat{DOB'}$, deci $[OD$ este bisectoarea lui $\widehat{A'OB'}$. Deoarece prin ipoteză $[OD$ și $[OC$ sunt opuse, proprietatea este demonstrată.

18. Dacă $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$, rezultatul este imediat. Trătăm cazul în care $B \in \text{Int } \widehat{AOA'}$ și B, A', B' se găsesc de aceeași parte a lui OB ; celelalte cazuri revin ușor la acesta. Avem $B \in \text{Int } \widehat{AOA'}$, deci $\widehat{BOA'} < \widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'}$ și de aici se deduce că $(OA' \subset \text{Int } \widehat{BOB'})$. Cu ajutorul axiomei U.3 se obține $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$.

7. Deoarece pentagonul este convex, A și D sint de aceeași parte a lui BC și A, B de aceeași parte a lui CD , deci $(CA \subset \text{Int } \widehat{BCD})$ și analog $(DA \subset \text{Int } \widehat{CDE})$. Rezultă că $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BCD}) - m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{CDE}) - m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{EDA})$, adică $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EDA}$.

10. Conform exerc. 10, § 5 $(BE) \cap (CD) = \{M\}$. Se arată succesiv $BD = CE$, $\triangle DBC \cong \triangle ECB$, $\widehat{DCB} \equiv \widehat{EBC}$, $(BM) \equiv (CM)$, $\triangle ABM \cong \triangle ACM$, $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$.

11. Se demonstrează pe rind: $(CD) \cap AB = \{O\}$, $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ (L.L.L.), $\triangle ACO \cong \triangle BDO$ (U.L.U.), $(AO) \equiv (BO)$.

12. $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$, $\triangle BOC \cong \triangle B'OC'$, $\triangle COA \cong \triangle C'OA'$, deci $(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C')$, $(CA) \equiv (C'A')$ și $\widehat{OCA} \equiv \widehat{OC'A'}$, $\widehat{OCB} \equiv \widehat{OC'B'}$. Deoarece punctele A, B, C nu sunt coliniare $\widehat{OCA} \not\equiv \widehat{OCB}$. Rezultă $\widehat{OC'A'} \not\equiv \widehat{OC'B'}$, din care se deduce că A', B', C' nu sunt coliniare. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ pe baza teoremei L.L.L.

§ 10.

1. Presupunând contrariul se ajunge la o contradicție cu teorema 1.

2. Se folosește teorema 1.

4. Deoarece $(AC \subset \text{Int } \widehat{MAN}$ (de ce?), $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{CAN})$ și cum $(AB \subset \text{Int } \widehat{MAC})$, avem $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAN})$. În continuare, se folosește teorema 1 pentru triunghiurile ABM și ACN .

5. Fie $\widehat{hk} \equiv \widehat{MAN}$; pe segmentul (MN) se iau două puncte B, C astfel încât $m(\widehat{BAC}) < m(\widehat{pq})$.

Triunghiului ABC i se aplică exerc. 4.

7. Se folosește exerc. 3.

8. $m(\widehat{ABM}) > m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{MDC})$ (de ce?); MA' fiind semidreapta opusă lui $(MA$, arătați că $MD \subset \text{Int } \widehat{A'MC}$ și $m(\widehat{BMA}) = m(\widehat{A'MC}) > m(\widehat{CMD})$.

11. Fie $P' = AP_1P_2\dots P_nB$ și $P'' = AQ_1Q_2\dots Q_mB$ cele două poligoane convexe. Deoarece $P_1 \in \text{Int } \widehat{BAQ_1}$, punctele B și Q_1 sunt de o parte și de alta a lui AP_1 , prin urmare folosind exerc. 18, § 6, dreapta AP_1 intersectează linia poligonală $Q_1Q_2\dots Q_mB$ într-un punct R_1 , $R_1 \in [Q_hQ_{h+1}]$. Conform exerc. 10, $AP_1 + P_1R_1 < AQ_1 + Q_1Q_2 + \dots + Q_hR_1$; se repetă procedeul și se adună inegalitățile obținute.

12. Se ia E astfel ca D să fie mijlocul lui (AE) și se aplică teorema 2 triunghiului AEC .

13. Din $AA_1 > AC - \frac{BC}{2}$ și din relațiile analoage se obține prima inegalitate. Pentru cea de-a doua se va utiliza exerc. 12.

§ 11.

1. L.U.U.

3. Se aplică teorema 2.

5. Se arată că $(AB) \equiv (CD)$, apoi se aplică teorema 2 triunghiurilor ABC și ADC .

1. Se folosește exerc. 2, § 10. Presupunând de exemplu $C \in (BA_1)$, rezultă că \widehat{ACA} , este ascuțit, deci \widehat{ACB} obtuz.

2. Se consideră mai întii cazul $B \in (A'C)$; atunci $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$, deci $AC > AB$.

3. Unul dintre unghiurile \widehat{ADB} , \widehat{ADC} este obtuz; acestuia i se opune o latură mai mare decât (AD) .

7. a) Rezultă cu ajutorul exerc. 6. b) Axele de simetrie ale dreptei d sunt toate dreptele perpendiculare pe d și dreapta d . c) Fie $M \in (AM)$ A' , B' , M' simetricele punctelor A , B , M față de dreapta d și $\{A''\} = AA' \cap d$, $\{B''\} = BB' \cap d$. Se arată că $M \in (AB) \Rightarrow M' \in (A'B')$ și implicația inversă. Pentru a arăta că $(AB) \equiv (A'B')$, se observă mai întii că $\triangle A''BB'' \equiv \triangle A''B'B'$, apoi că $\triangle A''AB \equiv \triangle A''A'B'$.

§ 13.

2. Locul geometric se compune din două semidrepte simetrice față de AB .

4. Fie d' mediatoarea segmentului (AB) . a) Dacă $d \cap d' = \{C\}$ C este punctul căutat; b) Dacă $d \cap d' = \emptyset$, problema nu are soluție; c) Dacă $d = d'$, orice punct al lui d este o soluție.

§ 14.

2. \widehat{CBA} și \widehat{DAB} sunt unghiuri alterne interne congruente.

Exerciții recapitulative

4. Determinăm punctul $D \in (BC)$ astfel ca $(BD) \equiv (B'C')$. Dacă $D = C$, proprietatea este evidentă. Dacă $D \neq C$, triunghiul ADC este isoscel și $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$, ceea ce este imposibil deoarece unul dintre aceste unghiuri este ascuțit, celălalt obtuz.

8. Se va arăta că simetricul segmentului (BC) față de mediatoarea d coincide cu (AD) , de unde rezultă că C și D sunt simetrice față de d .

10. Fie B și C două puncte fixe pe d și B' , C' , P' simetricele lui B , C , P față de punctul A . Folosind exerc. 12. § 9 rezultă că $P' \in B'C'$.

12. Fie S semiplanul limitat de MN care conține pe D . Avem A , C , $D \in S$, deci P , $Q \in S$.

Capitolul II

§ 1.

8. D fiind simetricul lui A față de M se obține un dreptunghi $ABDC$.

12. a) Se va arăta că triunghiul BCD este isoscel. b) și c) Fie F simetricul lui A față de D ; din exerc. 9 rezultă că $m(\widehat{ABF}) = 90^\circ$ și $(BF) = (BE)$, deci $F = E$.

18. $ABCD$ fiind patrulaterul, A și C sunt de o parte și de alta a lui BD căci în caz contrar laturile (BC) și (AD) s-ar intersecta. Așadar \widehat{ABD} și \widehat{BDC} sunt unghiuri alterne interne. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

§ 2.

12. Dacă $Q = \text{pr}_{PAN}$, arătați că $\triangle OPM = \triangle MQN$. Atunci $(MQ) \equiv (OP) \equiv (PA)$ din care rezultă $(AQ) \equiv (PM) \equiv (NQ)$, adică triunghiul QAN este isoscel. Astfel $N \in (AB)$. Arătați că oricare ar fi $N' \in (AB$, punctul N' aparține locului geometric (trebuie să se determine o poziție convenabilă pentru punctul M).

18. Fie A și C unghiurile obtuse ale patrulaterului convex $ABCD$ și M mijlocul segmentului BD . Arătați că exerc. recap. 1 de la Cap. I se aplică triunghiurilor ABD și BCD .

§ 3

1. $MQ \parallel BD \parallel NP$; $MN \parallel AC \parallel QP$.

7. i) Se proiectează P pe BC în P' , se intersectează paralela prin Q la PP' cu BC în Q , și cu paralela prin A la BC în Q'' ; $\triangle BPP' \cong \triangle AQQ''$; se aplică teorema 3 trapezului $PP'Q'Q$. ii) O paralelă la BC prin mijlocul segmentului (AB) .

§ 4.

4. Fie A'' simetricul lui B față de C • $\triangle HA'B' \cong \triangle CA''A$; rezultă $A'B' = AA'' = 2CP$. ii) Fie $\{D\} = A'B' \cap CH$ și E intersecția lui AA'' cu perpendiculara prin C pe CH . Demonstrați că $\triangle HA'D \cong \triangle CA''E$ și $(AE) \equiv (EA'')$.

5. Folosiți teorema 2.

6. Se observă că CF și AD sunt înălțimi în triunghiul AHC .

§ 6.

3. Fie $\{O\} = (AC) \cap (BD)$. Din teorema 2 rezultă

$$\frac{AO}{OE} = \frac{DO}{OB} \text{ și } \frac{CO}{OA} = \frac{BO}{OF}.$$

5. iii) Se ia $D' \in (AC)$ astfel ca $DD' \parallel BJ$.

§ 7.

1. Fie de exemplu $C \in (BD)$. Intersectăm paralela prin C la AD cu AB în E . Se folosește teorema lui Thales și faptul că triunghiul AEC este isoscel.

§ 8.

8. Folosind exerc. 7, arătați mai întâi că proprietatea are loc pentru $M = D$, apoi aplicați teorema fundamentală a asemănării.

9. Fie tabla triunghiulară ABC . Pe latura cea mai mare $[BC]$ se construiește în exteriorul triunghiului ABC pătratul $BCDE$. Fie $\{M\} = AE \cap BC$ și $\{N\} = AD \cap BC$. Arătați că $[MN] \subset [BC]$ și că $[MN]$ este o latură a pătratului cerut.

12. Fie trapezul $ABCD$, $E \in (AD)$, $F \in (BC)$;

$$\frac{EO}{AB} = \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA} = \frac{OF}{AB}, \text{ deci } EO = OF.$$

13. Folosiți exerc. 12.

§ 9.

1. Dacă $M \in (AB)$, fie $M' = \text{pr}_d M$. Din faptul că $AC \parallel BD \parallel MM'$ rezultă că $M' \in (CD)$. În mod asemănător rezultă implicația inversă.

2. Se ține cont de exercițiul precedent și de faptul că reuniunea a două segmente închise având același suport și un punct comun este un segment închis.

3. Se scrie teorema catetei pentru (AB) și (AC) și teorema înălțimii pentru (AD) .

5. Se disting două cazuri: a) unghiul \hat{B} este ascuțit; atunci $D \in (BC)$, $BD = 5$, $DC = 16$, $AC = 20$, $BC^2 < AB^2 + AC^2$, rezultă că \hat{A} este unghi ascuțit și că $C \in (BE)$. Se exprimă AE din triunghiurile dreptunghice ADE și ABE , din $AE^2 = AE^2$ se obține $CE = 12,8$ și $AE = 31,2$, deci perimetru $ACE = 64$. b) unghiul \hat{B} este obtuz; atunci $B \in (DC)$, $DC = 26$, $AC = 2\sqrt{205}$ și $D \in (EB)$. Se obține $DE = \frac{72}{13}$ și $AE = \frac{12}{13}\sqrt{205}$.

7. Din triunghiul ABD rezultă că $AB^2 = BD \cdot BM$, unde $\{M\} = AF \cap BD$, iar din faptul că $\triangle BMF \sim \triangle BCD$ rezultă $BD \cdot BM = BF \cdot BC$.

8. Folosind teorema lui Pitagora se determină $AB = 24$, $AC = 18$, iar din teorema bisectoarei (vezi ex. 2 § 7) se obține $AD = 9$ și $DB = 15$.

9. Se exprimă BE^2 și BF^2 din triunghiurile dreptunghice ABE și BCF folosind și ipoteza rezultă $BE^2 = AB^2 + DC^2$ și $BF^2 = BC^2 + AD^2$, dar, pentru că $AB^2 = AD^2 + BC^2 - DC^2$, rezultă $BE = BF$.

Exerciții recapitulative

1. i) Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ și $AD = b$, $BC = a$. $\{E\} = AB \cap DC$ și $x = d(E, AD)$; $\triangle ADE \sim \triangle BCE$ deci $\frac{b}{a} = \frac{x}{x+h}$, de unde rezultă că $x = \frac{bh}{a-b}$.
ii) fie $\{O\} = AC \cap BD$ și $y = d(O, BC)$; $\triangle BOC \sim \triangle DOA$, deci $\frac{a}{b} = \frac{y}{h-y}$, de unde rezultă că $y = \frac{ah}{a+b}$.

2. Se exprimă AB^2 și AC^2 folosind teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABM și AMC și se adună cele două expresii.

3. Fie $\{M\} = AD \cap BE$. Aplicând teorema bisectoarei pentru (AD) și (BM) se obține $BD = 20$ și $\frac{AM}{MD} = 2$.

4. Fie M' astfel încit $m(\widehat{ABM}) = 60^\circ$, $M' \in \text{Int } ABCD$ și $(BM') \equiv (BA)$. Atunci ABM' este un triunghi echilateral, triunghiurile $M'BC$ și $M'AD$ sunt isoscele, $m(\widehat{M'CB}) = m(\widehat{M'DA}) = 75^\circ$ și $m(\widehat{M'CD}) = m(\widehat{M'DC}) = 15^\circ$ din semidreptele (CM) și (CM') coincid, la fel (DM) și (DM') , deci $M = M'$.

5. $EG = 2 AE$, $AE = 2 EH$, $\triangle EDH \sim \triangle ECA$.

6. Se exprimă CB^2 și CD^2 prin teorema lui Pitagora generalizată, din triunghiurile ABC și ADC și se adună membru cu membru.

7. i) $\triangle ADC \equiv \triangle BCF$ (C.U.) și $\triangle ADB \equiv \triangle CBE$ (C.U.), deci $(FC) \equiv (DC)$ și $(BD) \equiv (BE)$.

ii) $\widehat{EDA} \equiv \widehat{BED} \equiv \widehat{EDB}$, $\widehat{ADF} \equiv \widehat{DFC} \equiv \widehat{FCD}$.

8. Se arată că laturile patrulaterului $ABCD$ sunt paralele două cîte două cu diagonalele rombului (A, B, C, D fiind mijloacele diagonalelor pătratelor) și că două laturi vecine sunt congruente ca laturi de triunghiuri congruente.

9. Se determină $AC = 50$, folosind formula care dă lungimea medianei (ex. 2), iar pentru calcularea distanței $d(M, BC)$ se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul BMC .

10. Fie $E = \text{pr}_{BC}A$. Atunci $AE = 12$, $BE = 16$, deci $AB = 20$. În triunghiul dreptunghic BAD se aplică teorema catetei și se obține $AB^2 = BD \cdot BE$, de unde $BD = 25$. Rezultă $\frac{CD}{BD} = \frac{7}{25}$.

11. Din $M \in (NC)$ rezultă $N \in (AP)$ în contradicție cu $(AP) \equiv (PN)$. Deci $M \in (NB)$; (MP) este linie mijlocie în triunghiul ABN , deci M este mijlocul lui (BN) . În triunghiul ABN , (AM) este înălțime și mediană deci este isoscel și $(AB) \equiv (AN)$. Pe de altă parte, (AN) fiind mediană în triunghiul dreptunghic ABC rezultă $(AN) \equiv (BN)$, deci triunghiul ABN este echilateral. Rezultă $m(\hat{B}) = 60^\circ$, $m(\hat{C}) = 30^\circ$.

15. Se calculează AE , EF , AF și se arată că $AF^2 = AE^2 + EF^2$.

18. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor trapezului și $E \in (AB)$, $F \in (DC)$. $\frac{EO}{AD} = \frac{BE}{BA}$ și $\frac{EO}{BC} = \frac{AE}{BA}$, deci $\frac{EO}{AD} + \frac{EO}{BC} = 1$. Tinând seama că $EF = 2 EO$ (exerc. 12, § 8), rezultă relația cerută.

19. Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele segmentelor (AF) , (CE) , (BF) , (DE) și O mijlocul segmentului (EF) ; (MP) este linie mijlocie în triunghiurile ABF , AFE , EFB , deci trece prin O și $(OM) \equiv (OP)$. Analog, (QN) este linie mijlocie în triunghiurile DEC , DEF și FEC , deci trece de asemenea prin O și $(OQ) \equiv (ON)$. Rezultă că $MQPN$ este paralelogram.

20. Se aplică teorema lui Thales pentru triunghiurile BAM ($AM \parallel ED$) și $AMC(FD \parallel AM)$.

21. Triunghiul ADC este isoscel, deci $AD = BC = 2b$, iar AC se calculează cu teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul ABC .

Capitolul III

§ 1.

1. Mediatoarea segmentului determinat de punctele date.

3. A, B, C fiind cele trei puncte comune, centrele cercurilor coincid cu punctul de intersecție O al mediatoarelor triunghiului ABC și cele două raze sunt egale cu OA .

5. Fie $C(O, r)$ un cerc și M' simetricul unui punct oarecare M față de O , adică $O \in (MM')$ și $OM = OM'$. Arătați că $M \in C(O, r) \Rightarrow M' \in C(O, r)$. Tinând seama că $(M')' = M$, de aici rezultă $M \in C(O, r) \Leftrightarrow M' \in C(O, r)$.

8. Arătați că se poate aplica teorema 2, cazul a.

9. Presupunând contrariul, există $A \in C(O, r)$ astfel ca A și O să fie de o parte și de alta a dreptei d . Atunci există $C \in d \cap (OA)$. Deduceți că d conține un punct din $\text{Int } C(O, r)$ și folosiți exerc. 8.

11. $C(A, AB)$.

12. *P și C fiind mijloacele segmentelor (AM) și (OA) , punctul P se află pe cercul $\mathcal{C}\left(C, \frac{r}{2}\right)$. Reciproc, dacă $P' \in \mathcal{C}\left(C, \frac{r}{2}\right)$, fie M' simetricul lui A față de P' . Se arată că $OM' = r$, deci $M' \in \mathcal{C}(O, r)$ și astfel orice punct al lui $\mathcal{C}\left(C, \frac{r}{2}\right)$ aparține locului geometric. Rezultă că locul geometric căutat este cercul $\mathcal{C}\left(C, \frac{r}{2}\right)$.*

14. *Dacă A, B, C, D sunt puncte pe un cerc astfel încât dreapta AC separă punctele B și D , atunci segmentele (AC) și (BD) au un punct comun.*

§ 2.

3. Cazul a): *C și D se găsesc de aceeași parte a dreptei AB . Atunci, din teorema semi-dreptei interioare unui unghi rezultă că sau $(AC \subset \text{Int } \widehat{BAD})$ sau $(AD \subset \text{Int } \widehat{BAC})$. În primul caz se duce diametrul $MN \perp AD$ și din $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ și $\widehat{AM} \equiv \widehat{MD}$ se deduce că B și C sunt de o parte și de alta a lui MN , $\widehat{BN} \equiv \widehat{NC}$ și $BC \perp MN$; în cazul al doilea se procedeză analog schimbând rolul lui C și D. Cazul b) C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB . Arătați că există punctul $P \in (AB) \cap (CD)$ și că arcele mici \widehat{AC} și \widehat{BD} sunt congruente, reducind astfel problema la cazul a).*

4. Se va folosi că $OM \perp AB$.

6. Un cerc concentric cu cercul dat.

7. Dreapta simetrică cu d față de mijlocul segmentului AB , din care se scoate punctul situat pe AB .

8. Fie O, O' centrele (M pe cercul cu centrul O), Q și Q' proiecțiile lui O, O' pe MN . Atunci $QQ' = \frac{1}{2} MN = PM$ deci $QA = PQ'$ și segmentele (QQ') și (AP) au același mijloc R (vezi și exerc. 8, Cap. I, § 8). Notind cu C mijlocul segmentului (OO') , (CR) este liniă mijlocie în trapezul $OQQ'O'$, deci $CR \perp AP$ și $CP \equiv CA$. Locul geometric al punctului P este cercul $\mathcal{C}(C, AC)$.

§ 3.

1. Se folosește teorema 2 și teorema de construcție a unui unghi.

2. NM' și NM'' coincid cu perpendiculara prin N la NM .

8. Se va arăta că $\widehat{BAO} \equiv \widehat{CBO}$ și $\widehat{ECF} \equiv \widehat{CBO}$.

9. Se tratează separat cazurile: A și O de aceeași parte sau de o parte și de alta a lui BC respectiv $O \in BC$.

10. b) MN paralel cu dreapta centrelor.

11. Locul geometric este cercul de diametru (OA) , dacă $A \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, respectiv un arc al unui cerc analog, dacă $A \notin \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.

12. Fie (CD) diametrul perpendicular pe AB . Dacă $M \in \widehat{ACB} - \{C\}$, $\triangle OMM' \equiv \triangle COP$, unde $M' = \text{pr}_{AB}M(\text{L.U.L.})$. Locul geometric se compune din cercurile de diametre (OC) și (OD) .

13. Se vor considera cazurile: 1) $P, Q \in$ arcul mare \widehat{AB} , 2) $P \in$ arcul mare \widehat{AB} , $Q \in$ arcul mic \widehat{AB} , 3) $P, Q \in$ arcul mic \widehat{AB} (în cazul $PQ < AB$). Se obțin arce capabile de $(\alpha + \beta)^\circ$, $(180 - \alpha - \beta)^\circ$, $|\alpha - \beta|^\circ$ și $(180 - |\alpha - \beta|)^\circ$, unde $\alpha = m(\widehat{AB})$, $\beta = m(\widehat{CD})$, care împreună formează două cercuri care trec prin A și B.

14. Două arce de cerc având capetele A și B.

15. Dacă PQ taie din nou cercul dat în R , arcul \widehat{APR} este de măsură constantă și punctul R este mereu de aceeași parte a diametrului cu un capăt în A . Se deduce că R este un punct fix.

16. Dacă CD este tangentă la cercul C circumscris triunghiului ABC , $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$. Reciproc, dacă $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$, luăm pe tangentă în C la

cercul C un punct $E \in \text{Int } \widehat{ACB'}$. Atunci $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACE})$, deci în virtutea teoremei de construcție a unui unghi ($CD = CE$).

17. Se va arăta că tangentele în F la cele două cercuri coincid și în acest scop se va folosi exercițiul 16. Mai întii se observă că B și C sunt de aceeași parte a dreptei DE (căci $CB \parallel DE$); luăm de partea cealaltă a lui DE punctul G astfel încât $\widehat{EFG} = \widehat{ECF}$.

Rezultă că FG este tangentă cercului (FCE) . Dar $\widehat{FBD} = \widehat{ECF}$, deci $\widehat{DFG} = \widehat{FBD}$ și astfel FG este tangentă și cercului (FBD) .

18. a) Cercul simetric cu $C(O, r)$ din care lipsesc punctele A și B . b) I fiind centrul cercului inscris, avem $m(\widehat{AIB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AMB}) + 90^\circ$; locul lui I se compune din două arce de cerc deschise, cu capetele A și B . c) Fie C mijlocul lui (AB) și $D \in (OC)$, $OD = 2DC$; atunci $DG = \frac{1}{3} OM$ și locul lui G este cercul $C\left(D, \frac{r}{3}\right)$.

§ 4.

8. Fie (AB) o latură a poligonului inscris, M mijlocul arcului mic \widehat{AB} și P, Q punctele de intersecție ale tangentei în M ca OA , respectiv OB . Atunci $l_n = AB$ și $L_n = PQ$. Folosiți triunghiurile asemenea OAB și OPQ și teorema lui Pitagora pentru triunghiul OMP .

13. Se va observa că $(C'D)$ este o mediană în triunghiul dreptunghic DAB și se va deduce că $(C'D') \equiv (B'A')$. Rezultă că $C'B'A'D'$ este un trapez isoscel sau paralelogram. Arătați că al doilea caz numai atunci e posibil cind \hat{B} sau \hat{C} este un unghi drept.

14. $A'B' \parallel AB$, $A_1B' \parallel HC$ (linii mijlocii în triunghiuri), deci $m(\widehat{A'_B'A_1}) = 90^\circ$. Acest raționament este valabil în fiecare dintre cazurile a), b), c).

15. Conform exercițiului 13, cercul C circumscris triunghiului $A'B'C'$ conține pe D și analog $E \in C$, $F \in C$. Conform exercițiului 14, punctele A' , B' , D și A_1 se află pe un cerc, care având trei puncte comune cu C , coincide cu C . Deci $A_1 \in C$, analog B_1 , $C_1 \in C$.

16. Deoarece $m(\widehat{A'DA_1}) = 90^\circ$, $(A'A_1)$ este un diametru în cercul lui Euler al triunghiului ABC . Deci centrul acestui cerc coincide cu mijlocul lui $(A'A_1)$ și analog cu mijloacele lui $(B'B_1)$ și $(C'C_1)$. Așadar dreptele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ au un punct comun.

19. R fiind centrul patratului, patrulaterul $OMRN$ este inscriptibil. Locul lui R este bisectoarea unghiului \widehat{AOB} (fără punctul O).

20. Se va arăta că patrulaterul $BCPA$ este inscriptibil. Deci P este situat pe arcul mic deschis \widehat{AC} al cercului circumscris triunghiului ABC . Pentru a arăta că orice punct P' al acestui arc aparține locului geometric se va demonstra că există un punct $M' \in (AE)$, astfel ca $DCP'M'$ să fie inscriptibil; se intersectează DM' cu AB în N' și se demonstrează că patrulaterul $AM'P'N'$ este inscriptibil.

22. Să presupunem că M se află pe arcul \widehat{AC} care nu-l conține pe B ; $m(\widehat{ABC}) < 90^\circ$, deci \widehat{AC} este un arc mic și $Q \in (AC)$. Deoarece \widehat{BAM} și \widehat{BCM} sunt unghiuri suplementare, unul este obtuz, să zicem \widehat{BAM} ; atunci $A \in (BR)$. Punctele Q și R aparțin cercului de diametru (AM) și cum $Q \in (AC)$, punctele Q, R sunt de o parte și de alta a dreptei AM ; rezultă că $AQMR$ este un patrulater convex inscrisibil. Același lucru este valabil și pentru patrulaterul $BPMR$. Așadar $\widehat{MRQ} \equiv \widehat{MAQ} \equiv \widehat{MBP} \equiv \widehat{MRP}$. Din convexitatea patrulaterelor amintite deducem ușor că punctele P și Q sunt de aceeași parte a lui RM , ceea ce împreună cu $\widehat{MRP} \equiv \widehat{MRQ}$ implică $(RP = (RQ)$.

§ 5.

5. Fie cercurile $C(O, r)$ și $C(O', r')$, $r < r'$. Se construiesc tangentele OA și OB la cercul $C(O', r' - r)$ se intersecțează $(O'A$ și $(O'B$ cu $C(O', r')$ în A' și B' ; paralelele prin A' respectiv B' la OA respectiv OB vor fi tangentele comune „exterioare“. Dacă tangentele din O la cercul $C(O', r + r')$ se obțin în mod analog tangentele comune „interioare“.

6. $d = O_1O_2 < O_1A + O_2A < r_1 + r_2$. Pentru a demonstra că $d > |r_1 - r_2|$, presupunem contrariul și arătăm că punctele lui $C(O_1, r_1)$ sunt fie toate în interiorul lui $C(O_2, r_2)$, fie toate în exteriorul lui, ceea ce în condițiile problemei nu este posibil.

8. vezi 5.

10. Fie d dreapta dată. a) $A \in d$; centrul se găsește la intersecția mediatoarei lui (AB) cu perpendiculara în A pe d , b) $B \in d$; analog, c) $AB \parallel d$: punctul de tangență se găsește la intersecția lui d cu mediatoarea segmentului (AB) . d) există $C \in d \cap AB$; dacă $C \in (AB)$ problema nu are soluție; dacă $B \in (CA$, construim pe d punctele T_1 și T_2 astfel ca $CT_1^2 = CT_2^2 = CA \cdot CB$. Problema are două soluții: cercurile circumscrise triunghiurilor ABT_1 și ABT_2 .

13. Se aplică exerc. 16, § 3.

§ 6.

$$4. \widehat{AB} = \mu(\widehat{AB}) = 1, m(\widehat{AOB}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \mu(\widehat{AOB}) = \frac{180}{\pi}.$$

5. A și B fiind punctele de intersecție ale cercurilor, se observă că triunghiul O_1OA este dreptunghic în A și $m(\widehat{O_1O_2A}) = 30^\circ$.

Exerciții recapitulative

$$2. \frac{25}{2}.$$

3. Fie (AB) coarda, $M \in$ arcul mic \widehat{AB} , P, Q, R proiecțiile lui M pe tangentele în B și A și pe AB ; dreapta MR taie cercul din nou în N . $\triangle NBR \sim \triangle AMR$, $\triangle AMQ \sim \triangle NAR$, din care se deduce că $\frac{MR}{MQ} = \frac{RB}{RA} \cdot \frac{AN}{BN}$. Analog $\frac{MR}{MP} = \frac{RA}{RB} \cdot \frac{BN}{AN}$, deci $MR^2 = MP \cdot MQ$.

4. Se va folosi puterea punctului A față de cerc.
5. $\triangle HBA' \sim \triangle HAB'$ implică $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$; sau se observă că punctele A, B, A', B' sunt pe un cerc și se scrie puterea lui H față de acest cerc în două moduri.
7. π
8. Se va arăta că $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{AEB}) = 180^\circ - m(\widehat{ABC})$.
10. Folosind patrulaterele inscriptibile $ABDE$ și $ACDF$, se va arăta că $\widehat{FDE} \equiv \widehat{BAC}$.
12. Fie $r_1 < r_2$, $C = \text{pr}_{O_1 O_2} A$ și $D = \text{pr}_{AD} O_1$; folosind triunghiuri congruente, se arată că $O_1 C = AD = r_1$.

Capitolul IV

§ 1.

2. Dreapta paralelă cu axa absciselor, care conține punctul de coordonate $(0, 2)$.
3. Dreapta paralelă cu axa ordonatelor, care conține punctul de coordonate $(5, 0)$.
4. $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$. 5. $(-2, 1), (6, 7)$. 6. b) π , c) $10\sqrt{5}$, d) $\sqrt{10}$. 7. $x \in \{-3, 7\}$. 8. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. 9. Se arată că lungimile a două laturi sunt egale.
11. Punctul P corespunde lui P_0 din teorema 3. Se poate aplica și reciproca teoremei lui Pitagora. 12. $x = -1$. 13. Punctul de coordonate $(0, 6)$.

§ 2.

15. $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{39}{8}$. 17. $4x + 2y - 5 = 0$.

§ 3.

19. $5x + 2y + 5 = 0$. 21. Da. 22. $5x + 3y = 4$. 23. $a = 1$, $b = -1$.
24. Dacă $a = 0$, dreptele P_1P_2 și P_3P_4 sunt respectiv paralele cu axele de coordonate. Dacă $a \neq 0$, coeficientul unghiular al dreptei P_1P_2 este a , iar coeficientul unghiular al dreptei P_3P_4 este $-\frac{1}{a}$. Cele două drepte sunt evident perpendiculare. 28. Se numește ecuația dreptei prin tăieturi deoarece P_1 și P_2 sunt punctele de intersecție ale dreptei respectiv cu axele de coordonate.

§ 4.

29. $\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{3}, 3$. 30. $\frac{4}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}$. 31. $\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}, -\frac{12}{5}$.

32. a) $2 - \sqrt{3}$, b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, c) $-2 - \sqrt{3}$, d) $-2 - \sqrt{3}$. 33. $\frac{4 + 6\sqrt{2}}{15}$.

35. Măsurile în radiani ale unghiurilor cerute sunt respectiv: a) 0, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\frac{\pi}{3}$,
d) $\frac{3\pi}{4}$. 36. 150 , $\frac{5\pi}{6}$. 37. $\frac{3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}}{15}$.

Capitolul V

§ 1.

1. $(-1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$,
 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. a) $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, b) $\left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, c) $\left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$,
d) $\left\{ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. 5. $(2 + \sqrt{3})x + y - 1 = 0$.

§ 2.

1. a) 1, b) $\cos \frac{2\pi}{5}$, c) -1 , d) -1 , e) $\frac{1}{2}$, f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, g) 0, h) -1 , i) -1 , j) 0,
k) $-\sqrt{3}$, l) $-\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

2. $-\frac{24}{25}$. 3. a) pară, b) pară pentru n par și impară pentru n impar, c) nici pară
nici impară, d) impară. 4. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{1}{2}$. 5. $\frac{56}{65}$. 7. Figurind pe cercul unitate C
punctele $F(a) = P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ și $F(b) = Q\left(-\frac{7}{25}, -\frac{24}{25}\right)$, se constată că $a > b$ și
 $a - b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se calculează $\cos(a - b)$ cu ajutorul formulei (2), iar $\sin(a - b)$ cu
ajutorul formulei (1). Coordonatele punctului $F(a - b)$ sunt $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. 8. Rezolvând sis-
temul format din $\sin x + \cos x = 0,2$ și $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și ținând seama de $\cos x < 0$,
se obține $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\sin x = \frac{4}{5}$. Coordonatele punctului $F(x)$ sunt $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

§ 3.

1. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $\frac{24 - 7\sqrt{3}}{50}$, $-\frac{24 + 7\sqrt{3}}{50}$.

5. a) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, c) $-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, d) $\frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}}{4}$.

e) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. 6. e) Se împart ambii membri cu 2 și se cunoaște că $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

și $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ etc. 8. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. 9. Se observă mai întâi că

$\cos^4 \frac{7\pi}{8} = \cos^4 \frac{\pi}{8}$ și $\cos^4 \frac{5\pi}{8} = \cos^4 \frac{3\pi}{8}$. În continuare rămîne de arătat că $\cos^4 \frac{\pi}{8} +$

$+ \cos^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}$. Dar $\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$ etc. 10. Se scrie $E = \frac{1 + \cos 2(a+b)}{2} +$
 $+ \frac{1 + \cos 2(a-b)}{2} - \cos 2a \cos b$ și după aplicarea formulelor (4) și (2) se obține $E = 1$.

Deci E nu depinde de a și b deoarece are valoarea 1, oricare ar fi valorile reale ale lui a și b .

§ 4.

1. 0. 2. h) Se scrie $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a - \frac{\sin 3a}{\cos 2a \cos a} = \operatorname{tg} 3a -$
 $- \operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\cos 3a}{\cos 2a \cos a} = \operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\cos 2a \cos a - \cos 3a}{\cos 2a \cos a}$ etc. 3. 1. 4. n. 5. Rezolvînd sistemul format cu ecuațiile $5 \cos x + 10 \sin x - 11 = 0$ și $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, se obțin două soluții $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ și $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$. Așadar, problema are două soluții: $\cos x = \frac{3}{5}$,
 $\sin x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ sau $\cos x = \frac{7}{25}$, $\sin x = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$.

§ 5.

1. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, c) $-\sqrt{2}$, d) 0, e) $4 \sin 3x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,
f) $4 \cos 4x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. 2. e) $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}$, conform formulei (12).
Deci $1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = 1 + \cos a + \frac{1 + \cos a}{\sin a} = (1 + \cos a)\left(1 + \frac{1}{\sin a}\right) =$
 $= \frac{1 + \cos a}{\sin a}(1 + \sin a) = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \left(\sin a + \sin \frac{\pi}{2}\right)$ etc. 3. Dacă $\sin \frac{x}{2} = 0$, atunci $S = 0$.

Presupunem că $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. Se obține, conform indicației, $2S \sin \frac{x}{2} = 2 \sin 3x \sin \frac{5x}{2}$.

Deci $S = \frac{\sin 3x \sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$. Pentru transformarea sumei T se procedează în mod analog.

Se obține $T = \frac{\cos 4x \sin \frac{7x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.

1. a) minus, b) minus, c) plus, d) negativ, e) minus, f) plus. 2. Graficele sunt traseate în figurile care urmează

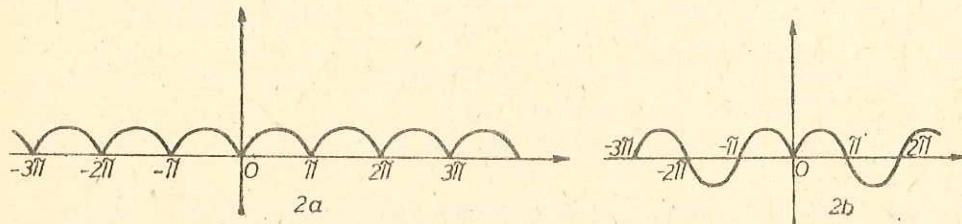


Fig. R. 2a, 2b

3. Graficul este trasat în figura care urmează, pentru $x \in [0, 2\pi]$:

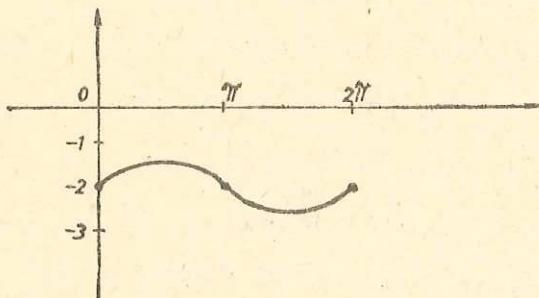


Fig. R. 3

Capitolul VI

§ 3.

1. a) $\frac{\pi}{3}$, b) $-\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\sqrt{3}$, e) 1, f) $\frac{11}{16}$. 2. $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$.

3. $x = 5$. 4. f) Deoarece $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{4x}{5-3x} - \operatorname{arctg} \frac{5x-3}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right)$, să arătăm că egalitatea este verificată oricare ar fi $x \neq \frac{5}{3}$. Dar pentru $x > \frac{5}{3}$, $\operatorname{arctg} \frac{4x}{5-3x} - \operatorname{arctg} \frac{5x-3}{4} < 0$ deoarece $\frac{4x}{5-3x} < 0$ și $\frac{5x-3}{4} > 0$, iar $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} > 0$. g) Dacă $\cos x = 0$, pentru $\sin x = 1$ și pentru $\sin x = -1$, egalitatea este verificată. Dacă $\cos x \neq 0$, atunci $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = \frac{\operatorname{tg} x + 2}{1 - 2 \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)} = \operatorname{tg}(x + \operatorname{arctg} 2)$.

5. a) $x \in \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$, b) $\left\{ \frac{5\sqrt{3}-8}{11} \right\}$, c) $x \in \left\{ 0, \frac{4-\sqrt{13}}{4} \right\}$.

§ 4.

a) $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$,

b) $x \in \left\{ \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{42} - 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) $x \in \left\{ \frac{2k + (-1)^k}{3 + (-1)^k} \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$ d) $x \in \left\{ -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

e) $x \in \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

f) $x \in \left\{ \frac{(-1)^k + \sqrt{1 + 4k\pi}}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{(-1)^k - \sqrt{1 + 4k\pi}}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$

§ 5.

1. $x \in \left\{ \arccos \frac{1 - \sqrt{7}}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos \frac{1 - \sqrt{7}}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

3. $x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

4. $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

5. $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

7. Ecuația se scrie $(\lg x - 2)(5\lg x + 4\lg x + 3) = 0.$ Se obține $x \in \{\arctg 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

9. Se face substituția $\cos x = y.$ Se obține $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

§ 6.

1. $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$

2. $t \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

3. $t \in \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

4. $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{21}}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

5. $t \in \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

6. $t \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$

7. a) $\frac{2\pi}{5},$ b) $10\pi,$ c) $\frac{2\pi}{7}.$

8. Dacă T ar fi perioada, ar însemna că $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$ Pentru $x = 0,$ am avea $\sin 4T + \cos \sqrt{2}T = 1,$ iar pentru $x = -T, -\sin 4T + \cos \sqrt{2}T = 1.$

Din cele două egalități se obține $\sin 4T = 0$ și $\cos \sqrt{2}T = 1$. În primul caz, din $\sin 4T = 0$, rezultă $T = \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, iar din $\cos \sqrt{2}T = 1$, rezultă $T = k'\pi\sqrt{2}$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Deoarece nu există numere întregi k și k' astfel ca cele două valori ale lui T să fie egale, am ajuns la o contradicție.

9. Se scrie $h(x) = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3}(1 + \cos 2x) + 2\sqrt{3} - 3 = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3}\cos 2x - 3 = 4\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 3$ și se continuă ca la aplicația 4.

Probleme recapitulative

4. Fie C simetricul lui A față de M ; $\triangle MNC \cong \triangle MBA$, $AN > AB = NC$, deci $\widehat{BAM} = \widehat{MCN} > \widehat{MAN}$.

7. Fie $ABCD$ patrulaterul și $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă $ABCD$ este convex și M un punct din plan, $MA + MC > AC$, $MB + MD \geqslant BD$. Dacă $ABCD$ este concav, fie de exemplu $C \in \text{Int } \widehat{ABD}$; atunci $CA + CB + CD < CA + (BO + OC) + (CO + OD) = OA + OB + OC + OD$, deci suma distanțelor de la C la vîrfuri este mai mică decât de la O . Așadar proprietatea nu rămâne valabilă pentru acest caz.

8. $(AC) \cap BO = \{E\}$, $(BC) \cap AO = \{D\}$, $(AD) \subset \text{Int } \widehat{BAC}$, $\{O\} = (BE) \cap (AD)$, $O \in (BE) \subset \text{Int } ACB$, deci (CO) intersectează segmentul (AB) .

12. Notind $a = OA$, semiplanele (aB) și (aC) sunt opuse. $P \in \text{Int } \widehat{AOB}$ implică $(BP) \cap a = \emptyset$ și $(CP) \cap a = \{D\}$, deci $D \in (CP)$. Reciproc, din $D \in (CP)$ rezultă $P \in (aB)$; pe de altă parte există $E \in (CD) \cap OB$ și $E \in (CP)$, deci P și D sunt de aceeași parte a lui OB . Așadar $P \in \text{Int } \widehat{AOB}$.

17. $ABCD$ fiind trapezul dat ($(AB) =$ baza mare), se ia punctul E astfel încât $A \in (EB)$ și $(EA) \cong (DC)$. Triunghiul DEB va fi dreptunghic.

19. Asemănarea $\triangle SPQ \sim \triangle CBA$ rezultă în modul următor: PS și SQ sunt linii mijlocii în CBE , CFE , deci $PS = \frac{1}{2}BE$, $SQ = \frac{1}{2}CF$. Dar $\frac{BE}{CF} = \frac{BC}{AC}$ și notind $\{R\} = BE \cap CF$, avem $\widehat{PSQ} \equiv \widehat{BRQ} \equiv \widehat{BCA}$. Analog se arată că $\triangle TOM \sim \triangle CBA$. Putem scrie:

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{PS}{BC} = \frac{BE}{2BC} = \frac{1}{2} \frac{AD}{AB} = \frac{NM}{AB},$$

deci $PQ = NM$ și analog $QM = PN$.

20. Fie A pe latura $[CD]$ a pătratului $CDEF$; putem presupune că $AE \geq AB$ (schimbând la nevoie rolul lui E cu cel al lui F). Atunci $AC + AD + AE + AF \geq CD + AB + AF \geq AB + 2CD \geq AB(1 + \sqrt{2})$. Dacă A și B sunt vîrfuri opuse în pătrat, relația de mai sus devine o egalitate, deci aceasta este soluția problemei.

21. $OM - ON < MN < ON + OM$.

27. Se va observa că AO_1, HO_2 este romb și se va arăta că triunghiul ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente, unde O_1, O_2, O_3 sunt centrele celor trei cercuri.

28. Fie A' simetricul lui A față de punctul D . Punctele A', B, H, C sunt situate pe un cerc de diametru $A'H$, care conține și punctul M .

29. Luăm $M \in (BD)$ astfel încât $\widehat{MGB} = \widehat{ACD}$. Se obține: $\triangle CMB \sim \triangle CDA$ și $\triangle CMD \sim \triangle CBA$.

31. Cele patru puncte sunt vîrfurile unui dreptunghi.

32. Ecuțiile înălțimilor sunt $x + ay = 0$, $(10 - a)x + 2(10 - a)y - b - 20b = 0$, $(2 - a)x + 10(2 - a)y - b - 20b = 0$. Se determină coordonatele punctului de intersecție a două din mediatore și se verifică că este situat pe a treia.

33. $t \in \left\{ \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4} \right\}$.

34. a) $\left\{ t \mid t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

b) $\left\{ t \mid t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

c) $\left\{ t \mid t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

d) $\left\{ t \mid t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

36. $\frac{20}{29}, \frac{41}{841}, \frac{541}{641}$.

38. a) $4 \cos a \cos b \cos c$,

b) $4 \cos a \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$

c) $2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{a}{4} - \frac{\pi}{4} \right)$,

d) $4 \sin a \sin \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{12} \right)$.

39. a) 2, b) 3, c) $\frac{3}{2}$, d) 14.

40. a) $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arctg \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, b) Se trece totul în membrul stîng și se dă factor comun $\sin x - \cos x$, c) Se aplică formula (12) și se ajunge la $\sin x - \cos x = 1$, d) După ce se transformă în sumă produsul de cosinusuri se ajunge la $2 \cos 2x = 1$, e) Se aplică formulele (7) și (8) și se obține $3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} = 0$ sau $\cos \frac{x}{2} (3 \cos x - \sin x + 1) = 0$.

Deci $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

41. a) Ecuația este echivalentă cu $2 \sin^2 x - (2m - 1) \sin x - m = 0$,

b) Ecuația are soluții oricare ar fi valorile reale ale lui m ,

c) Ecuația are soluții dacă $m \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty \right)$.

42) a), b), c), d). Se folosește indicația de la punctul e).

44. Se observă că $(OM) \equiv (ON)$. Deci unghiurile triunghiului au măsurile $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$.

Cuprins

Prefața	3
C ap. I. Incidență, ordonare, congruență	5
§ 1. Studiul axiomatice al geometriei	5
§ 2. Axiomele de incidență ale geometriei în plane	6
§ 3. Distanța și axioma riglei	7
§ 4. Segmente, semidrepte și unghiuri	10
§ 5. Axioma de separare a planului	14
§ 6. Mulțimi convexe	17
§ 7. Axiomele unghiului	21
§ 8. Proprietăți de congruență	24
§ 9. Congruență triunghiurilor	29
§ 10. Inegalități geometrice	34
§ 11. Alte cazuri de congruență a triunghiurilor	38
§ 12. Distanța de la un punct la o dreaptă	40
§ 13. Mediatore. Bisectoare. Locuri geometrice	43
§ 14. Drepte neconcurrente	45
Exerciții recapitulative	47
C ap. II. Paralelism. Asemănare	50
§ 1. Axioma paralelelor	50
§ 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	52
§ 3. Linia mijlocie	54
§ 4. Concurența unor drepte în triunghi	56
§ 5. Paralele echidistante	58
§ 6. Teorema lui Thales	60
§ 7. Teorema bisectoarei	64
§ 8. Asemănarea triunghiurilor	65
§ 9. Relații metrice	70
Exerciții recapitulative	75
C ap. III. Cercul	77
§ 1. Definiții	77
§ 2. Coarde. Arce. Unghiuri la centru	79
§ 3. Unghi inscris	81
§ 4. Poligoane inscrise și circumscrise	84
§ 5. Poziția relativă a două cercuri	90
§ 6. Lungimea cercului	94
Exerciții recapitulative	101

C a p. IV. Elemente de geometrie analitică	103
§ 1. Coordonate în plan	103
§ 2. Ecuația dreptei	106
§ 3. Coeficientul unghiular al dreptei	110
§ 4. Funcțiile sin și cos definite pe intervalul $[0, \pi]$	112
§ 5. Unghiul unei drepte cu axa absciselor	117
C a p. V. Funcțiile trigonometrice	120
§ 1. Funcția de acoperire universală a cercului unitate	120
§ 2. Funcțiile trigonometrice sin și cos	125
§ 3. Formule pentru $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\sin(a + b)$ și formulele deduse din acestea	129
§ 4. Funcțiile tg și ctg	132
§ 5. Transformarea sumelor în produse	135
§ 6. Graficele funcțiilor sin, cos și tg	136
§ 7. Identități condiționate	141
C a p. VI. Ecuații trigonometrice	144
§ 1. Relații, funcții	144
§ 2. Inversarea funcțiilor trigonometrice	145
§ 3. Funcțiile \arcsin , \arccos și arctg	146
§ 4. Ecuații trigonometrice fundamentale	151
§ 5. Ecuații trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebră	156
§ 6. Ecuații de forma $a \cos t + b \sin t + c = 0$	158
Aplicații	161
Probleme recapitulative	164
Indicații și răspunsuri	170

Nr. colilor de tipar : 12
Bun de tipar : 4.IV.1988



Com. nr. 70 448/34 113
Combinatul poligrafic
„CASA SCINTEII“
București — R.S.R.

12,60