Lei 11

ISBN 973 — 30 — 0042 — 6

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Matematică

Manual pentru clasa a V-a

5

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1989

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. univ. dr. C.P. POPOVICI Prof. I.C. LIGOR Prof. dr. I.G. BORCA

Matematică

MANUAL PENTRU CLASA A V-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat în anul 1978 și revizuit în anii 1980 și 1983. Revizia din anul 1983 s-a făcut pe baza programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39 197/1.VII.1983.

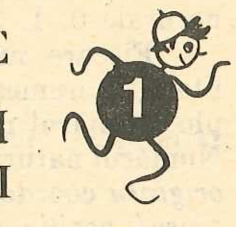
Referenți: Prof. GEORGETA TOADER
Prof. N. GHICIU

Colectivele catedrelor de matematică ale Școlilor numărul 5 și numărul 30 din București (prof. VALENTINA ALEXIANU, prof. LUCIA CHIȘIU și prof. ANA DRĂGUȘIN)

Redactor: Prof. ELEONORA DRĂGHIA
Tehnoredactor: ION MIREA
Coperta: VICTOR WEGEMANN
Prezentarea grafică: OCTAVIA ȚARĂLUNGĂ

ISBN 973 — 30 — 0042 — 6

NUMERE NATURALE



RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASELE I–IV ȘI COMPLETĂRI

1. SCRIEREA ȘI CITIREA NUMERELOR NATURALE

Numerele naturale se scriu cu ajutorul cifrelor. De exemplu, 7 840 382 exprimă un număr natural care se citește „șapte milioane opt sute patruzeci de mii trei sute optzeci și doi". Pentru prescurtare spunem că atît cifrele cît și exprimările de forma 7 840 382 sînt *numere naturale.*

Spunem că numerele naturale scrise astfel:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 11,\ 12,\ \ldots$$

formează *șirul numerelor naturale.* Simbolurile ... indică faptul că am omis să scriem unele numere naturale. Nu putem scrie toate numerele naturale, deoarece după orice număr natural mai putem scrie un număr natural. Acest fapt îl exprimăm spunînd că șirul numerelor naturale este *infinit.*

EXERCIȚII

1. Scrieți cu ajutorul cifrelor următoarele numere: a) treizeci și șapte; b) șapte sute treizeci și cinci; c) patru mii nouă sute douăzeci și cinci; d) trei mii trei; e) douăzeci și cinci de mii trei sute patru; f) șapte sute cincizeci și șase de mii; g) trei milioane trei sute trei.
2. Citiți următoarele numere: a) 37; b) 735; c) 4 925; d) 3 003; e) 25 304; f) 756 000; g) 3 000 303; h) 2 000 002; i) 12 405 000.

2. REPREZENTAREA NUMERELOR NATURALE PE O DREAPTĂ

Pe dreapta (d) din figura 1 luăm punctele O, A, B, C, D, E, F, G, ... astfel încît distanțele între punctele O și A, A și B, B și C, C și D, D și E, E și F, F și G, ... să fie egale cu lungimea unui segment dat MN. În dreptul acestor puncte punem respectiv numerele naturale 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Fiecare număr natural, așezat sub un punct indicat printr-o literă, se numește *coordonata* punctului sub care este așezat. De exemplu, numărul natural 6 este așezat sub punctul indicat prin litera F. Numărul natural 6 este coordonata punctului F. Punctul O se numește *originea* coordonatelor, sensul de la O la A pe dreapta (d) se numește *sensul pozitiv* al dreptei (d). Segmentul MN, a cărui lungime este distanța între punctele consecutive aflate pe dreapta (d) și notate cu $O, A, B, C, D, E, F, G, ...$, se numește *unitate de măsură*.

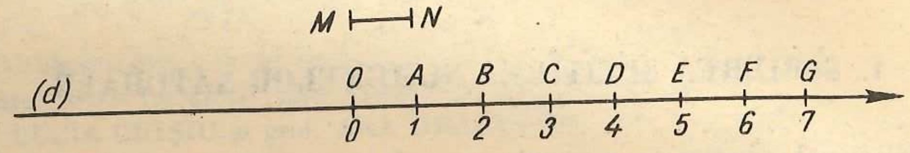


Fig. 1

O dreaptă pe care am fixat o *origine*, un *sens* și o *unitate de măsură* se numește *axă a numerelor*.

3. ADUNAREA

Fiind date două numere naturale, de exemplu 3 și 2, vom înțelege prin *suma* numerelor naturale 3 și 2, care se numesc *termenii* sumei, un număr natural, notat cu $3 + 2$. Acest număr natural este 5.

Spunem că numărul natural 5 s-a obținut prin *adunarea* numerelor naturale 3 și 2 sau spunem că $3 + 2$, ceea ce se citește „trei plus doi", este 5 și scriem aceasta astfel:

$$3 + 2 = 5.$$

Spunem că numărul 5 este mai mare cu 2 decît 3 și, de asemenea, că numărul 5 este mai mare cu 3 decît 2.

Avem și

$$2 + 3 = 5.$$

Deci: $$3 + 2 = 2 + 3.$$

O astfel de proprietate este adevărată oricare ar fi perechea de numere naturale considerate și se enunță în general:

Oricare ar fi numerele naturale a și b avem

$$a + b = b + a.$$

Această proprietate a adunării numerelor naturale se numește *comutativitatea adunării* numerelor naturale.

Avem

$$(4 + 3) + 5 = 12,$$

deoarece

$$4 + 3 = 7, \quad 7 + 5 = 12.$$

Am pus pe $4 + 3$ între paranteze ca să scoatem în evidență numărul natural $4 + 3$ care se adună cu 5. Avem

$$4 + (3 + 5) = 12,$$

deoarece

$$3 + 5 = 8, \quad 4 + 8 = 12.$$

Deducem că

$$(4 + 3) + 5 = 4 + (3 + 5).$$

O astfel de proprietate este adevărată și pentru alte trei numere naturale, oricare ar fi ele, și se enunță în general:

Oricare ar fi numerele naturale a, b și c avem

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Această proprietate a adunării numerelor naturale se numește *asociativitatea adunării* numerelor naturale.

Din cauză că

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

vom conveni ca prin $a + b + c$ să înțelegem ori $(a + b) + c$, ori $a + (b + c)$. Deci, în loc de $(4 + 3) + 5$ vom scrie $4 + 3 + 5$ și, de asemenea, în loc de $4 + (3 + 5)$ vom scrie tot $4 + 3 + 5$.

Observăm că:

$$2 + 0 = 2, \qquad 0 + 2 = 2.$$

Se spune că:

Numărul natural 0 este element neutru la adunarea numerelor naturale,

adică oricare ar fi numărul natural a avem

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Adunarea a două numere naturale se efectuează după cum urmează:

Exemplul 1

Să adunăm două numere naturale 2 401 și 30 510. Pentru ușurința calculului, cele două numere naturale se așază unul sub altul, se trage sub ele o linie orizontală și se adună cifrele de același ordin, de la dreapta la stînga. În acest exemplu, se constată că, prin adunarea cifrelor de același ordin se obține tot o cifră. Rezultatul adunării se scrie sub linia orizontală astfel încît rezultatele adunărilor cifrelor să fie de același ordin cu cifrele care s-au adunat. După primul număr natural se scrie simbolul + (plus) pentru a arăta că se adună cele două numere naturale. Anume:

$$\begin{array}{r} 2\,401 + \\ 30\,510 \\ \hline 32\,911 \end{array}$$

Cifra 3, care este prima cifră din cel de-al doilea număr natural, a fost transcrisă sub linia orizontală, neexistînd nici o cifră de același ordin în numărul natural 2 401.

Exemplul 2

Să adunăm numerele naturale 7 809 și 84 095, procedînd analog. Obținem:

$$\begin{array}{r} 7\,809 + \\ 84\,095 \\ \hline 91\,904 \end{array}$$

De data aceasta, adunăm cifrele 5 și 9, cele mai din dreapta ale celor două numere naturale date. Se obține 14. Se scrie 4 în rezultatul final, iar 1, numit cifră de transport, din 14, se adună cu cifrele 9 și 0, care se află imediat la stînga cifrelor care au fost adunate din cele două numere naturale. Procedînd cu suma $9 + 0 + 1 = 10$ la fel cum am procedat cu 14 și continuînd pînă la ultima cifră din stînga

din numerele naturale date, obținem suma celor două numere naturale. Cifrele de transport se țin minte.

Exemplul 3

Mai multe numere naturale se adună, adunînd de la dreapta la stînga cifrele de același ordin, adunîndu-le și cu numărul natural obținut suprimînd ultima cifră, care a fost scrisă la rezultat, din numărul natural obținut din adunarea precedentă:

$$\begin{array}{r} 54\,802 + \\ 451\,700 \\ 2\,830 \\ \hline 509\,332 \end{array}$$

Începînd de la dreapta la stînga, am scris, mai întîi, 2, care este $0 + 0 + 2$, apoi am scris 3, care este $3 + 0 + 0$. Mai departe, avem $8 + 7 + 8 = 23$. Am scris 3. Apoi pe 2 l-am adunat cu 2, 1, 4, deci $2 + 1 + 4 + 2 = 9$ ș.a.m.d.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se afle numărul care este mai mare cu 4 decît 24.

2. Care este numărul mai mare cu 1 400 decît 12 000?

3. Un muncitor a realizat într-o zi 144 piese de același fel, iar a doua zi cu 15 piese mai mult.
a) Cîte piese a realizat a doua zi?
b) Cîte piese a realizat în cele două zile la un loc?

4. O brigadă de mineri a extras într-o lună 628 t de cărbuni; în a doua lună cu 24 t mai mult decît în prima lună; în a treia lună cu 28 t mai mult decît în a doua lună. Cîte tone de cărbuni a extras brigada în cele trei luni la un loc?

5. Să se efectueze oral:
a) $4 + 16$; b) $0 + 24$; c) $6 + 39 + 4$; d) $1 + 28 + 9$;
e) $2 + 999 + 0$; f) $2 + 25 + 18 + 25$.

6. Să se efectueze:
a) $1 + 187 + 199$; b) $199 + 98 + 101$; c) $198 + 89 + 102$; d) $10 + 299 + 90 + 201 + 2\,210$; e) $1\,999 + 879 + 1\,001 + 2\,021$.

7. Să se efectueze:
a) $4 + 23 + 150 + 1\,246$; b) $24 + 10\,246 + 136 + 9$; c) $9\,881 + 2 + 124 + 891\,999 + 36$; d) $0 + 2\,476 + 1 + 0 + 99\,981$; e) $245\,420 + 1\,200 + 60\,011$; f) $989 + 7\,898 + 199\,868 + 18\,799$.

8. Scrieţi numărul 1 ca o sumă de două numere naturale.

9. Să se completeze tabelul.
Primul rînd e completat ca model.

a	$a+2$	$475+a$
6	8	481
4		
24		
1 007		

10. Să se înlocuiască steluţele cu cifre

a) $\begin{array}{r} 1{*}6+ \\ 1{*} \\ \hline {*}02 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 3\ {*}45+ \\ {*}\ 73{*} \\ \hline 9\ 2{*}4 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} {*}\ {*}{*}{*}+ \\ 7\ 92{*} \\ \hline 9\ 753 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 2\ 7{*}{*}+ \\ {*}\ {*}75 \\ {*}\ 823 \\ \hline 7\ 654 \end{array}$

11. Să presupunem că pe o masă se găsesc cartonaşele desenate în figura 2. Care este cel mai mare număr de cartonaşe pe care trebuie să le luăm de pe masă astfel încît suma numerelor scrise pe ele să fie 7? Dar pentru ca suma numerelor să fie 29?

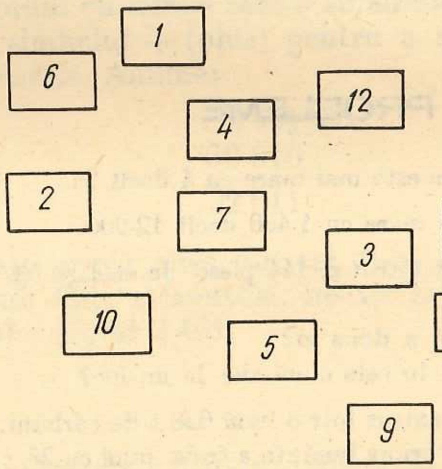


Fig. 2

12. Este posibil să punem 10 bile în 4 cutii astfel încît în fiecare cutie să fie cel puţin o bilă şi să nu existe două cutii cu acelaşi număr de bile? Dar 14 bile în 5 cutii? Dar 27 bile în 7 cutii?

13[d]. Într-un sac sînt 32 bile roşii, 40 bile albe şi 45 bile negre. a) Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să le luăm din sac, fără a cunoaşte culoarea nici uneia din bilele luate, pentru a fi siguri că am luat cel puţin cîte o bilă de fiecare culoare? b) Dar pentru a fi siguri că am luat cel puţin o bilă neagră?

[d] Problemele notate cu litera d sînt mai dificile.

INEGALITATEA ÎNTRE NUMERE NATURALE

Fie o pereche de numere naturale, de exemplu, 4 şi 6. Se constată că

$$6 = 4 + 2,$$

iar $2 \neq 0$. Vom spune că „6 este mai mare decît 4" şi vom scrie aceasta astfel:

$$6 > 4.$$

În loc de $6 > 4$ vom scrie şi $4 < 6$, ceea ce vom citi „4 este mai mic decît 6".

În general:

Vom spune că un număr natural a este mai mare decît un număr natural b şi vom scrie

$$a > b,$$

dacă există un număr natural c, diferit de numărul natural 0, astfel încît să avem

$$a = b + c.$$

Vom scrie şi $b < a$ şi vom citi aceasta „b este mai mic decît a" dacă $a > b$. Oricare din simbolurile $<$ sau $>$ este utilizat la definirea *inegalităţii stricte* $a > b$ sau a inegalităţii stricte $a < b$ între numerele naturale a şi b.

Fie numerele naturale 47 şi 38, formate din acelaşi număr de cifre. Avem $4 > 3$, deoarece $4 = 3 + 1$ şi $1 \neq 0$. În acelaşi timp avem şi $47 > 38$, deoarece $47 = 38 + 9$, unde $9 \neq 0$.

Fie numerele naturale 483 şi 437, formate din acelaşi număr de cifre. Avem $4 = 4$ şi $8 > 3$, această inegalitate obţinîndu-se din $8 = 3 + 5$, unde $5 \neq 0$. În acelaşi timp avem şi $483 > 437$, deoarece $483 = 437 + 46$, unde $46 \neq 0$.

În general:

Fie două numere naturale formate din acelaşi număr de cifre.

Este mai mare numărul în care o cifră este mai mare decît cifra de acelaşi ordin din cel de-al doilea număr, cifrele de ordine superioare fiind egale două cîte două.

Fie numerele naturale 131 şi 91, care nu au acelaşi număr de cifre. Avem $131 > 91$, deoarece $131 = 91 + 40$, unde $40 \neq 0$.

În general:

Dintre două numere naturale, care nu au acelaşi număr de cifre, este mai mare acela care are mai multe cifre.

Fie numerele naturale 8, 9, 10. Avem $8 < 10$, $9 < 10$, dar $10 = 10$. Dacă notăm cu a oricare din numerele naturale 8, 9, 10, avem $a < 10$ sau $a = 10$. În loc de a scrie „$a < 10$ sau $a = 10$" vom scrie $a \leqslant 10$, ceea ce se citeşte „a este mai mic sau egal cu 10" şi care se numeşte *inegalitate nestrictă* între a şi 10.

În general:

Fiind date două numere naturale a şi b, pentru a indica faptul că $a > b$ sau $a = b$, scriem

$$a \geqslant b$$

şi citim aceasta „a este mai mare sau egal cu b" sau „a este cel puţin egal cu b". Inegalitatea $a \geqslant b$ se numeşte *inegalitate nestrictă* între a şi b.

Analog:

Fiind date două numere naturale a şi b, pentru a indica faptul că $a < b$ sau $a = b$, scriem

$$a \leqslant b$$

şi citim aceasta „a este mai mic sau egal cu b" sau „a este cel mult egal cu b". Inegalitatea $a \leqslant b$ se numeşte *inegalitate nestrictă* între a şi b.

Exemplul 1

Să se afle toate numerele naturale x, astfel încît $x \leqslant 4$. Aceste numere naturale sînt: 0, 1, 2, 3, 4.

Exemplul 2

Să se afle toate numerele naturale x, astfel încît $x < 4$. Aceste numere naturale sînt: 0, 1, 2, 3.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Care număr este mai mare: a) 2 700 sau 7 200? b) 5 024 sau 4 205? c) 1 017 246 sau 17 001 167? d) 200 001 sau 20 001?
2. Scrieţi toate numerele naturale mai mici decît 7.
3. Scrieţi toate numerele naturale mai mari decît 2 şi mai mici decît 10.
4. Care este cel mai mic număr natural de două cifre?
5. Care este cel mai mare număr natural de două cifre?
6. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre?
7. Care este cel mai mare număr natural de trei cifre?
8. Care este cel mai mare număr natural de cinci cifre?
9. Care este cel mai mic număr natural de patru cifre care are cifra zecilor 5?
10. Care este cel mai mic număr natural de cinci cifre care are cifra sutelor 8?
11. Care este cel mai mic număr natural de cinci cifre care are cifra miilor 8 şi cifra unităţilor 3?
12. Care este cel mai mare număr natural de şase cifre, ştiind că cifra unităţilor este 1, cifra zecilor este 2, iar cifra sutelor este 3?
13. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre, ştiind că una din cifrele sale este 9?

14[d]. Să se afle cel mai mic număr natural de cinci cifre şi care îndeplineşte următoarele două condiţii:
a) nu este mai mic decît 34 442,
b) nu are cifre care să se repete.

4. SCĂDEREA

În egalitatea

$$4 + 2 = 6,$$

prin care se defineşte suma numerelor naturale 4 şi 2, putem pune în evidenţă oricare din termeni astfel:

$$6 - 2 = 4, \quad 6 - 4 = 2.$$

Spunem că, 4 este *diferenţa* între 6 şi 2 obţinută prin *scăderea* lui 2 din 6. Pe 6 îl numim *descăzut*, iar pe 2 *scăzător*. Analog, 2 este *diferenţa* între *descăzutul* 6 şi *scăzătorul* 4. În ambele cazuri, descăzutul este mai mare decît scăzătorul. Descăzutul poate fi şi egal cu scăzătorul, ca în $3 - 3 = 0$, deoarece avem $3 + 0 = 3$ sau $0 + 3 = 3$.

În cazul în care se găsește un număr natural care să fie diferența între două numere naturale, spunem că scăderea se poate efectua între cele două numere naturale.

În general:

Dacă a și b sînt două numere naturale astfel încît $a \geq b$, diferența între a și b, notată prin $a - b$, este acel număr natural c, pentru care $a = b + c$.

Se scrie $$c = a - b$$

și se citește „c este egal cu a minus b".

Scăderea unui număr natural dintr-un număr natural se efectuează după cum urmează:

Exemplul 1

Să scădem numărul natural 7 104 din numărul natural 20 553. Calculele se așază în felul următor:

$$\begin{array}{r} 20\,553\ - \\ 7\,104\ \ \ \\ \hline 13\,449\ \ \ \end{array}$$

și se fac începînd cu cifrele cele mai din dreapta ale celor două numere. Din cauză că 4 este mai mare decît 3, se scade 4 din 13 și deci 0 se va scădea din 4 și nu din 5. Apoi 7 fiind mai mare decît 0, se scade 7 din 10 și apoi se transcrie 1 și nu 2.

Se spune că, numărul 13 449 este mai mic cu 7 104 decît 20 553.

Exemplul 2

Să efectuăm diferența

$$20\,553 - 7\,764.$$

Calculele se așază în felul următor:

$$\begin{array}{r} 20\,553\ - \\ 7\,764\ \ \ \\ \hline 12\,789\ \ \ \end{array}$$

Din cauză că 4 este mai mare decît 3, se scade 4 din 13. Urmează să scădem pe 6 din 5 — 1 = 4. Dar 6 este mai mare decît 4, deci 6 se scade din 14. Urmează să scădem pe 7 din 4. Dar 7 este mai mare

decît 4. Deci vom scădea pe 7 din 14. Am luat un 1 din 20. Următorul 7 se va scădea din 9, deoarece 20 — 1 = 19. După aceea îl transcriem pe 1. Scăderea, ca și adunarea, se efectuează parcurgînd cifrele de la dreapta la stînga.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Care este numărul cu 12 mai mic decît 16?

2. Care este numărul cu 248 mai mic decît 500?

3. În anul 1950 s-au produs în țara noastră 3 469 tractoare, iar în anul 1981 s-au produs 68 093 tractoare. Cu cîte tractoare a fost mai mare producția anului 1981 față de cea a anului 1950?

4. Să se efectueze oral:

a) 24 — 12; b) 36 — 0; c) 240 — 30; d) 1 200 — 150.

5. Să se efectueze:

a) 19 500 — 2 400; b) 13 441 — 419; c) 14 500 — 11 201;
d) 12 200 — 998; e) 4 410 — 897; f) 89 000 — 7 360;
g) 120 570 — 2 490; h) 72 000 — 19 900; i) 42 000 — 3 999;
j) 450 000 — 19 090; k) 21 000 — 1 909.

6. Să se efectueze:

a) 2 019 + 18 989 + 187 543 — 19 999;
b) 17 856 + 124 960 + 2 000 + 9 998 — 2 456.

7. Un elev a depus la C.E.C. suma de 240 lei. A depus după aceea suma de 75 lei și apoi a scos suma de 155 lei. Ce sumă mai are la C.E.C. elevul?

8. Suma a trei numere naturale este 245. Primul este egal cu 124. Al doilea este cu 36 mai mic decît primul. Să se afle al treilea număr.

9. Să se completeze tabelul. Primul rînd e completat ca model.

b	$b-2$	$b-300$
302	300	2
1 600		
2 312		
4 209		

10. Să se completeze tabelul:

a	b	$a-b$
6	4	
8		3
	7	2
245	50	
750		24
	250	267

11. Să se completeze tabelul:

a	b	$a+b$
2	4	
8		10
	5	7
2 457	246	
457		2 475
	345	2 000

12. Să se completeze tabelul:

a	b	c	$a+b+c$
2	4	6	
	4	6	20
5		4	30

13. Să se înlocuiască steluţele cu cifre:

a) $\begin{array}{r} 2{*}0 - \\ {*}99 \\ \hline 41 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 7\,054 - \\ {*}{*}{*} \\ \hline 6\,438 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 7{*}9 - \\ 254 \\ \hline {*}1{*} \end{array}$

5. ÎNMULŢIREA

Fiind date două numere naturale, de exemplu 4 şi 3, vom înţelege prin *produsul* numerelor 4 şi 3, care se numesc *factorii* produsului, numărul natural notat cu 4×3 sau $4 \cdot 3$, care se obţine astfel:

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4.$$

Spunem că $4 \cdot 3$ se obţine prin *înmulţirea* numerelor 4 şi 3. Dacă facem produsul numerelor naturale 3 şi 4 vom obţine

$$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3.$$

Deci:

Produsul unui număr natural cu un număr natural, diferit de 0 şi 1, se exprimă printr-o sumă în care primul număr natural apare ca termen de atîtea ori de cîte ori arată al doilea număr natural.

Apoi

$$4 \cdot 0 = 0 \quad \text{şi} \quad 4 \cdot 1 = 4.$$

Deci:

Produsul unui număr natural cu zero este zero. Produsul unui număr natural cu unu este numărul natural considerat.

Calculînd sumele prin care exprimăm pe $4 \cdot 3$ şi $3 \cdot 4$, obţinem:

$$4 + 4 + 4 = (4 + 4) + 4, \ (4 + 4) + 4 = 8 + 4, \ 8 + 4 = 12.$$

Aceste egalităţi pot fi scrise sub forma:

$$4 + 4 + 4 = (4 + 4) + 4 = 8 + 4 = 12.$$

Analog:

$$3 + 3 + 3 + 3 = (3 + 3) + 3 + 3 = 6 + 3 + 3 = (6 + 3) + 3 = \\ = 9 + 3 = 12.$$

Deci

$$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4.$$

O astfel de proprietate este adevărată oricare ar fi perechea de numere naturale considerate şi se enunţă în general:

Oricare ar fi numerele naturale a şi b avem

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Această proprietate a înmulţirii numerelor naturale se numeşte *comutativitatea înmulţirii* numerelor naturale.

Fiind date trei numere naturale 4, 2, 2 avem:

$$(4 \cdot 2) \cdot 2 = (4 + 4) \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 8 + 8 = 16.$$

$$4 \cdot (2 \cdot 2) = 4 \cdot (2 + 2) = 4 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 = (4 + 4) + \\ + 4 + 4 = 8 + 4 + 4 = (8 + 4) + 4 = 12 + 4 = 16.$$

Deducem că

$$(4 \cdot 2) \cdot 2 = 4 \cdot (2 \cdot 2).$$

O astfel de proprietate este adevărată şi pentru alte trei numere naturale, oricare ar fi ele, şi se enunţă în general:

Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c avem

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Această proprietate a înmulţirii numerelor naturale se numeşte *asociativitatea înmulţirii* numerelor naturale. Din cauză că

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

vom conveni ca prin $a \cdot b \cdot c$ să înţelegem sau $(a \cdot b) \cdot c$, sau $a \cdot (b \cdot c)$. Deci, în loc de $(4 \cdot 2) \cdot 2$ vom scrie $4 \cdot 2 \cdot 2$ şi în loc de $4 \cdot (2 \cdot 2)$ vom scrie tot $4 \cdot 2 \cdot 2$.

Numărul natural 1 este element neutru la înmulţirea numerelor naturale, deoarece, oricare ar fi numărul natural a, avem

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

ÎNMULŢIREA UNUI NUMĂR NATURAL CU UN NUMĂR NATURAL DE O CIFRĂ

Să înmulţim numărul natural 216 cu 3. Pentru obţinerea produsului acestor numere naturale se procedează astfel: înmulţim, mai întîi, cu 3 ultima cifră din 216, adică înmulţim pe 6 cu 3. Obţinem 18. Scriem la rezultat pe 8 şi înmulţim cu 3 următoarea cifră din 216, adică pe 1 cu 3, obţinînd 3. La 3 adunăm pe 1 din 18, obţinînd 4, şi scriem la rezultat pe 4 în faţa lui 8. Înmulţim, apoi, pe 2 cu 3, obţinînd 6, şi scriem la rezultat pe 6 înaintea lui 4. Produsul numerelor 216 şi 3 este 648.

Se spune că, numărul 648 este de 3 ori mai mare decît 216. De asemenea, numărul 648 este de 216 ori mai mare decît 3.

ÎNMULŢIREA A DOUĂ NUMERE NATURALE

Să înmulţim numerele naturale 216 şi 341.

Calculele se aşază în felul următor:

$$\begin{array}{r} 216 \times \\ 341 \\ \hline 216 \\ 864 \\ 648 \\ \hline 73\,656 \end{array}$$

pentru că avem de adunat numerele naturale $216 \cdot 1 = 216$, $216 \cdot 4 \cdot 10 = 8\,640$, şi $216 \cdot 3 \cdot 100 = 64\,800$.

DISTRIBUTIVITATEA ÎNMULŢIRII FAŢĂ DE ADUNARE ŞI SCĂDERE

Pentru numerele 4, 2, 1 avem

$$4 \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = (4 + 4) + 4 = 8 + 4 = 12.$$

$$4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 8 + 4 = 12.$$

Deducem că

$$4 \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1.$$

O astfel de proprietate este adevărată şi pentru alte trei numere naturale, oricare ar fi ele, şi se enunţă în general:

Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c avem

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Această proprietate se numeşte *distributivitatea înmulţirii faţă de adunare.*

Problemă rezolvată. Cineva cumpără o dată 2 m de stofă, iar altă dată 3 m din aceeaşi stofă. Ştiind că metrul de stofă costă 200 lei, să se afle cît a costat stofa.

Rezolvare.

Putem judeca în două moduri:

a) Aflăm, mai întîi, cîţi metri de stofă au fost cumpăraţi şi înmulţim rezultatul cu cît costă 1 m de stofă. Obţinem:

$$200 \cdot (2 + 3) = 1\,000 \text{ (lei)}.$$

b) Aflăm cît a costat de fiecare dată stofa şi adunăm rezultatele. Obţinem:

$$200 \cdot 2 + 200 \cdot 3 = 1\,000 \text{ (lei)}$$

Se vede că:

$$200 \cdot (2 + 3) = 200 \cdot 2 + 200 \cdot 3.$$

Am pus în evidenţă, aici, distributivitatea înmulţirii faţă de adunare.

Avem:

$$4 \cdot (2 - 1) = 4 \cdot 1 = 4, \qquad 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 8 - 4 = 4.$$

Deducem că

$$4 \cdot (2 - 1) = 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1.$$

În general:

Oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi $b \geqslant c$ avem

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Această proprietate se numeşte *distributivitatea înmulţirii faţă de scădere.*

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se afle numărul de 5 ori mai mare decît 4.

2. Să se afle numărul de 108 ori mai mare decît 205.

3. Să se efectueze oral:
a) $24 \cdot 2$; b) $15 \cdot 0$; c) $13 \cdot 1$; d) $2 \cdot 17 \cdot 5$.

4. Să se efectueze:
a) $174 \cdot 10$; b) $240 \cdot 100$; c) $724 \cdot 3$; d) $54 \cdot 36$;
e) $945 \cdot 1\,292$; f) $405 \cdot 802$; g) $2\,005 \cdot 1\,002$;
h) $205 \cdot 1\,020$; i) $24 \cdot 32 \cdot 4\,800$; j) $1 \cdot 24 \cdot 3\,800 \cdot 2\,100$; k) $2 \cdot 1\,289 \cdot 1\,299$.

5. Să se efectueze:
a) $39 \cdot 25 \cdot 4$; b) $7\,897 \cdot 5 \cdot 2$; c) $2 \cdot 175 \cdot 25 \cdot 2$; d) $5 \cdot 2\,475 \cdot 20$; e) $247 \cdot 1$; f) $24 \cdot 0$; g) $405 \cdot 0 \cdot 24$.

6. Un muncitor execută 24 piese de acelaşi fel pe oră. Cîte piese execută muncitorul în 12 zile lucrînd 8 ore pe zi?

7. 2 kg de zahăr tos şi 3 litri de ulei de floarea-soarelui costă 82 lei. Cît costă 4 kg de zahăr tos şi 6 litri de ulei de floarea-soarelui?

8. Să se completeze tabelul de mai jos. Primul rînd e completat ca model.

c	$2c$	$100c$	$1\,000c$	$204c$
3	6	300	3 000	612
4				
42				
105				

9^d. Să se refacă următoarea înmulţire, înlocuind steluţele cu cifre: Cîte soluţii are problema?

$$\begin{array}{r} 2* \times \\ *6 \\ \hline 1** \\ *5 \\ \hline **0 \end{array}$$

10. Scrieţi numărul 5 ca un produs de două numere naturale.

11^d. Scrieţi numărul 77 ca o sumă de numere naturale, astfel încît produsul acestor numere să fie tot 77.

6. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAŢIILOR

La efectuarea sumei:

$$12 + 15 + 7 + 423$$

calculele se fac de la stînga la dreapta. Anume, se efectuează $12 + 15$, iar rezultatul 27 se adună cu 7. Se obţine 34 care se adună cu 423. Rezultatul final este 457. Datorită proprietăţilor de comutativitate şi asociativitate ale adunării numerelor naturale, efectuarea sumei

$$12 + 15 + 7 + 423$$

se poate face adunînd, mai întîi, doi termeni oarecare ai acestei sume. Rezultatul obţinut se adună cu unul oarecare din ceilalţi termeni ai sumei şi se continuă aşa pînă la obţinerea rezultatului final. În cazul sumei de mai înainte avem: $15 + 423 = 438$, $438 + 12 = 450$, $450 + 7 = 457$. Aceasta se datoreşte faptului că

$$12 + 15 + 7 + 423 = 15 + 423 + 12 + 7.$$

În cazul efectuării unor calcule de forma

$$28 + 7 - 13 + 201$$

calculele se fac, de asemenea, de la stînga la dreapta. Anume, $28 + 7 = 35$, $35 - 13 = 22$, $22 + 201 = 223$. Deci

$$28 + 7 - 13 + 201 = 223.$$

La efectuarea următoarelor calcule

$$2 + 71 \cdot 18 - 33 \cdot 8 + 100$$

se efectuează, mai întîi, produsele de la stînga la dreapta. Deci $71 \cdot 18 = 1\,278$, $33 \cdot 8 = 264$. Avem

$$2 + 71 \cdot 18 - 33 \cdot 8 + 100 = 2 + 1\,278 - 264 + 100.$$

În continuare, calculele se efectuează cum s-a arătat mai înainte.

Dacă unele calcule sînt delimitate prin paranteze, ca în

$$2 + 71 \cdot (18 - 4) \cdot 3 + 100,$$

se efectuează, mai întîi, calculele din paranteze. Deci $18 - 4 = 14$ şi

$$2 + 71 \cdot (18 - 4) \cdot 3 + 100 = 2 + 71 \cdot 14 \cdot 3 + 100.$$

Produsul

$$71 \cdot 14 \cdot 3$$

se efectuează de la stînga la dreapta: $71 \cdot 14 = 994$, $994 \cdot 3 = 2\,982$. Deci

$$71 \cdot 14 \cdot 3 = 2\,982.$$

Datorită proprietăţilor de comutativitate şi asociativitate ale înmulţirii numerelor naturale putem scrie, de exemplu,

$$71 \cdot 14 \cdot 3 = 3 \cdot 71 \cdot 14.$$

Deci, într-un produs putem efectua, mai întîi, produsul a doi factori oarecare ai produsului, iar rezultatul să-l înmulţim cu unul oarecare din ceilalţi factori şi să continuăm calculele, în felul acesta, pînă la obţinerea rezultatului final.

EXERCIŢII

Calculaţi:
a) $10 + 10 \cdot 2$; b) $10 + 5 \cdot 2$; c) $44 - 2 \cdot 12$;
d) $2 \cdot (2 + 2 \cdot 8) + 10 \cdot (200 - 2 \cdot 50)$;
e) $100 \cdot (102 + 20 \cdot 105)$; f) $1 + 1 \cdot 246$;
g) $0 + 0 \cdot 247$; h) $20 + 0 \cdot 47\,547$;
i) $240 \cdot (100 + 105 \cdot 104)$;
j) $10 \cdot (1 + 1 \cdot 245 + 0 \cdot 1\,540 + 245 \cdot 1)$;
k) $(654 + 12 \cdot 36) \cdot (6\,894 - 54 \cdot 65)$.

7. ÎMPĂRŢIREA

În egalitatea

$$2 \cdot 7 = 14,$$

prin care se defineşte produsul numerelor naturale 2 şi 7, putem pune în evidenţă oricare din factori astfel:

$$14 : 7 = 2,\ 14 : 2 = 7.$$

Spunem că 2 este *cîtul* între 14 şi 7 obţinut prin *împărţirea* lui 14 la 7. Pe 14 îl numim *deîmpărţit*, iar pe 7 *împărţitor*. Analog, 7 este *cîtul* împărţirii *deîmpărţitului* 14 la *împărţitorul* 2. În cazul în care se găseşte un număr natural, dar numai unul singur, care să fie cîtul împărţirii între două numere naturale, spunem că împărţirea se poate efectua între cele două numere naturale.

Nu putem împărţi un număr natural cu 0. În adevăr, ca să aibă sens $2 : 0$ trebuie să existe un număr natural a astfel încît

$$a \cdot 0 = 2,$$

ceea ce nu se poate, deoarece $a \cdot 0 = 0$. Nu are sens nici $0 : 0$, deoarece sînt mai multe numere naturale, de exemplu 3, 11, astfel încît $3 \cdot 0 = 0$, $11 \cdot 0 = 0$.

În general:

Dacă a şi b sînt două numere naturale astfel încît $b \neq 0$, cîtul între a şi b, notat prin $a : b$, este acel număr natural c, în cazul în care el există, pentru care $a = b \cdot c$.

Se scrie:

$$c = a : b$$

şi se citeşte „c este egal cu a împărţit la b".

Ţinînd seama de $a \cdot 0 = 0$, unde a este un număr natural, reţinem următoarele:

Cîtul dintre 0 şi un număr natural, diferit de zero, este 0,

adică oricare ar fi numărul natural a, diferit de zero, avem

$$0 : a = 0.$$

Împărţirea unui număr natural la un număr natural se efectuează după cum urmează:

Exemplul 1

Să împărţim numărul 84 la 4.
Avem $84 = 4 \cdot 21$. Deci cîtul împărţirii lui 84 la 4 este 21.
Se spune că, numărul 21 este de 4 ori mai mic decît 84.

Exemplul 2

Ne propunem să aflăm cîtul între 73 656 şi 216, în cazul în care el există. Constatăm că

$$216 \cdot 300 < 73\,656,\quad 73\,656 < 216 \cdot 400,$$

deoarece $216 \cdot 300 = 64\,800$, $216 \cdot 400 = 86\,400$. Se vede că $2 \cdot 3 < 7$, $7 < 2 \cdot 4$, unde 2 este prima cifră a lui 216, 7 este prima cifră a lui 73 656, 3 este prima cifră a lui 300, iar 4 este prima cifră a lui 400. Scăzînd pe 64 800 din 73 656 obţinem

$$\begin{array}{r} 73\,656\ - \\ 64\,800 \\ \hline 8\,856 \end{array}$$

Deci

$$73\,656 = 216 \cdot 300 + 8\,856.$$

Procedăm analog în cazul numerelor naturale 8 856 și 216. Se vede că $2 \cdot 4 = 8$, dar $8 < 2 \cdot 5$. Înmulțim pe 216 cu 40 și obținem

$$216 \cdot 40 = 8\,640.$$

Scăzînd pe 8 640 din 8 856 obținem

$$\begin{array}{r} 8\,856 - \\ 8\,640 \\ \hline 216 \end{array}$$

Deci

$$73\,656 = 216 \cdot 300 + 216 \cdot 40 + 216 =$$
$$= 216 \cdot (300 + 40 + 1) = 216 \cdot 341.$$

Cîtul între 73 656 și 216 este, prin urmare, 341.
Calculele se așază în felul următor:

$$\begin{array}{r|l} 73656 & 216 \\ 648 & \overline{341} \\ \hline =885 & \\ 864 & \\ \hline =216 & \\ 216 & \\ \hline === & \end{array}$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Care este numărul de două ori mai mic decît 24?
2. Să se efectueze oral:
   a) 8 : 2; b) 7 : 1; c) 0 : 24; d) 24 : 12;
   e) 100 : 4; f) 222 : 2.
3. Să se efectueze:
   a) 850 : 10; b) 72 000 : 100; c) 754: 2; d) 416 : 4;
   e) 6 012 : 3; f) 1 680 : 12; g) 32 400 : 18;
   h) 104 040 : 102; i) 2 008 008 : 1 002; j) 625 000: 250;
   k) 6 534 000 : 1 080; l) 2 751 994 : 746; m) 3 007 008 : 1 576; n) 9 894 510 : 493;
   o) 72 349 200 : 924.
4. Un automobil consumă 8 litri de benzină la 100 km. Cîți litri de benzină consumă pe distanța de 50 km? Dar pe distanța de 125 km?

5. Să se completeze tabelul de mai jos. Primul rînd e completat ca model.

a	$a : 2$	$a : 15$
30	15	2
60		
147 120		
172 500		

6. Să se completeze tabelul:

a	b	$a : b$
12	6	
1 245	15	
	8	4
	175	25
6		2
125		25

7. Să se completeze tabelul:

a	b	$a \cdot b$
4	5	
2		8
	5	10
102	200	
	50	450
20		2 400

8. 1 kg de zahăr tos și 2 litri de ulei de floarea-soarelui costă 50 lei. 1 kg de zahăr tos și 4 litri de ulei de floarea-soarelui costă 86 lei. Cît costă 9 kg de zahăr tos și 6 litri de ulei de floarea-soarelui?

9[d]. La o întîlnire amicală de șah iau parte 4 oameni. Fiecare a jucat cu fiecare cîte o partidă. Cîte partide s-au jucat în total? Dar dacă la întîlnire iau parte 5 oameni? Dar 6? Dar 30?

8. TEOREMA ÎMPĂRȚIRII ÎNTREGI

Ne propunem să aflăm cîtul între 31 401 și 250, în cazul în care el există. Se vede că $2 \cdot 1 < 3$, dar $3 < 2 \cdot 2$. Înmulțim pe 250 cu 100 și obținem

$$250 \cdot 100 = 25\,000.$$

Scăzînd pe 25 000 din 31 401 obținem

$$\begin{array}{r} 31\,401 - \\ 25\,000 \\ \hline 6\,401 \end{array}$$

Deci

$$31\,401 = 250 \cdot 100 + 6\,401.$$

Se vede că $2 \cdot 3 = 6$, dar $6 < 2 \cdot 4$. Înmulțim pe 250 cu 30 și obținem

$$250 \cdot 30 = 7\,500.$$

Dar $7\,500 > 6\,401$. Înmulțim pe 250 cu 20 și obținem

$$250 \cdot 20 = 5\,000.$$

Scăzînd pe 5 000 din 6 401 obţinem

$$\begin{array}{r} 6\,401\ -\\ 5\,000\\ \hline 1\,401 \end{array}$$

Deci

$$31\,401 = 250 \cdot 100 + 250 \cdot 20 + 1\,401.$$

Se vede că $2 \cdot 7 = 14$, dar $14 < 2 \cdot 8$. Înmulţim pe 250 cu 7 şi obţinem 1 750. Dar $1\,750 > 1\,401$. Înmulţim pe 250 cu 6 şi obţinem 1 500. Dar $1\,500 > 1\,401$. Înmulţim pe 250 cu 5 şi obţinem 1 250. Scăzînd pe 1 250 din 1 401 obţinem

$$\begin{array}{r} 1\,401\ -\\ 1\,250\\ \hline 151 \end{array}$$

Deci

$$31\,401 = 250 \cdot 100 + 250 \cdot 20 + 250 \cdot 5 + 151 =$$
$$= 250\,(100 + 20 + 5) + 151 = 250 \cdot 125 + 151.$$

Calculele le aşezăm astfel:

$$\begin{array}{r|l} 31401 & 250 \\ \cline{2-2} 250 & 125 \\ \cline{1-1} =640 & \\ 500 & \\ \cline{1-1} 1401 & \\ 1250 & \\ \cline{1-1} =151 & \end{array}$$

Avem deci

$$31\,401 = 250 \cdot 125 + 151.$$

Spunem că 125 este *cîtul* împărţirii lui 31 401 la 250, iar 151 este *restul* acestei împărţiri.

În general:

Oricare ar fi numerele naturale a şi b, unde $b \neq 0$, există două numere naturale q şi r, numite respectiv cît şi rest, astfel încît $a = bq + r$, $r < b$.

Numerele q şi r, determinate de aceste condiţii, sînt unice.

Proprietatea de mai sus se numeşte *teorema împărţirii întregi* sau *teorema împărţirii cu rest.*

În cazul în care $r = 0$, împărţirea se poate efectua între numărul natural a şi numărul natural b, $b \neq 0$.

Aplicaţie

Se numeşte *număr par* acel număr natural a pentru care există un număr natural n astfel încît

$$a = 2n,$$

unde prin $2n$ înţelegem produsul $2 \cdot n$ al numerelor naturale 2 şi n. Altfel spus, un număr natural a este par, dacă se poate efectua împărţirea între numerele naturale a şi 2.

Numerele pare formează şirul

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,$$

care se numeşte şirul numerelor pare.

Se numeşte *număr impar* orice număr natural care nu este *par*. Numerele impare formează şirul

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,$$

care se numeşte şirul numerelor impare.

Deoarece împărţirea nu se poate efectua între un număr impar a şi 2, înseamnă că pentru orice număr impar a există un număr natural n astfel încît

$$a = 2n + 1.$$

Problemă rezolvată

Să se afle cel mai mic număr natural de trei cifre, ştiind că dacă-l împărţim la un număr de o cifră, obţinem restul 8.

Rezolvare:

Se ştie că restul este mai mic decît împărţitorul. Dacă restul este 8, singurul număr de o cifră care poate fi împărţitorul este 9. Cel mai mic număr de trei cifre, care la împărţirea cu 9 dă restul 8 este 107.

Observaţie

La împărţirea cu 3 a unui număr natural, restul poate fi numai unul din următoarele numere: 0, 1, 2. Orice număr natural a este deci de una din formele:

$a = 3n$ sau $a = 3n + 1$ sau $a = 3n + 2$, unde n este număr natural.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se determine cîtul și restul împărțirii primului număr natural la al doilea număr natural din următoarele perechi de numere:
a) 247; 7; b) 4 756; 72; c) 124 756; 123; d) 24 570; 240; e) 58 321; 24; f) 2 245 756; 324; g) 11 724 340; 4 410.
2. Aflați toate numerele naturale diferite de zero care, împărțite la 5, dau la cît și la rest același număr.
3. Să se afle toate numerele naturale astfel încît, împărțind pe oricare din ele la 5, să obținem cîtul 7.
4. La împărțirea numărului natural a cu numărul natural b obținem cîtul q și restul r. Ce cît și ce rest vom obține dacă vom împărți numărul $10 \cdot a$ la numărul $10 \cdot b$?

5[d]. Un număr de trei cifre are primele două cifre identice, iar a treia cifră este 5. Acest număr se împarte la un număr de o singură cifră și se obține restul 8. Să se găsească deîmpărțitul, împărțitorul și cîtul.

9. FACTOR COMUN

În membrul al doilea al egalității

$$4 \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1,$$

4 apare atît în produsul $4 \cdot 2$, cît și în produsul $4 \cdot 1$. Spunem că 4 este *factor comun* în produsele $4 \cdot 2$ și $4 \cdot 1$.

În membrul întîi al egalității

$$4 \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1,$$

4 apare o singură dată înmulțit cu suma celorlalți factori ai produselor $4 \cdot 2$ și $4 \cdot 1$. Se spune că 4 este scos în factor comun. La scoaterea în factor comun, egalitatea de mai sus o scriem astfel

$$4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4 \cdot (2 + 1).$$

EXERCIȚII

1. Să se scoată în factor comun:
a) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$; b) $3 \cdot 7 + 3 \cdot 11$; c) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 13$; d) $17 + 17 \cdot 7$.
2. Efectuați, folosind scoaterea în factor comun:
a) $789\,875 \cdot 9 + 789\,875$; b) $99\,999 \cdot 998 + 99\,999 \cdot 2$;
c) $89\,757 \cdot 987 + 11 \cdot 89\,757 + 2 \cdot 89\,757$.

10. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR

La efectuarea unor calcule de forma

$$36 - 17 \cdot 12 : 6 + 5,$$

se efectuează, mai întîi, $17 \cdot 12 : 6$. Calculele se efectuează de la stînga la dreapta, anume $17 \cdot 12 = 204$ și $204 : 6 = 34$. Am fi obținut același rezultat dacă efectuam, mai întîi, $12 : 6$, care este 2, și apoi efectuam produsul $17 \cdot 2 = 34$. Aceasta se datorește faptului că $(17 \cdot 12) : 6 = 17 \cdot (12 : 6)$, iar calculele din paranteze se efectuează, totdeauna, înaintea celorlalte calcule. Obținem

$$36 - 17 \cdot 12 : 6 + 5 = 36 - 34 + 5.$$

În continuare, calculele se efectuează de la stînga la dreapta.

Avem $(12 : 6) : 2 = 1$ și $12 : (6 : 2) = 4$. Deci, operația de împărțire neavînd proprietatea de asociativitate, nu are sens să scriem $12 : 6 : 2$.

EXERCIȚII

Să se efectueze:
a) $6 + 12 : 6$; b) $24 + 48 : 2$; c) $10 \cdot (40 + 80 : 2)$;
d) $1 + 1\,240 : (144 - 20)$; e) $1 + 2 \cdot (2 + 20\,808 : 102)$;
f) $1 + 10\,000 : (1\,240 - 240)$; g) $714\,210 : (222\,110 - 247 \cdot 896)$.

11. PUTEREA UNUI NUMĂR NATURAL

Să considerăm produsul de factori egali: $3 \cdot 3$. Acesta se mai scrie 3^2 și se citește „3 la puterea a doua". 3^2 se mai citește „3 la pătrat". 3 se numește *bază*, iar 2 se numește *exponent*.

Produsul $2 \cdot 2 \cdot 2$ se mai scrie și 2^3 și se citește astfel: „2 la puterea a treia" sau „doi la cub".

5^4 se citește „5 la puterea a patra".

Dacă a este un număr natural, scriem:

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a,$$

$$a^{14} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{14 \text{ factori}}.$$

În general:

Dacă a și n sînt numere naturale, unde $n \neq 0$ și $n \neq 1$, atunci

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

în care *a* se numește *baza* puterii, iar *n* se numește *exponentul* puterii.

Deci a^n este produsul a *n* factori egali cu *a*, dacă $n \neq 0$ și $n \neq 1$.

Admitem că

$$a^0 = 1,$$

a fiind un număr natural diferit de 0, adică: *orice număr natural diferit de 0 la puterea 0 este egal cu 1.* Scriem deci:

$$5^0 = 1, \qquad 7^0 = 1, \qquad 1\,000^0 = 1.$$

Admitem și că

$$a^1 = a,$$

a fiind un număr natural.

Iată cîteva exemple de puteri în care exponentul este 1 sau baza este 0 sau 1:

$$2^1 = 2, \qquad 0^3 = 0, \qquad 1^n = 1.$$

Iată și exemple de puteri în care baza este 10:

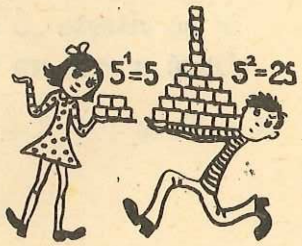
$10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1\,000$, $10^4 = 10\,000$,
$10^5 = 100\,000$,
$10^6 = 1\,000\,000$,
....

Putem scrie:

$$20\,000 = 2 \cdot 10^4, \qquad 70\,000\,000 = 7 \cdot 10^7.$$

Se recomandă să fie memorate următoarele rezultate,pentru a le folosi ori de cîte ori intervin în calcule, făcînd astfel mai repede calculele:

$2^1 = 2$,	$3^1 = 3$,	$4^1 = 4$,	$5^1 = 5$,
$2^2 = 4$,	$3^2 = 9$,	$4^2 = 16$,	$5^2 = 25$,
$2^3 = 8$,	$3^3 = 27$,	$4^3 = 64$,	$5^3 = 125$.
$2^4 = 16$,	$3^4 = 81$,		
$2^5 = 32$,			
$2^6 = 64$,			



12. ÎNMULȚIREA DE PUTERI CU ACEEAȘI BAZĂ

Să calculăm:

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3 \text{ factori}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \text{ factori}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{(3+4) \text{ factori}}.$$

Deci:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7.$$

Asemănător: $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$. Analog: $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 5^1 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 5^6$.

În general:

Dacă a, m și n sînt numere naturale, atunci

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Deci:

Produsul puterilor aceluiași număr natural este o putere a acestui număr natural în care exponentul este suma exponenților factorilor.

13. PUTEREA UNEI PUTERI

Să calculăm: $(2^3)^2$. Putem scrie

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^{3 \cdot 2}.$$

Asemănător, putem scrie $(3^2)^{10} = 3^{20}$.

În general:

Dacă a, m și n sînt numere naturale, avem

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Deci:

Puterea unei puteri a unui număr natural este o putere a acestui număr natural în care exponentul este produsul exponenților.

14. PUTEREA UNUI PRODUS

Putem scrie:

$$(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2.$$

Asemănător:

$$(2^3 \cdot 3 \cdot 5)^2 = (2^3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 5) = (2^3 \cdot 2^3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) =$$
$$= 2^{3 \cdot 2} \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

În general:

Un produs se ridică la o putere ridicînd fiecare factor la acea putere și înmulțind puterile obținute.

15. ÎMPĂRȚIREA DE PUTERI CU ACEEAȘI BAZĂ

Să efectuăm $2^5 : 2^3$. Cîtul împărțirii între 2^5 și 2^3 este 2^2, căci $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$. Dar

$$2^2 = 2^{5-3}.$$

Analog:

$$7^{100} : 7^{80} = 7^{20}, \qquad 6^5 : 6 = 6^4.$$

În general:

Dacă a, m și n sînt numere naturale, $m \geq n$, iar $a \neq 0$, avem

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Deci:

Cîtul puterilor aceluiași număr natural, diferit de 0, exponentul deîmpărțitului fiind cel puțin egal cu exponentul împărțitorului, este o putere a acestui număr natural, în care exponentul este diferența între exponentul deîmpărțitului și exponentul împărțitorului.

Ordinea efectuării operațiilor este aceea de la efectuarea operațiilor de adunare, scădere, înmulțire, împărțire, efectuîndu-se, mai întîi, ridicările la putere.

Exemple:

a) $1 + 2^2 = 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5.$

b) $(1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{200}) : (1 + 2^{203}) = (1 + 2^{203}) : (1 + 2^{203}) = 1.$

c) $(3 + 7^{18}) : (3 + 7^{30} : 7^{12}) = (3 + 7^{18}) : (3 + 7^{18}) = 1.$

EXERCIȚII

1. Să se efectueze:
a) 2^2; b) 3^3; c) 5^3; d) 10^2; e) 10^3; f) 15^2; g) 16^3; h) 2^4; i) 10^4; j) 10^5; k) 10^6; l) 106^2; m) 1^{40}; n) 1^{45}; o) 0^{40}; p) $8 \cdot 7^0$; r) $9 : 7^0$; s) $1^{24} : 5^0$; t) $7^1 + 5^0 + 1^{36}$.

2. Să se efectueze:
a) $2^2 \cdot 2^3$; b) $10 \cdot 10^2 \cdot 10^4$; c) $7^2 \cdot 7^{68} - 7^{70}$; d) $8 \cdot 8^3 - 8^4$; e) $508 \cdot 508^2 \cdot 508^3 - 508^6 + 508$; f) $(2^2)^3$; g) $(10^3)^2$; h) $(5^2)^{70} - 5^{140}$; i) $(2^2 \cdot 3)^2$; j) $3^{20} : 3^{19}$; k) $7^{32} : 7^{30}$; l) $10^{50} : 10^{40} - 10^{10}$; m) $(2^4)^{10} : 2^{40}$; n) $(2 \cdot 3^2)^2 : (2^2 \cdot 3^4)$; o) $(3 \cdot 5^2 \cdot 7^4)^{15} : (3^{15} \cdot 5^{30} \cdot 7^{60})$.

16. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR ȘI FOLOSIREA PARANTEZELOR

Avem

$$2 + 2 \cdot 3 = 8,$$

adică se efectuează, mai întîi, produsul $2 \cdot 3$, care este 6, și apoi 2 se adună cu 6 și se obține 8. Analog

$$10 + 10 : 2 = 15,$$

adică se efectuează, mai întîi, cîtul $10 : 2$, care este 5, și apoi se adună 10 cu 5, obținîndu-se 15. În egalitatea

$$2 \cdot (15 - 3) = 24,$$

se efectuează, mai întîi, diferența $15 - 3$, deoarece această diferență este cuprinsă între paranteze. Apoi, diferența $15 - 3$, care este 12, se înmulțește cu 2 și se obține 24.

Parantezele se folosesc pentru a delimita o sumă, o diferență, un produs, un cît sau o putere de numere naturale. De exemplu, în

$$2 \cdot (15 - 3),$$

parantezele au fost puse pentru a delimita diferența $15 - 3$. Putem folosi mai multe rînduri de paranteze. Primul rînd de paranteze este format din paranteze rotunde, ca în $2 \cdot (15 - 3)$. Al doilea rînd de paranteze, care cuprind paranteze rotunde, este format din paranteze drepte, ca în

$$10 \cdot [3 + 2 \cdot (7 - 4)].$$

Aceasta înseamnă

$$10 \cdot [3 + 2 \cdot (7 - 4)] = 10 \cdot (3 + 2 \cdot 3) = 10 \cdot (3 + 6) = 10 \cdot 9 = 90.$$

Al treilea rînd de paranteze, care cuprind paranteze drepte, este format din acolade, ca în

$$10 \cdot \{2 + 3 \cdot [4 + 5 \cdot (7 + 3)]\} = 10 \cdot [2 + 3 \cdot (4 + 5 \cdot 10)] =$$
$$= 10 \cdot [2 + 3 \cdot (4 + 50)] = 10 \cdot (2 + 3 \cdot 54) = 10 \cdot (2 + 162) =$$
$$= 10 \cdot 164 = 1\,640.$$

Expresie. Vom spune că o sumă, o diferență, un produs, un cît sau o putere de numere naturale este o *expresie.* Orice număr natural dintr-o expresie poate fi la rîndul său o sumă, o diferență, un produs, un cît sau o putere de numere naturale. Deci exemple de expresii sînt următoarele:

$$8 + 4,\ 15 - 3,\ 8 \cdot 6,\ 16 : 8,\ 2^3,\ 2 + 2 \cdot 3,\ 10 + 10 : 2,\ 2 \cdot (15 - 3),$$
$$10 \cdot [3 + 2 \cdot (7 - 4)],\ 3^2 \cdot 8 + 3.$$

În general, expresiile se scriu între paranteze. Pentru a nu scrie prea multe paranteze, se suprimă unele din ele pentru diferite motive. Unul din motive este *asociativitatea adunării* numerelor naturale sau *asociativitatea înmulțirii* numerelor naturale. De exemplu, scriem $2 + 4 + 1$, în loc de $(2 + 4) + 1$ sau $2 + (4 + 1)$, deoarece $(2 + 4) + 1 = 2 + (4 + 1)$. Alteori se suprimă parantezele care cuprind un produs, dacă acest produs este un termen al unei sume. De exemplu, scriem $2 + 2 \cdot 3$, în loc de $2 + (2 \cdot 3)$. Analog, uneori se suprimă parantezele care cuprind un cît, dacă acest cît este un termen al unei sume. De exemplu, scriem $4 : 2 + 3$, în loc de $(4 : 2) + 3$.

Rezultatul pe care-l obținem după efectuarea operațiilor indicate într-o expresie îl vom numi *valoarea expresiei.*

Spunem că *adunarea și scăderea sînt operații de ordinul I, înmulțirea și împărțirea sînt operații de ordinul II, iar ridicarea la putere este operație de ordinul III.*

Ordinea efectuării operațiilor într-o expresie este stabilită prin următoarele reguli:

1) Dacă într-o expresie nu există paranteze, iar operațiile din expresie sînt de același ordin, le efectuăm, în general, în ordinea în care sînt scrise.

Ordinea în care sînt scrise operațiile este cea de la stînga la dreapta.

Exemple. Valoarea expresiei $2 + 4 - 1$ o obținem adunînd pe 2 cu 4 și apoi scăzînd pe 1 din 6, care este rezultatul adunării lui 2 cu 4, căpătăm 5.

Valoarea expresiei $3 \cdot 8 : 4$ o obținem înmulțind pe 3 cu 8 și apoi împărțind la 4 pe 24, care este rezultatul înmulțirii lui 3 cu 8, căpătăm 6.

Să observăm următoarele: în cazul lui $2 + 4 - 1$ căpătăm același rezultat dacă scădem, mai întîi, pe 1 din 4, adică $2 + 4 - 1 = 2 + 3 = 5$. Aceasta se explică prin aceea că $(2 + 4) - 1 = 2 + (4 - 1)$, motiv pentru care scriem $2 + 4 - 1$ fără nici un fel de

paranteze. Analog, la $3 \cdot 8 : 4$ căpătăm același rezultat dacă împărțim, mai întîi, pe 8 la 4, adică $3 \cdot 8 : 4 = 3 \cdot 2 = 6$. Aceasta se explică prin aceea că $(3 \cdot 8) : 4 = 3 \cdot (8 : 4)$, motiv pentru care scriem $3 \cdot 8 : 4$ fără nici un fel de paranteze.

Nu putem proceda analog în cazul expresiilor $4 + 2 - 3$ și $2 \cdot 6 : 4$, deoarece nu se poate efectua scăderea între numerele naturale 2 și 3 și, de asemenea, nu se poate efectua împărțirea între numerele 6 și 4.

Deci, putem reține că scăderile pot fi efectuate înaintea adunărilor în expresiile, fără paranteze, care cuprind numai operațiile de adunare sau scădere, în cazul în care scăderile se pot efectua. De asemenea, putem reține că împărțirile pot fi efectuate înaintea înmulțirilor în expresiile, fără paranteze, care cuprind numai operațiile de înmulțire și împărțire, în cazul în care împărțirile se pot efectua.

2) Dacă într-o expresie nu există paranteze, dar operațiile din expresie sînt de diferite ordine, efectuăm, mai întîi, operațiile de ordinul III, apoi pe cele de ordinul II, și la sfîrșit pe cele de ordinul I.

Exemple. a) $7 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + 9 = 35 - 8 + 9 = 27 + 9 = 36.$
b) $17 \cdot 2^3 - 3 \cdot 5^2 = 17 \cdot 8 - 3 \cdot 25 = 136 - 75 = 61.$

3) Dacă într-o expresie există paranteze, efectuăm, mai întîi, calculele dinăuntrul parantezelor.

Exemplu. $(7 \cdot 5 - 2) \cdot 4 + 9 = (35 - 2) \cdot 4 + 9 = 33 \cdot 4 + 9 = 132 + 9 = 141.$

Se observă că, s-a obținut un alt rezultat decît cel obținut în exemplul a) de mai înainte, în care expresia nu conține paranteze.

În cazul în care într-o expresie există paranteze rotunde, drepte și acolade, începem cu efectuarea calculelor din parantezele rotunde. După efectuarea acestor calcule, parantezele drepte le transformăm în paranteze rotunde, iar acoladele în paranteze drepte și continuăm efectuarea calculelor din noile paranteze rotunde ș.a.m.d.

Exemplu.

$$\{[(7 \cdot 3 - 5) + 2 \cdot 6] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(4 + 3^2) \cdot 5 - 60].$$

Începem cu efectuarea calculelor din parantezele rotunde și înlocuim parantezele drepte cu cele rotunde, iar acoladele cu paranteze drepte. Obținem

$$[(16 + 2 \cdot 6) : 4 + 5] \cdot 10 - (13 \cdot 5 - 60).$$

Mai departe obținem

$$(28 : 4 + 5) \cdot 10 - 5 = 12 \cdot 10 - 5 = 120 - 5 = 115.$$

Calculele se fac în felul următor:

$$\{[(7\cdot 3-5)+2\cdot 6]:4+5\}\cdot 10-[(4+3^2)\cdot 5-60]=[(16+$$
$$+2\cdot 6):4+5]\cdot 10-(13\cdot 5-60)=(28:4+5)\cdot 10-5=$$
$$=12\cdot 10-5=120-5=115.$$

Dacă într-o expresie apar operații de înmulțire sau împărțire situate înaintea unei paranteze sau după o paranteză, le efectuăm imediat după cele din paranteze, ca în exemplele:

$$5+45+2\cdot(12-9)=50+6=56,$$
$$72-3+(15-7):4=69+2=71.$$

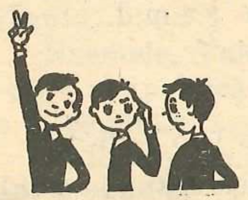
EXERCIȚII

1. Să se calculeze:
a) $4+4\cdot 2$; b) $10-6:2$; c) $10\cdot(2+2\cdot 3)$; d) $2\cdot[10+10\cdot(6+2\cdot 4)]$;
e) $10\cdot\{2+2\cdot[3+3\cdot(10-1)]\}$; f) $10\cdot\{475+2\cdot[45+2\cdot(400-298)]\}$;
g) $10:2+15\cdot 3+2\cdot[3\cdot 4-(15-2\cdot 3)]$.

2. Să se calculeze (mintal):
a) $3+3\cdot 2$; b) $2\cdot(2+3\cdot 3)$; c) $10\cdot[1+2\cdot(3+3:3)]$; d) $10\cdot\{1+2\cdot[1+2\cdot(2+4:2)]\}$.

3. Să se efectueze:
a) $10\cdot[247+2\cdot(205\cdot 104-1\,000)]$; b) $10\cdot[47\,000:10+3\cdot(4\,750-999)]$;
c) $210\cdot[24\,600:246+2\cdot(1+62\,500:25)]$; d) $100\cdot\{24+100\cdot[2+4\cdot(245+106\cdot 205)]\}$; e) $2\cdot\{475+2\cdot[4+4\cdot(424+24\cdot 36\cdot 240)]\}$.

4. Să se efectueze:
a) $2+2\cdot 2^3$; b) $5^3+5^3:5^2$; c) $10^4+10^6:10$; d) $10^2(2+2^4:2^2)$;
e) $2\cdot[2+2\cdot(2^3+2^7:2^6)]$; f) $10\cdot[2\cdot 2^2\cdot 2^3+5^{24}:5^{22}+(2^4)^5:2^{19}]$;
g) $10\cdot\{18^2:324+2\cdot[(2^2\cdot 3)^{15}:(2^{29}\cdot 3^{15})+1^{24}]\}$.



LUCRARE PENTRU VERIFICAREA UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

I. *Adunarea* numerelor naturale.

a) Să se afle numărul cu 24 mai mare decît 8.

Să se efectueze:

b) $123+24+12\,340+2+1\,002$;

c) $21\,987+198\,876$.

II. *Scăderea* numerelor naturale.

a) Să se afle numărul cu 7 mai mic decît 31.

Să se efectueze:

b) $1\,724-213$; c) $1\,721-998$; d) $475-240$; e) $174\,907-9\,088$;
f) $3\,010-2\,004$; g) $75\,000-3\,400$.

III. *Înmulțirea* numerelor naturale.

a) Să se afle numărul de trei ori mai mare decît 25.

Să se efectueze:

b) $246\cdot 2$; c) $24\cdot 32$; d) $57\cdot 1\,000$; e) $147\cdot 200$; f) $24\cdot 1\,100$; g) $487\cdot 857$;
h) $205\cdot 106$; i) $2\,004\cdot 1\,005$.

IV. *Împărțirea* numerelor naturale.

a) Să se afle numărul de trei ori mai mic decît 72.

Să se efectueze:

b) $2\,476:2$; c) $864:24$ (se va face și proba); d) $24\,000:100$; e) $462\,000:231$;
f) $405\,361:473$; g) $21\,730:205$; h) $16\,080:16$; i) $1\,232\,460:123$;
j) Să se determine cîtul și restul împărțirii numărului 621 347 la 33.
k) Să se determine cîtul și restul împărțirii numărului 20 061 la 1 003.

V. *Puteri*.

Să se efectueze:

a) 2^2+3^3; b) 15^2-11; c) $5+7^0$; d) $2\cdot 2^2\cdot 2^{30}-2^{33}$;
e) $7^{80}:7^{78}$; f) $10^8:10^7$; g) $10^3:10-90$; h) $(2^{40})^2:2^{77}$;
i) $(2\cdot 3^2)^4:(2^4\cdot 3^8)$.

VI. *Ordinea efectuării operațiilor. Folosirea parantezelor.*

Să se efectueze:

a) $2+2\cdot 5$; b) $2+2^4:2$; c) $2\cdot(6-6:2)$;
d) $2\cdot[2+3\cdot(4+4\cdot 245)]$; e) $10\cdot\{3+10\cdot[362+10\cdot(24+24:4)]\}$.

17. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

METODA REDUCERII LA UNITATE

Problema 1). 5 kg de mere costă 40 lei. Cît costă 7 kg de mere de aceeași calitate?

Pentru a rezolva această problemă judecăm în felul următor: dacă 5 kg de mere costă 40 de lei, atunci 1 kg de mere costă de 5 ori mai puțin, adică 8 lei. Dacă 1 kg de mere costă 8 lei, atunci 7 kg de mere costă de 7 ori mai mult, adică 56 lei.

Rezolvarea se poate face scriind şi astfel:

5 kg	40 lei
7 kg	x lei
5 kg	40 lei
1 kg	$40 : 5 = 8$ (lei)
7 kg	$7 \cdot 8 = 56$ (lei)

METODA FIGURATIVĂ

Problema 2). Un număr este cu 24 mai mare decît altul, iar suma lor este 246. Să se afle numerele.

Figurăm cu un segment de dreaptă numărul mai mic. Spunem că numărul mai mic reprezintă „o parte" (p).

Numărul mic se reprezintă astfel (fig. 3):

Fig. 3

Numărul mare se reprezintă astfel (fig. 4):

Fig. 4

Suma celor două numere este reprezentată în figura 5:

Fig. 5

După cum se vede, avem:

$$2p = 246 - 24, \quad 2p = 222, \quad p = 222 : 2, \quad p = 111.$$

Numărul mic este 111. Numărul mare este $111 + 24$ adică 135.

Problema 3). Suma a două numere este 726, iar unul este de două ori mai mare decît celălalt. Să se afle numerele.

Numărul mic se reprezintă în figura 6. Numărul mare se reprezintă în figura 7. Suma numerelor se reprezintă în figura 8.

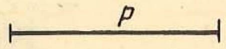


Fig. 6

Fig. 7

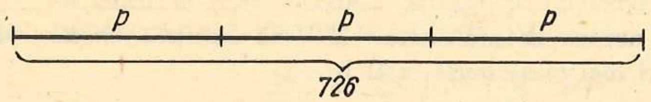


Fig. 8

După cum se vede, avem:

$$3p = 726, \quad p = 726 : 3, \quad p = 242, \quad 2p = 242 \cdot 2, \quad 2p = 484.$$

Numărul mic este 242. Numărul mare este 484.

PROBLEME

1. a) 1 m de stofă costă 400 lei. Cît costă 7 m din aceeaşi stofă? b) 7 m de pînză costă 77 lei. Cît costă 1 m din aceeaşi pînză?
2. 4 m de stofă costă 800 lei. Cît costă 7 m din aceeaşi stofă?
3. 13 kg alimente costă 182 lei. Cît costă 8 kg alimente de acelaşi fel?
4. Suma a două numere este 12, iar unul din ele este de două ori mai mare decît celălalt. Să se afle numerele.
5. Suma a două numere este 20. Să se afle numerele ştiind că unul din ele este de trei ori mai mic decît celălalt.
6. Suma a două numere este 741. Să se afle numerele ştiind că unul din ele este de două ori mai mare decît celălalt.
7. Suma a două numere este 630. Să se afle numerele ştiind că unul din ele este de patru ori mai mic decît celălalt.
8. Suma a două numere este 8. Să se afle numerele ştiind că unul din ele este cu 2 mai mare decît celălalt.
9. În anii 1965 şi 1981 s-au fabricat în ţara noastră, în total, 599 000 televizoare. În anul 1981 s-au fabricat cu 397 000 mai multe televizoare decît în 1965. Cîte televizoare s-au fabricat în ţara noastră în 1965? Dar în 1981?

10. Suma a două numere este 506. Să se afle numerele știind că unul este cu 112 mai mic decît celălalt.

11. Suma a două numere naturale este 600, iar diferența între ele este 120. Să se afle numerele.

12. Diferența între două numere naturale este 90. Să se afle numerele știind că unul este de trei ori mai mare decît celălalt.

13. Suma a două numere naturale este 6 250. Să se afle numerele știind că unul este de 24 ori mai mare decît celălalt.

14. Diferența între două numere naturale este 5 250. Să se afle numerele știind că unul este de 126 de ori mai mic decît celălalt.

15. O bucată de stofă de 12 m lungime a fost tăiată în două bucăți. Una din ele este cu 4 m mai lungă decît cealaltă. Știind că una din bucăți costă cu 1 000 lei mai puțin decît cealaltă, să se calculeze cît costă fiecare bucată.

16. Mioara are, la C.E.C., o sumă de bani de trei ori mai mare decît suma pe care o are, la C.E.C., Ioana. Dacă Ioana ar depune încă 64 lei, atunci ele ar avea, la C.E.C., sume egale. Ce sumă are, la C.E.C., fiecare?

17. Se consideră trei numere naturale. Diferența între al doilea și primul este un număr natural egal cu diferența între al treilea și al doilea. Știind că al doilea este 245, să se afle suma numerelor.

18. Suma a trei numere este 986. Să se afle numerele știind că al doilea este cu 2 mai mare decît primul și de două ori mai mic decît al treilea.

19. Suma a două numere naturale este 52. Să se afle numerele știind că împărțind pe unul la celălalt obținem cîtul 3 și restul 4.

20. O sumă de 800 lei se împarte la trei persoane. Primele două primesc 500 lei, iar ultimele două 560 lei. Cîți lei primește fiecare persoană?

21[d]. Vîrsta unei fete este, în prezent, cu 19 ani mai mică decît vîrsta mamei sale. Peste 10 ani vîrsta mamei va fi de două ori mai mare decît vîrsta fiicei sale. Ce vîrstă are fiecare în prezent?

22[d]. Într-o cutie sînt numai bile de trei culori: roșii, galbene și negre. Numai 27 din ele nu sînt negre și numai 39 nu sînt roșii. Numărul bilelor roșii este de două ori mai mic decît numărul bilelor negre. Cîte bile de fiecare culoare sînt în cutie?

23[d]. În două cutii sînt la un loc 820 de creioane. Dacă din prima cutie s-ar lua 41 creioane și s-ar pune în a doua cutie, atunci în prima ar fi de trei ori mai multe creioane decît în a doua. Cîte creioane sînt în fiecare cutie?

18. SISTEME DE NUMERAȚIE

SCRIEREA NUMERELOR NATURALE ÎN BAZA 10

Scrierea

$$217$$

a unui număr natural, se spune că, este făcută în baza[1] zece sau sub formă zecimală, deoarece

$$217 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7,$$

iar 2, 1, 7 sînt cifre. Pentru scrierea numerelor naturale în baza zece se folosesc zece cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ele sînt numere naturale mai mici decît 10.

Vom spune că scrierea de mai sus a numerelor naturale, împreună cu operațiile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire și tot ce rezultă din aceste operații efectuate cu aceste scrieri, constituie *sistemul de numerație în baza zece* sau *sistemul de numerație zecimal.* Numărul natural 10 se numește *baza* sistemului de numerație zecimal.

Reprezentarea unui număr natural, de exemplu, a lui 12, sub forma

$$1 \cdot 10 + 2$$

poate fi obținută luînd 12 obiecte, ca în figura 9, și grupîndu-le cîte zece, ca în figura 10. Au rămas două obiecte în afara singurului grup de zece obiecte care s-a putut forma. Numărul obiectelor considerate este deci

$$1 \cdot 10 + 2,$$

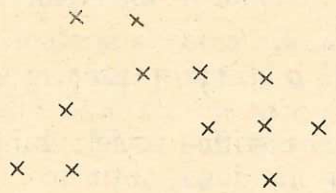


Fig. 9

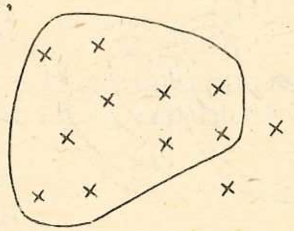


Fig. 10

în care 1 reprezintă numărul grupurilor de cîte 10 obiecte care s-au format, iar 2 reprezintă numărul de obiecte care au rămas negrupate după formarea grupurilor de cîte zece obiecte.

Orice număr natural de două cifre îl vom scrie sub forma $\overline{ab}$, unde a, b sînt cifre și $a \neq 0$. Aceasta înseamnă că

$$\overline{ab} = 10a + b.$$

[1] În general, nu se specifică baza în care este scris un număr, în cazul în care baza este 10.

Fie numărul natural 354 format din trei cifre. Avem

$$354 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4.$$

Orice număr natural de trei cifre îl vom scrie sub forma $\overline{abc}$, unde a, b, c sînt cifre și $a \neq 0$. Aceasta înseamnă că

$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c,$$

ceea ce poate fi scris și astfel:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Fie numărul natural 3 052 format din patru cifre. Avem

$$3\,052 = 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2.$$

Orice număr natural de patru cifre îl vom scrie sub forma $\overline{abcd}$, unde a, b, c, d sînt cifre și $a \neq 0$. Aceasta înseamnă că

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,$$

ceea ce poate fi scris și astfel:

$$\overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d.$$

SCRIEREA NUMERELOR NATURALE ÎN BAZA 2

Obiectele pe care le-am considerat în figura 9 pot fi grupate și cîte două, apoi grupurile formate de cîte două obiecte pot fi grupate cîte două ș.a.m.d., ca în figura 11. Numărul obiectelor considerate este deci

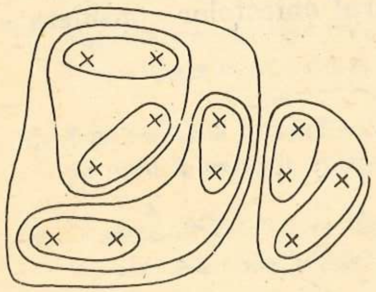


Fig. 11

$$[(1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0] \cdot 2 + 0.$$

Aceasta se justifică astfel: după gruparea obiectelor cîte două, obținem

$$A = B \cdot 2 + 0,$$

unde A este numărul obiectelor considerate, iar B este numărul grupurilor ce s-au format de cîte 2 obiecte, 0 arătînd că n-a mai rămas nici un obiect negrupat. După gruparea cîte două a grupurilor de obiecte al căror număr este B, obținem

$$B = C \cdot 2 + 0,$$

unde C este numărul grupurilor de cîte două grupuri de două obiecte. În sfîrșit,

$$C = 1 \cdot 2 + 1,$$

după cum se vede în figura 11. Deci

$$A = B \cdot 2 + 0 = (C \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0 =$$
$$= [(1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0] \cdot 2 + 0.$$

Avem deci

$$[(1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0] \cdot 2 + 0 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0,$$

iar pe $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0$ convenim să-l scriem sub forma[1]

$$1\,100$$

ceea ce este scrierea în baza doi a numărului de obiecte din figura 9.

Avem deci un *sistem de numerație în baza doi* care se mai numește *sistem de numerație binar*. Numărul natural 2 se numește *baza* sistemului de numerație binar. Numerele naturale 0 și 1 se numesc *cifre binare*. Ele sînt mai mici decît 2. Sistemul de numerație în baza doi se folosește la calculatoare electronice.

Se observă că cifrele binare ale numărului 1 100, luate de la dreapta la stînga, sînt respectiv: restul 0 al împărțirii lui 12 la 2; restul 0 al împărțirii lui 6 la 2, 6 fiind cîtul împărțirii lui 12 la 2; restul 1 al împărțirii lui 3 la 2, 3 fiind cîtul împărțirii lui 6 la 2; cîtul 1 al împărțirii lui 3 la 2.

Calculele se fac în felul următor:

$$\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\ \hline
\end{array}$$

12	2		
12	6	2	
=0	6	3	2
	0	2	1
		1	

Aceste calcule și scrierea cifrelor binare, în ordinea inversă obținerii lor, care în cazul numărului 12 ne dau 1 100, constituie *trecerea unui număr din baza zece în baza doi.*

Scriindu-l pe 1 100 sub forma

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0$$

și efectuînd calculele, obținem $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 8 + 4 = 12$.

Aceste calcule și scrierea numărului obținut constituie *trecerea unui număr din baza doi în baza zece.*

Gruparea obiectelor se poate face și cîte 3 și cîte oricîte vrem, dar nu cîte unul singur, deoarece în ultimul caz, după gruparea cîte unul singur nu se schimbă nimic. Deci scrierea numerelor naturale poate fi făcută în orice bază b, unde b este un număr natural mai mare decît 1.

[1] Numărul 1100 scris în baza 2 se mai notează și astfel $1100_{(2)}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Scrieți cu cifre următoarele numere:
   a) trei mii nouă sute douăzeci și opt; b) cinci mii cinci; c) zece mii douăzeci și cinci; d) patru sute de mii douăzeci și patru; e) patru milioane patru; f) cinci milioane douăzeci de mii patru.
2. Care sînt numerele naturale de două cifre ce se pot forma folosind numai cifrele 2; 3; 5?
3. Să se afle numărul mai mare cu 437 decît 2 024.
4. Să se efectueze:
   a) $2 + 49 + 345 + 1\,998$; b) $12 + 1\,005 + 2 + 105 + 10\,002$; c) $9\,424 + 4\,876 + 20 + 4\,054$.
5. Să se afle numărul cu 498 mai mic decît 2 005.
6. Să se efectueze:
   a) $4\,968 - 2\,434$; b) $4\,004 - 904$; c) $78\,908 - 8\,889$; d) $914\,296 - 98\,987$.
7. Care este cel mai mic număr natural ce trebuie adunat cu 2 pentru a obține un număr mai mare decît 5?
8. Care este cel mai mic număr natural ce trebuie adunat cu 79 pentru a obține un număr mai mare decît 124?

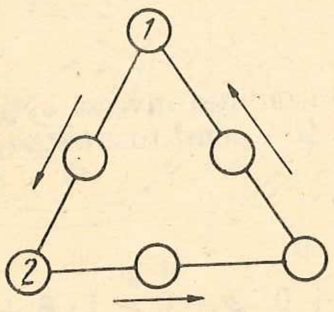


Fig. 12

9. Scrieți în cerculețele din figura 12 numere naturale diferite de 0, astfel încît suma numerelor din cele trei cerculețe de pe fiecare latură să fie 5. Cîte soluții are problema?

10[d]. Se consideră două șiruri de numere:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3\ \ldots & 999 & 1\,000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1\,000 & 999 & 998\ \ldots & 2 & 1 \end{array}$$

După cum se vede mai sus, săgețile arată că lui 1 îi corespunde 1 000, lui 2 îi corespunde 999, lui 3 îi corespunde 998 ș.a.m.d. Cît îi corespunde lui 295? Dar lui 425?

11. În două coșuri la un loc sînt 9 ouă. În primul coș sînt cel mult 4 ouă, iar în al doilea cel mult 5 ouă. Cîte ouă sînt în fiecare coș?
12. Să se afle numărul de 105 ori mai mare decît 202.
13. Să se efectueze:
    a) $145 \cdot 10$; b) $140 \cdot 100$; c) $245 \cdot 2$; d) $24 \cdot 32$; e) $245 \cdot 898$; f) $204 \cdot 205$; g) $4\,002 \cdot 1\,005$.

14. Să se afle numărul de 245 de ori mai mic decît 57 820.
15. Să se efectueze: a) $450 : 10$; b) $82\,000 : 100$; c) $62\,500 : 25$; d) $41\,616 : 204$; e) $814\,407 : 2\,001$; f) $408\,816 : 204$; g) $1\,625\,000 : 250$.
16. Care este cel mai mic număr natural ce trebuie înmulțit cu 4 pentru a obține un număr mai mare decît 11?
17. Care este cel mai mic număr natural ce trebuie înmulțit cu 24 pentru a obține un număr mai mare decît 123?
18. Să se efectueze:
    a) $3 + 2^2$; b) $5^1 + 2^3$;
    c) $2^2 + 5^2 + 10^3 + 7^0$;
    d) $12^2 + 11^3$;
    e) $105^2 + 5^4 + 2^6$;
    f) $1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^{245}$;
    g) $0 + 0^2 + 0^3 + 0^{743}$;
    h) $10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5$.
19. Să se efectueze: a) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3$; b) $5^{70} : 5^{68}$;
    c) $7^{40} : 7^{39}$; d) $2^3 : 2$; e) $(2^7)^{10} : 2^{69}$; f) $(5^2)^{30} - 5^{60}$;
    g) $33 : (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^2)$; h) $(2 + 3^{69} : 3^{67}) : 11$;
    i) $(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2^{50}) : (1 + 2^{52})$;
    j) $(3 + 5^{342} : 5^{330}) : (3 + 5^{12})$.
20. Să se efectueze:
    $[1 + 2 \cdot 2^{49} + 2^{94} : 2^{14} + (3^2)^{100}] : (1 + 2^{50} + 2^{80} + 3^{200})$.
21. Să se efectueze: a) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{100}) : 2^{104}$; b) $2^{100} : 2^{98}$; c) $2^{78} : 2$; d) $(2^3)^{100} : 2^{298}$; e) $4^{20} : 2^{38}$.
22. Care număr este mai mare: 10^{20} sau 20^{10}?

23[d]. Care număr este mai mare: 2^{69} sau 3^{46}?
Indicație. Se va ține seama de $2^{69} = (2^3)^{23}$, $3^{46} = (3^2)^{23}$.

24. Să se efectueze:
    a) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 20$; b) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^{45} + 3 \cdot 3^{24}) : (2^{48} + 3^{25})$; c) $7^{345} : 7^{343}$;
    d) $205^2 + 2^{456} : 2^{454}$; e) $(3^{204} : 3 + 10^{250} : 10) : (3^{203} + 10^{249})$;
    f) $(2^2)^{100} : 2^{199}$; g) $2^3 + 2 \cdot 2^5 + (2^3)^{100} : 2^{299}$; h) $(2^2 \cdot 3 \cdot 5^3)^{100} : (2^{200} \cdot 3^{100} \cdot 5^{300})$.
25. Să se găsească ultima cifră a următoarelor numere:
    a) 6^{1977}; b) 9^{1977}; c) 3^{1977}; d) 2^{1977}.
26. Care poate fi ultima cifră a numărului a^2, unde a este un număr natural oarecare? Dar a numărului $2a^2$? Dar a numărului $3a^2$?
27. Pionierii din detașamentul unei clase a V-a au plantat într-o zi 24 pomi, iar a doua zi cu 6 pomi mai mult decît în prima zi. 12 din pomii plantați în cele două zile sînt caiși, iar restul meri și peri. Știind că numărul merilor este de două ori mai mare decît numărul perilor, să se afle cîți meri și cîți peri au plantat pionierii.

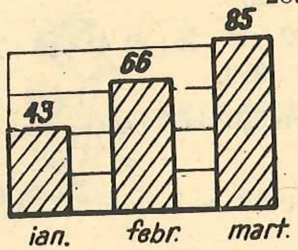


Fig. 13

28. În figura 13 este reprezentată, printr-un grafic, producţia de încălţăminte, în mii de perechi, în lunile ianuarie, februarie, martie, a mai multor fabrici de încălţăminte la un loc.

Privind graficul, constatăm că în ianuarie s-au produs 43 mii de perechi de încălţăminte (43 000 de perechi), în februarie 66 000 de perechi, iar în martie 85 000 de perechi.

1) Cîte perechi de încălţăminte s-au produs în cele trei luni la un loc?

2) Cu cît a crescut producţia în luna martie faţă de luna februarie?

29. Din următorul tabel, se poate vedea care a fost producţia de oţel a ţării noastre — în mii tone — în anii 1938; 1950; 1965; 1981.

Anul	1938	1950	1965	1981
Oţel — mii tone	284	555	3 426	13 025

Răspundeţi la următoarele întrebări:

a) Cîte tone de oţel s-au produs în anul 1938 în ţara noastră?
b) De cîte ori este mai mare producţia anului 1981 faţă de cea a anului 1938?
c) Cu cîte milioane tone este mai mare producţia anului 1981 faţă de cea a anului 1965?

Folosind datele din tabel, formulaţi şi alte probleme şi rezolvaţi-le.

30. Zidaru, Fieraru, Lăcătuşu sînt nume de familie a trei muncitori, dar Zidaru nu este de profesie zidar, Fieraru nu este fierar, iar Lăcătuşu nu este nici lăcătuş, nici fierar. Şi totuşi, unul dintre ei este de profesie zidar, altul e fierar şi altul lăcătuş. Arătaţi care este de profesie zidar, care este fierar şi care este lăcătuş.

Putem rezolva această problemă folosindu-ne de următorul tabel:

	Zidaru	Fieraru	Lăcătuşu
zidar	(1) —	(6) —	(5) da
fierar	(9) da	(2) —	(4) —
lăcătuş	(8) —	(7) da	(3) —

Completăm tabelul în ordinea arătată de numerele din dreptunghiuri. Zidaru nu e zidar, Fieraru nu este fierar, Lăcătuşu nu este lăcătuş şi nici fierar. Am pus în dreptunghiurile 1, 2, 3, 4 cîte o liniuţă. Lăcătuşu nu rămîne să fie decît zidar.

Punem în dreptunghiul 5 cuvîntul da. Dacă Lăcătuşu este zidar, nu mai poate fi Fieraru zidar. Punem în dreptunghiul 6 liniuţă. Fieraru, nefiind nici zidar, nici fierar, este lăcătuş. Punem în dreptunghiul 7 cuvîntul da. Dacă Fieraru este lăcătuş, nu mai poate fi Zidaru lăcătuş. Punem în dreptunghiul 8 liniuţă. Zidaru nu poate fi decît fierar. Punem în dreptunghiul 9 cuvîntul da.

Deci Zidaru este de profesie fierar, Fieraru lăcătuş, iar Lăcătuşu zidar. Mai rezolvaţi o dată problema fără să numerotaţi dreptunghiurile. Rezolvaţi apoi următoarea problemă.

31. Gheorghe, Ion, Petre sînt prenumele a trei elevi. Numele lor de familie sînt tot Gheorghe, Ion şi Petre, dar astfel încît nici unul din ei nu are numele de familie la fel ca prenumele. Dacă numele de familie al lui Ion nu este Petre, să se afle numele şi prenumele celor trei elevi.

32. Ionel, Petre, Gheorghe primesc în dar 3 creioane colorate: unul roşu, unul galben şi altul albastru. Fiecare primeşte un creion şi numai unul, Ionel nu primeşte creionul roşu şi nici pe cel albastru, iar Gheorghe nu primeşte creionul roşu. Ce culoare are creionul pe care-l primeşte fiecare copil?

33. Anton, Barbu, George, Marin, Petre, Stan şi Tudor sînt elevi cărora le place cel puţin unul din următoarele sporturi: fotbal, oină. Tudor şi Petre sînt singurii din acest grup cărora le place şi fotbalul şi oina, iar Barbu şi George sînt singurii din acest grup cărora le place numai oina. Căror elevi din acest grup le place numai fotbalul? Căror elevi din acest grup le place oina?

34. Cinci prieteni au participat la o cursă de alergări. Dumitru a afirmat, cu amărăciune, că n-a ocupat locul I, Gheorghe a terminat cursa al treilea, iar Victor a ocupat un loc mai bun decît Gheorghe. Petre a observat că Victor n-a ocupat locul II, iar Andrei n-a ieşit nici primul, nici ultimul. Petre a spus că el a terminat pe locul imediat următor locului ocupat de Dumitru. Ce loc a ocupat fiecare, ştiind că nu s-au clasat doi concurenţi pe acelaşi loc.

Rezolvare

Se completează tabelul:

	I	II	III	IV	V
Dumitru	—	—	—	da	—
Gheorghe	—	—	da	—	—
Victor	da	—	—	—	—
Andrei	—	da	—	—	—
Petre	—	—	—	—	da

35. Să se scrie cel mai mare număr natural de cinci cifre care îndeplinește condițiile:
a) este mai mic decît 30 000;
b) are suma cifrelor sale mai mică decît 18.

36. Să se afle cîte numere naturale mai mici decît 315 există, astfel încît, dacă înmulțim pe oricare din ele cu 2, să obținem un număr mai mare decît 315.

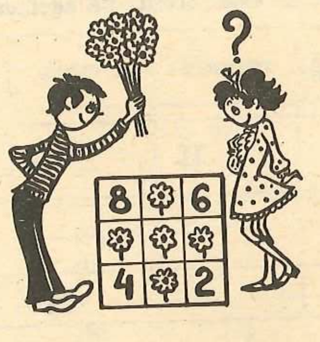
37. Pe o șosea, în linie dreaptă, la egală distanță unul de altul, se găsesc 11 pomi. Știind că între primul pom și al treilea este o distanță de 6 m, să se afle cîți metri sînt între primul și ultimul pom.

38[d]. Într-un magazin s-au adus 25 lăzi cu mere de trei calități. În fiecare ladă sînt numai mere de aceeași calitate. Se pot găsi totdeauna 9 lăzi, astfel încît toate aceste 9 lăzi să conțină mere de aceeași calitate?

39[d]. Cineva are suma de 435 lei în monede de 5 lei și bancnote de 10 lei. Știind că sînt în total 50 de monede și bancnote, să se afle cîte monede și cîte bancnote sînt.

40. Se consideră numerele 11 și 23 scrise în baza 10. Să se scrie aceste numere în baza 2.

41. Se consideră următoarele numere: $1101_{(2)}$ și $101010_{(2)}$. Să se scrie aceste numere în baza 10.



UTILIZAREA LITERELOR ÎN CALCULE

1. MULȚIMI

RECAPITULARE DIN CLASELE I–IV ȘI COMPLETĂRI

Ne întîlnim foarte des cu mulțimi, cum sînt:
1) mulțimea cărților dintr-o bibliotecă;
2) mulțimea cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
3) mulțimea copacilor dintr-o pădure;
4) mulțimea autobuzelor înmatriculate în municipiul București;
5) mulțimea elevilor din clasa noastră;
6) mulțimea băncilor din clasa noastră.

Orice mulțime este formată din elemente. Putem da orice nume oricărei mulțimi. Cele mai simple nume care pot fi date unei mulțimi sînt literele majuscule: $A, B, C, D, \ldots$. Tot astfel, fiecărui element al unei mulțimi i se poate da un nume, care poate fi oricare. Cele mai simple nume care pot fi date unui element sînt literele minuscule: $a, b, c, d, \ldots$.

În exemplul 2, pentru a putea vorbi despre mulțimea cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le-am enumerat.

Ne putem rezuma numai la enumerarea lor atunci cînd ne referim la mulțimea lor, dar, pentru a scoate în evidență faptul că este vorba de o mulțime, le punem între acolade:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Dacă vrem să punem în evidență literele din alfabetul limbii române cu ajutorul cărora este alcătuit cuvîntul

elev,

enumerăm literele distincte din acest cuvînt și formăm mulțimea

$$\{e, l, v\}.$$

Litera e, care apare în această mulțime, este prima și a treia literă din cuvîntul elev.

De aici reținem că, *într-o mulțime orice element apare o singură dată.*

Cu ajutorul scrierii

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

scoatem în evidență faptul că notația A este numele mulțimii cifrelor, și citim „A este mulțimea cifrelor".

Analog, prin

$$B = \{e, l, v\}$$

scoatem în evidență faptul că notația B este numele mulțimii literelor e, l, v și citim „B este mulțimea literelor e, l, v".

Ordinea în care considerăm elementele unei mulțimi este oarecare, deoarece interesează numai faptul că anumite elemente alcătuiesc o mulțime. De aceea mulțimea $\{1, 2, 3\}$ o mai putem scrie $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$.

Mulțimile despre care am vorbit, pînă în prezent, se numesc mulțimi finite. Există însă și mulțimi infinite. De exemplu: mulțimea numerelor naturale $\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, pe care o vom nota cu N, este infinită. La fel, mulțimea $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, pe care o vom nota cu N*, este infinită.

Să considerăm mulțimea C a elevilor din clasa noastră. Mulțimea C se poate scrie enumerînd efectiv elementele sale, adică indicînd numele tuturor elevilor. Mulțimea C se mai poate scrie și ținînd seama de proprietatea conform căreia fiecare element al mulțimii C este elev al clasei noastre. Această proprietate este o *proprietate caracteristică* tuturor elementelor mulțimii C. Ea nu este adevărată pentru nici un alt element care nu aparține mulțimii C.

Mulțimea C se mai poate scrie astfel:

$$\{x \mid x \text{ este elev al clasei noastre}\}.$$

Pentru a arăta că notația C este numele mulțimii elevilor din clasa noastră, scriem:

$$C = \{x \mid x \text{ este elev al clasei noastre}\}.$$

Citim: „Mulțimea C este mulțimea elementelor x, astfel încît x este elev al clasei noastre"

Alt exemplu:

Știm că mulțimea cifrelor, pe care am notat-o cu A, este următoarea: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Spunem că am scris mulțimea A enumerînd elementele sale.

Această mulțime se mai poate scrie ținînd seama de o proprietate caracteristică a elementelor sale, în felul următor:

$$\{x \mid x \text{ este cifră}\}.$$

Deci $A = \{x \mid x \text{ este cifră}\}$, ceea ce citim: „$A$ este mulțimea elementelor x, astfel încît x este cifră"

2. SIMBOLURILE $\in$, $\notin$

Fie mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Citim această frază astfel: „Fie mulțimea A care este mulțimea cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9".

Pentru a arăta că 3 este un element al mulțimii A scriem

$$3 \in A$$

și citim „3 aparține lui A".

Fie mulțimea $B = \{e, l, v\}$.

Deci $e \in B$. Faptul că a nu aparține lui B se arată scriind

$$a \notin B$$

și citim „a nu aparține lui B".

Alte **exemple:**

Fie: $M = \{a, b, c, d\}$.
$a \in M$, adică a aparține lui M;
$b \in M$, adică b aparține lui M;
$e \notin M$, adică e nu aparține lui M;
$f \notin M$, adică f nu aparține lui M.

Fie mulțimea $M = \{n \mid n \in \mathrm{N},\ 1 < n < 5\}$. Citim această frază astfel: „Fie mulțimea M care este mulțimea acelor n astfel încît n este un element al lui N și n este mai mare decît 1 și mai mic decît 5".

Această mulțime a fost scrisă ținînd seama de o proprietate caracteristică a elementelor mulțimii M: fiecare din elementele acestei mulțimi este număr natural mai mic decît 5 și mai mare decît 1.

Mulțimea M mai poate fi scrisă enumerînd elementele sale, adică astfel:

$$M = \{2, 3, 4\}.$$

Exercițiu rezolvat

Să considerăm mulțimea:

$$B = \{x \mid x \in \mathrm{N},\ x < 5\}.$$

Să se scrie această mulțime enumerînd elementele sale.

Răspuns:

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

EXERCIȚIU

Să se scrie următoarele mulțimi enumerînd elementele fiecăreia din ele: $A = \{x \mid x \in \mathrm{N},\ x < 6\}$; $B = \{x \mid x \in \mathrm{N},\ x \leqslant 6\}$; $C = \{x \mid x \in \mathrm{N}^*, x < 6\}$.

3. DIAGRAME VENN-EULER

Deoarece ordinea în care considerăm elementele unei mulţimi este oarecare, putem să le aşezăm oricum pe o foaie de hîrtie, dar atunci nu le mai prindem între acolade, ci le înconjurăm cu o linie închisă.

De exemplu, mulţimea

$$B = \{c, o, ş\}$$

se reprezintă ca în figura 1. O astfel de figură poartă numele de diagramă Venn-Euler a mulţimii considerate.

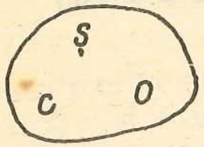


Fig. 1

4. MULŢIMEA VIDĂ

Să considerăm mulţimea elevilor care au vîrsta de o lună. Această mulţime nu are nici un element. Mulţimea fără nici un element se numeşte mulţime vidă şi se notează cu Ø. Există o singură mulţime vidă.

5. INCLUZIUNE. SUBMULŢIMI

Considerăm mulţimea $\{0, 4, 7, 9\}$ pe care o notăm cu A şi mulţimea $\{0, 2, 4, 5, 7, 9\}$ pe care o notăm cu B; se constată că orice element care aparţine mulţimii A aparţine şi mulţimii B. În acest caz se spune că mulţimea A este inclusă în mulţimea B sau că mulţimea A este o submulţime a mulţimii B şi aceasta se scrie astfel:

$$A \subseteq B$$

şi se citeşte: „mulţimea A este inclusă în mulţimea B" sau că „mulţimea A este o submulţime a mulţimii B". Dacă $A \subseteq B$ vom scrie şi $B \supseteq A$, ceea ce va fi citit: „mulţimea B include mulţimea A".

Cu diagramele Venn-Euler, faptul că mulţimea A este o submulţime a mulţimii B se arată ca în figura 2.

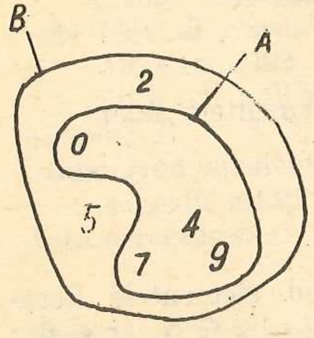


Fig. 2

Orice mulţime este propria sa submulţime, adică $A \subseteq A$. Mulţimea Ø este o submulţime a oricărei mulţimi.

Dacă o mulţime P nu este inclusă în altă mulţime Q, scriem: $P \nsubseteq Q$. De exemplu, considerăm mulţimile:

$$P = \{1, 2\} \text{ şi } Q = \{2, 3, 4\}.$$

Se vede că $P \nsubseteq Q$.

Alte **exemple:**

Fie:

$P = \{1, 2\}$; $Q = \{1, 2, 3, 4\}$; $R = \{2, 3, 4\}$.

$P \subseteq Q$, adică P este o submulţime a lui Q;

$P \not\subseteq R$, adică P nu este o submulţime a lui R;

$Q \supseteq R$, adică R este o submulţime a lui Q.

În cazul în care o mulţime A este o submulţime a unei mulţimi B, dar mulţimea B are cel puţin un element care nu aparţine mulţimii A, se scrie $A \subset B$ sau $B \supset A$ şi se spune că A este o *submulţime strictă* a lui B.

Dacă o mulţime P nu este submulţime strictă a unei mulţimi Q scriem: $P \not\subset Q$.

EXERCIŢIU

Se consideră mulţimile: $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3\}$; $C = \{3\}$. Să se afle care din următoarele incluziuni sînt adevărate şi care nu:

1) $A \subseteq B$; 2) $B \supseteq C$; 3) $C \subseteq A$.

6. MULŢIMI EGALE

Două mulţimi A şi B sînt egale dacă au aceleaşi elemente.

Aceasta se scrie:

$$A = B$$

şi se citeşte: „mulţimea A este egală cu mulţimea B".

Aceasta înseamnă că mulţimea A este inclusă în mulţimea B şi mulţimea B este inclusă în mulţimea A.

De exemplu, mulţimile $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{3, 1, 2\}$ sînt egale, pentru că au aceleaşi elemente.

7. OPERAŢII CU MULŢIMI

INTERSECŢIA

Mulţimea elementelor comune mulţimilor A şi B (fiecare element comun mulţimilor A şi B figurînd o singură dată) se numeşte intersecţia mulţimilor A şi B.

Această nouă mulţime formată se notează cu

$$A \cap B$$

şi se citeşte „intersecţia mulţimilor A şi B".

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8\}$ atunci:

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

Se constată că, fiecare element în parte al mulțimii $A \cap B$ aparține ambelor mulțimi A și B sau, altfel spus, aparține mulțimii A și mulțimii B.

Într-adevăr, să considerăm elementele mulțimii $A \cap B$. Se vede că:

2 aparține și mulțimii A și mulțimii B,

4 aparține și mulțimii A și mulțimii B.

Mai putem scrie:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler, intersecția mulțimilor A și B din exemplul dat arată ca în figura 3. Dacă două mulțimi nu au nici un element comun, intersecția lor este mulțimea vidă. Se spune că două mulțimi sînt *disjuncte*, dacă intersecția lor este mulțimea vidă.

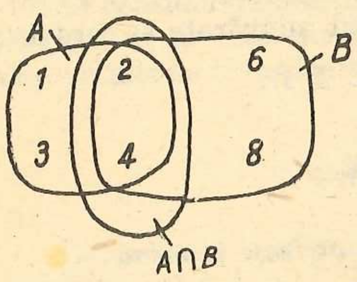


Fig. 3

Exemplu. Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$ atunci $A \cap B = \emptyset$ și deci mulțimile A și B sînt *disjuncte*.

Alt **exemplu:**

Fie mulțimile: $P = \{1, 2, 3\}$; $Q = \{1, 2, 7, 8\}$; $R = \{4, 5\}$; $T = \{1, 2\}$.

Avem:

$$P \cap Q = \{1, 2\}; \quad P \cap T = \{1, 2\};$$
$$Q \cap R = \emptyset; \quad R \cap T = \emptyset.$$

EXERCIȚIU

Se consideră mulțimile:

$A = \{6, 7\}$; $B = \{6, 7, 8, 11\}$; $C = \{8, 9, 10\}$.

Să se afle: 1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$; 3) $B \cap C$; 4) $A \cap \{0\}$; 5) $\emptyset \cap C$.

REUNIUNEA

Mulțimea în care se află toate elementele mulțimilor A și B, și numai ale lor (fiecare element comun mulțimilor A și B figurînd o singură dată), se numește reuniunea mulțimilor A și B.

Această nouă mulțime formată se notează cu

$$A \cup B$$

și se citește „reuniunea mulțimilor A și B".

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 3, 4, 5\}$ atunci $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler, reuniunea mulțimilor A și B din exemplul dat arată ca în figura 4.

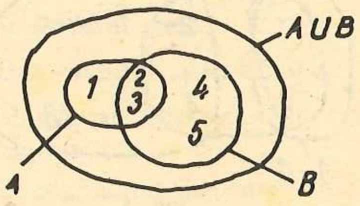


Fig. 4

Se constată că, fiecare element în parte al mulțimii $A \cup B$ aparține cel puțin uneia din mulțimile A și B sau, altfel spus, fiecare element al mulțimii $A \cup B$ aparține mulțimii A sau mulțimii B.

Într-adevăr, să considerăm elementele mulțimii $A \cup B$. Se vede că:

elementul 1 aparține numai mulțimii A;

elementele 2 și 3 aparțin și mulțimii A și mulțimii B;

elementele 4 și 5 aparțin numai mulțimii B.

Mai putem scrie

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Alt **exemplu:**

Fie mulțimile $P = \{1, 2\}$; $Q = \{3, 4, 5\}$; $R = \{1, 2, 5\}$.

$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad P \cup R = \{1, 2, 5\};$$
$$Q \cup R = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

EXERCIȚIU

Se consideră mulțimile $A = \{1, 2\}$; $B = \{3, 4\}$; $C = \{1, 3\}$.

Să se afle: 1) $A \cup B$; 2) $A \cup C$; 3) $B \cup C$.

DIFERENȚA

Mulțimea elementelor care aparțin mulțimii A, dar care nu aparțin mulțimii B, se numește diferența între mulțimile A și B.

Această mulțime se notează cu:

$$A - B$$

sau

$$A \setminus B$$

ceea ce se citește „diferența între mulțimile A și B".

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8\}$ atunci $A - B = \{1, 3\}$.

Se constată că fiecare element al mulțimii $A - B$ aparține mulțimii A, dar nu aparține mulțimii B.

Într-adevăr, să considerăm elementele mulţimii $A - B$. Se vede că:
1 aparţine lui A, dar nu aparţine lui B;
3 aparţine lui A, dar nu aparţine lui B.
Mai putem scrie:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

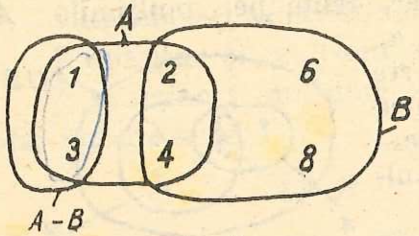


Fig. 5

Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler, diferenţa între mulţimile din exemplul dat arată ca în figura 5.

Alt exemplu:
Se dau: $P = \{1, 2, 3\}$; $Q = \{1, 2\}$; $R = \{1, 3, 4, 5\}$.
Avem: $P - Q = \{3\}$; $Q - P = \emptyset$; $R - Q = \{3, 4, 5\}$; $Q - R = \{2\}$.

Problemă rezolvată

Să se afle mulţimile X şi Y ştiind că sînt îndeplinite, în acelaşi timp, următoarele condiţii:
(1) Fiecare (sau oricare) din numerele: 2, 3, 4, 7 aparţine ambelor mulţimi.
(2) Mulţimile $\{1, 6, 8\}$ şi X sînt disjuncte.
(3) Oricare (sau fiecare) din numerele: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 aparţine cel puţin uneia din mulţimile X şi Y şi nu mai există alte numere care să îndeplinească această condiţie (condiţia 3).
Această problemă mai poate fi formulată şi astfel:
Să se afle mulţimile X şi Y ştiind că sînt îndeplinite, în acelaşi timp, următoarele condiţii:
(1) $X \cap Y = \{2, 3, 4, 7\}$,
(2) $\{1, 6, 8\} \cap X = \emptyset$,
(3) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$.
Judecăm în felul următor:
Conform condiţiei (1) fiecare din numerele 2, 3, 4, 7 există şi în mulţimea X şi în mulţimea Y.
1 nu există în mulţimea X, dar datorită condiţiei (3) trebuie să existe în mulţimea Y.
6 nu există în mulţimea X, dar conform condiţiei (3) trebuie să existe în mulţimea Y.
8 nu există în mulţimea X, dar conform condiţiei (3) trebuie să existe în mulţimea Y.
Deci mulţimile sînt

$$X = \{2, 3, 4, 7\},$$
$$Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}.$$

EXERCIŢII

1. Să se scrie mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul „pupitru".

2. Să se scrie mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul „cerc".

3. Să se scrie mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul „paralelipiped".

4. Se dă mulţimea: $A = \{x \mid x \text{ este judeţ în R.S. România}\}$. Cîte elemente are mulţimea A? Să se scrie 5 elemente oarecare ale mulţimii A.

5. Să se reprezinte fiecare dintre următoarele mulţimi, enumerînd elementele sale:
(1) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x < 7\}$;
(2) $B = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ 3 < x < 8\}$.
Indicaţie: $3 < x < 8$ se citeşte astfel: „x este mai mare decît 3 şi mai mic decît 8".
(3) $C = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \text{ este un număr par mai mic decît } 9\}$; (4) $D = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \leqslant 4\}$; (5) $E = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ 0 < x \leqslant 3\}$.

6. Se consideră mulţimile:
$A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$; $D = \{c, d, e\}$.
Cărora din aceste mulţimi le aparţine elementul b? Dar elementul d?

7. Să se determine toate submulţimile mulţimii $\{1, 2\}$.

8. Se consideră mulţimile: $A = \{a, c, b\}$; $B = \{b, c, a\}$. Sînt aceste mulţimi egale?

9. Se consideră mulţimile:
$A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 6\}$; $C = \{7, 8\}$.
Să se efectueze: 1) $A \cup B$; 2) $A \cup C$; 3) $B \cup C$; 4) $B \cup \{0\}$; 5) $C \cup C$; 6) $A \cup \emptyset$.

10. Să se determine mulţimile X ştiind că: $X \cup \{a, b\} = \{a, b, c\}$. Cîte soluţii are problema?

11. Se consideră mulţimile: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 7\}$; $C = \{5, 7, 8\}$. Să se efectueze: 1) $A \cap B$; 2) $B \cap C$; 3) $A \cap C$; 4) $C \cap \{0\}$; 5) $B \cap B$; 6) $A \cap \emptyset$.

12. Să se determine mulţimile X şi Y, ştiind că sînt îndeplinite, în acelaşi timp, condiţiile: (1) $X \cap Y = \{a, b, c\}$; (2) $d \notin X$; (3) $X \cup Y = \{a, b, c, d\}$.

13. Să se determine mulţimea A, ştiind că sînt îndeplinite simultan următoarele două condiţii: (1) $A \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c, d\}$ şi (2) $A \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$.

14. Se consideră mulţimile: $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3\}$; $C = \{5, 6\}$.
Să se efectueze: 1) $A - B$; 2) $B - A$; 3) $B - C$; 4) $A - C$; 5) $A - \{0\}$; 6) $B - \emptyset$.

15. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 5\}$; $C = \{4, 6\}$.

Să se efectueze: 1) $(A \cup B) \cap C$; 2) $A \cup (B \cap C)$; 3) $A - (B \cap C)$; 4) $C - (A \cup B)$.

16. Să se determine mulțimile X și Y, știind că ele îndeplinesc următoarele trei condiții:

(1) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$;

(2) $X \cap Y = \{3, 4, 8, 9, 10\}$;

(3) $X - Y = \{1, 5, 7\}$.

17[d]. O mulțime A are 7 elemente, iar o mulțime B are 6 elemente.

a) Dacă $A \cup B$ are opt elemente, cîte elemente are $A \cap B$?

b) Dacă $A \cap B$ are 4 elemente, cîte elemente are $A \cup B$?

18. Să se determine mulțimile X și Y, știind că ele îndeplinesc următoarele trei condiții:

1) $X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

2) $X - Y = \{b, c, d\}$;

3) $X \cap Y = \{a, e, f, g\}$.

19[d]. Să se determine mulțimile X și Y, știind că ele îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții:

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

b) $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$;

c) $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;

d) $Y \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

8. UTILIZAREA LITERELOR ÎN CALCULE

În expresii se utilizează și litere nu numai numere naturale. Literele țin locul unor numere naturale. De exemplu, $a+b$ este o expresie care exprimă suma a două numere naturale, primul fiind notat cu litera a, iar al doilea cu litera b. Apoi $a \cdot b$, pe care-l vom mai scrie ab, este o expresie care exprimă produsul a două numere naturale, primul fiind notat cu litera a, iar al doilea cu litera b. Expresia $a - b$ exprimă diferența între două numere naturale, primul fiind notat cu a, iar al doilea cu b. În cazul expresiei $a - b$, se consideră că numărul natural notat cu a este cel puțin egal cu numărul natural notat cu b, adică $a \geqslant b$. Deoarece literele țin locul unor numere naturale, ne vom exprima mai simplu spunînd „numărul natural a", așa cum am și făcut în toate paragrafele precedente, în loc de „numărul natural notat cu a". Expresia $a : b$ exprimă cîtul între două numere naturale, primul fiind a și al doilea b. În cazul lui $a : b$, se consideră că se poate împărți numărul natural a la numărul natural b. Expresia

a^n exprimă puterea numărului natural a, exponentul fiind numărul natural n. În cazul lui a^n, se consideră că nu avem $a = 0$ și $n = 0$.

Deoarece, în cazul de față vorbim numai de numere naturale, vom spune „număr" în loc de „număr natural".

De asemenea, așa cum spunem: numărul de 2 ori mai mare decît 3 este $2 \cdot 3$, adică 6, sau: numărul de 2 ori mai mare decît 5 este $2 \cdot 5$, adică 10, tot așa putem spune: numărul de 2 ori mai mare decît numărul a este $2 \cdot a$, care se mai scrie $2a$. Analog, de două ori suma numerelor a și b se scrie $2(a + b)$. Asemănător, numărul de trei ori mai mare decît a este $3a$.

Apoi, un număr mai mare cu 2 decît a este $a + 2$. Un număr mai mic cu 2 decît a este $a - 2$. Știm, pînă în prezent, ce înseamnă $a - 2$ numai dacă a este mai mare sau egal cu 2.

În calcule, folosim literele ca și cum ar fi numere naturale. De exemplu, am văzut că putem scrie $4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot (2 + 5)$. La fel, putem scrie $5x + 5y = 5(x + y)$. Analog $ax + ay + az = a(x + y + z)$.

În cazul sumei $2a + 3a$, unde a este un număr natural, putem scrie $2a + 3a = (2 + 3)a = 5a$. Asemănător, $7a + 3a + a = 11a$. Analog, $6a - 2a = (6 - 2)a = 4a$. Conform celor de mai sus, putem scrie: $2a + 3a + b + 3b = 5a + 4b$.

Valoarea unei expresii, în care intervin litere, pentru anumite valori, care sînt numere naturale, date acestor litere, se obține înlocuind literele cu aceste valori și calculînd valoarea expresiei obținute. De exemplu, să notăm cu $E(x)$ expresia $x + 1$. Vom scrie

$$E(x) = x + 1.$$

Valorile expresiei $E(x)$ pentru valorile 1, 2 și 10 ale lui x pot fi trecute în oricare din următoarele tabele:

x	$E(x)$
1	2
2	3
10	11

x	1	2	10
$E(x)$	2	3	11

În cazul expresiei $2(x + 3)$ putem alcătui următoarele tabele:

x	$2(x+3)$
2	10
3	12
5	16
8	22

x	2	3	5	8
$2(x+3)$	10	12	16	22

EXERCIŢII

1. Dacă a, b, c sînt numere naturale, scrieţi: 1) un număr de cinci ori mai mare decît a; 2) un număr cu 2 mai mare decît b; 3) un număr cu c mai mare decît a; 4) de trei ori suma dintre a şi b; 5) produsul dintre a şi b; 6) produsul dintre a şi suma numerelor b şi c.

2. Să se completeze tabelele de mai jos. Primul rînd este completat ca model.

a)

a	$2a$	$3a$	$a+1$
2	4	6	3
3			
1			
0			

b)

a	b	$a+b$	$2a+b$
2	3	5	7
4	1		
4	0		

c)

$a+b$	$2(a+b)$	$3(a+b)$
5	10	15
7		
10		

d)

$a-b$	$2(a-b)$	$10(a-b)$
3	6	30
5		
7		

e)

a	b	c	$ab+ac$
2	3	5	16
3	7	10	

3. Să se efectueze:

a) $2x + 4x$; b) $2x + x$; c) $x + x$; d) $7x - 4x$; e) $3x - 3x$; f) $x - x$;
g) $y + 2y + 3y$; h) $4y + y - y$; i) $2x + 3x + x + 1$; j) $4x + 1 + x$;
k) $2y + y + 1 + y + y$; l) $x - x + 2$; m) $5x - x + 2$; n) $2(x + 1) - 2$;
o) $3(x+2)+x$; p) $2(y+1) - 2$; r) $x + 2(x+1)$; s) $2x + x + 3y - y + 1$.

9. PROPOZIŢII ADEVĂRATE. PROPOZIŢII FALSE

În vorbire şi în scris ne exprimăm, în general, cu ajutorul propoziţiilor. Propoziţiile care exprimă un adevăr se numesc propoziţii adevărate, iar cele care exprimă un neadevăr se numesc propoziţii false. Orice propoziţie poate fi sau adevărată sau falsă, dar nu poate fi şi adevărată şi falsă.

Exemple de propoziţii adevărate:

a) Municipiul Bucureşti este capitala Republicii Socialiste România.

b) Luna este satelit al Pămîntului.

c) $2 + 2 = 4$.

d) $2\text{ m} = 20\text{ dm}$.

e) $14 : 7 = 2$.

Exemple de propoziţii false:

a) Municipiul Piteşti este un oraş din judeţul Dîmboviţa.

b) Trenul circulă pe autostrada Bucureşti—Piteşti.

c) $2 + 2 = 5$.

d) $2\text{ km} = 200\text{ m}$.

Întîlnim propoziţii false în situaţii de felul următor. Punem întrebarea:

Care din următoarele propoziţii: $2 + 2 = 3$, $2 + 2 = 4$, $2 + 2 = 5$ este adevărată?

Prin această întrebare urmărim să vedem dacă cel întrebat ştie sau nu că propoziţia $2 + 2 = 4$ este adevărată, iar celelalte propoziţii $2 + 2 = 3$, $2 + 2 = 5$ sînt false.

Adevărul îl vom nota cu A, iar *falsul* cu F şi vom spune că A este *valoarea logică* sau *valoarea de adevăr* a unei propoziţii adevărate, iar F este *valoarea logică* sau *valoarea de adevăr* a unei propoziţii false.

EXERCIŢII

1. Care din următoarele propoziţii sînt adevărate şi care sînt false:
a) $4 + 2 = 6$? b) $4 + 2 = 8$? c) $24\,000 : 100 = 24$? d) $4 + 8 > 10$?

2. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
Să se afle valoarea logică a fiecăreia din următoarele propoziţii:
a) $1 \in A$; b) $2 \notin A$; c) $7 \in A$; d) $4 \in A$; e) $3 \notin A$.

3. Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziţii:
a) $7 + 3 = 10$; b) $8 : 2 = 3$; c) $2\text{ kg} = 200\text{ g}$; d) $2\text{ m} = 200\text{ cm}$;
e) $2500\text{ dm}^2 = 25\text{ m}^2$; f) $2 + 2 \cdot 3 = 8$; g) $(2 + 2) \cdot 3 = 10$;
h) $9 \cdot 0 = 9$; i) $7 \cdot 1 = 7$; j) $8 : 1 = 8$; k) $0 : 5 = 0$;
l) $2 \neq 3$; m) $3 \neq 3$; n) $5 < 2$; o) $2^3 = 8$; p) $11^2 = 121$; r) $7^0 = 1$;
s) $7 \cdot 7^2 \cdot 7^{100} = 7^{103}$; t) $8^{70} : 8^{10} = 8^{60}$; u) $(2^4)^{40} = 2^{159}$.

4. Să se afle valoarea logică a fiecăreia din următoarele propoziţii:

a) $4 + 47 + 247 = 247 + 4 + 47$; b) $(4 + 241) + 365 > 4 + (241 + 365)$;

c) $5 + 245 + 246 = 6 + 244 + 248$; d) $4 \cdot 54 \cdot 245 = 4 \cdot 245 \cdot 54$;

e) $45 \cdot (457 \cdot 24) < (45 \cdot 457) \cdot 24$;

f) $24 \cdot (36 + 475 + 829) = 24 \cdot 36 + 24 \cdot 475 + 24 \cdot 829$;

g) $240 \cdot 102 < 120 \cdot 204$; h) $24 \cdot 35 = 23 \cdot 36$; i) $111 \cdot 204 = 222 \cdot 101$.

10. OPERAŢII CU NUMERE NATURALE ŞI RELAŢIA DE ORDINE ÎN N

Pe axa numerelor, din două numere naturale cel mai mare se află la dreapta celui mai mic. Înţelegem prin aceasta că sensul de la numărul mai mic la numărul mai mare este sensul pozitiv al axei numerelor. De exemplu, 5 este mai mare decît 2 şi se constată că 5 este la dreapta lui 2, ca în figura 6. Tot astfel, putem spune că, pe axa numerelor, din două numere naturale cel mai mic se află la stînga celui mai mare. Înţelegem prin aceasta că sensul de la numărul mai mare la numărul mai mic este opus sensului pozitiv al axei numerelor. De exemplu, 2 este mai mic decît 5 şi se constată că 2 este la stînga lui 5, ca în figura 6.

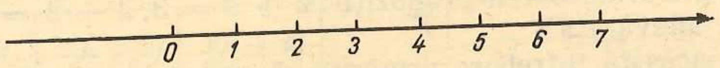


Fig. 6

Inegalitatea nestrictă între numere naturale, notată prin $a \leq b$, avînd semnificaţia $a < b$ sau $a = b$, este o relaţie de ordine în N, deoarece are următoarele proprietăţi:

1) Oricare ar fi numărul natural a avem $a \leq a$.

Aceasta este proprietatea de *reflexivitate* a relaţiei de ordine în N.

2) Oricare ar fi numerele naturale a şi b, dacă $a \leq b$ şi $b \leq a$ atunci $a = b$.

Aceasta este proprietatea de *antisimetrie* a relaţiei de ordine în N.

3) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c dacă $a \leq b$ şi $b \leq c$ atunci $a \leq c$.

Aceasta este proprietatea de *tranzitivitate* a relaţiei de ordine în N. Şi relaţia de inegalitate strictă are proprietatea de *tranzitivitate*, adică:

Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c dacă $a < b$ şi $b < c$ atunci $a < c$.

OPERAŢII CU NUMERE NATURALE ŞI EGALITATEA ÎN N

Din $2 = 2$ obţinem $5 = 5$ prin adunarea lui 3 la ambii membri ai egalităţii $2 = 2$. În general:

1) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c, dacă $a = b$ atunci $a + c = b + c$.

Altfel spus, dacă adunăm acelaşi număr natural la numerele naturale care formează cei doi membri ai unei egalităţi între numere naturale, obţinem numere naturale egale.

Din $7 = 7$ obţinem $3 = 3$ prin scăderea lui 4 din ambii membri ai egalităţii $7 = 7$. În general:

2) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c astfel încît $a = b$, $a \geq c$ şi $b \geq c$ atunci $a - c = b - c$.

Altfel spus, prin scăderea unui număr natural din ambii membri ai unei egalităţi între numere naturale, atunci cînd scăderile se pot efectua, obţinem o egalitate între numere naturale.

Din $4 = 4$ şi $3 = 3$ obţinem $7 = 7$ prin adunarea membru cu membru a egalităţilor $4 = 4$ şi $3 = 3$. În general:

3) Oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi d, dacă $a = b$ şi $c = d$ atunci $a + c = b + d$.

Altfel spus, prin adunarea membru cu membru a două egalităţi între numere naturale, obţinem o egalitate între numere naturale.

Din $5 = 5$ şi $2 = 2$ obţinem $3 = 3$ prin scăderea membru cu membru a egalităţilor $5 = 5$ şi $2 = 2$. În general:

4) Oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi d astfel încît $a = b$, $c = d$, $a \geq c$ şi $b \geq d$ atunci $a - c = b - d$.

Altfel spus, prin scăderea membru cu membru a două egalităţi între numere naturale, atunci cînd scăderile se pot efectua, obţinem o egalitate între numere naturale.

Din $2 = 2$ obţinem $10 = 10$ prin înmulţirea cu 5 a ambilor membri ai egalităţii $2 = 2$. În general:

5) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c, dacă $a = b$ atunci $a \cdot c = b \cdot c$.

Altfel spus, dacă înmulţim cu acelaşi număr natural numerele naturale care formează cei doi membri ai unei egalităţi între numere naturale, obţinem numere naturale egale.

Din $6 = 6$ se obţine $3 = 3$ prin împărţirea cu 2 a ambilor membri ai egalităţii $6 = 6$. În general:

6) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c astfel încît $a = b$, $c \neq 0$ şi se pot efectua împărţirile între a şi c, pe de o parte, şi între b şi c, pe de altă parte, atunci $a : c = b : c$.

Altfel spus, prin împărţirea cu un număr natural a ambilor membri ai unei egalităţi între numere naturale, atunci cînd împărţirile se pot efectua, obţinem o egalitate între numere naturale.

Împărţirea cu 0 nu se poate efectua, deoarece avem

$$2 \cdot 0 = 7 \cdot 0,$$

dar nu avem $2 = 7$.

Din $8 = 8$ şi $3 = 3$ obţinem $24 = 24$ prin înmulţirea membru cu membru a egalităţilor $8 = 8$ şi $3 = 3$. În general:

7) Oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi d, dacă $a = b$ şi $c = d$ atunci $a \cdot c = b \cdot d$.

Altfel spus, prin înmulţirea membru cu membru a două egalităţi între numere naturale, obţinem o egalitate între numere naturale.

Din $12 = 12$ şi $4 = 4$ obţinem $3 = 3$ prin împărţirea membru cu membru a egalităţilor $12 = 12$ şi $4 = 4$. În general:

8) Oricare ar fi numerele naturale a, b, c şi d astfel încît $a = b$, $c = d$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ şi se pot efectua împărţirile între a şi c pe de o parte şi între b şi d pe de altă parte, atunci $a : c = b : d$.

Altfel spus, prin împărţirea membru cu membru a două egalităţi între numere naturale, atunci cînd împărţirile se pot efectua, obţinem o egalitate între numere naturale.

OPERAŢII CU NUMERE NATURALE ŞI INEGALITATEA ÎN N

Din $3 < 5$ obţinem $7 < 9$ prin adunarea lui 4 la ambii membri ai inegalităţii $3 < 5$. Din $2 \leqslant 6$ obţinem $5 \leqslant 9$ prin adunarea lui 3 la ambii membri ai inegalităţii $2 \leqslant 6$. În general:

1) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c pentru care $a < b$ avem $a + c < b + c$.

De asemenea:

1') Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c pentru care $a \leqslant b$ avem $a + c \leqslant b + c$.

Altfel spus, prin adunarea unui număr natural la ambii membri ai unei inegalităţi între numere naturale, obţinem o inegalitate de acelaşi sens între numere naturale.

Din $2 < 6$ obţinem $1 < 5$ prin scăderea lui 1 din ambii membri ai inegalităţii $2 < 6$. Din $3 \leqslant 5$ obţinem $1 \leqslant 3$ prin scăderea lui 2 din ambii membri ai inegalităţii $3 \leqslant 5$. În general:

2) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c astfel încît $a < b$ şi $a \geqslant c$, $b \geqslant c$, atunci $a - c < b - c$.

De asemenea:

2') Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c astfel încît $a \leqslant b$ şi $a \geqslant c$, $b \geqslant c$, atunci $c - c \leqslant b - c$.

Altfel spus, prin scăderea unui număr natural din ambii membri ai unei inegalităţi între numere naturale, atunci cînd scăderile se pot efectua, obţinem o inegalitate de acelaşi sens între numere naturale.

Avem $1 < 2$. Dar avem şi

$$1 \cdot 3 < 2 \cdot 3.$$

Nu acelaşi lucru se întîmplă dacă în loc de 3 este 0, din cauză că $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$. În general:

3) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c pentru care $a < b$ şi $c \neq 0$ avem $a \cdot c < b \cdot c$.

De asemenea:

3') Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c pentru care $a \leqslant b$ avem $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

În ultimul caz avem $1 \leqslant 2$, dar avem şi $1 \cdot 0 \leqslant 2 \cdot 0$.

Altfel spus, prin înmulţirea cu acelaşi număr natural, diferit de 0, a ambilor membri ai unei inegalităţi între numere naturale, se obţine o inegalitate de acelaşi sens între numere naturale. În cazul inegalităţii nestricte, nu este nevoie de restricţia ca numărul natural cu care se înmulţesc cei doi membri ai inegalităţii să fie diferit de 0.

Din $2 < 6$ obţinem $1 < 3$ prin împărţirea cu 2 a ambilor membri ai inegalităţii $2 < 6$. Din $10 \leqslant 20$ obţinem $2 \leqslant 4$ prin împărţirea cu 5 a ambilor membri ai inegalităţii $10 \leqslant 20$. În general:

4) Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c astfel încît $a < b$, $c \neq 0$ şi se pot efectua împărţirile între a şi c pe de o parte şi între b şi c pe de altă parte, atunci $a : c < b : c$.

De asemenea:

4') Oricare ar fi numerele naturale a, b şi c astfel încît $a \leq b$, $c \neq 0$ şi se pot efectua împărţirile între a şi c pe de o parte şi între b şi c pe de altă parte, atunci $a : c \leq b : c$.

Altfel spus, prin împărţirea cu un număr natural a ambilor membri ai unei inegalităţi între numere naturale, atunci cînd împărţirile se pot efectua, obţinem o inegalitate de acelaşi sens între numere naturale.

11. NOŢIUNILE DE ECUAŢIE, INECUAŢIE ŞI MULŢIMEA SOLUŢIILOR

Fie mulţimea:

$A = \{$Bucureşti, Braşov, Paris$\}$

şi propoziţiile:

Bucureşti este un oraş din România;
Braşov este un oraş din România;
Paris este un oraş din România.

Primele două propoziţii sînt adevărate, iar ultima propoziţie este falsă. Înlocuind în aceste propoziţii elementele mulţimii A cu x obţinem o exprimare de forma:

„x este un oraş din România", în care ştim că $x \in A$.

O astfel de exprimare se numeşte propoziţie cu o variabilă[1], iar x se numeşte variabilă şi ia valori în mulţimea A.

Înlocuind pe x cu oricare din cuvintele: Bucureşti, Braşov, Paris obţinem propoziţiile de mai înainte, din care unele sînt adevărate, iar altele false.

Mulţimea de adevăr a unei propoziţii cu o variabilă x este totalitatea elementelor din mulţimea elementelor cu care x poate fi înlocuit şi care conduc la propoziţii adevărate.

Mulţimea de adevăr a propoziţiei cu o variabilă „x este un oraş din România", unde $x \in A$, este mulţimea $\{$Bucureşti, Braşov$\}$.

Mulţimea de adevăr a unei propoziţii cu o variabilă se mai numeşte *mulţimea soluţiilor* acestei propoziţii cu o variabilă.

[1] Propoziţiile cu o variabilă se mai numesc predicate.

Propoziţia cu o variabilă „x este un oraş din România", unde x parcurge mulţimea $\{$Bucureşti, Braşov, Iaşi, Paris, Londra$\}$, este diferită de propoziţia cu o variabilă „x este un oraş din România", unde x parcurge mulţimea $\{$Bucureşti, Braşov, Paris$\}$.

Să considerăm propoziţia cu o variabilă:

„x este un număr natural par" unde $x \in \{2, 3, 4\}$.

Dacă înlocuim pe x cu 2 obţinem propoziţia: „2 este un număr natural par", care este o propoziţie adevărată.

Dacă înlocuim pe x cu 3 obţinem propoziţia: „3 este un număr natural par", care este o propoziţie falsă.

Dacă înlocuim pe x cu 4 obţinem propoziţia: „4 este un număr natural par", care este o propoziţie adevărată.

Spunem că mulţimea soluţiilor sau mulţimea de adevăr a propoziţiei cu o variabilă „x este un număr natural par", unde $x \in \{2, 3, 4\}$, este mulţimea $A = \{2, 4\}$.

EXERCIŢIU

Să se afle mulţimea de adevăr a propoziţiei cu o variabilă: „x este număr natural impar", unde $x \in \{2, 3, 4\}$.

ECUAŢII

Fie următoarele propoziţii cu o variabilă:

1) $x + 2 = 6$, unde $x \in \{4, 5\}$; 2) $x - 3 = 4$, unde $x \in \{4, 7\}$; 3) $3x = 9$, unde $x \in \{2, 4\}$; 4) $x + 3 = 4$, unde $x \in \mathbf{N}$; 5) $1 + x = 3$, unde $x \in \mathbf{N}^*$; 6) $6 : x = 3$, unde $x \in \mathbf{N}^*$; 7) $2(x - 1) = x - 1$, unde $x \in \{1, 2, 3\}$; 8) $7x = 0$, unde $x \in \{1, 2\}$.

Aceste propoziţii cu o variabilă se mai pot scrie şi astfel:

1) $x + 2 = 6$, $x \in \{4; 5\}$; 2) $x - 3 = 4$, $x \in \{4; 7\}$; 3) $3x = 9$, $x \in \{2; 4\}$; 4) $x + 3 = 4$, $x \in \mathbf{N}$; 5) $1 + x = 3$, $x \in \mathbf{N}^*$; 6) $6 : x = 3$, $x \in \mathbf{N}^*$; 7) $2(x - 1) = x - 1$, $x \in \{1; 2; 3\}$; 8) $7x = 0$, $x \in \{1; 2\}$.

Propoziţiile cu o variabilă de acest fel se mai numesc şi *ecuaţii*.

După cum se vede, în toate aceste propoziţii există simbolul „=" pe care-l citim „este egal cu".

De exemplu, prima ecuaţie o citim: „$x + 2$ este egal cu 6", unde $x \in \{4, 5\}$.

La prima ecuaţie, „$x + 2$" se numeşte primul membru al ecuaţiei, iar 6 membrul al doilea al ecuaţiei.

Ne vom ocupa, pe rînd, de fiecare ecuaţie.

1) $x + 2 = 6$, unde $x \in \{4, 5\}$.

Dacă înlocuim pe x cu 4 obţinem propoziţia: „$4 + 2 = 6$", care este o propoziţie adevărată.

Dacă înlocuim pe x cu 5 obţinem propoziţia: „$5 + 2 = 6$", care este o propoziţie falsă.

Spunem că 4 este soluţie sau rădăcină a ecuaţiei 1).

Ecuaţia 1) are soluţie în mulţimea $\{4, 5\}$.

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei 1) este $\{4\}$.

Se mai scrie $S = \{4\}$, unde S este mulţimea soluţiilor ecuaţiei 1).

A rezolva o ecuaţie înseamnă a găsi mulţimea soluţiilor ei sau mulţimea ei de adevăr.

2) $x - 3 = 4$, unde $x \in \{4, 7\}$.

Dacă înlocuim pe x cu 4 obţinem propoziţia: „$4 - 3 = 4$", care este o propoziţie falsă.

Dacă înlocuim pe x cu 7 obţinem propoziţia: „$7 - 3 = 4$", care este o propoziţie adevărată.

Spunem că 7 este soluţie sau rădăcină a ecuaţiei 2). Mulţimea soluţiilor ecuaţiei 2) este $\{7\}$.

3) $3x = 9$, unde $x \in \{2, 4\}$.

Dacă înlocuim pe x cu 2 obţinem propoziţia: „$3 \cdot 2 = 9$", care este o propoziţie falsă.

Dacă înlocuim pe x cu 4 obţinem propoziţia: „$3 \cdot 4 = 9$", care este o propoziţie falsă.

Spunem că ecuaţia 3) nu are soluţii în mulţimea $\{2, 4\}$. Mai spunem că mulţimea soluţiilor ecuaţiei 3) este $\emptyset$ (mulţimea vidă).

Dacă înlocuim mulţimea $\{2, 4\}$ cu mulţimea N, obţinem ecuaţia $3x = 9$, $x \in$ N, care are soluţia sau rădăcina 3.

4) $x + 3 = 4$, unde $x \in$ N.

Dacă înlocuim pe x cu 0 obţinem propoziţia: „$0 + 3 = 4$", care este o propoziţie falsă.

Dacă înlocuim pe x cu 1 obţinem propoziţia: „$1 + 3 = 4$", care este o propoziţie adevărată.

Dacă înlocuim pe x cu 2 obţinem propoziţia: „$2 + 3 = 4$", care este o propoziţie falsă.

Dacă înlocuim pe x cu orice număr natural mai mare decît 1 obţinem propoziţii false.

Soluţia sau rădăcina ecuaţiei 4) este 1. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei 4) este $\{1\}$, adică $S = \{1\}$.

5) $1 + x = 3$, unde $x \in$ N*.

Înlocuind pe x cu 1 obţinem propoziţia: „$1 + 1 = 3$", care este o propoziţie falsă.

Înlocuind pe x cu 2 obţinem propoziţia: „$1 + 2 = 3$", care este o propoziţie adevărată.

Înlocuind pe x cu orice număr natural mai mare decît 2 obţinem propoziţii false.

Soluţia sau rădăcina ecuaţiei 5) este 2.

6) $6 : x = 3$, unde $x \in$ N*.

Înlocuind pe x cu 1 obţinem propoziţia „$6 : 1 = 3$", care este o propoziţie falsă.

Înlocuind pe x cu 2 obţinem propoziţia: „$6 : 2 = 3$", care este o propoziţie adevărată.

Înlocuind pe x cu orice număr natural mai mare decît 2 obţinem propoziţii false.

Soluţia sau rădăcina ecuaţiei 6) este 2.

7) $2(x - 1) = x - 1$, unde $x \in \{1, 2, 3\}$.

Dacă înlocuim pe x cu 1 obţinem propoziţia: „$2(1 - 1) = 1 - 1$", care este o propoziţie adevărată.

Dacă înlocuim pe x cu 2 obţinem propoziţia: „$2(2 - 1) = 2 - 1$", care este o propoziţie falsă.

Dacă înlocuim pe x cu 3 obţinem propoziţia: „$2(3 - 1) = 3 - 1$", care este o propoziţie falsă.

Spunem că mulţimea soluţiilor (sau mulţimea de adevăr) a ecuaţiei 7) este $\{1\}$. Mulţimea soluţiilor poate fi notată cu orice literă, de exemplu cu M. În cazul de faţă, $M = \{1\}$.

8) $7x = 0$, unde $x \in \{1, 2\}$.

Înlocuind pe x cu 1 obţinem propoziţia „$7 \cdot 1 = 0$", care este o propoziţie falsă.

Înlocuind pe x cu 2 obţinem propoziţia „$7 \cdot 2 = 0$", care este o propoziţie falsă.

Ecuaţia 8) nu are soluţie în mulţimea $\{1, 2\}$. $S = \emptyset$.

În ecuaţiile de care ne-am ocupat pînă în prezent, x se mai numeşte şi necunoscută.

Ca necunoscute se pot folosi şi alte litere, ca: y, z, t şi aşa mai departe (în special litere de la sfîrşitul alfabetului).

Alte exemple

Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale următoarele ecuaţii:

1) $x + 1 = 4$;	2) $x + 45 = 246$;
3) $16 - x = 2$;	4) $y - 2 = 6$;
5) $2x = 10$;	6) $2z = 7$;
7) $x : 24 = 36$;	8) $144 : x = 12$, $x \neq 0$.

În rezolvarea acestor ecuații putem folosi, în special, cunoștințele din clasele anterioare în modul în care se va vedea în cele ce urmează. Aceste cunoștințe au fost recapitulate în paragraful anterior sub titlul „Operații cu numere naturale și egalitatea în N".

1) $x + 1 = 4$.

Rezolvare. $x = 4 - 1$, $x = 3$.

Verificare. Punînd în locul lui x pe 3, avem $3 + 1 = 4$. Mulțimea soluțiilor ecuației 1) este $S = \{3\}$.

2) $x + 45 = 246$.

Rezolvare. $x = 246 - 45$, $x = 201$.

Verificare. $201 + 45 = 246$. $S = \{201\}$.

3) $16 - x = 2$.

Rezolvare. $x = 16 - 2$, $x = 14$.

Verificare. $16 - 14 = 2$. $S = \{14\}$.

4) $y - 2 = 6$.

Rezolvare. $y = 2 + 6$, $y = 8$.

Verificare. $8 - 2 = 6$. $S = \{8\}$.

5) $2x = 10$.

Rezolvare. $x = 10 : 2$, $x = 5$.

Verificare. $2 \cdot 5 = 10$. $S = \{5\}$.

6) $2z = 7$.

Rezolvare. Împărțirea nu se poate efectua între numerele naturale 7 și 2. Deci ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor naturale. Mai putem scrie $\{z \mid z \in N, 2z = 7\} = \emptyset$.

7) $x : 24 = 36$.

Rezolvare. $x = 24 \cdot 36$, $x = 864$.

Verificare. $864 : 24 = 36$. $S = \{864\}$.

8) $144 : x = 12$, $x \neq 0$.

Rezolvare. $x = 144 : 12$, $x = 12$.

Verificare. $144 : 12 = 12$. $S = \{12\}$.

Uneori, nu se specifică mulțimea în care trebuie să rezolvăm o ecuație. Aceasta înseamnă că rezolvăm ecuația în „cea mai cuprinzătoare" mulțime de numere cunoscută, la un moment dat, de elevi.

Exemple

1) Să se rezolve ecuația $2x = 9$.

Rezolvare. Împărțirea nu se poate efectua între numerele naturale 9 și 2.

Ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

2) $2x + 5 = 9$.

Rezolvare. $2x = 9 - 5$, $2x = 4$, $x = 4 : 2$, $x = 2$.

Verificare. $2 \cdot 2 + 5 = 9$. Ecuația are soluție în mulțimea numerelor naturale.

3) $2x - 4 = x + 2$.

Scădem din ambii membri ai ecuației pe x și obținem $x - 4 = 2$ de unde $x = 6$.

Ecuația are soluția sau rădăcina 6.

EXERCIȚII

Să se rezolve ecuațiile:

a) $x + 2 = 5$, $x \in N$; b) $x + 17 = 240$, $x \in N$; c) $x + 5 = 5$, $x \in N$; d) $x - 2 = 4$, $x \in N$; e) $x - 4 = 0$, $x \in N$; f) $x - 24 = 750$, $x \in N$; g) $4 - x = 2$, $x \in N$; h) $90 - x = 24$, $x \in N$; i) $2x = 8$, $x \in N$; j) $15x = 2\,250$, $x \in N$; k) $2x = 0$, $x \in N$; l) $4x = 0$, $x \in N^*$; m) $x + 6 = 6$, $x \in N^*$; n) $x + 2 = 7$, $x \in \{5; 9\}$; o) $x + 4 = 4$, $x \in \{1; 2\}$; p) $12 = 4x$, $x \in N$; r) $x + x = 6$, $x \in N$.

INECUAȚII

Să considerăm următoarele propoziții cu o variabilă:

1) $x + 2 < 4$, unde $x \in \{0, 1, 3\}$; 2) $x + 1 \leqslant 5$, unde $x \in \{1, 4, 5, 6\}$; 3) $2x < 6$, unde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; 4) $3x \leqslant 5$, unde $x \in \{1, 2, 3\}$; 5) $x + 2 \leqslant 4$, unde $x \in N$; 6) $2x > 6$, unde $x \in N$; 7) $2x + 3 \leqslant x + 4$, unde $x \in N^*$; 8) $2x + 1 \geqslant 4$, unde $x \in N$.

Propozițiile cu o variabilă de mai înainte se mai numesc și *inecuații*. Într-o inecuație există unul din simbolurile: $<, >, \leqslant, \geqslant$.

A rezolva o inecuație înseamnă a găsi mulțimea soluțiilor ei sau mulțimea ei de adevăr.

Vom rezolva, pe rînd, fiecare inecuație.

1) $x + 2 < 4$, unde $x \in \{0, 1, 3\}$.

Dacă $x = 0$ obținem $2 < 4$, adică o propoziție adevărată;

Dacă $x = 1$ obținem $3 < 4$, adică o propoziție adevărată;

Dacă $x = 3$ obținem $5 < 4$, adică o propoziție falsă.

Vedem că mulțimea soluțiilor sau mulțimea de adevăr a inecuației 1) este mulțimea $\{0, 1\}$.

Aceeaşi inecuaţie poate fi rezolvată folosind cunoştinţele prezentate în paragraful anterior sub titlul „Operaţii cu numere naturale şi inegalitatea în N".

Anume, de la inegalitatea $x + 2 < 4$ se poate trece la inegalitatea $x < 2$, prin scăderea lui 2 din ambii membri ai primei inegalităţi. Acum, dacă mai ţinem seama de faptul că $x \in \{0, 1, 3\}$, din $x < 2$ rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei 1) este $\{0, 1\}$.

2) $x + 1 \leqslant 5$, unde $x \in \{1, 4, 5, 6\}$.

Obţinem $x \leqslant 4$, unde $x \in \{1, 4, 5, 6\}$, prin scăderea lui 1 din ambii membri ai inegalităţii $x + 1 \leqslant 5$. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei 2) este $\{1, 4\}$.

3) $2x < 6$, unde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Obţinem $x < 3$, unde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, prin împărţirea cu 2 a ambilor membri ai inegalităţii $2x < 6$. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei 3) este $\{0, 1, 2\}$.

4) $3x \leqslant 5$, unde $x \in \{1, 2, 3\}$.

Împărţirea între 5 şi 3 nu se poate efectua. Dar:

$3 \cdot 1 \leqslant 5$, adică $3 \leqslant 5$, este o propoziţie adevărată;

$3 \cdot 2 \leqslant 5$, adică $6 \leqslant 5$, este o propoziţie falsă;

$3 \cdot 3 \leqslant 5$, adică $9 \leqslant 5$, este o propoziţie falsă.

Deci mulţimea soluţiilor inecuaţiei 4) este $\{1\}$.

5) $x + 2 \leqslant 4$, unde $x \in$ N.

Obţinem $x \leqslant 2$, unde $x \in$ N, prin scăderea lui 2 din ambii membri ai inegalităţii $x + 2 \leqslant 4$. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei 5) este $\{0, 1, 2\}$.

6) $2x > 6$, unde $x \in$ N.

Obţinem $x > 3$, unde $x \in$ N, prin împărţirea cu 2 a ambilor membri ai inegalităţii $2x > 6$. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei 6) este N $- \{0, 1, 2, 3\}$, adică mulţimea numerelor naturale diferite de 0, 1, 2 şi 3.

7) $2x + 3 \leqslant x + 4$, unde $x \in$ N*.

Obţinem, mai întîi, $2x \leqslant x + 1$, unde $x \in$ N*, prin scăderea lui 3 din ambii membri ai inegalităţii $2x + 3 \leqslant x + 4$. Obţinem, apoi, $x \leqslant 1$ unde $x \in$ N*. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei 7) este $\{1\}$.

8) $2x + 1 \geqslant 4$, unde $x \in$ N.

Obţinem $2x \geqslant 3$, unde $x \in$ N, prin scăderea lui 1 din ambii membri ai inegalităţii $2x + 1 \geqslant 4$. Împărţirea între 3 şi 2 nu se poate efectua. Dar:

$2 \cdot 0 \geqslant 3$, adică $0 \geqslant 3$ este o propoziţie falsă;

$2 \cdot 1 \geqslant 3$, adică $2 \geqslant 3$ este o propoziţie falsă;

$2 \cdot 2 \geqslant 3$, adică $4 \geqslant 3$ este o propoziţie adevărată;

$2 \cdot 3 \geqslant 3$, adică $6 \geqslant 3$ este o propoziţie adevărată.

Pentru orice număr natural x mai mare sau egal cu 2 obţinem propoziţii adevărate $2x \geqslant 3$. În adevăr, dacă $x \geqslant 2$, obţinem $2x \geqslant 4$, prin înmulţirea cu 2 a ambilor membri ai inegalităţii $x \geqslant 2$. Pentru că $4 \geqslant 3$, obţinem $2x \geqslant 3$ pentru orice număr natural x mai mare sau egal cu 2. Deci mulţimea soluţiilor inecuaţiei 8) este N $- \{0, 1\}$, adică mulţimea numerelor naturale diferite de 0 şi 1.

De cele mai multe ori, nu se specifică mulţimea în care trebuie să rezolvăm o inecuaţie. Aceasta înseamnă că rezolvăm inecuaţia în „cea mai cuprinzătoare" mulţime de numere cunoscute, la un moment dat, de elevi. Putem lua mulţimea numerelor naturale drept această mulţime.

EXERCIŢII

Să se rezolve inecuaţiile următoare:

1) $2x \leqslant 8$, $x \in$ N; 2) $x + 2 < 5$, $x \in$ N.

Observaţie

Să notăm cu M mulţimea soluţiilor numere naturale ale inecuaţiei $3x < 22$ şi cu P mulţimea soluţiilor numere naturale ale inecuaţiei $3x < 16$.

Avem: $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Fie:

$A = M \cup P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Fiecare element al mulţimii A este o soluţie a inecuaţiei $3x < 22$ *sau* a inecuaţiei $3x < 16$.

Altfel spus, fiecare element al mulţimii A este o soluţie a cel puţin uneia dintre inecuaţiile: $3x < 22$ şi $3x < 16$.

Fie: $B = M \cap P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Fiecare element al mulţimii B este o soluţie a inecuaţiei $3x < 22$ *şi* a inecuaţiei $3x < 16$.

REZOLVAREA UNOR PROBLEME CU AJUTORUL ECUAŢIILOR

Multe dintre problemele care urmează, ştiţi să le rezolvaţi fără să folosiţi ecuaţiile. Acum le vom rezolva folosind ecuaţiile.

1) Să se afle un număr ştiind că adunîndu-l cu 2 obţinem 436.

Rezolvare. Notăm cu x numărul pe care-l căutăm.

În problemă se spune că dacă-l adunăm pe x cu 2 obţinem 436. Scriem ecuaţia: $x + 2 = 436$ care are soluţia 434.

Verificare: $434 + 2 = 436$.

2) Într-un siloz erau 50 tone de cereale. După ce s-a scos din siloz o cantitate de cereale, au mai rămas 24 tone. Cîte tone s-au scos din siloz?

Rezolvare. Notăm cu x numărul de tone de cereale ce s-au scos din siloz.

Scriem ecuaţia: $50 - x = 24$ cu soluţia 26.

Deci s-au scos din siloz 26 tone.

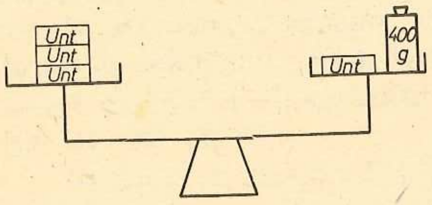


Fig. 7

3) Pe un cîntar cu braţe egale (vezi figura 7) sînt aşezate pe un taler 3 pachete de unt şi pe celălalt taler un pachet de unt şi un etalon de masă de 400 g. Cîntarul se află în echilibru. Cît cîntăreşte un pachet de unt?

Vom judeca în felul următor:

Dacă dăm jos cîte un pachet de unt de pe fiecare taler, cîntarul rămîne în echilibru. În stînga vor rămîne 2 pachete de unt, iar în dreapta 400 g. Deci un pachet de unt cîntăreşte 200 g.

Să vedem cum rezolvăm aceeaşi problemă folosind ecuaţiile.

Întrucît nu ştim cît cîntăreşte un pachet de unt, scriem că un pachet de unt cîntăreşte x grame.

Citim cu atenţie textul problemei şi „îl traducem în limbajul ecuaţiilor". Trei pachete de unt cîntăresc tot atît cît un pachet de unt şi încă 400 g. Scriem ecuaţia:

$$3x = x + 400.$$

Scădem din ambii membri ai ecuaţiei pe x şi avem:

$$2x = 400, \text{ de unde } x = 400 : 2, \quad x = 200.$$

Deci un pachet de unt cîntăreşte 200 g.

4) Să se afle un număr ştiind că dacă-l înmulţim cu 3 obţinem acelaşi rezultat ca atunci cînd îl adunăm cu 248.

Notăm cu x acest număr, pentru moment necunoscut.

Avem: $3x = x + 248$. Scădem din ambii membri pe x şi obţinem:

$$2x = 248, \text{ de unde } x = 248 : 2, \quad x = 124.$$

Numărul:

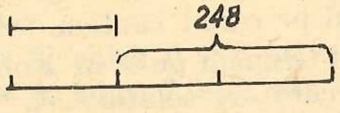


Fig. 8

Verificare: $3 \cdot 124 = 124 + 248$.

Să rezolvăm aceeaşi problemă prin „metoda figurativă" (fig. 8). O parte este egală cu $248 : 2 = 124$.

5) Să considerăm următoarea schemă (fig. 9):

Să scriem urmărind această schemă (urmăriţi săgeţile!) ecuaţia ce îi corespunde şi apoi să rezolvăm această ecuaţie.

Ecuaţia corespunzătoare schemei este următoarea: $(x + 4) - 3 = 6$.

Rezolvăm ecuaţia de mai sus:

$$x + 4 = 6 + 3,$$
$$x + 4 = 9,$$
$$x = 9 - 4,$$
$$x = 5.$$

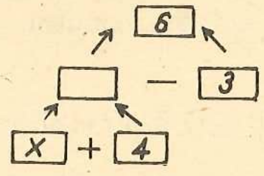


Fig. 9

6) Într-o tabără erau de două ori mai multe fete decît băieţi. Au plecat, apoi, din tabără 20 fete şi au venit 18 băieţi şi astfel numărul băieţilor a devenit egal cu numărul fetelor. Cîţi băieţi şi cîte fete erau la început în tabără?

Rezolvare:	*Fete*	*Băieţi*
La început erau în tabără:	$2x$	x
Apoi:	$2x - 20$	$x + 18$

Întrucît, acum, numărul fetelor este egal cu numărul băieţilor putem scrie:

$$2x - 20 = x + 18.$$

Scriem, mai întîi, că $2x = x + 18 + 20$ sau $2x = x + 38$. Scădem, apoi, din ambii membri ai ultimei ecuaţii pe x şi obţinem

$$x = 38.$$

Erau deci în tabără 38 de băieţi şi 76 de fete.

Verificare:

La început erau în tabără 38 de băieţi şi 76 de fete, adică de două ori mai multe fete decît băieţi.

Plecînd 20 de fete rămîn $76 - 20 = 56$ (fete). Venind 18 băieţi sînt acum $38 + 18 = 56$ (băieţi). Deci numărul băieţilor este egal cu numărul fetelor.

7) Un automobil a parcurs distanţa dintre două oraşe în 4 ore. Dacă viteza automobilului ar fi fost cu 20 km pe oră mai mare, atunci ar fi parcurs aceeaşi distanţă în 3 ore. Aflaţi viteza automobilului.

Rezolvare:

Ştim din clasele I—IV că distanţa = viteza × timpul, $d = v \cdot t$.

Să notăm viteza automobilului cu x km pe oră.

Distanţa parcursă (în km) va fi egală cu $4 \cdot x$.

Dacă viteza ar fi fost cu 20 km pe oră mai mare, aceeași distanță ar fi fost parcursă în 3 ore.

Deci aceeași distanță (în km) va fi egală cu $3(x + 20)$.

Putem scrie în concluzie $4x = 3(x + 20)$.

Rezolvăm ecuația. Avem în continuare:

$$4x = 3x + 60.$$

Scădem din ambii membri pe $3x$ și obținem

$$x = 60.$$

Deci viteza automobilului este de 60 km pe oră.

Distanța între orașe este de $4 \cdot 60 = 240$ (km).

PROBLEME

1. Să se afle un număr, știind că adunîndu-l cu 4 obținem 246.
2. Ce număr trebuie să scădem din 148 pentru a obține numărul 26?
3. Să se afle un număr, știind că înmulțindu-l cu 4 obținem același rezultat ca atunci cînd îl adunăm cu 120.
4. Într-o tabără sînt de trei ori mai mulți băieți decît fete. Dacă în tabără ar mai veni 98 fete, numărul băieților ar fi egal cu numărul fetelor. Cîți băieți și cîte fete sînt în tabără?

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Efectuați:

   a) $\{1; 2; 3\} \cup \{1; 5\}$; b) $\{1; 2; 3\} \cup \emptyset$;
   c) $\{1; 2; 5\} \cap \{1; 2; 8\}$; d) $\{1; 2\} \cap \{3, 4\}$;
   e) $\{1; 2\} \cap \emptyset$; f) $\{1; 2\} - \{1; 6\}$;
   g) $\{1; 2\} - \{1; 2; 3\}$; h) $\emptyset - \{1\}$; i) $\{2\} - \emptyset$.

2. Calculați:

   a) $2a + 3a$; b) $2a + 4a + a$; c) $5a - a$; d) $x - x$;
   e) $2x + 3x + 4x - x$; f) $2(x + y) - 2y$; g) $2x + 3x + 1$;
   h) $4(x + 1) - 2$; i) $3x + 1 + 4x$.

3. Știind că $a = 2$ și $b + c = 6$, să se calculeze $ab + ac$.
4. Știind că $ab + ac = 20$ și că $b + c = 2$, să se afle a.
5. Știind că $ab + ac = 10$ și că $a = 2$, să se calculeze $b + c$.
6. Se consideră trei numere naturale a, b, c. Știind că $a = 2$ și $b + c = 36$, să se calculeze:

   1) $a + b + c$, 2) $2a + b + c$, 3) $3a + 3b + 3c$, 4) $2a + 3b + 3c$,
   5) $a + 2 \cdot (b + c)$, 6) $a \cdot b + a \cdot c$, 7) $(b + c) : a$.

7. Să se afle ultima cifră a următoarelor numere: $2a$, $3a$, $5a$, $10a$, știind că a este un număr natural a cărui ultimă cifră este 4.
8. Se consideră trei numere naturale a, b, c. Se știe că $a \cdot b + a \cdot c = 246$. Să se calculeze $10a \cdot (b + c)$.
9. Care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

   a) $2\,145 - 147 = 1\,998$? b) $6 + 4 \cdot 2 = 14$? c) $4 > 3$?
   d) $24 + 1\,324 + 484 > 1\,800$? e) $10\,714 > 24 + 102 \cdot 105$?
   f) $10^2 > 4^3$? g) Mulțimea $\{x \mid x \in \mathrm{N},\ x \leqslant 245\}$ are 245 elemente?
   h) Mulțimea $\{x \mid x \in \mathrm{N}^*,\ x < 246\}$ are 245 elemente?

10. Să se rezolve ecuațiile:

    a) $x + 2 = 8$, $x \in \mathrm{N}$; b) $114 + x = 512$, $x \in \mathrm{N}$; c) $x - 2 = 6$, $x \in \mathrm{N}$;
    d) $x - 23 = 345$, $x \in \mathrm{N}$; e) $6 - x = 2$, $x \in \mathrm{N}$;
    f) $241 - x = 126$, $x \in \mathrm{N}$; g) $5x = 10$, $x \in \mathrm{N}$; h) $45x = 135$, $x \in \mathrm{N}$; i) $7x = 0$, $x \in \mathrm{N}$; j) $9x = 3$, $x \in \mathrm{N}$; k) $8x = 0$, $x \in \mathrm{N}^*$.

11. Să se determine mulțimea soluțiilor fiecăreia din următoarele ecuații:

    a) $4x + 1 = 9$, $x \in \mathrm{N}$; b) $13x + 1 = 170$, $x \in \mathrm{N}$; c) $2y - 1 = 5$, $y \in \mathrm{N}$;
    d) $18y - 1 = 323$, $y \in \mathrm{N}$; e) $7 - 2x = 1$, $x \in \mathrm{N}$;
    f) $451 - 12y = 307$, $y \in \mathrm{N}$; g) $x + 4x = 75$, $x \in \mathrm{N}$;
    h) $x + x + 11 = 15$, $x \in \mathrm{N}$; i) $3x = x + 124$, $x \in \mathrm{N}$;
    j) $2(x + 1) = 36$, $x \in \mathrm{N}$; k) $24 = 2x$, $x \in \mathrm{N}$; l) $4x = 5$, $x \in \mathrm{N}$;
    m) $320 = 4(x - 2)$, $x \in \mathrm{N}$; n) $x : 12 = 144$, $x \in \mathrm{N}$;
    o) $625 : x = 25$, $x \in N^*$; p) $x + x + 1 + x + 2 = 225$, $x \in \mathrm{N}$;
    r) $2x - 12 = x + 12$, $x \in \mathrm{N}$.

12. Să se rezolve următoarele ecuații în mulțimea N:

    a) $4(x + 1) = 16$; b) $3x + 1 = 2x + 3$.

13. Să se rezolve inecuațiile:

    a) $3x < 9$, $x \in \mathrm{N}$; b) $x + 1 < 5$, $x \in \mathrm{N}^*$; c) $2x \leqslant 10$, $x \in \mathrm{N}$.

14. Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziții:

    a) $\{x \mid x \in \mathrm{N},\ 24x < 48\} = \{0; 1\}$;
    b) $\{x \mid x \in \mathrm{N}^*,\ 4x \leqslant 16\} = \{1; 2; 3\}$.

15. Cîte elemente are mulțimea $\{x \mid x \in \mathrm{N},\ 2x \leqslant 1\,756\}$?
16. Cîte elemente are mulțimea $\{x \mid x \in \mathrm{N},\ 4x < 248\}$?

17. Suma a două numere este 420, iar unul dintre ele este de trei ori mai mare decît celălalt. Să se afle numerele.

18. Suma a două numere este 237. Să se afle numerele știind că unul din ele este cu 47 mai mare decît celălalt.

19. O carte conține 324 pagini. După ce au fost citite mai multe pagini, au mai rămas de citit 26 pagini. Să se afle cîte pagini au fost citite.

20. Diferența între două numere naturale este 24, iar suma lor este 136. Să se afle numerele.

21. Petre cîntărește cu 4 kg mai mult decît Ion. Dacă Petre are 58 kg, cîte kilograme are Ion?

22. Un număr se adună cu 245. Rezultatul se înmulțește cu 24 și se obține 5 928. Să se afle numărul.

23. Suma a trei numere naturale consecutive este 75. Să se afle numerele. Indicație: cele trei numere naturale consecutive pe care trebuie să le aflăm sînt de forma:
x; $x+1$; $x+2$, unde $x \in \mathbf{N}$.

24[d]. Suma unor numere naturale consecutive este 30. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

25. Ionel are de două ori mai mulți bani decît Petre. Dacă Ionel ar da lui Petre 12 lei, atunci ei ar avea aceeași sumă. Cîți lei are Ionel și cîți Petre?

26. Să se alcătuiască ecuația ce corespunde schemei din figura 10 și apoi să se rezolve această ecuație:

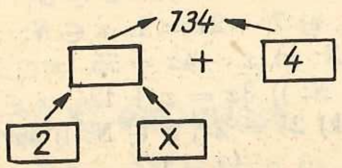


Fig. 10

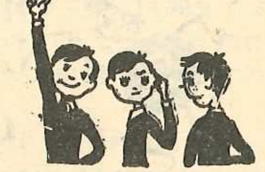
27. Un muncitor face cîte 24 piese pe zi, iar un altul cu 4 piese mai mult pe zi, dar a lucrat cu 3 zile mai puțin decît primul. Să se afle cîte zile a muncit fiecare, știind că au lucrat același număr de piese.

28. O fetiță are acum 8 ani, iar mama sa 38 ani. Peste cîți ani mama va avea o vîrstă de două ori mai mare decît fetița?

29. Un automobil a parcurs distanța dintre două orașe în 4 ore. Dacă viteza automobilului ar fi fost cu 25 km pe oră mai mică, atunci ar fi parcurs aceeași distanță în 6 ore. Aflați viteza automobilului și distanța dintre orașe.

30[d]. Un băiat afirmă că are tot atîtea surori, cît și frați. O soră a băiatului afirmă că are de două ori mai mulți frați decît surori. Cîți băieți și cîte fete sînt în acea familie?

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ



Lucrarea I

Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$; $C = \{2, 3, 4\}$; $D = \{3, 4\}$.

I. Care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

a) $1 \in A$? b) $2 \in B$? c) $4 \in C$? d) $3 \notin A$? e) $2 \in C$? f) $D \subset C$? g) $A \supseteq C$? h) $A = B$?

II. Să se efectueze: a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $B \cap C$; d) $A \cap B$; e) $C - B$; f) $A - D$; g) $C - D$.

Lucrarea II

1. Să se rezolve următoarele ecuații:
a) $x + 3 = 5$, $x \in \mathbf{N}$; b) $2 + x = 7$, $x \in \mathbf{N}$; c) $x - 2 = 4$, $x \in \mathbf{N}$; d) $9 - x = 8$, $x \in \mathbf{N}$; e) $2x = 4$, $x \in \mathbf{N}$.
2. Să se rezolve următoarele ecuații în mulțimea N:
a) $x + 12 = 85$; b) $x - 41 = 785$; c) $116 - x = 24$; d) $2x = 812$.
3. Ce număr trebuie adunat cu 36 pentru a obține numărul 100?
4. Ce număr trebuie înmulțit cu 2 pentru a obține numărul 28?
5. Să se rezolve următoarele inecuații:
a) $x + 1 < 4$, $x \in \mathbf{N}$; b) $2x < 6$, $x \in \mathbf{N}$.

EXERCIȚII PENTRU REPETAREA UNOR CUNOȘTINȚE DIN CAPITOLELE ANTERIOARE

Să se efectueze:

a) $1 + 247 + 23$; b) $24 + 1\,240 + 10\,594 + 999$; c) $4\,060 - 3\,625$;
d) $71\,000 - 2\,990$; e) $10 \cdot 48$; f) $240 \cdot 100$; g) $2 \cdot 475$;
h) $78 \cdot 89$; i) $206 \cdot 405$; j) $124 \cdot 2\,400$; k) $1\,005 \cdot 2\,004$;
l) $260 : 10$; m) $23\,000 : 100$; n) $3\,750 : 2$; o) $1\,680 : 12$;
p) $324\,000 : 180$; r) $209\,100 : 102$; s) $20\,080\,080 : 10\,020$;
t) $620\,600 : 725$.

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

1. CHESTIUNI PREGĂTITOARE

Să ne reamintim unele lucruri învăţate mai înainte.

(1) Dacă n şi p sînt numere naturale, atunci $n + p$ este număr natural.

(2) Putem scrie: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (3 + 7)$.

În general: $m \cdot n + m \cdot p = m \cdot (n + p)$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare).

(3) Putem scrie: $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$.

În general: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ (asociativitatea înmulţirii).

(4) Cifrele 0, 2, 4, 6, 8 se numesc cifre pare.

Cifrele 1, 3, 5, 7, 9 se numesc cifre impare.

(5) Notaţia $5 \neq 0$ înseamnă şi se citeşte: „5 este diferit de 0".

Notaţia $a \neq 0$ înseamnă şi se citeşte: „a este diferit de 0".

(6) Fie numărul 375. Putem scrie:

$$375 = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5.$$

În general, numărul de trei cifre $\overline{abc}$, în care $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, iar $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, se scrie în baza 10 astfel $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

Numărul de patru cifre $\overline{abcd}$ se scrie în baza 10 astfel: $\overline{abcd} = a \cdot 1\,000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$, unde $b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, iar $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2. DEFINIŢIA DIVIZIBILITĂŢII. DIVIZOR. MULTIPLU

Fie numerele naturale 8 şi 2. Există oare un număr natural astfel încît înmulţindu-l cu 2 să obţinem 8? Da. Acest număr este 4. Într-adevăr: $8 = 2 \cdot 4$. Spunem că 8 este divizibil cu 2. Analog, 10 este divizibil cu 2, deoarece există un număr natural, şi anume 5, pe care, dacă-l înmulţim cu 2, obţinem numărul 10.

Definiţie

Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b dacă există un număr natural c astfel încît $a = b \cdot c$.

Se mai spune: „a se divide cu b", „b divide pe a", „b este divizor al lui a", „a este multiplu al lui b".

De exemplu: 6 este divizibil cu 2, pentru că există numărul natural 3, astfel încît $6 = 2 \cdot 3$. Spunem: „6 se divide cu 2" (sau 6 se divide prin 2), „2 divide pe 6", „2 este divizor al lui 6", „6 este multiplu al lui 2". Faptul că „2 divide pe 6" se scrie prescurtat astfel: $2 \mid 6$.

Dacă a şi b sînt numere naturale, $b \mid a$ se citeşte „b divide pe a".

Folosind această notaţie putem exprima definiţia de mai înainte şi astfel:

Fie a şi b două numere naturale. Spunem că $b \mid a$ dacă există un număr natural c astfel încît $a = b \cdot c$.

7 nu este divizibil cu 2, pentru că nu există nici un număr natural astfel încît înmulţindu-l cu 2 să obţinem pe 7. Scriem $2 \nmid 7$; se citeşte „2 nu divide pe 7".

Am văzut că 2 este *divizor* al lui 6, iar 6 este *multiplu* al lui 2.

14 este *multiplu* al lui 7, iar 10 *nu este multiplu* al lui 4.

Să considerăm egalitatea: $y = 2 \cdot x$, în care x este un număr natural dat, iar y este obţinut prin această egalitate.

În baza definiţiei, putem spune: „y este divizibil cu 2" sau: „y este divizibil cu x" sau: „y este multiplu al lui x" sau: „y este multiplu al lui 2".

Observaţii

1. Să considerăm următoarea propoziţie:

„Orice număr natural par este divizibil cu 4".

După cum foarte uşor se poate vedea, există numere naturale pare care sînt divizibile cu 4 şi există numere naturale pare care nu sînt divizibile cu 4.

8 este divizibil cu 4, dar 6 nu este divizibil cu 4.

Deci nu **orice** număr natural par este divizibil cu 4. Propoziţia este deci falsă. Spunem că am arătat că această propoziţie este falsă dînd un contraexemplu: 6 nu este divizibil cu 4.

2. Să considerăm următoarea propoziţie:

„Orice număr natural de forma $6n - 1$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, se divide numai cu 1 şi cu el însuşi".

Să cercetăm dacă această propoziţie este adevărată sau falsă.

Dacă $n = 1$ avem $6 \cdot 1 - 1 = 5$, iar 5 se divide numai cu 1 şi cu 5. Cu alte cuvinte, 5 se divide numai cu 1 şi cu el însuşi.

Dacă $n = 2$ avem $6 \cdot 2 - 1 = 11$, iar 11 se divide numai cu 1 şi cu 11.

Dacă $n = 3$ avem $6 \cdot 3 - 1 = 17$, iar 17 se divide numai cu 1 şi cu 17.

Dacă $n = 4$ avem $6 \cdot 4 - 1 = 23$, iar 23 se divide numai cu 1 şi cu 23.

Dacă $n = 5$ avem $6 \cdot 5 - 1 = 29$, iar 29 se divide numai cu 1 și cu 29.

Dacă $n = 6$ avem $6 \cdot 6 - 1 = 35$, iar 35 se divide cu 1, cu 35, cu 5 și cu 7.

Constatăm că 35 se divide nu numai cu 1 și cu el însuși. 35 se divide și cu 5 și cu 7. Am găsit deci numărul 35 care este un număr de forma $6n - 1$, unde $n \in N^*$, și care nu se divide numai cu 1 și cu el însuși. Deci nu orice număr de forma $6n - 1$, unde $n \in N^*$, se divide numai cu 1 și cu el însuși. Spunem că propoziția „Orice număr natural de forma $6n - 1$, unde $n \in N^*$, se divide numai cu 1 și cu el însuși" este o propoziție falsă.

Dacă ne-am fi grăbit, am fi afirmat, după primele cinci înlocuiri că propoziția considerată este adevărată. Și am fi greșit.

EXERCIȚII

1. Care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:
a) 18 este divizibil cu 9? b) 16 nu este divizibil cu 4? c) 20 este multiplu al lui 4? d) 17 este divizibil cu 17? e) 6 divide pe 12? f) $13 \mid 170$? g) $204 \mid 41\,616$? h) $3 \nmid 245\,688$.

2. Să se afle valoarea logică a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
a) Orice număr natural care este divizibil cu 3 este divizibil și cu 9;
b) Dacă ultima cifră a unui număr natural este 4, atunci numărul se divide cu 4.

3. PROPRIETĂȚI ALE DIVIZIBILITĂȚII NUMERELOR NATURALE

I. Numărul 2 este divizibil cu 1, pentru că există un număr natural și anume 2, astfel încît $2 = 1 \cdot 2$.

0 este divizibil cu 1, pentru că există un număr natural, și anume 0, astfel încît $0 = 1 \cdot 0$.

Analog, 3 este divizibil cu 1, 4 este divizibil cu 1 ș.a.m.d.

Ne punem întrebarea: Orice număr natural are proprietatea de a fi divizibil cu 1?

Să considerăm propoziția:

(1) Orice număr natural este divizibil cu 1.

Vom dovedi că această propoziție este adevărată.

Fie un număr natural a. Evident există $a \in N$ astfel încît $a = 1 \cdot a$.

Deci a este divizibil cu 1. Această proprietate mai poate fi enunțată și astfel:

(1′) $1 \mid a$ oricare ar fi $a \in N$.

II. Numărul 0 este divizibil cu 3, pentru că există un număr natural, și anume 0, astfel încît $0 = 3 \cdot 0$.

Numărul 0 este divizibil cu 5, pentru că există un număr natural, și anume 0, astfel încît $0 = 5 \cdot 0$ ș.a.m.d.

Să considerăm propoziția:

(2) 0 este divizibil cu orice număr natural.

Vom dovedi că această propoziție este adevărată.

Fie un număr natural a.

Există un număr natural, și anume 0, astfel încît $0 = a \cdot 0$. Deci 0 este divizibil cu a.

Această proprietate mai poate fi enunțată și astfel:

(2′) $a \mid 0$ oricare ar fi $a \in N$.

III. Numărul 4 este divizibil cu 4, pentru că există un număr natural, și anume 1, astfel încît $4 = 4 \cdot 1$. De asemenea, 5 este divizibil cu 5, pentru că există un număr natural, și anume 1, astfel încît $5 = 5 \cdot 1$.

Să considerăm propoziția:

(3) Orice număr natural se divide cu el însuși.

Să arătăm, altfel spus, să demonstrăm, că această propoziție este adevărată.

Într-adevăr, fie a un număr natural. Există un număr natural, și anume 1, astfel încît $a = a \cdot 1$. Deci a este divizibil cu a.

Această proprietate se mai poate enunța și astfel:

(3′) $a \mid a$, oricare ar fi $a \in N$.

IV. Să considerăm propoziția:

(4) Fie a și b două numere naturale. Dacă a este divizibil cu b și b este divizibil cu a atunci $a = b$.

Să demonstrăm că această propoziție este adevărată. Putem scrie:

$$a = b \cdot c \text{ și } b = a \cdot d.$$

Considerăm cazul $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Înmulțind membru cu membru egalitățile de mai sus avem

$$a \cdot b = b \cdot a \cdot c \cdot d.$$

Împărţim în ambii membri cu ab şi avem

$$1 = c \cdot d.$$

Dacă produsul a două numere naturale este egal cu 1, atunci fiecare factor este egal cu 1. Deci $c = 1$ şi $d = 1$.

În concluzie:

$$a = b \cdot 1 \quad \text{adică} \quad a = b.$$

Dacă $a = 0$ sau $b = 0$ propoziţia este adevărată.

Această proprietate mai poate fi enunţată şi astfel:

(4') Dacă $a \mid b$ şi $b \mid a$, atunci $a = b$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$.

V. Numărul 6 este divizibil cu 2, iar 12 este divizibil cu 6. Atunci şi 12 este divizibil cu 2.

8 este divizibil cu 4, iar 4 este divizibil cu 2. Atunci şi 8 este divizibil cu 2.

Să considerăm propoziţia:

(5) Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă b se divide cu a, iar c se divide cu b atunci c se divide cu a.

Să arătăm că această propoziţie este adevărată.

Dacă b se divide cu a înseamnă, potrivit definiţiei, că există un număr natural m astfel încît $b = a \cdot m$. Dacă c se divide cu b înseamnă, tot pe baza definiţiei, că există un număr natural n astfel încît $c = b \cdot n$. Atunci putem scrie $c = b \cdot n = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$, adică c se divide cu a. Am aplicat asociativitatea înmulţirii. Deci propoziţia este adevărată.

Propoziţia (5) mai poate fi enunţată şi astfel:

(5') Dacă $a \mid b$ şi $b \mid c$, atunci $a \mid c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Exemplu

$2 \mid 6$ şi $6 \mid 12$. Atunci $2 \mid 12$.

Observăm că 12 se divide cu toţi divizorii lui 6 adică cu 1; 2; 3 şi 6.

Dacă un număr natural se divide cu un număr natural, atunci primul se divide cu toţi divizorii celui de-al doilea.

VI. *Se consideră numerele 4 şi 6. Fiecare din ele se divide cu 2. După cum se vede şi suma lor, adică* $4 + 6$, *se divide cu 2.*

Alt exemplu: 8 se divide cu 2; 4 se divide cu 2. Observăm că şi suma $8 + 4$ *se divide cu 2.*

Alt exemplu: 12 se divide cu 3; 15 se divide cu 3. Suma numerelor 12 şi 15 este 27, iar 27 este, de asemenea, un număr divizibil cu 3.

Fie propoziţia:

(6) Dacă fiecare termen al unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, atunci şi suma lor se divide cu acel număr natural.

Această propoziţie se mai poate enunţa şi astfel:

Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m şi dacă un număr natural b se divide cu acelaşi număr natural m, atunci şi suma lor $a + b$ se divide cu m.

Să demonstrăm

În cele ce urmează, vom demonstra că această propoziţie este adevărată.

Dacă a se divide cu m, atunci există un număr natural n, astfel încît $a = m \cdot n$.

Dacă b se divide cu m, atunci există un număr natural p, astfel încît $b = m \cdot p$. Rezultă că putem scrie $a + b = mn + mp = m(n + p)$. (Aici am folosit distributivitatea înmulţirii faţă de adunare.)

Dacă n şi p sînt numere naturale, atunci şi $n + p$ este număr natural; $a + b$ se divide deci cu m.

Cu aceasta, am dovedit că propoziţia de mai sus este o propoziţie adevărată.

Din faptul că fiecare termen al unei sume de numere naturale se divide cu un număr natural, am arătat că rezultă că şi suma se divide cu acel număr natural. Spunem că am făcut o demonstraţie. Propoziţiile matematice al căror adevăr se demonstrează se numesc teoreme. Propoziţiile (1); (2); (3); (4); (5); (6) sînt teoreme. Nu toate teoremele din acest manual vor fi demonstrate.

Propoziţia (6) mai poate fi enunţată şi astfel:

(6') Dacă $m \mid a$ şi $m \mid b$, atunci $m \mid a + b$ oricare ar fi $a, b, m \in \mathbb{N}$.

VII. *Să considerăm suma* $4 + 3$. *După cum se vede, 4 se divide cu 2, dar 3 nu se divide cu 2. Nici* $4 + 3$, *adică 7, nu se divide cu 2.*

Analog, dacă vom considera $6 + 4$. *După cum se vede, 6 se divide cu 3, dar 4 nu se divide cu 3. Nici* $6 + 4$, *adică 10, nu se divide cu 3.*

6*

Să considerăm propoziția:

(7) Dacă unul din termenii unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, iar celălalt termen nu se divide cu acel număr natural, atunci suma nu se divide cu acel număr natural.

Să enunțăm această propoziție și astfel:

Fie numerele naturale a și b. Dacă numărul a se divide cu numărul natural m și dacă numărul b nu se divide cu m, atunci suma lor $a+b$ nu se divide cu m.

Să arătăm că această propoziție este adevărată.

Dacă a se divide cu m, atunci există un număr natural n astfel încît $a = m \cdot n$.

Trebuie să demonstrăm că suma $a + b$ nu se divide cu m. Să presupunem, din contra, că $a + b$ se divide cu m. În acest caz, există un număr natural p astfel încît $a + b = m \cdot p$. Putem deci scrie: $mp = mn + b$, de unde $b = mp - mn = m(p - n)$, adică b se divide cu m. Dar noi știm că b nu se divide cu m.

Deci presupunerea noastră că $a + b$ se divide cu m ne-a condus la o concluzie absurdă. Rămîne să fie adevărat că $a + b$ nu se divide cu m. Ceea ce trebuia să demonstrăm (prescurtat: c.c.t.d.). Și această propoziție este o teoremă.

Această propoziție mai poate fi enunțată și astfel:

(7′) Dacă $m \mid a$ și $m \nmid b$, atunci $m \nmid a + b$, oricare ar fi $a, b, m \in \mathbf{N}$.

VIII. Să considerăm diferența 10—4. Se vede că $10 \geqslant 4$. 10 se divide cu 2 și 4 se divide cu 2. Și diferența 10—4 adică 6 se divide cu 2.

Să considerăm propoziția:

(8) Fie a, b și m numere naturale, $a \geqslant b$. Dacă a se divide cu m și b se divide cu m atunci și $a - b$ se divide cu m.

Să demonstrăm că această propoziție este adevărată.

Conform definiției avem: $a = m \cdot p \ (p \in \mathbf{N})$ și $b = m \cdot q \ (q \in \mathbf{N})$. Putem scrie în continuare $a - b = mp - mq = m(p - q)$. Dar $p-q$ este un număr natural mai mare sau egal cu zero. Deci $a-b$ se divide cu m.

Această propoziție mai poate fi enunțată și astfel:

(8′) Dacă $m \mid a$ și $m \mid b$, atunci $m \mid a - b$, oricare ar fi $a, b, m \in \mathbf{N}$, $a \geqslant b$.

IX. Numărul natural 6 se divide cu 2. Produsul lui 6 cu orice număr natural se divide cu 2. De exemplu $6 \cdot 7$ se divide cu 2. Oare proprietatea este adevărată în general?

Fie propoziția:

(9) Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m, atunci produsul lui a cu orice număr natural se divide cu m.

Să arătăm că această propoziție este adevărată.

Știm că numărul natural a se divide cu numărul natural m. Fie $a \cdot b$ produsul lui a cu un număr natural oarecare b. Trebuie să demonstrăm că $a \cdot b$ se divide cu m. În baza definiției, dacă a se divide cu m atunci există un număr natural n astfel încît $a = m \cdot n$. Putem scrie $a \cdot b = (m \cdot n) \cdot b = m \cdot (n \cdot b)$ (am folosit aici asociativitatea înmulțirii) n și b fiind numere naturale și produsul lor $n \cdot b$ este număr natural.

Deci $a \cdot b$ se divide cu m. Propoziția este deci adevărată.

Pentru a dovedi că este adevărată, am făcut o demonstrație.

Această propoziție este o teoremă.

Propoziția (9) se mai poate enunța și astfel:

(9′) Dacă $m \mid a$, atunci $m \mid ab$, oricare ar fi a, b, $m \in \mathbf{N}$.

EXERCIȚIU

Se consideră $P = a \cdot b$, unde a și b sînt numere naturale. În fraza ce urmează completați spațiile libere astfel încît să obțineți o propoziție adevărată:

Dacă cel puțin unul din factorii a și b se divide cu 2, atunci P se divide cu ... .

Probleme rezolvate

1. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției:

Dacă suma mai multor numere naturale se divide cu un număr natural, atunci și fiecare termen al sumei se divide cu acel număr natural.

Rezolvare

Să luăm un exemplu: $9 = 2 + 7$; 9 se divide cu 3 și totuși 2 și 7 nu sînt divizibile cu 3. Deci o sumă de numere naturale poate fi divizibilă cu un număr natural, fără ca fiecare termen al ei să fie divizibil cu acel număr. *Deci propoziția de mai sus este falsă.* Spunem că am arătat că propoziția e falsă, dînd un *contraexemplu.*

2. Să se afle valoarea de adevăr a propoziţiei:

Dacă fiecare termen al unei sume de numere naturale nu se divide cu un acelaşi număr natural, atunci nici suma nu se divide cu acel număr natural.

Rezolvare

Să vedem dacă această propoziţie este adevărată sau falsă. Să luăm un exemplu: $3 + 5 = 8$; 3 nu se divide cu 2, nici 5 nu se divide cu 2 şi totuşi suma 8 se divide cu 2. *Deci propoziţia de mai sus este falsă.* Şi în acest caz am arătat că propoziţia este falsă printr-un *contraexemplu.*

4. CRITERII DE DIVIZIBILITATE

Pentru a şti dacă numărul natural 897 624 se divide cu 3, facem împărţirea lui 897 624 la 3.

Ne punem întrebarea: nu putem oare să găsim o propoziţie pe baza căreia să putem stabili dacă numărul 897 624 se divide cu 3, fără a împărţi pe 897 624 la 3? Dacă o asemenea propoziţie există, o vom numi criteriu de divizibilitate (în cazul nostru, criteriul de divizibilitate cu 3).

În această carte ne vom ocupa de criteriile de divizibilitate cu 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 100. Criteriile de divizibilitate sînt teoreme[1].

CRITERIUL DE DIVIZIBILITATE CU 10

Să cercetăm dacă numărul natural 370 se divide cu 10.

Putem scrie: $370 = 37 \cdot 10$. Deci numărul natural 370 se divide cu 10. Din egalitatea $2\,450 = 245 \cdot 10$ deducem că şi numărul 2 450 se divide cu 10.

Observăm că numerele naturale 370 şi 2 450 au ca ultimă cifră pe 0. Să arătăm că dacă ultima cifră a unui număr natural este 0, atunci acel număr este divizibil cu 10.

Fie un număr natural oarecare, de trei cifre: $\overline{abc}$.

Putem scrie $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = (a \cdot 10 + b) \cdot 10 + c = \overline{ab} \cdot 10 + c$.

Dacă $c = 0$ atunci $\overline{abc} = \overline{ab} \cdot 10$. Întrucît $\overline{ab} \cdot 10$ este un număr natural divizibil cu 10 (am aplicat proprietatea (9), pag. 85), atunci şi $\overline{abc}$ este un număr natural divizibil cu 10.

[1] Demonstraţiile vor fi făcute pentru numere naturale scrise în baza 10 şi avînd 2, 3, 4 sau 5 cifre.

Dacă $c \neq 0$, adică dacă c este o cifră diferită de zero, $\overline{abc}$ nu este divizibil cu 10 (am aplicat proprietatea (7), pag. 84).

Deci putem enunţa:

Criteriul de divizibilitate cu 10

Un număr natural a cărui ultimă cifră este zero este un număr divizibil cu 10.
Un număr natural a cărui ultimă cifră nu este 0 nu este divizibil cu 10.

Ştim că dacă un număr natural se divide cu un număr natural atunci primul se divide cu toţi divizorii celui de-al doilea.

Conform acestei propoziţii, *dacă un număr se divide cu 10, acesta se divide şi cu 2 şi cu 5.*

Deci:

Un număr natural care are ca ultimă cifră pe 0 se divide şi cu 2 şi cu 5.

De exemplu, numărul natural 470 se divide şi cu 2 şi cu 5.

CRITERIILE DE DIVIZIBILITATE CU 10, 100 etc.

Un număr natural la care ultima cifră este zero se divide cu 10, adică cu $2 \cdot 5$. În caz contrar, numărul natural nu se divide cu 10. De exemplu, 470 se divide cu $2 \cdot 5$, dar 471 nu se divide cu 10.

Un număr natural la care ultimele două cifre sînt zerouri se divide cu 100 adică cu $2^2 \cdot 5^2$. În caz contrar, numărul natural nu se divide cu 100. De exemplu, 7 500 se divide cu $2^2 \cdot 5^2$, dar 7 502 nu se divide cu 100.

Observaţie

Un număr natural la care ultimele trei cifre sînt zerouri se divide cu 1 000, adică cu $2^3 \cdot 5^3$. În caz contrar, numărul natural nu se divide cu 1 000. De exemplu, 18 000 se divide cu 1 000, adică cu $2^3 \cdot 5^3$, dar 18 003 nu se divide cu 1 000 ş.a.m.d.

EXERCIŢIU

1. Spuneţi care din următoarele propoziţii sînt adevărate şi care sînt false: a) $10 | 260$; b) $100 | 2\,400$; c) $10^2 | 250\,000$; d) $10^2 | 20\,000$; e) $10^2 | 200\,000$.

CRITERIUL DE DIVIZIBILITATE CU 2

Știm că dacă ultima cifră a unui număr natural este 0, atunci numărul natural considerat este divizibil cu 2.

Efectuînd împărțirile, constatăm că și numerele naturale 246, 71 414, 1 246, 758 se divid cu 2. Avem $246 = 2 \cdot 123$, $71\,414 = 2 \cdot 35\,707$, $1\,246 = 2 \cdot 623$, $758 = 2 \cdot 379$.

Toate numerele date au ca ultimă cifră o cifră pară.

Toate numerele naturale care au ca ultimă cifră o cifră pară sînt oare divizibile cu 2?

Să considerăm numărul 758.

Putem scrie $758 = 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 = (7 \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 8 = 75 \cdot 10 + 8$.

$75 \cdot 10$ se divide cu 2.

8 se divide cu 2.

Deci și numărul 758 se divide cu 2.

Să considerăm numărul 475.

Putem scrie:

$475 = 47 \cdot 10 + 5$.

$47 \cdot 10$ se divide cu 2.

5 nu se divide cu 2.

Deci numărul 475 nu se divide cu 2.

Să luăm un număr natural oarecare de trei cifre $\overline{abc}$.

Avem $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = (a \cdot 10 + b) \cdot 10 + c = \overline{ab} \cdot 10 + c$. Dar $\overline{ab} \cdot 10$ se divide cu 2. (Am aplicat proprietatea (9), pag. 85.) Dacă c este 0 sau 2 sau 4 sau 6 sau 8 atunci numărul natural $\overline{abc}$ este divizibil cu 2. (Am aplicat proprietatea (6), pag. 83.) Dacă c nu este nici 0, nici 2, nici 4, nici 6, nici 8, atunci numărul natural considerat nu este divizibil cu 2. (Am aplicat proprietatea (7), pag. 84.)

Deci putem enunța:

Criteriul de divizibilitate cu 2

Dacă ultima cifră a unui număr natural este o cifră pară, atunci acel număr natural se divide cu 2.

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este o cifră pară, atunci acel număr natural nu se divide cu 2.

Criteriul de divizibilitate cu 2 se mai poate enunța și astfel:

Dacă ultima cifră a unui număr natural este una din cifrele 0, 2, 4, 6, 8, atunci acel număr natural se divide cu 2.

Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este nici una din cifrele 0, 2, 4, 6, 8, atunci acel număr natural nu se divide cu 2.

Exemple

Numărul 248 este divizibil cu 2, deoarece ultima sa cifră este 8, adică o cifră pară.

Numărul 270 este divizibil cu 2, deoarece ultima sa cifră este 0.

Numărul 475 nu este divizibil cu 2, ultima sa cifră fiind 5, care este cifră impară.

EXERCIȚII

1. Subliniați numerele divizibile cu 2:

   72, 80, 900, 857, 7, 85, 1 746, 112 834, 189 387, 8.

2. Spuneți care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

   $2 \mid 48$; $2 \mid 56$; $2 \mid 4\,705$; $2 \mid 828$.

3. Care este cel mai mic număr natural de patru cifre divizibil cu 2?
4. Care este cel mai mare număr natural de patru cifre divizibil cu 2?

CRITERIUL DE DIVIZIBILITATE CU 5

Am văzut că un număr natural a cărui ultimă cifră este 0 se divide cu 5.

Efectuînd împărțirea numărului 17 245 la 5 constatăm că 17 245 se divide cu 5.

La fel constatăm că 2 435 se divide cu 5.

Aceste numere au ca ultimă cifră pe 5.

Să considerăm numărul 2 435.

Putem scrie:

$$2\,435 = 2 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = (2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 10 + 5 = 243 \cdot 10 + 5.$$

$243 \cdot 10$ se divide cu 5.

5 se divide cu 5.

Deci și numărul 2 435 se divide cu 5.

Să considerăm numărul 4 712.

Putem scrie

$4\,712 = 471 \cdot 10 + 2$

$471 \cdot 10$ se divide cu 5.

2 nu se divide cu 5.

Deci numărul 4 712 nu se divide cu 5.

Să luăm un număr oarecare de patru cifre $\overline{abcd}$.

Putem scrie $\overline{abcd} = a \cdot 1\,000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \cdot 10 + d = \overline{abc} \cdot 10 + d$.

$\overline{abc} \cdot 10$ se divide cu 5, deoarece 10 se divide cu 5, iar dacă $d = 5$ sau $d = 0$, atunci și numărul natural $\overline{abcd}$ este divizibil cu 5.

Dacă $d \neq 0$ și $d \neq 5$, atunci numărul natural $\overline{abcd}$ nu este divizibil cu 5.

Deci putem enunța:

Criteriul de divizibilitate cu 5

Dacă ultima cifră a unui număr natural este 5 sau 0, atunci acel număr se divide cu 5.
Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este nici 5, nici 0, atunci acel număr nu este divizibil cu 5.

Exemple

Numărul 735 este divizibil cu 5, ultima sa cifră fiind 5.
Numărul 1 730 este divizibil cu 5, ultima sa cifră fiind 0.
Numărul 732 nu este divizibil cu 5, pentru că ultima sa cifră nu este nici 5, nici 0.

EXERCIȚII

1. Care din următoarele numere naturale 120, 24, 45, 245, 1 400, 12 917 sînt divizibile cu 5?
2. Care este cel mai mare număr natural de trei cifre divizibil cu 5?
3. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre divizibil cu 5?

CRITERIUL DE DIVIZIBILITATE CU 4

Se consideră numerele naturale 127, 1 500, 246, 14 324, 7 536.
127 nu se divide cu 2 și deci nu se divide cu 4;
1 500 se divide cu 100, deci se divide și cu 4.
Efectuînd, pe rînd, împărțirea numerelor 246, 14 324, 7 536 la 4, constatăm că:

246 nu se divide cu 4,
14 324 se divide cu 4,
7 536 se divide cu 4.

Numerele naturale 14 324 și 7 536 au următoarea proprietate comună: dacă considerăm numerele naturale formate din ultimele două cifre ale lor, adică 24 (143 $\boxed{24}$) și 36 (75 $\boxed{36}$) acestea sînt numere naturale divizibile cu 4.

Să considerăm numărul 14 324.

Putem scrie:

$14\,324 = 1 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 =$
$= (1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 100 + 24 = 143 \cdot 100 + 24.$

$143 \cdot 100$ se divide cu 4.
24 se divide cu 4.
Deci și 14 324 se divide cu 4.
Analog, putem arăta că:
15 780 se divide cu 4;
75 608 se divide cu 4.

Să considerăm numărul 75 246.

Putem scrie:

$75\,246 = 75\,200 + 46.$
$752 \cdot 100$ se divide cu 4.
46 nu se divide cu 4.
Deci 75 246 nu se divide cu 4.

Să considerăm, acum, un număr natural oarecare de 5 cifre: $\overline{abcde}$. Avem: $\overline{abcde} = a \cdot 10\,000 + b \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e = (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \cdot 100 + d \cdot 10 + e = \overline{abc} \cdot 100 + \overline{de}$. Dacă $d = 0$ atunci $\overline{de}$ se înlocuiește cu e. Dar $\overline{abc} \cdot 100$ este divizibil cu 4.

Dacă $\overline{de}$ este divizibil cu 4, atunci și numărul natural $\overline{abcde}$ este divizibil cu 4.

Dacă numărul natural $\overline{de}$ nu este divizibil cu 4, atunci numărul natural $\overline{abcde}$ nu este divizibil cu 4.

Așadar, putem enunța:

Criteriul de divizibilitate cu 4

Dacă numărul natural format din ultimele două cifre[1] ale unui număr natural este divizibil cu 4, atunci numărul natural considerat este divizibil cu 4
Dacă numărul natural format din ultimele două cifre[1] ale unui număr natural nu este divizibil cu 4, atunci numărul natural considerat nu este divizibil cu 4

[1] Cele două cifre sînt luate în ordinea în care se află în numărul natural dat.

Exemple

Numărul natural 5 736 este divizibil cu 4, pentru că 36 (57$\boxed{36}$) este divizibil cu 4.

Numărul natural 14 872 este divizibil cu 4, pentru că 72 (148$\boxed{72}$) este divizibil cu 4.

Numărul natural 24 735 nu este divizibil cu 4, pentru că 35 (247$\boxed{35}$) nu este divizibil cu 4.

Dacă ultimele două cifre ale unui număr sînt zerouri, atunci numărul este divizibil cu 100 deci și cu 4.

De exemplu, 7 200 este divizibil și cu 4.

Observație

Orice număr natural divizibil cu 4 este divizibil și cu 2. Ne punem întrebarea: orice număr natural care este divizibil cu 2 este divizibil și cu 4? Nu! De exemplu, 14 este divizibil cu 2, dar nu este divizibil cu 4.

EXERCIȚII

1. Spuneți care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

$4 \mid 1\,248$, $4 \mid 24\,000$, $4 \mid 61\,512$.

2. Să se sublinieze numerele naturale divizibile cu 4:

36, 418, 1 548, 2 400, 19 324.

3. Care este cel mai mare număr natural de trei cifre divizibil cu 4?

CRITERIUL DE DIVIZIBILITATE CU 25

Să considerăm numerele: 3 200; 23 425; 41 750; 42 375.
Numărul 3 200 se divide cu 25, pentru că se divide cu 100.
Numărul 23 425 se divide cu 25?
Putem scrie: 23 425 = 23 400 + 25.
23 400 se divide cu 25.
25 se divide cu 25.
Rezultă că și suma 23 400 + 25, adică 23 425, se divide cu 25.
Analog, constatăm că numerele 41 750 și 42 375 sînt divizibile cu 25.
Fie numărul 24 751.
Putem scrie:
24 751 = 24 700 + 51.
24 700 se divide cu 25.
51 nu se divide cu 25.
Deci 24 751 nu se divide cu 25.

Să considerăm un număr oarecare de cinci cifre: $\overline{abcde}$.

Putem scrie: $\overline{abcde} = a \cdot 10\,000 + b \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e = (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \cdot 100 + d \cdot 10 + e = \overline{abc} \cdot 100 + d \cdot 10 + e = \overline{abc} \cdot 100 + \overline{de}$.

Dacă $d = 0$, atunci $\overline{de}$ se înlocuiește cu e.

$\overline{abc} \cdot 100$ este divizibil cu 25. Dacă $\overline{de}$ este divizibil cu 25, atunci și numărul $\overline{abcde}$ este divizibil cu 25.

Dacă $\overline{de}$ nu este divizibil cu 25, atunci numărul $\overline{abcde}$ nu este divizibil cu 25. Fiecare dintre numerele 31 200; 24 325; 17 450; 13 875 se divide cu 25.

Nici unul din numerele 1 705; 19 855; 217 770 nu se divide cu 25.

Așadar putem enunța:

Criteriul de divizibilitate cu 25.

Dacă numărul natural format din ultimele două cifre[1] ale unui număr natural este divizibil cu 25, atunci numărul natural considerat este divizibil cu 25.

Dacă numărul natural format din ultimele două cifre[1] ale unui număr natural nu este divizibil cu 25, atunci numărul natural considerat nu este divizibil cu 25.

Criteriul de divizibilitate cu 25 se mai poate enunța și astfel:

Dacă un număr natural se termină cu două zerouri; cu 25; 50 sau 75, atunci numărul este divizibil cu 25.

Dacă un număr natural nu se termină nici cu două zerouri; nici cu 25; 50; 75, atunci numărul nu este divizibil cu 25.

Alte **exemple**

Fiecare dintre numerele 14 700, 217 325, 188 750, 111 175 se divide cu 25.

Nici unul dintre numerele 1 240, 3 705 nu se divide cu 25.

EXERCIȚII

1. Să se afle valoarea logică a fiecăreia din următoarele propoziții:

a) $25 \mid 21\,300$; b) $25 \mid 4\,350$; c) $25 \mid 41\,350$; d) $25 \mid 17\,675$; e) $25 \mid 2\,405$; f) $25 \mid 2\,465$; g) $25 \mid 18\,000$.

2. Care este cel mai mare număr de patru cifre, divizibil cu 25?

---

[1] Cele două cifre sînt luate în ordinea în care se află în numărul natural dat.

CRITERIUL DE DIVIZIBILITATE CU 3

Să considerăm numărul natural 357.

Putem scrie: $357 = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 = 3(99 + 1) + 5(9 + 1) + 7 = 3 \cdot 99 + 3 + 5 \cdot 9 + 5 + 7 = (3 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + 3 + 5 + 7$.

Suma $3 \cdot 99 + 5 \cdot 9$ *este divizibilă cu 3, deoarece fiecare termen al ei este divizibil cu 3. Dar și suma* $3 + 5 + 7$ *este divizibilă cu 3.*

Deci numărul 357 este divizibil cu 3.

Fie numărul 374. Putem scrie:

$$\begin{aligned}374 &= 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4 = \\ &= 3 \cdot (99 + 1) + 7 \cdot (9 + 1) + 4 = \\ &= 3 \cdot 99 + 3 + 7 \cdot 9 + 7 + 4 = \\ &= 3 \cdot 99 + 7 \cdot 9 + 3 + 7 + 4.\end{aligned}$$

$3 \cdot 99 + 7 \cdot 9$ se divide cu 3.

$3 + 7 + 4$ nu se divide cu 3.

Deci 374 nu se divide cu 3.

Să luăm un număr natural oarecare, de trei cifre, $\overline{abc}$. Scriem

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = a(99 + 1) + b(9 + 1) + c = a \cdot 99 + a + b \cdot 9 + b + c = a \cdot 99 + b \cdot 9 + a + b + c.$$

Suma $a \cdot 99 + b \cdot 9$ este divizibilă cu 3. Dacă și suma $a + b + c$ este divizibilă cu 3, atunci numărul $\overline{abc}$ este divizibil cu 3.

Dacă suma $a + b + c$ nu este divizibilă cu 3, atunci numărul $\overline{abc}$ nu este divizibil cu 3.

Putem deci enunța:

Criteriul de divizibilitate cu 3

Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 3, atunci acel număr este divizibil cu 3.

Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 3, atunci acel număr nu este divizibil cu 3.

Exemple

Numărul natural 47 142 este divizibil cu 3, întrucît suma $4 + 7 + 1 + 4 + 2$, adică 18, este un număr natural divizibil cu 3.

Numărul 247 nu este divizibil cu 3, întrucît suma $2 + 4 + 7$, adică 13, nu este un număr divizibil cu 3.

Numerele naturale 24, 12 342, 3 990 636 sînt divizibile cu 3.

Numerele naturale 4 714, 4 331 nu sînt divizibile cu 3.

EXERCIȚII

1. Subliniați numerele naturale divizibile cu 3:

231; 4 269; 201 303; 247.

2. Spuneți care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

$3 \mid 471$; $3 \mid 248$; $3 \mid 123$; $3 \nmid 2\,451\,000$.

3. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{1x3}$ divizibile cu 3.

CRITERIUL DE DIVIZIBILITATE CU 9

Pentru a constata dacă un număr natural este divizibil cu 9, urmăm aceeași cale ca la divizibilitatea cu 3.

Să considerăm numărul 846.

Putem scrie:

$$\begin{aligned}846 &= 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 = 8 \cdot (99 + 1) + 4 \cdot (9 + 1) + 6 = \\ &= 8 \cdot 99 + 8 + 4 \cdot 9 + 4 + 6 = 8 \cdot 99 + 4 \cdot 9 + 8 + 4 + 6.\end{aligned}$$

$8 \cdot 99 + 4 \cdot 9$ se divide cu 9.

$8 + 4 + 6$ se divide cu 9.

Deci și numărul 846 se divide cu 9.

Să considerăm numărul 745:

Putem scrie:

$$\begin{aligned}745 &= 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot (99 + 1) + 4 \cdot (9 + 1) + 5 = \\ &= 7 \cdot 99 + 7 + 4 \cdot 9 + 4 + 5 = 7 \cdot 99 + 4 \cdot 9 + 7 + 4 + 5.\end{aligned}$$

$7 \cdot 99 + 4 \cdot 9$ se divide cu 9, dar $7 + 4 + 5$ nu se divide cu 9. Deci nici numărul 745 nu se divide cu 9.

Să considerăm numărul $\overline{abc}$. Avem

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = a(99 + 1) + b(9 + 1) + c = \\ &= a \cdot 99 + a + b \cdot 9 + b + c = a \cdot 99 + b \cdot 9 + a + b + c.\end{aligned}$$

Suma $a \cdot 99 + b \cdot 9$ este divizibilă cu 9. Dacă $a + b + c$ se divide cu 9, atunci numărul $\overline{abc}$ se divide cu 9.

Dacă $a + b + c$ nu se divide cu 9, atunci nici numărul $\overline{abc}$ nu se divide cu 9.

Putem deci enunţa:

Criteriul de divizibilitate cu 9.

Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci acel număr este divizibil cu 9.
Dacă suma cifrelor unui număr natural nu este divizibilă cu 9, atunci acel număr nu este divizibil cu 9.

Exemple

Numărul 23 472 se divide cu 9, întrucît suma $2 + 3 + 4 + 7 + 2$, adică 18, este un număr divizibil cu 9.

Numărul 475 nu este divizibil cu 9, pentru că suma $4 + 7 + 5$, adică 16, nu este un număr divizibil cu 9.

Un număr natural care este divizibil cu 9 este divizibil şi cu 3. Orice număr natural care este divizibil cu 3 este oare divizibil şi cu 9? Nu! Să dăm un exemplu: 12 este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 9.

EXERCIŢII

1. Subliniaţi numerele naturale divizibile cu 9:

   450, 246, 49 527, 9 909 918.

2. Care din următoarele propoziţii sînt adevărate şi care sînt false:

   $9 \mid 279$; $9 \mid 1\,239$; $9 \mid 6\,303\,600$; $9 \nmid 1\,233$?

3. Care este cel mai mare număr natural de patru cifre divizibil cu 9?

4. Care este cel mai mic număr natural de patru cifre divizibil cu 9?

5. MULŢIMEA DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL

Numărul 6 se divide cu numerele 1, 2, 3 şi 6 şi numai cu acestea. Deci mulţimea divizorilor lui 6 este mulţimea: {1, 2, 3, 6}.

Notăm mulţimea divizorilor lui 2 cu D_2, mulţimea divizorilor lui 3 cu D_3 ş.a.m.d.[1]

Putem scrie:

$D_2 = \{1, 2\}$, $D_3 = \{1, 3\}$; $D_4 = \{1, 2, 4\}$, $D_5 = \{1, 5\}$,

$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$, $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

[1] Uneori, mulţimea divizorilor lui 2 se mai notează cu $D(2)$, mulţimea divizorilor lui 3 cu $D(3)$ etc.

Orice număr natural se divide cu 1 şi cu el însuşi. De exemplu, 6 se divide cu 1 şi 6.

Mulţimea divizorilor lui 6 este $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

1 şi 6 se numesc divizori improprii ai lui 6, iar 2 şi 3 se numesc divizori proprii ai lui 6.

1 şi 18 sînt divizorii improprii ai lui 18, iar 2, 3, 6, 9 sînt divizorii proprii ai lui 18.

Orice număr natural m are divizorii improprii 1 şi m. Orice alt divizor se numeşte divizor propriu.

Cîteva observaţii

Să considerăm mulţimile: $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ şi $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Mulţimea $D_{15} \cap D_{12} = \{1, 3\}$ este mulţimea divizorilor comuni ai numerelor 15 şi 12. Adică: 1 este divizor şi al lui 15 şi al lui 12, iar 3 este şi el divizor şi al lui 15 şi al lui 12. Fie $A = D_{15} \cup D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15\}$. A este mulţimea numerelor care au următoarea proprietate: fiecare în parte este divizor al lui 15 sau al lui 12, sau al ambelor numere. Adică, fiecare element al mulţimii A este divizor sau al lui 15, sau al lui 12, sau al lui 15 şi al lui 12. Altfel spus, fiecare element al mulţimii A este divizor al cel puţin unuia dintre numerele naturale 15 şi 12.

Dacă notăm cu M mulţimea divizorilor proprii ai lui 18, iar cu P mulţimea divizorilor improprii ai lui 18, constatăm că M şi P sînt mulţimi disjuncte ($M \cap P = \emptyset$), iar $M \cup P = D_{18}$.

EXERCIŢIU

Scrieţi mulţimea divizorilor fiecăruia din numerele naturale: 14, 20, 30. Precizaţi în fiecare caz care este mulţimea divizorilor proprii şi care este mulţimea divizorilor improprii.

6. MULŢIMEA MULTIPLILOR UNUI NUMĂR NATURAL

Să aflăm multiplii lui 2.

$2 \cdot 0 = 0$; $2 \cdot 1 = 2$; $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$ ş.a.m.d.

Mulţimea multiplilor lui 2 este deci mulţimea

$\{0; 2; 4; 6; ...; 2n; ...\}$.

Notăm această mulțime cu M_2. Avem:

$$M_2 = \{0; 2; 4; 6; ...; 2n; ...\}.$$

Această mulțime este o mulțime infinită.

Mulțimea multiplilor lui 3 este următoarea mulțime[1]:

$$M_3 = \{0; 3; 6; 9; ...; 3n; ...\}$$

EXERCIȚII

1. Scrieți mulțimea multiplilor lui 4.
2. Scrieți mulțimea multiplilor lui 5.

7. NUMERE PRIME

Numărul 2 se divide numai cu 1 și cu 2, adică numai cu 1 și cu el însuși.

Numărul 3 se divide, de asemenea, numai cu 1 și cu el însuși. Analog, numărul 17. El se divide numai cu 1 și cu 17.

Definiție.

Se numește număr prim[2] orice număr natural, diferit de 1, care are ca divizori numai pe 1 și pe el însuși.

Mai putem defini numărul prim astfel:

Se numește număr prim orice număr natural, diferit de 1, care admite numai divizori improprii.

Următoarele numere sînt prime:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Se poate demonstra că, mulțimea numerelor prime este infinită. Cel mai mic număr prim este 2 și este singurul număr prim par. Celelalte numere prime sînt numere impare.

---

[1] Mulțimea M_2 se mai notează $M(2)$ sau $\{2n\}_{n \in N}$.
Mulțimea M_3 se mai notează $M(3)$ sau $\{3n\}_{n \in N}$.

[2] Se mai poate defini numărul prim și astfel:
Se numește număr prim orice număr natural care are numai doi divizori.
Se numește număr compus orice număr natural care are cel puțin 3 divizori.
Numărul 1 nu admite decît un divizor. Deci conform definiției de mai sus el nu este nici prim, nici compus.

Orice număr natural care nu este prim se numește *neprim*. Numerele neprime, diferite de 1, se numesc *numere compuse*. Numerele naturale: 0, 4, 6, 8, 10, 24, 1 470 sînt compuse.

EXERCIȚII

1. Care sînt numerele prime mai mari decît 50 și mai mici decît 60?
2. Aflați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
   a) 1 este număr prim;
   b) orice număr prim este număr natural impar.

8. CUM RECUNOAȘTEM DACĂ UN NUMĂR NATURAL ESTE PRIM

CHESTIUNI PREGĂTITOARE

Să considerăm:

$$12 : 2 = 6, \qquad 12 : 3 = 4, \qquad 12 : 4 = 3.$$

Să facem observațiile:

1) Dacă împărțim pe 12, pe rînd, la numere naturale în ordine crescătoare, cîturile respective sînt numere naturale în ordine descrescătoare.

2) Dacă 12 se divide cu 2, atunci 12 se divide și cu cîtul împărțirii lui 12 la 2, adică cu 6.

Dacă 12 se divide cu 4, atunci el se divide și cu cîtul împărțirii lui 12 la 4, adică cu 3.

Pentru a stabili dacă un număr natural este prim sau este compus, procedăm în felul următor:

Împărțim numărul, pe rînd, la toate numerele prime în ordine crescătoare, începînd cu 2, pînă cînd obținem un cît mai mic sau egal cu împărțitorul. Dacă numărul se divide cu unul din aceste numere prime, este evident că el nu este prim. Dacă numărul considerat nu se divide cu nici unul din aceste numere prime, atunci el este număr prim.

Să vedem de ce este corect să procedăm așa.

Să luăm numărul 137.

137 nu se divide cu 2, cu 3, cu 5. Pentru a se vedea dacă 137 se divide cu 7 facem împărțirea lui 137 la 7 și obținem cîtul 19 și restul 4. Deci 137 nu se divide cu 7. Pentru a vedea dacă 137 se divide cu 11, facem împărțirea lui 137 la 11. Obținem cîtul 12 și restul 5. Deci 137 nu se divide cu 11. Deoarece cîtul (12) este mai mare decît împărțitorul (11), continuăm să facem împărțiri.

Pentru a vedea dacă 137 se divide cu 13 facem împărţirea şi obţinem cîtul 10 şi restul 7. Numărul 137 nu se divide cu 13. Ne oprim deoarece cîtul (10) este mai mic decît împărţitorul (13).

Am arătat că 137 nu se divide cu nici un număr prim mai mic sau egal cu 13.

Afirmăm că el nu se divide nici cu numerele compuse mai mici decît 13.

Într-adevăr, dacă 137 nu se divide cu 2, el nu se divide nici cu următorii multipli ai lui 2: 4, 6, 8, 10, 12, iar dacă 137 nu se divide cu 3, el nu se divide nici cu 6, 9, 12.

Pînă aici am arătat că numărul 137 nu se divide cu nici un număr natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 13.

Este oare posibil ca 137 să se dividă cu un număr natural c mai mare decît 13?

Acest lucru nu este posibil, căci dacă 137 se divide cu un număr c mai mare decît 13, atunci el se divide şi cu cîtul împărţirii lui 137 la numărul natural c; acest cît este un număr mai mic decît 13. Or, am arătat că 137 nu se divide cu nici un număr natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 13.

În concluzie: numărul 137 nu se divide nici cu un număr natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 13, nici cu un număr natural mai mare decît 13. El este deci număr prim.

Am luat mai sus un exemplu (numărul 137), pentru a înţelege modul în care judecăm.

Se poate arăta că procedeul folosit în cazul numărului 137 se poate aplica oricărui număr natural.

S-au alcătuit tabele de numere prime mai mici decît un număr natural dat. O tabelă cu numere prime mai mici decît 1 000 se găseşte la sfîrşitul manualului.

EXERCIŢIU

Să se arate, fără a folosi o tabelă de numere prime, care din următoarele numere sînt numere prime: 120; 131; 173; 223; 411.

Să se confrunte rezultatele găsite cu numerele din tabela de numere prime.

9. CIURUL LUI ERATOSTENE[1]

Eratostene a indicat următoarea metodă pentru a alcătui o tabelă care să conţină toate numerele prime mai mici decît un număr natural dat (ciurul lui Eratostene). Să aflăm, de exemplu, toate numerele prime mai mici decît 100.

[1] Eratostene, învăţat grec, a trăit în secolul al III-lea î.e.n.

Să scriem toate numerele naturale pînă la 100 (inclusiv) începînd cu numărul natural 2:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Pornim de la numărul 2. Îl lăsăm pe 2 în tabelă şi, pornind de la el, tăiem numerele din doi în doi. Următorul număr netăiat este 3. Îl lăsăm pe 3 netăiat şi parcurgînd din trei în trei numerele din şirul numerelor naturale, începînd de la 3, tăiem numerele naturale care nu au fost deja tăiate. Observăm că primul număr natural care va fi tăiat este 3^2. Următorul număr netăiat este 5. Îl lăsăm pe 5 netăiat şi parcurgînd din cinci în cinci numerele din şirul numerelor naturale, începînd de la 5, tăiem numerele naturale care nu au fost deja tăiate. Primul număr natural care va fi tăiat este 5^2, căci pînă la el, celelalte au fost tăiate (adică au fost tăiate: 5×2, 5×3, 5×4). În fond, noi tăiem multiplii lui 2, multiplii lui 3, multiplii lui 5. Multiplii lui 4, de pildă, i-am tăiat atunci cînd am tăiat multiplii lui 2.

La fel procedăm cu următorul număr netăiat, adică cu 7.

Primul număr pe care-l tăiem este 7^2 şi tăiem apoi multiplii lui 7 care urmează după 7^2, adică după 49, care nu au fost încă tăiaţi.

Următorul număr netăiat este 11.

Primul număr pe care trebuie să-l tăiem este 11^2, dar acesta este mai mare decît 100 şi deci nu apare în tabel. Şi aici ne oprim. Toate numerele rămase în tabel sînt prime.

În acest mod am tăiat numai numere compuse. Nu a rămas nici un număr compus netăiat. Într-adevăr, orice număr compus are cel puţin un divizor prim; pornind de la acest divizor prim şi tăind numerele naturale după metoda de mai sus, am tăiat şi numărul compus considerat.

10. SCRIEREA UNUI NUMĂR NATURAL CA PRODUS DE PUTERI DE NUMERE PRIME

Să considerăm numărul 6. Avem: $6 = 2 \cdot 3$ unde 2 şi 3 sînt numere prime. Spunem că am scris numărul 6 ca produs de numere prime sau că am descompus numărul 6 în factori primi.

Considerăm numărul 12. Avem: $12 = 2^2 \cdot 3$.

Spunem că am scris numărul 12 ca produs de puteri de numere prime. Dacă scriem $12 = 2^2 \cdot 3$, se mai spune că 12 a fost descompus în factori primi.

Să considerăm numărul 5 544. Putem scrie:

$$5\,544 = 2 \cdot 2\,772 = 2 \cdot 2 \cdot 1\,386 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 693 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 231 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 77 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Practic, lucrarea se aşază astfel:

5 544	2
2 772	2
1 386	2
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

În dreapta liniei verticale se trec divizorii primi, iar la stînga acesteia cîturile obţinute la împărţirile respective.

Ştim că $10 = 2 \cdot 5$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$; $10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$ ş.a.m.d.

Să descompunem în factori primi numărul 32 200. Scriem:

32 200	$2^2 \cdot 5^2$
322	2
161	7
23	23
1	

$$32\,200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 23.$$

Alt exemplu

Să se descompună în factori primi numărul 578 000.

578 000	$2^3 \cdot 5^3$
578	2
289	17
17	17
1	

$$578\,000 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 17^2.$$

Descompunerea unui număr natural în factori primi este unică, abstracţie făcînd de ordinea factorilor. De exemplu, numărul 578 000 poate fi scris astfel:

$$2^4 \cdot 5^3 \cdot 17^2 \text{ sau } 2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot 17^2$$

sau $17 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 2^4$ etc.

EXERCIŢII

1. Să se descompună în factori primi (oral):

   10; 14; 18; 24; 36; 40; 50; 75; 700; 11 000.

2. Să se descompună în factori primi:

   a) 580; b) 222; c) 240; d) 13 500; e) 317 400; f) 20; g) 4 500; h) 14 000; i) 150 000; j) 1 210; k) 2 448; l) 27 600.

11. ÎNMULŢIREA ŞI ÎMPĂRŢIREA NUMERELOR NATURALE SCRISE CA PRODUSE DE PUTERI DE NUMERE PRIME

Să considerăm numerele:

$$A = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7; \qquad B = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Avem:

$$A \cdot B = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Ne întrebăm dacă B divide pe A, adică dacă există un număr natural C, astfel încît înmulţind pe B cu C să obţinem pe A:

$$A = B \cdot C.$$

Se vede că putem lua $C = 2 \cdot 3 \cdot 7$, adică $C = 2^{4-3} \cdot 3^{2-1} \cdot 7$.

Prin urmare, A se divide cu B. Acest lucru a fost posibil datorită faptului că a fost îndeplinită următoarea condiţie:

A conţine toţi factorii pe care îi conţine B cu exponenţi mai mari sau egali cu exponenţii factorilor lui B.

Să considerăm numerele:

$$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7;\ B = 2^3 \cdot 3 \cdot 5;\ C = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7;\ D = 2 \cdot 11.$$

După cum se vede:

A se divide cu B; A nu se divide cu C; A nu se divide cu D; C se divide cu B.

EXERCIŢII

1. Să se efectueze:

   a) $(2^2 \cdot 3) \cdot (2^2 \cdot 3^2)$; b) $(2 \cdot 3^{20}) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) - (2^2 \cdot 3^{21} \cdot 5)$; c) $(2^4 \cdot 3^{15}) : (2^2 \cdot 3^{14})$.

2. Să se efectueze:

   a) $(2^3 \cdot 3^4) : (2 \cdot 3^2)$; b) $(3^3 \cdot 5^7) : (3^2 \cdot 5^6)$; c) $(2 \cdot 7^{10}) : 7^{10}$; d) $(2^3 \cdot 11^{40}) : 11^{40}$; e) $(2 \cdot 3^{14} \cdot 7) : (2 \cdot 3^{13})$; f) $(2 \cdot 3^{51} \cdot 5^{24}) : (3^{49} \cdot 5^{24})$.

3. Se consideră:

$$A = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7; \ B = 2^2 \cdot 3 \cdot 7; \ C = 2^3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Să se efectueze: a) $A \cdot B \cdot C$; b) $A : B$; c) $(A \cdot C) : B$.

12. DIVIZOR COMUN. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN AL MAI MULTOR NUMERE NATURALE

Să considerăm numerele 12 și 20.

Am notat cu D_{12} mulțimea divizorilor lui 12 și cu D_{20} mulțimea divizorilor lui 20. Avem:

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \ D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}.$$

Se vede că divizorii comuni ai celor două numere naturale sînt 1, 2, 4. Dacă notăm cu $D_{12,\,20}$ mulțimea divizorilor comuni ai numerelor naturale 12 și 20, avem:

$$D_{12,\,20} = D_{12} \cap D_{20} = \{1, 2, 4\}.$$

Cel mai mare divizor comun (prescurtat c.m.m.d.c.) al celor două numere este 4.

Cel mai mare divizor comun a două sau al mai multor numere naturale nu toate nule, este cel mai mare număr natural care divide numerele date.

Deci scriem: c.m.m.d.c. al numerelor 12 și 20 este 4 sau, pe scurt: c.m.m.d.c. (12, 20) = 4. Uneori se mai scrie și astfel: (12, 20) = 4.

Noțiunea de cel mai mare divizor comun se poate extinde la cazul mai multor numere. De exemplu, cel mai mare divizor comun al numerelor 8, 12, 18 notat (8, 12, 18) este 2. Avem, de asemenea:

$$(2, 4, 6) = 2; \ (4, 8, 20, 40) = 4.$$

EXERCIȚIU

Fără a scrie mulțimea divizorilor fiecărui număr (adică oral), să se afle:

a) (2, 4); b) (5, 10); c) (4, 6); d) (9, 15); e) (2, 6, 8); f) (2, 3, 6, 10); g) (10, 20, 30, 40); h) (4, 6, 8); i) (3, 6, 12); j) (5, 10, 30, 45).

13. AFLAREA CELUI MAI MARE DIVIZOR COMUN PRIN DESCOMPUNERE ÎN FACTORI PRIMI

Pentru a afla cel mai mare divizor comun a două numere naturale a, b, determinăm mulțimile divizorilor D_a, respectiv D_b; aflăm intersecția lor $D_a \cap D_b$ și căutăm cel mai mare număr din această ultimă mulțime. Cu ajutorul descompunerii în factori primi, putem obține cel mai mare divizor comun a două (sau mai multor) numere naturale și pe altă cale.

Exemplu. Vrem să aflăm c.m.m.d.c. al numerelor 1 890 și 2 268. Descompunem, mai întîi, numerele date în factori primi:

$$1\,890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$2\,268 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7.$$

Pentru a afla c.m.m.d.c. al numerelor 1 890 și 2 268 procedăm în felul următor: luăm, o singură dată, factorii primi comuni, cu exponenții cei mai mici, cu care aceștia figurează în descompuneri și îi înmulțim între ei.

Deci c.m.m.d.c. al numerelor 1 890 și 2 268 este $2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 378$.

Se mai scrie: (1 890, 2 268) = 378.

Citim: cel mai mare divizor comun al numerelor 1 890 și 2 268 este 378.

Afirmăm deci că 378 este cel mai mare număr natural care divide în același timp numerele 1 890 și 2 268.

Oare am procedat corect?

Pentru a ne exprima mai ușor, în cele ce urmează vom nota cu D cel mai mare divizor comun al numerelor 1 890 și 2 268. Să răspundem la următoarele întrebări:

D ar putea conține factori primi care nu sînt comuni numerelor 1 890 și 2 268?

De exemplu, D poate conține pe 5 care nu este comun celor două numere? Nu! Pentru că atunci 2 268 nu s-ar divide cu D.

Prin urmare, D trebuie să conțină doar factori primi *comuni*.

De ce trebuie să luăm *toți* factorii primi comuni numerelor 1 890 și 2 268?

Putem, de exemplu, să luăm din cei trei factori primi comuni, și anume 2, 3, 7, numai pe 7? Nu! Pentru că în acest caz D n-ar mai fi fost *cel mai mare* divizor comun al numerelor 1 890 și 2 268.

De ce luăm factorii primi comuni cu exponenții *cei mai mici* cu care ei figurează în descompunerile în factori primi ale numerelor naturale considerate?

Să luăm factorul prim, comun 3. De ce l-am luat pe 3 cu exponentul cel mai mic cu care el figurează în descompunerile în factori primi ale numerelor naturale considerate? Adică: de ce D conține pe 3^3 și nu pe 3^4? Răspuns: dacă D l-ar fi conținut pe 3 la un exponent mai mare decît 3, atunci 1 890 nu ar fi fost divizibil cu D.

Dacă luăm pe 3 la un exponent mai mic decît 3 nu mai obținem c.m.m.d.c. al numerelor date, ci un divizor comun al lor.

De ce trebuie să luăm factorii primi o singură dată?

Este evident că dacă l-am mai lua o dată, pe 2 de exemplu, atunci numărul 1 890 nu s-ar mai divide cu D.

c.m.m.d.c. se află tot ca mai înainte și cînd avem mai multe numere naturale oarecare.

EXERCIȚII

1. Să se afle (mintal) c.m.m.d.c. al numerelor: a) 2, 4; b) 5, 15; c) 4, 6,; d) 8, 12; e) 2, 6, 10; f) 2, 3, 6, 8; g) 3, 6, 12; h) 5, 10, 30, 40; i) 4, 18, 32; j) 4, 5, 6; k) 12, 24, 36, 48.
2. Să se afle c.m.m.d.c. al numerelor: a) 24, 36, 54; b) 24, 40, 72; c) 60, 48, 72; d) 216, 300, 720; e) 288, 1 260, 1 512; f) 680, 2 448, 10 200; g) 26, 85, 169.

14. NUMERE PRIME ÎNTRE ELE

Numerele 4 și 9 admit un singur divizor comun și anume pe 1. De asemenea, singurul divizor comun al numerelor 5 și 7 este 1. Spunem că numerele 4 și 9 sînt prime între ele. De asemenea, numerele 5 și 7 sînt prime între ele.

Două numere naturale se numesc prime între ele dacă admit un singur divizor comun și anume pe 1.

Mai putem spune:

Două numere naturale se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

$$(4,\ 9) = 1;\ (7,\ 8) = 1;\ (5,\ 7) = 1.$$

Două numere naturale pot fi prime între ele fără ca fiecare în parte să fie prim. Exemplu: 4 și 9.

Numerele 4, 9, 25 se numesc, de asemenea, prime între ele, deoarece c.m.m.d.c. al lor este egal cu 1.

Numerele 4, 5, 9 sînt, de asemenea, prime între ele. Observăm că $(4, 5) = 1$; $(4, 9) = 1$; $(5, 9) = 1$. Spunem că numerele 4, 5, 9 sînt prime două cîte două.

EXERCIȚIU

Scrieți toate perechile de numere prime între ele ce se pot forma cu numerele: 2, 3, 4, 9.

Dăm fără demonstrație următoarea teoremă:

Dacă un număr natural este divizibil cu două numere naturale prime între ele, atunci el este divizibil cu produsul acestora.

De exemplu, dacă un număr natural este divizibil cu 2 și cu 3, atunci el este divizibil și cu 6.

Dacă un număr natural este divizibil cu 5 și 9, atunci el este divizibil și cu 45.

Observație importantă

Atragem atenția că, de exemplu, numărul 12 este divizibil cu 4 și 6, dar el nu este divizibil cu $4 \cdot 6$, adică cu 24. Numerele 4 și 6 nu sînt prime între ele.

Exercițiu rezolvat

Să se afle toate numerele naturale de forma $4**$ divizibile cu 45.

Rezolvare

Pentru ca numerele naturale de forma $4**$ să fie divizibile cu 45 trebuie să fie divizibile cu 5 și 9.

Pentru ca numerele naturale de mai sus să fie divizibile cu 5 trebuie ca aceste numere să aibă ca ultimă cifră pe 5 sau 0, adică aceste numere naturale trebuie să fie de forma: $4*5$ sau $4*0$.

Numerele naturale de această formă, divizibile cu 9, sînt: 405; 495, 450. Aceste numere fiind divizibile cu 5 și 9, care sînt prime între ele, sînt divizibile cu 45.

EXERCIȚII

1. Să se scrie toate numerele de forma $\overline{742x}$ divizibile cu 6.
2. Să se scrie toate numerele de forma $\overline{45xy}$ $(x \neq y)$ divizibile cu 18.

15. MULTIPLU COMUN. CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN AL MAI MULTOR NUMERE NATURALE

Să considerăm mulţimea multiplilor numărului 4 (notată M_4) şi mulţimea multiplilor lui 6 (notată M_6):

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ..., 4n, ...\},$$

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, ..., 6n, ...\}.$$

Se vede că:

0 este un multiplu comun al numerelor 4 şi 6;
12 este un multiplu comun al numerelor 4 şi 6;
24 este un multiplu comun al numerelor 4 şi 6;
36 este un multiplu comun al numerelor 4 şi 6.

Şi am putea continua.

Să notăm cu $M_{4,6}$ mulţimea multiplilor comuni ai numerelor 4 şi 6. Avem:

$$M_{4,6} = \{0, 12, 24, 36, ...\}.$$

Cel mai mic multiplu comun al numerelor 4 şi 6, diferit de zero, este, după cum se vede, 12.

Cel mai mic multiplu comun a două sau al mai multor numere naturale, diferite de zero, este cel mai mic număr natural, diferit de zero, care se divide cu numerele date.

Totdeauna cînd vom vorbi despre cel mai mic multiplu comun al mai multor numere naturale, diferite de zero, vom presupune că este vorba de cel mai mic dintre multiplii comuni, diferiţi de zero, ai acestor numere.

Pentru cuvintele:

„Cel mai mic multiplu comun" se foloseşte prescurtarea c.m.m.m.c. c.m.m.m.c. al numerelor 4 şi 6 este 12. Se mai foloseşte şi notaţia:

$$[4, 6] = 12.$$

EXERCIŢII

Să se afle:

a) [2, 5]; b) [2, 10]; c) [2, 4, 5]; d) [20, 40, 80].

16. AFLAREA CELUI MAI MIC MULTIPLU COMUN PRIN DESCOMPUNERE ÎN FACTORI PRIMI

Vom arăta, mai întîi, cum se află c.m.m.m.c. al numerelor 1 890 şi 2 268 folosind descompunerea în factori primi şi apoi vom arăta că procedeul este corect.

Mai întîi, descompunem numerele naturale în factori primi. Avem:

$$1\,890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7,$$

$$2\,268 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7.$$

Pentru a afla c.m.m.m.c. al acestor numere procedăm în felul următor: luăm, o singură dată, factorii primi comuni şi necomuni cu exponenţii cei mai mari şi îi înmulţim între ei.

Deci c.m.m.m.c. al numerelor 1 890 şi 2 268 este $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 11\,340$.

Se mai foloseşte, după cum am văzut, şi notaţia $[1\,890, 2\,268] = 11\,340$.

Afirmăm deci că 11 340 este cel mai mic număr natural, diferit de zero, care se divide cu numerele 1 890 şi 2 268.

Am procedat oare corect?

Într-adevăr, c.m.m.m.c. al numerelor 1 890 şi 2 268 trebuie să conţină factorii primi, comuni şi necomuni, căci altfel nu s-ar divide cu fiecare din numerele naturale date.

Trebuie să luăm fiecare factor prim cu exponentul cel mai mare, din descompunerile în factori primi ale numerelor naturale considerate, pentru că altfel [1 890, 2 268] nu s-ar divide cu fiecare din numerele 1 890 şi 2 268.

Fiecare factor prim trebuie luat o singură dată, pentru că altfel produsul nu ar mai fi cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale date, ci un multiplu comun al lor.

Observaţie

C.m.m.m.c. al mai multor numere naturale divide orice multiplu comun al lor.

EXERCIŢII

1. Să se afle (mintal) c.m.m.m.c. al numerelor:
a) 2; 4; b) 2; 4; 8; c) 2; 3; 4; d) 4; 6; 12; e) 10; 15; 30; f) 2; 4; 5; g) 20; 40; 50; h) 1; 5; 6; i) 2; 4; 6; 8; j) 4; 8; 16; 32; k) 10; 15; 30; 60; l) 12; 24; 36; 72.

2. Să se afle c.m.m.m.c. al numerelor:
a) 24; 48; 60; b) 90; 300; 3 000; c) 180; 360; 432; d) 135; 168; 588; e) 828; 1 426; f) 660; 1 800; 5 400; g) 27; 810; 7 200; 4 200.

17. NUMERE PARE. NUMERE IMPARE

Următorul șir de numere naturale: 0, 2, 4, 6, 8, ... se numește șirul numerelor naturale pare, iar șirul de numere naturale: 1, 3, 5, 7, 9, ... se numește șirul numerelor naturale impare.

Numerele naturale pare sînt numerele de forma $2n$ unde $n \in \mathbb{N}$.

Pentru a vedea mai bine cum se obțin numerele naturale pare, facem un tabel:

n	0	1	2	3	4 ...
$2n$	$2 \cdot 0$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$ ...

sau:

n	0	1	2	3	4	...
$2n$	0	2	4	6	8	...

Numerele naturale impare sînt numerele de forma $2n + 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Pentru a vedea mai bine cum se obțin numerele naturale impare, facem un tabel:

n	0	1	2	3	...
$2n + 1$	$2 \cdot 0 + 1$	$2 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 3 + 1$	...

sau:

n	0	1	2	3	...
$2n + 1$	1	3	5	7	...

Să arătăm că următoarele propoziții sînt propoziții adevărate:
1) Suma a două numere naturale pare este un număr par.
2) Suma a două numere naturale impare este un număr par.
3) Suma dintre un număr natural par și un număr natural impar este un număr impar.

I. Fie două numere naturale pare: 6 și 4. Suma lor este 10, iar 10 este număr natural par.

Putem scrie:

$$\underbrace{6}_{\text{par}} + \underbrace{4}_{\text{par}} = \underbrace{10}_{\text{par}}.$$

Considerăm propoziția:

1) Suma a două numere naturale pare este un număr par.

Să demonstrăm că această propoziție este adevărată.

Primul număr este de forma $2p$, unde p este număr natural. Al doilea număr este de forma $2m$, unde m este număr natural. Suma acestor numere este: $2p + 2m = 2(p + m)$. Dar $p + m$ este număr natural, întrucît e sumă de numere naturale. Îl notăm cu q și avem: $2p + 2m = 2q$, adică un număr par.

II. Fie două numere naturale impare: 3 și 5. Suma lor este 8, iar 8 este un număr natural par.

Putem scrie:

$$\underbrace{3}_{\text{impar}} + \underbrace{5}_{\text{impar}} = \underbrace{8}_{\text{par}}.$$

Considerăm propoziția:

2) Suma a două numere naturale impare este un număr par.

Să demonstrăm că această propoziție este adevărată.

Primul număr este de forma $2p + 1$, unde p este număr natural. Al doilea număr este de forma $2m + 1$, unde m este număr natural. $(2p + 1) + (2m + 1) = (2p + 2m) + (1 + 1) = 2p + 2m + 2 = 2(m + p + 1) = 2q$, unde am notat numărul natural $m + p + 1$ cu q. Dar $2q$ este număr par.

III. Fie două numere naturale: 4 și 3. Unul dintre ele, și anume 4, este par, iar altul, și anume 3, este impar.

Suma lor este 7, iar 7 este număr impar.

Putem scrie:

$$\underbrace{4}_{\text{par}} + \underbrace{3}_{\text{impar}} = \underbrace{7}_{\text{impar}}.$$

Considerăm propoziția:

3) Suma dintre un număr natural par și un număr natural impar este un număr impar.

Să demonstrăm că această propoziție este adevărată.

Primul număr natural este de forma $2p$, unde p este număr natural. Al doilea număr natural este de forma $2m + 1$, unde m este număr natural. $2p + (2m + 1) = (2p + 2m) + 1 = 2(p + m) + 1 = 2q + 1$, unde am notat $p + m = q$. Dar $2q + 1$ este număr impar.

EXERCIȚIU

1. Să considerăm numerele a și b date de egalitățile: $a = 2 + x$, $b = 3 + y$, unde x și y sînt numere naturale. În cele ce urmează, completați spațiile libere astfel încît să obțineți propoziții adevărate:
a) Dacă x este număr par, atunci a este număr...;
b) Dacă x este număr impar, atunci a este număr...;
c) Dacă y este număr impar, atunci b este număr...;
d) Dacă y este număr par, atunci b este număr... .

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se scrie toate numerele naturale divizibile cu 2, mai mari decît 23 și mai mici decît 35.

2. Se consideră numerele:
22, 32, 736, 3 606, 420, 735, 693, 4 700, 14 589, 2 350, 4 258, 1 002.
Să se completeze următorul tabel, trecînd în fiecare rubrică acele numere dintre numerele de mai sus care îndeplinesc condițiile respective. De exemplu, în rubrica „Numere divizibile cu 2" se trec toate numerele divizibile cu 2 dintre numerele de mai sus. În fiecare spațiu de formă dreptunghiulară se trece numai un singur număr.

Numere divizibile cu 2	Numere divizibile cu 5	Numere divizibile cu 4	Numere divizibile cu 3	Numere divizibile cu 9
0	0	0		
2	5	4		
4	10	16		
6	15	20		
8	20	24		
12	25	788		
14	30	236		
16	35	84		
18	40	44		

3. Să se dea cîte două exemple de numere:
   a) divizibile cu 2, dar care nu sînt divizibile cu 4;
   b) divizibile cu 5, dar care nu sînt divizibile cu 10;
   c) divizibile cu 3, dar care nu sînt divizibile cu 9;
   d) divizibile cu 10, dar care nu sînt divizibile cu 100.

4. Să se scrie toate numerele naturale, de două cifre, divizibile cu 2 și care să aibă cifra zecilor 3.

5. Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{43x}$ divizibile cu 2.

6. Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{53x}$ divizibile cu 5.

7. Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{53x}$ divizibile cu 5 și care nu sînt divizibile cu 2.

8. Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{60x5}$ divizibile cu 3.

9. Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{60x5}$ care se divid cu 3 și care nu se divid cu 9.

10. Folosind numai cifrele 0, 3 și 5 scrieți toate numerele de trei cifre care sînt divizibile cu 2.

11. Să se stabilească dacă următoarea propoziție este o propoziție adevărată sau falsă:
Dacă nici unul din factorii unui produs de numere naturale nu se divide cu un același număr natural, atunci nici produsul nu se divide cu acel număr.

12. Scrieți toate numerele naturale de forma 4** care sînt divizibile cu 5 și nu sînt divizibile cu 2.

13. Care numere naturale, multipli ai lui 5, sînt soluțiile inecuației: $2x < 40$?

14. Scrieți toate numerele naturale mai mici decît 40 divizibile cu 3 și cu 5.

15. Care cifre trebuie puse în locul literei x, în $\overline{37x}$, pentru ca numerele obținute să fie divizibile cu 3?

16. Care numere naturale, multipli ai lui 3, sînt soluții ale inecuației: $3x \leqslant 40$?

17. Scrieți toate numerele naturale mai mici decît 60 divizibile cu 9.

18. Care sînt numerele de forma $\overline{4\,5x7}$ divizibile cu 9?

19. Să se afle toate numerele de forma $\overline{74x6}$ divizibile cu 4.

20. O sumă de bani a fost plătită în bancnote de 10 lei și 25 lei. Poate fi această sumă plătită numai în monede de 5 lei?

21. Se consideră numerele de forma $4p + 4$, unde $p \in \mathbf{N}$. Se divide fiecare dintre aceste numere cu 4?

22. Se consideră numerele: 2, 3, 8, 9, 12, 28, 30.
    a) Scrieți mulțimea divizorilor fiecăruia dintre aceste numere.
    b) Scrieți mulțimea divizorilor proprii ai fiecăruia dintre aceste numere.

23. Să se reprezinte mulțimea: $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 30\}$, enumerînd elementele sale.

24. Să se determine mulțimea divizorilor numărului $2 \cdot 3^2$.

25. Să se reprezinte următoarele mulțimi, enumerînd elementele lor:
$M = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și este divizor propriu al lui $12\}$;
$P = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ și este divizor impropriu al lui $102\}$.

26. Scrieți toți multiplii lui 5 mai mici decît 40.

27. Suma dintre un număr prim de două cifre, cu cifre identice, și un număr natural este 2 436. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

28. Care sînt perechile de numere prime între ele care se pot forma cu numerele: 2, 4, 9?

29. Să se descompună (mintal) în factori primi numerele:
6, 10, 15, 170, 12, 2 000, 70 000, 16, 32, 27.

30. Să se descompună în factori primi: 3 240, 22 100, 306 000, 1 200, 360, 1 260 000, 1 750, 6 750, 24 200, 5 600, 25 860.

31. Să se afle (mintal) c.m.m.d.c. al numerelor: a) 2, 10, 15, 25; b) 4, 8, 16.

32. Să se afle c.m.m.d.c. al numerelor: a) 12, 24, 36; b) 3, 15, 45, 60; c) 24, 48, 96, 180; d) 820, 930, 810; e) 4 200, 1 800.

33. Să se afle (mintal) c.m.m.m.c. al numerelor:

a) 2, 4, 12; b) 2, 3, 4, 6; c) 2, 4, 5; d) 4, 6, 10;
e) 20, 40, 800; f) 4, 10, 400; g) 2, 30, 60; h) 2, 5, 10, 20;
i) 400, 1 600.

34. Să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ai numerelor:

a) 150, 900, 750; b) 12, 24, 240; c) 80, 180, 9 000; d) 112, 252, 350;
e) 7 000, 1 400; f) 24, 40, 60, 350; g) 450, 1 350, 1 800.

35. Desenați o dreaptă și luați un punct A pe ea. Marcați cu roșu, începînd din A, punctele situate pe dreaptă la distanța de 12 mm unul de altul. Marcați cu negru, începînd din A, punctele situate pe dreaptă la distanța de 15 mm unul de altul. În ce locuri o liniuță neagră coincide cu una roșie? Se poate calcula dinainte?

36. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției $[450; 360] \cdot (450; 360) = 450 \cdot 360$.

37ᵈ. Să se afle cel mai mic număr natural care:
împărțit la 5 să dea restul 4,
împărțit la 6 să dea restul 5,
împărțit la 8 să dea restul 7,
împărțit la 9 să dea restul 8.

38. Să se afle mulțimea divizorilor pentru fiecare din următoarele numere: 822; 615.

39. Să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al următoarelor numere: 600; 2 400; 32 000; 72 000.

40. Trebuie să acoperim cu dale dreptunghiulare, cu dimensiunile de 3 dm și 5 dm, o suprafață de forma unui dreptunghi cu lungimea de 10 dm și lățimea de 6 dm. Cum trebuie așezate aceste dale și care este numărul lor, știind că nu avem voie să tăiem nici o dală?

41. C.m.m.m.c. a două numere este 84. Fiecare dintre ele este mai mare decît 10 și mai mic decît 20. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

42. Care este cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloană de cîte 6 elevi, 8 elevi sau 10 elevi?

43. Produsul a două numere naturale este 102. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

44. Care este cel mai mare și care este cel mai mic număr natural de trei cifre astfel încît fiecare din ele să fie divizibil cu 45?

45. Care sînt numerele naturale de forma $37{*}{*}$ divizibile cu 6?

46. Să se afle toate numerele naturale scrise în baza 10, de forma $\overline{142y}$, divizibile cu 18.

47ᵈ. Să se afle cel mai mic număr natural care împărțit, pe rînd, la 6 și la 15 să dea același rest 5 și cîtul diferit de 0.

48. Să se arate că orice număr natural care prin împărțire la 180 dă restul 72 este divizibil cu 36.

49ᵈ. Mai mulți elevi vor să cumpere în comun un obiect, însă le lipsesc 20 de lei. Atunci fiecare din ei a mai adăugat un același număr (natural) de lei și tot au mai lipsit 3 lei. Cîți elevi sînt?

50ᵈ. Tatăl și fiul au hotărît să măsoare cu pasul distanța dintre doi pomi și pentru aceasta au pornit simultan de la unul și același pom. Lungimea pasului tatălui este de 70 cm, iar lungimea pasului fiului este de 56 cm. Găsiți distanța dintre acești pomi, știind că, în afara coincidenței din dreptul primului pom, urmele lor au coincis de 10 ori, ultima oară coincizînd în dreptul pomului al doilea.

51ᵈ. Pentru serbarea pomului de iarnă s-au cumpărat napolitane, ciocolată și turtă dulce, în total 760 bucăți. Napolitane s-au luat cu 80 bucăți mai mult decît ciocolată, iar turtă dulce cu 120 bucăți mai puțin decît napolitane. Care este cel mai mare număr de pachete de același fel care au fost distribuite copiilor? (Tot ce s-a cumpărat s-a distribuit în pachete cu același conținut.)

52ᵈ. Să se afle toate numerele naturale de patru cifre și care îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții; 1) au cifra sutelor 9; 2) au cifra zecilor 0; 3) sînt divizibile cu 18. Să se adauge la condițiile de mai sus una din condițiile de mai jos, astfel încît problema să admită trei soluții: 4) sînt numere pare; 5) sînt numere mai mici decît 1 000; 6) sînt numere divizibile cu 4.

53. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr par. Cel mai mic dintre ele este un număr par sau impar?

54. Se consideră egalitatea: $z = x + y$ în care: 1) x poate fi orice număr natural, par, de două cifre. 2) y poate fi orice număr natural, impar, de trei cifre. a) Să se afle cea mai mare valoare pe care o poate lua z. b) Să se afle cea mai mică valoare pe care o poate lua z.

55ᵈ. Mai mulți elevi și-au schimbat, cu ocazia unei întîlniri prietenești, fotografii unul cu celălalt, astfel încît fiecare elev a primit cîte o fotografie de la fiecare elev. Să se arate că oricare ar fi numărul elevilor respectivi, numărul total de fotografii este par.

56ᵈ. Suma dintre un număr prim și un număr natural impar este 24 735. Să se afle numerele.

57. Să se rezolve ecuațiile următoare în mulțimea **N**:
a) $x + 247 = 485$; b) $2x = 450$; c) $2x - 1 = 321$; d) $4x + 1 = 2x + 25$;
e) $3x = 6\,200\,012$; f) $9x + 1 = 3x + 4\,322\,112$.

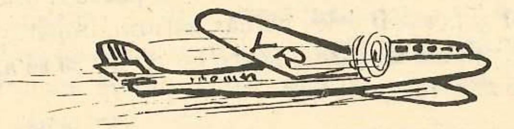
58. Într-o tabără pot fi cel puțin 225 elevi și mai puțin de 229 elevi, băieți și fete.
1) Pot fi în tabără 100 de băieți și 129 fete?
2) Pot fi în tabără de cinci ori mai mulți băieți decît fete?

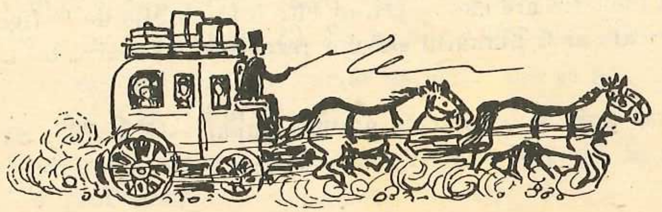
59. Suma a două numere naturale este cel puțin egală cu 135 și mai mică decît 140. Să se afle numerele știind că unul din ele este de patru ori mai mic decît celălalt.

60. Mai mulți copii vor să cumpere împreună un obiect. Dacă fiecare dă cîte 20 de lei, nu ajung 10 lei, iar dacă fiecare dă cîte 30 de lei, prisosesc 40 de lei. Cîți copii sînt și cît costă obiectul?

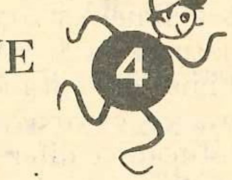
LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

1) Subliniați numerele naturale divizibile cu 2: 1 350, 1 732, 223, 754, 1 236, 457, 425, 7 978, 4 200.
2) Subliniați numerele naturale divizibile cu 3: 113, 1 236, 4 599 081, 9 991 863, 841.
3) Subliniați numerele naturale divizibile cu 4 : 112, 2 136, 1 325, 7 500, 89 372, 4 999.
4) Subliniați numerele naturale divizibile cu 5 : 72 245, 423 754, 897 980, 47 243 600.
5) Subliniați numerele naturale divizibile cu 9: 1 980, 72 415, 5 004, 237, 2 430.
6) Subliniați numerele naturale divizibile cu 7: 149, 1 980, 1 981, 3 430.
7) Scrieți toate numerele prime mai mari decît 20 și mai mici decît 40.
8) Să se descompună următoarele numere naturale în factori primi: 18, 1 260, 324 000.
9) Să se afle c.m.m.m.c. și c.m.m.d.c. ai următoarelor numere naturale: 150, 1 800, 1 260.





NUMERE RAȚIONALE POZITIVE



1. FRACȚII

În figura 1, un pătrat este împărțit în 4 părți de aceeași mărime și 2 din aceste părți sînt hașurate. Ca să arătăm că 2 părți au fost hașurate, din toate cele 4 în care a fost împărțit pătratul considerat, scriem $\frac{2}{4}$ și citim „doi pe patru“ sau „doi supra patru“.

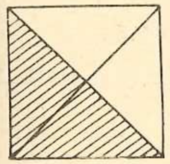


Fig. 1

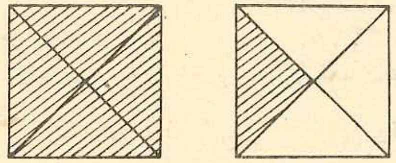


Fig. 2

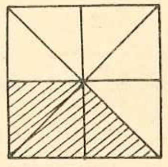


Fig. 3

În figura 2 sînt reprezentate două pătrate de aceeași mărime, fiecare din ele fiind împărțit în cîte 4 părți de aceeași mărime, părțile în care a fost împărțit primul pătrat fiind de aceeași mărime cu părțile în care a fost împărțit cel de-al doilea pătrat. Din cauză că au fost hașurate 5 părți, iar fiecare pătrat a fost împărțit în 4 părți de aceeași mărime, scriem aceasta sub forma $\frac{5}{4}$ și citim „cinci pe patru“.

În figura 3 un pătrat este împărțit în 8 părți de aceeași mărime și 3 din aceste părți sînt hașurate. Arătăm că trei părți au fost hașurate, din cele 8 în care a fost împărțit pătratul considerat, scriind $\frac{3}{8}$ și citind „trei pe opt“. Tot în figura 3 nu sînt hașurate 5 din cele 8 părți. Arătăm că 5 părți nu au fost hașurate, din toate cele 8 părți în care a fost împărțit pătratul considerat, scriind $\frac{5}{8}$ și citind „cinci pe opt“.

Notațiile $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ le vom numi fracții. Fiecare din aceste fracții este formată din cîte o pereche de numere naturale, despărțite prin cîte o linie orizontală. Într-o fracție, numărul natural de deasupra liniei orizontale îl vom numi *numărătorul* fracției, iar numărul natural de dedesubtul liniei orizontale îl vom numi *numitorul* fracției. Linia orizontală care desparte cele două numere naturale dintr-o fracție o vom numi *linie de fracție*. Numitorul oricărei fracții este totdeauna diferit de zero deoarece, atunci cînd împărțim ceva, cum ar fi un pătrat, în părți de aceeași mărime, numărul acestor părți este diferit de zero, iar dacă obiectul considerat, cum ar fi un pătrat, nu este împărțit, acesta va fi format dintr-o singură parte, numărul părților fiind deci egal cu 1, care este diferit de zero. De exemplu, pătratul hașurat din figura 4 are semnificația că a fost hașurată o parte din singura parte din care este format pătratul, ceea ce se exprimă prin fracția $\frac{1}{1}$ care se citește „unu pe unu".

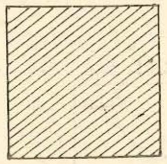


Fig. 4

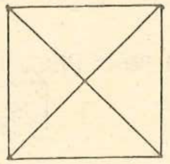


Fig. 5

Numărătorul unei fracții poate fi mai mic decît numitorul aceleiași fracții ca, de exemplu, în $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, caz în care fracția se numește *subunitară*.

Numărătorul unei fracții poate fi egal cu numitorul aceleiași fracții, ca de exemplu în $\frac{1}{1}$, caz în care fracția se numește *echiunitară*.

Numărătorul unei fracții poate fi mai mare decît numitorul aceleiași fracții ca de exemplu în $\frac{5}{4}$, caz în care fracția se numește *supraunitară*.

Numărătorul unei fracții poate fi 0 (zero), așa cum este exemplificat prin figura 5. În această figură pătratul a fost împărțit în patru părți de aceeași mărime, dar nici una din ele nu a fost hașurată. Exprimăm aceasta sub forma $\frac{0}{4}$ și citim „zero pe patru".

Cele de mai sus ne îndreptățesc să definim fracția astfel:

O pereche de numere naturale m și n, în care n este diferit de zero, scrisă sub forma $\frac{m}{n}$, se numește fracție.

Fracțiile se mai citesc și astfel: $\frac{1}{2}$ se citește *o doime*, $\frac{1}{3}$ se citește *o treime*. Fracțiile $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ se citesc respectiv *o pătrime*, *o cincime*, *o șesime*, *o șeptime*, *o optime*, *o noime*, *o zecime*. Fracția $\frac{1}{2}$ se mai citește *jumătate*, iar *fracția* $\frac{1}{4}$ se mai citește *un sfert*. Fracțiile $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ ș.a.m.d. se citesc *două treimi*, *două pătrimi*, *două cincimi* ș.a.m.d.

EXERCIȚII

1. Să se găsească toate fracțiile de forma

$$\frac{\overline{1x}}{\overline{x1}}$$

știind că $\overline{1x}$ și $\overline{x1}$ sînt numere prime.

2. Desenați segmentele de dreaptă avînd următoarele lungimi:

a) $\frac{1}{2}$ dm, b) $\frac{3}{4}$ cm, c) $\frac{4}{5}$ dm.

3. Desenați, pe caietul de matematică, un dreptunghi care să aibă lungimea de 7 cm și lățimea de 1 cm. Hașurați $\frac{5}{7}$ din acest dreptunghi.
4. Să se scrie mulțimea fracțiilor care au numărătorii egali cu 1 și numitorii mai mici decît 5.
5. Să se scrie mulțimea fracțiilor cu numărătorii diferiți de zero și care îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții: a) au numitorii mai mici decît 5 și mai mari decît 1; b) sînt subunitare.
6. Să se scrie mulțimea fracțiilor cu numărătorii diferiți de zero și care îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții: a) au numitorii mai mici decît 4 și mai mari decît 1; b) nu sînt supraunitare.

2. FRACȚII ECHIVALENTE

Dacă un pătrat, de aceeași mărime cu cel din figura 6, îl împărțim în 8 părți de aceeași mărime, ca în figura 7, și hașurăm în figura 7 aceeași parte care a fost hașurată și în figura 6, înseamnă că în figura 7 am hașurat 4 părți din cele 8 în care a fost împărțit pătratul din figura 7 și exprimăm aceasta prin $\frac{4}{8}$, ceea ce se citește *patru pe opt*, *patru supra opt* sau *patru optimi*.

Vom spune că fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ sînt *echivalente* din cauză că partea haşurată în figura 6, exprimată prin $\frac{2}{4}$, este de aceeaşi mărime cu partea haşurată în figura 7. Vom scrie

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

şi vom citi *fracţia doi pe patru este echivalentă cu fracţia patru pe opt* sau *doi pe patru este echivalent cu patru pe opt.*

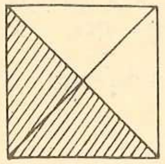


Fig. 6

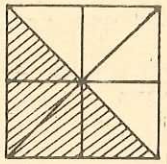


Fig. 7

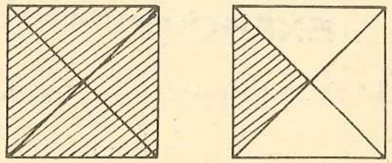


Fig. 8

Se constată că

$$2 \cdot 8 = 4 \cdot 4,$$

deoarece $2 \cdot 8 = 16$ şi $4 \cdot 4 = 16$.

Dacă pătratele de aceeaşi mărime din figura 8 le împărţim în cîte 8 părţi de aceeaşi mărime, ca în figura 9, şi haşurăm aceeaşi parte în figura 9, care a fost haşurată şi în figura 8, înseamnă că în figura 9 am haşurat 10 părţi, fiecare pătrat din figura 9 fiind împărţit în cîte 8 părţi de aceeaşi mărime şi exprimăm aceasta prin $\frac{10}{8}$, ceea ce se citeşte *zece pe opt* sau *zece optimi.* Partea haşurată în figura 8, exprimată prin $\frac{5}{4}$, fiind de aceeaşi mărime cu cea haşurată în figura 9, vom spune că fracţiile $\frac{5}{4}$ şi $\frac{10}{8}$ sînt *echivalente* şi vom scrie

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

şi se constată că

$$5 \cdot 8 = 4 \cdot 10.$$

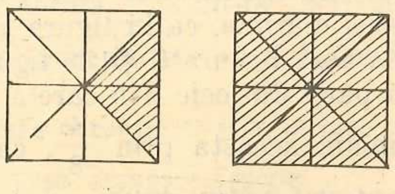


Fig. 9

Deci, vom spune că:

Două fracţii $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ sînt echivalente, ceea ce vom scrie

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$

dacă $mq = np$.

Produsele $m \cdot q$, $n \cdot p$ le-am scris, mai simplu, sub forma mq, np.

PROPRIETĂŢI ALE ECHIVALENŢEI FRACŢIILOR

Reflexivitate

Fracţia $\frac{2}{4}$ este echivalentă cu ea însăşi, deoarece

$$\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$$

avînd $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$. Spunem că această proprietate a echivalenţei fracţiilor este proprietatea de *reflexivitate*, adică:

Pentru orice fracţie $\frac{a}{b}$ avem

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b},$$

deoarece $a \cdot b = b \cdot a$.

Simetrie

Fracţiile $\frac{1}{2}$ şi $\frac{2}{4}$ sînt echivalente, ceea ce se scrie $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ şi odată cu aceasta avem şi $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, deoarece în primul caz $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, iar în al doilea caz $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$. Spunem că această proprietate a echivalenţei fracţiilor este proprietatea de *simetrie*, adică:

Oricare ar fi fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ atunci $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Tranzitivitate

Fracţiile $\frac{1}{2}$ şi $\frac{2}{4}$ sînt echivalente, aşa cum am văzut mai sus. Dar şi fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ sînt echivalente, ceea ce se scrie $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, deoarece $2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$. De asemenea, și fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{4}{8}$ sînt echivalente, deoarece $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$. Deci dacă avem $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ și $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ atunci avem și $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$. Spunem că această proprietate a echivalenței fracțiilor este proprietatea de *tranzitivitate*, adică:

Oricare ar fi fracțiile $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ și $\frac{m}{n}$, dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ și $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ atunci $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Exercițiu rezolvat

Să se arate că fracțiile $\frac{2}{5}$ și $\frac{6}{15}$ sînt echivalente.

Rezolvare

Fracțiile $\frac{2}{5}$ și $\frac{6}{15}$ sînt echivalente, deoarece

$$2 \cdot 15 = 5 \cdot 6.$$

EXERCIȚII

Să se arate că următoarele fracții sînt echivalente:

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{6}$; b) $\frac{1}{7}$ și $\frac{2}{14}$; c) $\frac{1}{3}$ și $\frac{5}{15}$.

3. PROCEDEE DE A OBȚINE FRACȚII ECHIVALENTE

AMPLIFICAREA ȘI SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR

Amplificarea

Înmulțind numărătorul și numitorul fracției $\frac{2}{4}$ cu 2, obținem fracția $\frac{4}{8}$ cu care fracția $\frac{2}{4}$ este echivalentă, așa cum am văzut mai

înainte. Spunem că fracția $\frac{4}{8}$ a fost obținută din fracția $\frac{2}{4}$ prin amplificare cu 2.

Înmulțind numărătorul și numitorul fracției $\frac{2}{4}$ cu 7, obținem fracția $\frac{14}{28}$ cu care fracția $\frac{2}{4}$ este echivalentă, deoarece putem scrie

$$\frac{2}{4} = \frac{14}{28}$$

avînd în vedere că $2 \cdot 28 = 4 \cdot 14$, deoarece $2 \cdot 28 = 56$ și $4 \cdot 14 = 56$. Spunem că fracția $\frac{14}{28}$ a fost obținută din fracția $\frac{2}{4}$ prin amplificare cu 7. În general:

A amplifica o fracție înseamnă a obține o fracție în care numărătorul și numitorul se capătă respectiv prin înmulțirea numărătorului și numitorului fracției date cu același număr natural, diferit de zero.

Fracția $\frac{mp}{np}$ obținută din fracția $\frac{m}{n}$ prin amplificarea acesteia cu un număr natural p, diferit de zero, este echivalentă cu fracția $\frac{m}{n}$.

În adevăr, avem

$$\frac{mp}{np} = \frac{m}{n},$$

deoarece $(mp)n = (np)m$. Numărul natural p trebuie să fie diferit de zero, ca numitorul np al fracției $\frac{mp}{np}$ să fie diferit de zero.

Numărul natural cu care amplificăm o fracție se scrie mic, sus, în stînga fracției ce se amplifică, despărțit de fracția de amplificat printr-o paranteză.

Exemplu

$$^{3)}\frac{2}{5} = \frac{6}{15}.$$

EXERCIȚII

a) Să se amplifice cu 2 următoarele fracții:

$$\frac{2}{4}; \frac{3}{5}; \frac{1}{8}; \frac{1}{10}; \frac{2}{33}; \frac{41}{770}.$$

b) Să se amplifice cu 4 următoarele fracții:

$$\frac{1}{5}; \frac{2}{7}; \frac{20}{33}; \frac{11}{430}.$$

Simplificarea

Împărţind numărătorul şi numitorul fracţiei $\frac{4}{8}$ cu 2, obţinem fracţia $\frac{2}{4}$ cu care fracţia $\frac{4}{8}$ este echivalentă, aşa cum am văzut mai înainte. Spunem că fracţia $\frac{2}{4}$ a fost obţinută din fracţia $\frac{4}{8}$ prin simplificare cu 2. Se constată că 2 este un divizor comun al numerelor 4 şi 8, deoarece $4 = 2 \cdot 2$ şi $8 = 4 \cdot 2$.

Împărţind numărătorul şi numitorul fracţiei $\frac{14}{28}$ cu 7, obţinem fracţia $\frac{2}{4}$ cu care fracţia $\frac{14}{28}$ este echivalentă, aşa cum am văzut mai înainte. Spunem că fracţia $\frac{2}{4}$ a fost obţinută din fracţia $\frac{14}{28}$ prin simplificare cu 7. Se constată că 7 este un divizor comun al numerelor 14 şi 28, deoarece $14 = 2 \cdot 7$ şi $28 = 4 \cdot 7$. În general:

A simplifica o fracţie înseamnă a obţine o fracţie în care numărătorul şi numitorul se capătă respectiv prin împărţirea numărătorului şi numitorului fracţiei date cu acelaşi număr natural care este divizor comun al numărătorului şi numitorului fracţiei date.

Fracţia $\frac{m}{n}$ obţinută din fracţia $\frac{mp}{np}$ prin simplificarea acesteia cu un număr natural p, care este divizor comun al lui mp şi np, este echivalentă cu fracţia $\frac{mp}{np}$.

În adevăr, avem

$$\frac{m}{n} = \frac{mp}{np},$$

deoarece $m(np) = n(mp)$.

Numărul natural cu care simplificăm o fracţie se scrie mic, sus, în dreapta fracţiei pe care o simplificăm, despărţit de fracţia de simplificat printr-o paranteză.

Exemplu

$$\frac{20^{(10}}{30} = \frac{2}{3}.$$

FRACŢIE IREDUCTIBILĂ

Fracţia $\frac{2}{3}$ pe care am obţinut-o prin simplificarea cu 10 a fracţiei $\frac{20}{30}$ nu mai poate fi simplificată, numerele 2 şi 3 fiind prime între ele. Spunem că fracţia $\frac{2}{3}$ este o fracţie ireductibilă.

În general:

O fracţie $\frac{a}{b}$ este ireductibilă, dacă cel mai mare divizor comun al lui a şi b este 1, sau, ceea ce este acelaşi lucru, dacă numerele a şi b sînt prime între ele.

Este *recomandabil* să simplificăm fracţia *direct* cu c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului. De exemplu, simplificăm $\frac{24}{32}$ direct cu 8, unde 8 este c.m.m.d.c. al numerelor naturale 24 şi 32.

Sau, descompunem, mai întîi, numărătorul şi numitorul în factori primi, ca în exemplul:

$$\frac{252}{441} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}{3^2 \cdot 7^2} = \frac{4}{7}.$$

Bineînţeles că putem simplifica fracţia şi *din aproape în aproape:*

$$\frac{24^{(2}}{32} = \frac{12^{(2}}{16} = \frac{6^{(2}}{8} = \frac{3}{4}$$

sau

$$\frac{24^{(2}}{32} = \frac{12^{(4}}{16} = \frac{3}{4}.$$

EXERCIŢII

1. Să se simplifice fracţiile, obţinînd fracţii ireductibile:

$$\frac{2}{4};\ \frac{4}{6},\ \frac{3}{9};\ \frac{6}{8};\ \frac{30}{40},\ \frac{100}{3\,000},\ \frac{150}{450},\ \frac{12}{36},\ \frac{1\,260}{1\,960},\ \frac{2^3 \cdot 35}{3 \cdot 8 \cdot 25},\ \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5}{2 \cdot 3^2 \cdot 5}.$$

2. Fără a calcula numărătorul şi numitorul următoarelor fracţii:

a) $\frac{20+5}{5}$; b) $\frac{15+7}{14+30}$; c) $\frac{32-24}{40-16}$

le puteţi simplifica?

4. ADUCEREA FRACȚIILOR LA ACELAȘI NUMITOR SAU LA NUMITOR COMUN

Fie fracțiile $\frac{2}{4}$ și $\frac{3}{8}$. Dacă amplificăm prima fracție cu 8, care este numitorul fracției $\frac{3}{8}$, obținem fracția $\frac{16}{32}$ care este echivalentă cu fracția $\frac{2}{4}$, adică

$$\frac{16}{32}=\frac{2}{4}.$$

Dacă amplificăm a doua fracție cu 4, care este numitorul fracției $\frac{2}{4}$, obținem fracția $\frac{12}{32}$ care este echivalentă cu fracția $\frac{3}{8}$, adică

$$\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

Fracțiile $\frac{16}{32}$ și $\frac{12}{32}$ au același numitor. Spunem că fracțiile $\frac{2}{4}$ și $\frac{3}{8}$ au fost aduse la același numitor sau au fost aduse la numitor comun. Exprimînd acest rezultat pentru două fracții oarecare $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ avem următoarele:

Fiind date două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, prin amplificarea primei fracții cu numitorul celei de-a doua fracții și prin amplificarea celei de-a doua fracții cu numitorul primei fracții obținem fracțiile $\frac{ad}{bd}$ și $\frac{bc}{bd}$ care au același numitor.

Procedeul de mai înainte nu este singurul prin care putem obține două fracții cu același numitor, echivalente respectiv cu alte două fracții.

De exemplu, prin simplificarea cu 2 a fracției $\frac{2}{4}$ obținem fracția $\frac{1}{2}$ echivalentă cu fracția $\frac{2}{4}$. Amplificînd fracția $\frac{1}{2}$ cu 8, care este numitorul fracției $\frac{3}{8}$, obținem fracția $\frac{8}{16}$ echivalentă cu fracția $\frac{1}{2}$, deci și cu fracția $\frac{2}{4}$. Amplificînd fracția $\frac{3}{8}$ cu 2, care este numitorul fracției $\frac{1}{2}$, obținem fracția $\frac{6}{16}$ care este echivalentă cu fracția $\frac{3}{8}$.

Deci am obținut fracțiile $\frac{8}{16}$ și $\frac{6}{16}$ care au același numitor și sînt respectiv echivalente cu fracțiile $\frac{2}{4}$ și $\frac{3}{8}$.

Dacă amplificăm fracția $\frac{2}{4}$ cu 2 obținem fracția $\frac{4}{8}$ echivalentă cu fracția $\frac{2}{4}$ și care are același numitor cu fracția $\frac{3}{8}$. Deci fracțiile $\frac{4}{8}$ și $\frac{3}{8}$ au același numitor și sînt respectiv echivalente cu fracțiile $\frac{2}{4}$ și $\frac{3}{8}$.

Numitorul comun 8 al fracțiilor $\frac{4}{8}$ și $\frac{3}{8}$ este cel mai mic dintre numitorii comuni 32, 16, 8 obținuți în perechile de fracții $\frac{16}{32}$ și $\frac{12}{32}$, apoi $\frac{8}{16}$ și $\frac{6}{16}$ și, în sfîrșit, $\frac{4}{8}$ și $\frac{3}{8}$. Numărul natural 8 este cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale 4 și 8. Deci am trecut de la fracțiile $\frac{2}{4}$ și $\frac{3}{8}$ la fracțiile $\frac{4}{8}$ și $\frac{3}{8}$, cu care acestea sînt respectiv echivalente, prin amplificarea primei fracții $\frac{2}{4}$ cu cîtul dintre cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale 4 și 8, care sînt numitorii fracțiilor $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, și numitorul 4 al primei fracții. Fracția $\frac{3}{8}$ nu am mai amplificat-o, deoarece cîtul dintre cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale 4 și 8 și numitorul 8 al celei de-a doua fracții $\frac{3}{8}$ este 1. Exprimînd acest rezultat pentru două fracții ireductibile oarecare $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, obținem *aducerea la cel mai mic numitor comun* a două fracții:

Fiind date două fracții ireductibile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, obținem două fracții cu același numitor, egal cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor b și d, echivalente respectiv cu fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ dacă

1) amplificăm prima fracție $\frac{a}{b}$ cu cîtul dintre cel mai mic multiplu comun al numitorilor b și d și numitorul b;

2) amplificăm cea de-a doua fracție $\frac{c}{d}$ cu cîtul dintre cel mai mic multiplu comun al numitorilor b și d și numitorul d.

Operația prin care obținem două fracții cu același numitor, echivalente respectiv cu două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, se numește *aducerea la același numitor* sau *la numitor comun* a fracțiilor considerate.

Dacă avem mai mult de două fracții, de exemplu, trei, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$ și $\frac{5}{6}$, le aducem la același numitor calculînd, mai întîi, cel mai mic multiplu comun al numitorilor lor. 4, 8 și 6 au cel mai mic multiplu comun egal cu 24. Cîtul dintre 24 și 4 este 6, cîtul dintre 24 și 8 este 3 și cîtul dintre 24 și 6 este 4. Amplificînd pe $\frac{2}{4}$ cu 6, pe $\frac{3}{8}$ cu 3 și pe $\frac{5}{6}$ cu 4 obținem fracțiile $\frac{12}{24}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{20}{24}$ care au același numitor și sînt echivalente respectiv cu fracțiile $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$ și $\frac{5}{6}$.

Se recomandă ca *la aducerea la același numitor a mai multor fracții* să se simplifice fracțiile, atunci cînd este cazul, pentru a avea numitorii mai mici.

Exemplu. Să se aducă la același numitor fracțiile

$$\frac{5}{12},\ \frac{143}{231},\ \frac{1}{15}.$$

1) Simplificăm fracția a doua: $\frac{143^{(11}}{231} = \frac{13}{21}$. Avem acum fracțiile ireductibile $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{1}{15}$ echivalente cu fracțiile date.

2) Numitorul comun este c.m.m.m.c. al numerelor 12, 21, 15. Avem

$$12 = 2^2 \cdot 3,$$
$$21 = 3 \cdot 7,$$
$$15 = 3 \cdot 5,$$

c.m.m.m.c. al numerelor 12, 21, 15 este $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

3) $420 : 12 = 5 \cdot 7 = 35;\quad {}^{35)}\frac{5}{12} = \frac{175}{420};$

$420 : 21 = 2^2 \cdot 5 = 20;\quad {}^{20)}\frac{13}{21} = \frac{260}{420};$

$420 : 15 = 2^2 \cdot 7 = 28;\quad {}^{28)}\frac{1}{15} = \frac{28}{420}.$

Fracțiile $\frac{175}{420}$, $\frac{260}{420}$, $\frac{28}{420}$ au același numitor și sînt respectiv echivalente cu fracțiile $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{1}{15}$.

De asemenea, *la calculul numitorului comun* se recomandă să se țină seama de proprietățile celui mai mic multiplu comun al mai multor numere.

Astfel, *dacă unul din numitori este un multiplu comun al celorlalți, acesta va fi numitorul comun.*

Exemplu. Fiind date fracțiile $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{17}{24}$, numitorul 24 este multiplu al lui 3 și al lui 4, deoarece $24 : 3 = 8$, $24 : 4 = 6$. Deci numitorul comun va fi 24.

$${}^{8)}\frac{1}{3} = \frac{8}{24},\quad {}^{6)}\frac{3}{4} = \frac{18}{24}.$$

Fracțiile $\frac{8}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{17}{24}$ au același numitor și sînt echivalente respectiv cu fracțiile $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{17}{24}$.

Dacă numitorii sînt primi doi cîte doi, numitorul comun va fi egal cu produsul numitorilor.

Exemplul 1. Fiind date fracțiile $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{25}$, numitorii 6 și 25 sînt primi între ei. În adevăr, 6 și 25 nu au nici un factor prim comun, avînd $6 = 2 \cdot 3$, $25 = 5^2$. c.m.m.m.c. al numerelor 6 și 25 este $2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$. Avem:

$$150 : 6 = 25,\quad {}^{25)}\frac{5}{6} = \frac{125}{150},$$

$$150 : 25 = 6,\quad {}^{6)}\frac{7}{25} = \frac{42}{150}.$$

Fiecare din fracțiile $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{25}$ a fost amplificată cu numitorul celeilalte.

Exemplul 2. Fiind date fracțiile $\frac{8}{35}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{1}{143}$, numitorii $35 = 5 \cdot 7$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $143 = 11 \cdot 13$ sînt primi doi cîte doi: numerele 35 și 24 sînt prime între ele; 35 și 143 sînt prime între ele; 24 și 143 sînt prime între ele.

c.m.m.m.c. al numerelor 35, 24, 143 este $35 \cdot 24 \cdot 143$.

Prima fracţie $\frac{8}{35}$ se amplifică cu $24 \cdot 143$, fracţia a doua $\frac{5}{24}$ se amplifică cu $35 \cdot 143$, iar fracţia a treia $\frac{1}{143}$ se amplifică cu $35 \cdot 24$, adică fiecare din fracţiile $\frac{8}{35}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{1}{143}$ se amplifică cu produsul numitorilor celorlalte fracţii.

Exemplul 3. Fiind date fracţiile $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{5}{8}$, numitorii 4, 15, 8 nu sînt primi doi cîte doi, deoarece numerele 4 şi 8 nu sînt prime între ele. Deci c.m.m.m.c. al numerelor 4, 15, 8 se va determina, ca în cazul general, scriind $4 = 2^2$, $15 = 3 \cdot 5$, $8 = 2^3$ şi calculînd pe $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ care va fi numitorul comun.

În cazul în care numitorul comun, la care au fost aduse mai multe fracţii ireductibile, este cel mai mic multiplu comun al numitorilor acestor fracţii, se spune că *fracţiile au fost aduse la cel mai mic numitor comun.*

EXERCIŢII

Să se aducă următoarele fracţii la cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$; d) $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{10}$; e) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;
f) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$; g) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$; h) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$; i) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$; j) $\frac{1}{11}$, $\frac{5}{33}$;
k) $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{7}{54}$; l) $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{72}$; m) $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{75}$, $\frac{1}{18}$; n) $\frac{1}{60}$, $\frac{7}{90}$, $\frac{1}{63}$;
o) $\frac{3}{98}$, $\frac{5}{168}$, $\frac{1}{441}$.

5. NUMĂR RAŢIONAL

Cu ajutorul fracţiei $\frac{2}{4}$ arătăm că în figura 10 jumătate dintr-un pătrat a fost haşurată după ce l-am împărţit în 4 părţi de aceeaşi mărime şi am haşurat două părţi din acestea. Cu ajutorul fracţiei $\frac{4}{8}$ arătăm că în figura 11 tot jumătate dintr-un pătrat, de aceeaşi mărime cu cel din figura 10, a fost haşurată după ce l-am împărţit în 8 părţi de aceeaşi mărime şi am haşurat 4 părţi din acestea. Dato-

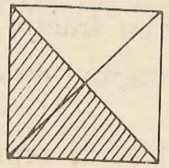


Fig. 10

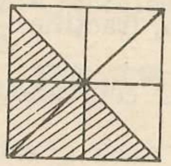


Fig. 11

rită faptului că a fost haşurată aceeaşi parte din pătratele de aceeaşi mărime reprezentate în figurile 10 şi 11, fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ sînt echivalente:

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}.$$

Din cele de mai sus, putem spune că fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ sînt reprezentări diferite ale unuia şi aceluiaşi număr, anume ale acelui număr prin care se exprimă jumătate dintr-un pătrat, număr pe care îl numim *număr raţional* şi pe care îl definim ca fiind mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu fracţia $\frac{2}{4}$.

În general:

Un număr raţional este mulţimea tuturor fracţiilor $\frac{m}{n}$ echivalente cu o fracţie dată $\frac{a}{b}$.

Să notăm cu A numărul raţional definit mai sus. Se spune că fracţia $\frac{a}{b}$ este *reprezentantul* numărului raţional A sau că fracţia $\frac{a}{b}$ *reprezintă numărul raţional* A. Vom conveni ca un număr raţional A care are ca reprezentant fracţia $\frac{a}{b}$ să fie notat ca fracţia $\frac{a}{b}$. Deci, vom conveni ca numărul raţional P care are ca reprezentant fracţia $\frac{2}{4}$ să fie notat cu $\frac{2}{4}$. Vom înţelege prin aceasta că P este mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu fracţia $\frac{2}{4}$.

Orice fracţie din mulţimea care defineşte un număr raţional poate fi un reprezentant al acestui număr raţional.

În adevăr, în orice mulţime de fracţii echivalente cu o fracţie dată, orice fracţie este echivalentă cu oricare fracţie din acea mulţime.

De exemplu, fracţiile $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ sînt echivalente cu fracţia $\frac{2}{4}$. Dar şi fracţia $\frac{1}{2}$ este echivalentă cu fracţia $\frac{4}{8}$.

Rezultă că dacă P este numărul raţional al cărui reprezentant este fracţia $\frac{2}{4}$, atunci şi $\frac{4}{8}$ şi r, unde r este orice fracţie echivalentă cu fracţia $\frac{2}{4}$, sînt reprezentanţi ai numărului raţional P. De exemplu, r este $\frac{1}{2}$. Pentru acest motiv, orice fracţie va fi numită şi număr raţional: vom spune fie fracţia $\frac{2}{4}$, fie numărul raţional $\frac{2}{4}$.

În felul acesta se explică de ce cu orice fracţie echivalentă cu fracţia $\frac{2}{4}$ putem exprima jumătate din orice pătrat de aceeaşi mărime cu cel din figura 10. Dacă un astfel de pătrat este împărţit în patru părţi de aceeaşi mărime, ca în figura 10, jumătate din el o exprimăm cu $\frac{2}{4}$. Dacă un astfel de pătrat este împărţit în 8 părţi de aceeaşi mărime, ca în figura 11, jumătate din el o exprimăm cu $\frac{4}{8}$ ş.a.m.d.

Mulţimea numerelor raţionale de mai înainte se notează cu $\mathbb{Q}_+$. Numerele raţionale de mai înainte, reprezentate de fracţii cu numărătorul diferit de zero, se numesc *numere raţionale pozitive*.

EGALITATEA ÎNTRE NUMERE RAŢIONALE

Egalitatea dintre două numere raţionale este egantatea mulţimilor care le definesc. Această egalitate se exprimă cu ajutorul echivalenţei fracţiilor care sînt respectiv reprezentanţii celor două numere raţionale considerate. Deci prin

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

vom înţelege că fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ sînt echivalente sau că numerele raţionale $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ sînt egale. Prin urmare, vom defini egalitatea a două numere raţionale astfel:

Două numere raţionale P şi R, unde P este reprezentat de fracţia $\frac{m}{n}$ şi R este reprezentat de fracţia $\frac{p}{q}$, sînt egale, ceea ce vom scrie

$$P = R,$$

dacă fracţiile $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ sînt echivalente sau, altfel spus, dacă $mq = np$.

PROPRIETĂŢI ALE EGALITĂŢII NUMERELOR RAŢIONALE

Am văzut, mai înainte, că fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ reprezintă acelaşi număr raţional P. Deci echivalenţa între fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ se scrie ca egalitate între numere raţionale:

$$P = P.$$

Proprietatea prin care se exprimă că în ambii membri ai unei egalităţi poate figura acelaşi număr raţional se numeşte *reflexivitatea egalităţii*. Această proprietate se formulează astfel:

Oricare ar fi numărul raţional P avem

$$P = P.$$

Dacă notăm cu P numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{2}{4}$ şi cu R numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{4}{8}$, atunci avem $P = R$, deoarece fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ sînt echivalente. Dar avem şi $R = P$, deoarece fracţiile $\frac{4}{8}$ şi $\frac{2}{4}$ sînt echivalente. Deci egalitatea numerelor raţionale are proprietatea de *simetrie* pe acest exemplu, dar o are şi în general, proprietate care se formulează astfel:

Oricare ar fi numerele raţionale P şi R dacă $P = R$ atunci $R = P$.

Să mai notăm cu T numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{1}{2}$. Fracţiile $\frac{2}{4}$ şi $\frac{4}{8}$ fiind echivalente cu fracţia $\frac{1}{2}$, avem $P = T$ şi $R = T$. Deci o dată cu $P = R$ şi $R = T$ avem şi $P = T$. Aceasta este proprietatea de *tranzitivitate a egalităţii*, care se formulează astfel:

Oricare ar fi numerele raţionale P R, T dacă $P = R$ şi $R = T$ atunci $P = T$.

IDENTIFICAREA MULȚIMII NUMERELOR NATURALE CU O PARTE A MULȚIMII NUMERELOR RAȚIONALE

Printre numere raționale există numere raționale reprezentate de fracții cu numitorul egal cu 1. Un astfel de număr rațional este, de exemplu, reprezentat de fracția $\frac{5}{1}$. Să notăm cu P acest număr rațional.

Numărul rațional P îl vom identifica cu numărul natural 5.

În general:

Dacă A este un număr rațional reprezentat de fracția $\frac{a}{1}$, unde a este un număr natural, vom spune că A este numărul natural a.

În felul acesta, *orice număr natural este un număr rațional.* Cu alte cuvinte

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}_+,$$

unde $\mathbf{N}$ este mulțimea numerelor naturale, iar $\mathbf{Q}_+$ este mulțimea numerelor raționale de mai înainte.

6. **REPREZENTAREA PE DREAPTĂ A NUMERELOR RAȚIONALE POZITIVE**

În figura 12, pe dreapta (d), fixăm un punct O, numit *originea* coordonatelor. Pe dreapta (d) mai luăm un punct I. Sensul de la punctul O la punctul I, pe dreapta (d), îl vom numi *sensul pozitiv* al dreptei (d), iar sensul opus, pe dreapta (d), îl vom numi *sensul negativ* al dreptei (d). Fie un segment dat MN, numit *unitate de măsură*.

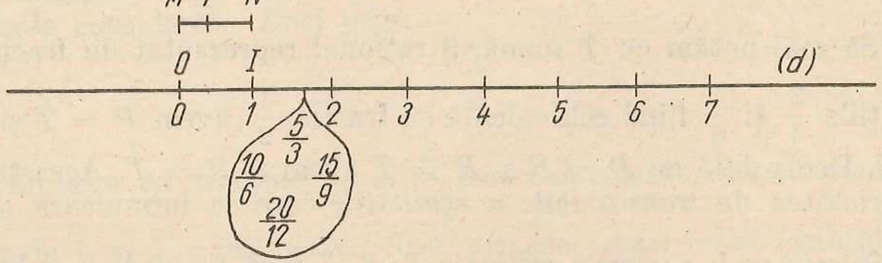


Fig. 12

Dacă segmentul MN îl împărțim în trei părți de aceeași lungime și măsurăm, începînd de la punctul O, în sensul pozitiv al dreptei (d), un segment a cărui lungime este egală cu de 5 ori lungimea segmentului MP, care este o treime din segmentul MN, punem numărul rațional pozitiv $\frac{5}{3}$ în extremitatea, diferită de punctul O, a segmentului măsurat.

Am spus numărul rațional și nu fracția $\frac{5}{3}$, deoarece în dreptul extremității, diferite de punctul O, a aceluiași segment, putem pune același număr rațional, dar notat cu $\frac{10}{6}$, fracția $\frac{10}{6}$ fiind echivalentă cu fracția $\frac{5}{3}$. Aceasta are loc dacă împărțim segmentul MN în 6 părți de aceeași lungime și măsurăm, începînd de la punctul O, în sensul pozitiv al dreptei (d), un segment a cărui lungime este de 10 ori lungimea unei șesimi din lungimea segmentului MN. Deci, în dreptul unor puncte ale dreptei (d) pot fi așezate fracții diferite, dar echivalente între ele, reprezentînd același număr rațional.

7. **SEMNALAREA PRIN EXEMPLE A EXISTENȚEI NUMERELOR ÎNTREGI ȘI RAȚIONALE NEGATIVE**

NUMERE ÎNTREGI

În figura 13 măsurăm, începînd de la punctul O, atît în sensul pozitiv al dreptei (d) cît și în sensul negativ al aceleiași drepte, segmente ale căror lungimi sînt egale cu lungimea segmentului MN, apoi cu de două ori lungimea segmentului MN ş.a.m.d. Dacă, începînd de la punctul O, s-a măsurat, în sensul pozitiv al dreptei (d), un segment a cărui lungime este de trei ori lungimea segmentului MN, punem 3 în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat.

Dacă, începînd de la punctul O, s-a măsurat, în sensul negativ al dreptei (d), un segment a cărui lungime este de două ori lungimea

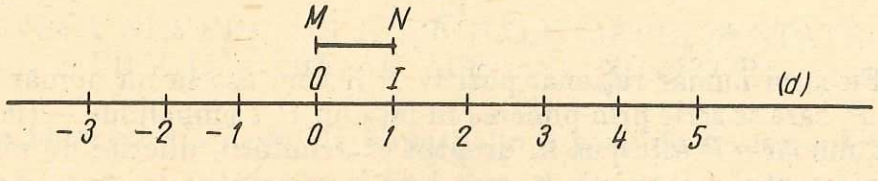


Fig. 13

segmentului MN, punem -2 în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat. În dreptul originii O punem numărul natural 0.

Fiecărui număr natural a, diferit de 0, îi putem deci asocia pe dreapta (d) un număr notat cu $-a$, prin punerea simbolului — (minus) în fața numărului natural a. Acest număr $-a$ este pus în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat, începînd de la punctul O, în sensul negativ al dreptei (d), care segment îndeplinește următoarele. Este de aceeași lungime cu segmentul măsurat, începînd tot de la punctul O, dar în sensul pozitiv al dreptei (d), astfel încît în dreptul extremității sale, diferite de punctul O, să fie pus numărul natural a.

Numerele notate cu $-a$, unde a este un număr natural diferit de zero, se numesc *numere întregi negative*. Cîteva numere întregi negative sînt $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12$. Prin contrast cu numerele întregi negative, numerele naturale, diferite de zero, se numesc *numere întregi pozitive*. Și 0 este considerat număr întreg, fără a fi însă nici pozitiv și nici negativ. Mulțimea numerelor întregi este deci următoarea mulțime:

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

pe care o vom nota cu $\mathbb{Z}$. Observăm că $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

NUMERE RAȚIONALE NEGATIVE

Dacă, începînd de la punctul O, măsurăm, în sensul negativ al dreptei (d) din figura 14, un segment a cărui lungime este de 7 ori lungimea segmentului MP, care este o treime din segmentul MN, punem $-\frac{7}{3}$ în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat.

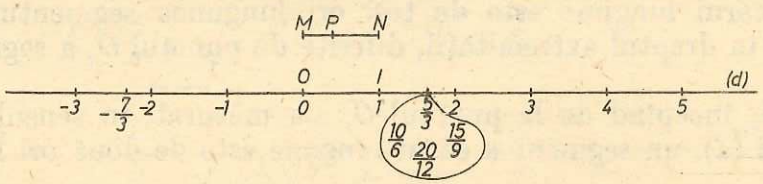


Fig. 14

Fiecărui număr rațional pozitiv P îi vom asocia un număr notat cu $-P$, care se scrie prin punerea în fața lui P a simbolului — (minus). Acest număr $-P$ este pus în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat, începînd de la punctul O, în sensul negativ

al dreptei (d), care segment îndeplinește următoarele. Este de aceeași lungime cu segmentul măsurat, începînd tot de la punctul O, dar în sensul pozitiv al dreptei (d), astfel încît în dreptul extremității sale, diferite de punctul O, este pus numărul rațional P.

Numerele notate cu $-P$, unde P este un număr rațional pozitiv, se numesc *numere raționale negative*. Cîteva numere raționale negative sînt $-\frac{3}{4}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{5}{1}$, -3. Numărul întreg negativ -3 este un număr rațional negativ pentru motivul că toate numerele întregi negative sînt numere raționale negative. Într-adevăr, numărul natural a, diferit de zero, și numărul rațional pozitiv P reprezentat de fracția $\frac{a}{1}$ se află în dreptul aceluiași punct al dreptei (d). De aceea și numerele $-a$ și $-P$ sînt așezate în dreptul aceluiași punct de pe dreapta (d), dar în celălalt sens al acestei drepte. Numărul rațional 0 nu este nici pozitiv nici negativ.

Cînd se iau în considerație numerele raționale negative, atunci prin număr rațional se înțelege ori un număr rațional pozitiv, ori zero, ori un număr rațional negativ. Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$. În cazul în care ne mărginim numai la numere raționale pozitive și la zero, atunci este mai comod să le numim numere raționale, așa cum le-am mai numit pînă acum și așa cum le vom numi și de acum încolo.

EXERCIȚII

Să se reprezinte pe o dreaptă numerele:

a) 0; 1; 3; 5; 7; 9; b) 2; 4; 6; 8; c) 1; 3; 7; 10; d) 2; -2; 0; 3; -3;

e) -5; 0; -7; -1; 2; 5; f) -1; -3; 4; 2; 0; -5;

g) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 2; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{7}{4}$; h) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$;

i) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{4}{3}$.

8. ADUNAREA

ADUNAREA NUMERELOR RAȚIONALE REPREZENTATE DE FRACȚII CARE AU ACELAȘI NUMITOR

Fie pătratul din figura 15 împărțit în 8 părți de aceeași mărime, în care 3 părți sînt hașurate cu linii oblice, ceea ce notăm cu $\frac{3}{8}$, iar

2 părţi sînt haşurate cu linii verticale, ceea ce notăm cu $\frac{2}{8}$. Partea haşurată în figura 15 este formată din 5 părţi, ceea ce notăm cu $\frac{5}{8}$.

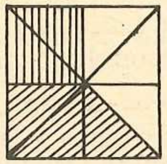


Fig. 15

Se constată că partea haşurată în figura 15 se obţine prin alăturarea celor două părţi, una haşurată cu linii oblice, iar cealaltă haşurată cu linii verticale. Vom exprima aceasta scriind că

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

şi vom spune că numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{5}{8}$ este *suma* numerelor raţionale care se numesc *termenii* sumei şi sînt reprezentate de fracţiile $\frac{3}{8}$ şi $\frac{2}{8}$. Se constată că numărătorul 5 al sumei $\frac{5}{8}$ a numerelor raţionale reprezentate de fracţiile $\frac{3}{8}$ şi $\frac{2}{8}$ este suma numărătorilor fracţiilor $\frac{3}{8}$ şi $\frac{2}{8}$, adică

$$5 = 3 + 2.$$

Vom exprima aceasta scriind

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3+2}{8}.$$

Pentru oricare pereche de numere raţionale reprezentate de fracţii cu acelaşi numitor, raţionînd analog, în sensul că alăturăm părţi de aceeaşi mărime, vom spune că:

Suma numerelor raţionale reprezentate de fracţiile $\frac{a}{m}$ şi $\frac{b}{m}$ este numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{a+b}{m}$;

ceea ce se scrie

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}.$$

Cu alte cuvinte:

Suma a două numere raţionale reprezentate de fracţii cu acelaşi numitor este numărul raţional reprezentat de fracţia al cărei numărător este suma numărătorilor celor două fracţii, iar al cărei numitor este numitorul comun al celor două fracţii.

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$; c) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$; d) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}$; e) $\frac{1}{24}+\frac{5}{24}$; f) $\frac{1}{16}+\frac{5}{16}$;

g) $\frac{1}{32}+\frac{5}{32}$; h) $\frac{2}{45}+\frac{3}{45}$; i) $\frac{1}{4\cdot5}+\frac{3}{4\cdot5}$; j) $\frac{4}{5\cdot131}+\frac{6}{5\cdot131}$.

ADUNAREA NUMERELOR RAŢIONALE REPREZENTATE DE FRACŢII CARE AU NUMITORII DIFERIŢI

Fie pătratul din figura 16, pe care-l considerăm, mai întîi, împărţit cu ajutorul diagonalelor sale în 4 părţi de aceeaşi mărime. O parte din cele 4 părţi a fost haşurată cu linii orizontale, ceea ce se exprimă prin $\frac{1}{4}$. Considerăm apoi acelaşi pătrat împărţit în 8 părţi de aceeaşi mărime. 4 părţi din cele 8 au fost haşurate cu linii verticale, ceea ce se exprimă prin $\frac{4}{8}$. Dacă ne referim la întreaga parte haşurată în figura 16, constatăm că sînt haşurate 6 părţi din toate cele 8, care s-au format atunci cînd pătratul a fost împărţit în 8 părţi de aceeaşi mărime, ceea ce se exprimă prin $\frac{6}{8}$. Se constată că partea haşurată în figura 16 se obţine prin alăturarea celor două părţi, una haşurată cu linii orizontale, iar cealaltă haşurată cu linii verticale. Vom exprima aceasta scriind

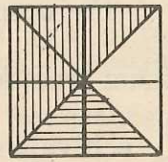


Fig. 16

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{8}=\frac{6}{8}$$

şi vom spune că numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{6}{8}$ este *suma* numerelor raţionale care se numesc *termenii* sumei şi sînt reprezentate de fracţiile $\frac{1}{4}$ şi $\frac{4}{8}$.

Partea din figura 16, haşurată cu linii orizontale, poate fi considerată că este formată din 2 părţi din cele 8 în care a fost împărţit pătratul şi atunci $\frac{2}{8}$ exprimă aceeaşi parte ca şi $\frac{1}{4}$. Dar atunci partea haşurată în figura 16 poate fi exprimată şi prin suma

$$\frac{2}{8}+\frac{4}{8}$$

care este egală cu $\frac{6}{8}$, deoarece termenii $\frac{2}{8}$ și $\frac{4}{8}$ ai acestei sume au același numitor. Se observă că fracțiile $\frac{1}{4}$ și $\frac{2}{8}$ sînt echivalente. Se constată că suma $\frac{6}{8}$ a numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{2}{8}$ și $\frac{4}{8}$ este aceeași cu suma numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{8}$. Fracțiile $\frac{2}{8}$ și $\frac{4}{8}$ au fost obținute prin aducere la același numitor, respectiv a fracțiilor $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{8}$.

Pentru a aduna două numere raționale reprezentate de fracții cu numitorii diferiți, înlocuim fracțiile, ce reprezintă numerele raționale date, cu fracții cu același numitor, respectiv echivalente cu fracțiile date.

Fie numerele raționale reprezentate de fracțiile $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{8}$. Amplificînd fracția $\frac{1}{4}$ cu 8, care este numitorul fracției $\frac{4}{8}$, obținem fracția $\frac{8}{32}$ echivalentă cu fracția $\frac{1}{4}$. Amplificînd fracția $\frac{4}{8}$ cu 4, care este numitorul fracției $\frac{1}{4}$, obținem fracția $\frac{16}{32}$ echivalentă cu fracția $\frac{4}{8}$. Avem

$$\frac{8}{32} + \frac{16}{32} = \frac{24}{32}.$$

Simplificînd fracția $\frac{24}{32}$ cu 4, se observă că fracția $\frac{24}{32}$ este echivalentă cu fracția $\frac{6}{8}$ care reprezintă numărul rațional obținut prin adunarea numerelor raționale reprezentate respectiv de fracțiile $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{8}$.

Fiind date fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, prin amplificarea fiecăreia din ele cu numitorul celeilalte, obținem fracțiile $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ cu același numitor, echivalente respectiv cu fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, și apoi adunînd numerele raționale reprezentate de fracțiile $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, care au același numitor, obținem numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{ad+bc}{bd}$.

În felul acesta:

Suma a două numere raționale A și B, unde A este reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, B este reprezentat de fracția $\frac{c}{d}$, este un număr rațional S, unde S este reprezentat de fracția $\frac{ad+bc}{bd}$.

Suma a două numere raționale A și B se mai notează cu $A + B$, numerele raționale A și B numindu-se *termenii* sumei.

Fracțiile $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ și $\frac{8}{32}$ reprezintă același număr rațional, deoarece sînt echivalente cu fracția $\frac{1}{4}$, ultimele două obținîndu-se din prima din ele prin amplificare cu 2, respectiv cu 8. Să notăm cu A acest număr rațional. Fracțiile $\frac{4}{8}$ și $\frac{16}{32}$ reprezintă același număr rațional, deoarece sînt echivalente, cea de a doua obținîndu-se din prima prin amplificare cu 4. Să notăm cu B acest număr rațional. Fracțiile $\frac{6}{8}$ și $\frac{24}{32}$, care se obțin prin adunarea numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{2}{8}$ și $\frac{4}{8}$, respectiv a numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{8}{32}$ și $\frac{16}{32}$, reprezintă și ele același număr rațional, deoarece sînt echivalente.

Din exemplul de mai sus se vede că:

Numărul rațional S, care este suma a două numere raționale A și B, este același oricare ar fi reprezentanții numerelor raționale A și B cu care exprimăm pe A și B.

Prin aceasta am exprimat *independența sumei numerelor raționale de reprezentanții termenilor sumei.*

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$; e) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$; f) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$;

g) $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$; h) $\frac{1}{12} + \frac{5}{36}$; i) $\frac{1}{12} + \frac{5}{24}$; j) $\frac{1}{240} + \frac{7}{360}$; k) $\frac{5}{144} + \frac{1}{270}$;

l) $\frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{3^2 \cdot 7}$; m) $\frac{5}{84} + \frac{1}{168}$.

COMUTATIVITATEA ADUNĂRII NUMERELOR RAȚIONALE

Adunarea numerelor raționale este comutativă. În adevăr,

$$\frac{5}{6} + \frac{17}{15} = \frac{177}{90}.$$

Obținem această sumă cu ajutorul fracțiilor $\frac{75}{90}$, $\frac{102}{90}$ respectiv echivalente cu fracțiile $\frac{5}{6}$ și $\frac{17}{15}$, adică $\frac{75}{90} + \frac{102}{90} = \frac{177}{90}$. Dar atunci și

$$\frac{17}{15} + \frac{5}{6} = \frac{177}{90},$$

deoarece $\frac{102}{90} + \frac{75}{90} = \frac{177}{90}$.

În general, *comutativitatea adunării* a două numere raționale este următoarea proprietate:

Oricare ar fi numerele raționale A și B avem

$$A + B = B + A.$$

ASOCIATIVITATEA ADUNĂRII NUMERELOR RAȚIONALE

Avem

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \frac{2}{7} = \frac{184}{105},$$

deoarece

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15},$$

$$\frac{22}{15} + \frac{2}{7} = \frac{22 \cdot 7}{15 \cdot 7} + \frac{15 \cdot 2}{15 \cdot 7} = \frac{22 \cdot 7 + 15 \cdot 2}{15 \cdot 7} = \frac{154 + 30}{105} = \frac{184}{105}.$$

Avem

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{184}{105},$$

deoarece

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 7 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{28 + 10}{35} = \frac{38}{35},$$

$$\frac{2}{3} + \frac{38}{35} = \frac{2 \cdot 35}{3 \cdot 35} + \frac{3 \cdot 38}{3 \cdot 35} = \frac{2 \cdot 35 + 3 \cdot 38}{3 \cdot 35} = \frac{70 + 114}{105} = \frac{184}{105}.$$

Se constată că

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \frac{2}{7} = \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right).$$

Această proprietate a adunării numerelor raționale se numește *asociativitatea adunării*. Parantezele care cuprind $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ sînt puse pentru a sugera că pe locul pe care se află $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)$ este de fapt $\frac{22}{15}$. De asemenea, parantezele care cuprind $\frac{4}{5} + \frac{2}{7}$ sînt puse pentru a sugera că pe locul pe care se află $\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right)$ se află de fapt $\frac{38}{35}$. Proprietatea este adevărată oricare ar fi trei numere raționale considerate:

Oricare ar fi numerele raționale A, B și C avem

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Din cauza acestei egalități, vom conveni ca prin $A + B + C$ să înțelegem ori $(A + B) + C$ ori $A + (B + C)$. Deci în loc de $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \frac{2}{7}$ vom scrie $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{2}{7}$, ceea ce vom scrie și în loc de $\frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right)$.

NUMĂRUL RAȚIONAL ZERO ESTE ELEMENT NEUTRU LA ADUNAREA NUMERELOR RAȚIONALE

Numărul rațional zero este mulțimea fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{0}{1}$ și am convenit să identificăm numărul rațional zero cu numărul natural zero. De aceea, scriem numărul rațional zero ca numărul natural zero, anume 0.

În orice fracție $\frac{m}{n}$ echivalentă cu fracția $\frac{0}{1}$ avem $m = 0$, deoarece echivalența fracțiilor $\frac{m}{n}$, $\frac{0}{1}$ înseamnă

$$m \cdot 1 = n \cdot 0$$

deci $m = 0$.

La adunarea numerelor raționale cu numărul rațional 0 spunem că numărul rațional 0 este element *neutru* la adunarea numerelor raționale, deoarece:

Oricare ar fi numărul rațional A avem

$$A + 0 = A.$$

În adevăr, dacă A este reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, iar pe 0 îl scriem $\frac{0}{1}$, atunci:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

SCOATEREA ÎNTREGILOR DIN FRACȚIE

Să considerăm numărul rațional reprezentat de fracția supraunitară $\frac{22}{5}$. Împărțindu-l pe 22 la 5 obținem cîtul 4 și restul 2, adică $22 = 5 \cdot 4 + 2$. Dar atunci

$$\frac{22}{5} = \frac{5 \cdot 4 + 2}{5} = \frac{5 \cdot 4}{5} + \frac{2}{5},$$

aceasta din cauză că prin adunarea numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{5 \cdot 4}{5}$ și $\frac{2}{5}$, care au același numitor, obținem numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{22}{5}$. Simplificînd fracția $\frac{5 \cdot 4}{5}$ cu 5 obținem numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{4}{1}$ sau numărul natural 4. Deci putem scrie[1]

$$\frac{22}{5} = 4 + \frac{2}{5}.$$

Deoarece fracția $\frac{2}{5}$ este subunitară, spunem că *am scos întregii din fracția* $\frac{22}{5}$. Putem scoate întregii numai dintr-o fracție supraunitară.

EXERCIȚII

Să se scoată întregii din fracție: $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{21}{2}$, $\frac{501}{5}$, $\frac{10\,711}{102}$, $\frac{133\,001}{7}$.

[1] În cazul unui număr rațional reprezentat de o fracție supraunitară, ca în cazul fracției $\frac{22}{5}$, se scot, uneori, întregii din fracție. În locul fracției $\frac{22}{5}$, se scrie $4\frac{2}{5}$, ceea ce înseamnă $4 + \frac{2}{5}$ și se citește „4 întregi și două cincimi".

INTRODUCEREA ÎNTREGILOR ÎN FRACȚIE

Fie suma $4 + \frac{2}{5}$. Considerînd numărul natural 4 ca fiind un număr rațional, scriem $4 + \frac{2}{5} = \frac{4}{1} + \frac{2}{5}$. Aducînd la același numitor fracțiile $\frac{4}{1}$ și $\frac{2}{5}$, obținem fracțiile $\frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 1}$ și $\frac{2}{5}$ sau $\frac{20}{5}$ și $\frac{2}{5}$. Deci $4 + \frac{2}{5} = \frac{20}{5} + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$. Spunem, în acest caz, că *am introdus întregii în fracție.*

Se pot introduce întregii atît într-o fracție subunitară cît și într-o fracție supraunitară. De exemplu, fie suma $3 + \frac{11}{2}$. Avem $3 + \frac{11}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{11}{2} = \frac{6}{2} + \frac{11}{2} = \frac{17}{2}$. Nu am mai înlocuit pe 3 cu $\frac{3}{1}$, dar am scris fracția $\frac{3 \cdot 2}{2}$ ca și cum am amplificat cu 2 fracția $\frac{3}{1}$. Calculul trebuie făcut și mai rapid, scriind direct $3 + \frac{11}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 11}{2}$.

EXERCIȚII

Să se introducă întregii în fracție: $2\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{4}$; $10\frac{1}{4}$; $101\frac{1}{102}$.

INEGALITATEA ÎNTRE NUMERE RAȚIONALE

Numerele raționale pozitive și numărul rațional zero se mai numesc *numere raționale nenegative*.

Prin adunarea numerelor raționale nenegative $\frac{5}{6}$ și $\frac{17}{15}$ se obține numărul rațional nenegativ $\frac{177}{90}$. Deci

$$\frac{177}{90} = \frac{5}{6} + \frac{17}{15}.$$

Deoarece $\frac{17}{15}$ este număr rațional pozitiv, vom spune că $\frac{177}{90}$ *este mai mare decît* $\frac{5}{6}$ și vom scrie aceasta astfel:

$$\frac{177}{90} > \frac{5}{6}.$$

În loc de $\frac{177}{90} > \frac{5}{6}$ vom scrie și $\frac{5}{6} < \frac{177}{90}$; ceea ce vom citi $\frac{5}{6}$ *este mai mic decît* $\frac{177}{90}$.

În general:

Un număr rațional nenegativ A este mai mare decît un număr rațional nenegativ B, ceea ce se scrie

$$A > B,$$

dacă există un număr rațional pozitiv C astfel încît să avem

$$A = B + C.$$

Referitor la numerele raționale nenegative $\frac{177}{90}$ și $\frac{5}{6}$ avem și

$$177 \cdot 6 > 90 \cdot 5,$$

deoarece $177 \cdot 6 = 1\,062$ și $90 \cdot 5 = 450$.

Putem spune că:

Un număr rațional nenegativ A, reprezentat de fracția $\frac{m}{n}$ este mai mare decît un număr rațional nenegativ B, reprezentat de fracția $\frac{p}{q}$, dacă $mq > np$.

În cazul numerelor raționale nenegative $\frac{5}{8}$ și $\frac{3}{8}$ avem $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$, deoarece $5 \cdot 8 > 8 \cdot 3$. Numitorii fiind aceiași, anume 8, putem spune că $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$, deoarece $5 > 3$. Așadar:

Din două numere raționale nenegative, reprezentate de fracții cu același numitor, este mai mare acela care este reprezentat de fracția cu numărătorul mai mare.

În cazul numerelor raționale nenegative $\frac{5}{4}$ și $\frac{5}{8}$ avem $\frac{5}{4} > \frac{5}{8}$, deoarece $5 \cdot 8 > 4 \cdot 5$. Numărătorii fiind aceiași, anume 5, putem spune că $\frac{5}{4} > \frac{5}{8}$, deoarece $8 > 4$. Așadar:

Din două numere raționale nenegative, reprezentate de fracții cu același numărător, este mai mare acela care este reprezentat de fracția cu numitorul mai mic.

Fie numerele raționale nenegative $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$. Avem $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Notînd cu a oricare din numerele raționale nenegative $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, avem $a < \frac{1}{2}$ sau $a = \frac{1}{2}$, ceea ce vom scrie $a \leqslant \frac{1}{2}$.

În general:

Fiind date două numere raționale nenegative a și b, pentru a indica faptul că $a < b$ sau $a = b$, scriem

$$a \leqslant b.$$

Inegalitatea $a \leqslant b$ se citește *a este mai mic sau egal cu b* sau *a este cel mult egal cu b.*

Analog:

Fiind date două numere raționale nenegative a și b, pentru a indica faptul că $a > b$ sau $a = b$, scriem

$$a \geqslant b.$$

Inegalitatea $a \geqslant b$ se citește *a este mai mare sau egal cu b* sau *a este cel puțin egal cu b.*

9. SCĂDEREA

Scăderea numerelor raționale se definește astfel: cunoscîndu-se suma a două numere raționale și unul din termeni, se determină celălalt termen.

SCĂDEREA NUMERELOR RAȚIONALE REPREZENTATE DE FRACȚII CARE AU ACELAȘI NUMITOR

Avem

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}.$$

Se constată că $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$, deoarece $5 \cdot 8 > 8 \cdot 3$ sau $40 > 24$ și, de asemenea, că $\frac{5}{8} > \frac{2}{8}$, deoarece $5 \cdot 8 > 8 \cdot 2$ sau $40 > 16$.

Se scrie

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8},$$

şi, de asemenea,

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}.$$

Numărul raţional din care se scade se numeşte *descăzut*, numărul raţional care se scade se numeşte *scăzător*, iar numărul raţional care este rezultatul scăderii se numeşte *diferenţă*. În cazurile de mai înainte, descăzutul este mai mare decît scăzătorul. Scăzătorul şi diferenţa sînt termenii sumei exprimate de descăzut.

Se observă că

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}, \quad \frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$$

se mai pot scrie

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5-3}{8}, \quad \frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5-2}{8}.$$

Dacă se dau două numere raţionale reprezentate de fracţii identice, diferenţa între cele două numere raţionale este 0, deoarece 0 este element neutru la adunarea numerelor raţionale. De exemplu:

$$\frac{5}{7}+0=\frac{5}{7},$$

deci

$$\frac{5}{7}-\frac{5}{7}=0,$$

ceea ce se mai poate scrie

$$\frac{5}{7}-\frac{5}{7}=\frac{5-5}{7}.$$

Deci diferenţa între două numere raţionale reprezentate de fracţii care au acelaşi numitor, prima fracţie avînd numărătorul cel puţin egal cu numărătorul celei de a doua fracţii, este un număr raţional reprezentat de o fracţie care are ca numărător diferenţa între numărătorul primei fracţii şi numărătorul celei de a doua fracţii şi al cărei numitor este numitorul comun al celor două fracţii.

Altfel spus:

Diferenţa între numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{a}{m}$ şi numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{b}{m}$, unde $a \geqslant b$, este numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{a-b}{m}$,

ceea ce se scrie

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$; b) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}$; c) $\frac{7}{10}-\frac{5}{10}$; d) $\frac{11}{3}-\frac{7}{3}$; e) $\frac{11}{4}-\frac{1}{4}$; f) $\frac{9}{2}-\frac{1}{2}$; g) $\frac{11}{2}-\frac{7}{2}$; h) $\frac{7}{45}-\frac{1}{45}$.

SCĂDEREA NUMERELOR RAŢIONALE REPREZENTATE DE FRACŢII CARE AU NUMITORII DIFERIŢI

Avem

$$\frac{5}{6}+\frac{17}{15}=\frac{59}{30}.$$

Se constată că $\frac{59}{30}>\frac{5}{6}$, deoarece $59 \cdot 6 > 30 \cdot 5$ sau $354 > 150$, şi, de asemenea, că $\frac{59}{30}>\frac{17}{15}$, deoarece $59 \cdot 15 > 30 \cdot 17$ sau $885 > 510$.

Se scrie

$$\frac{59}{30}-\frac{5}{6}=\frac{17}{15}$$

şi, de asemenea,

$$\frac{59}{30}-\frac{17}{15}=\frac{5}{6}.$$

Deci, şi în acest caz, scăzătorul şi diferenţa sînt termenii sumei exprimate de descăzut.

Se observă că, amplificînd fracţia $\frac{5}{6}$ cu 5, obţinem fracţia $\frac{25}{30}$ şi că

$$\frac{59}{30}-\frac{25}{30}=\frac{34^{(2}}{30}=\frac{17}{15}.$$

De asemenea, amplificînd fracţia $\frac{17}{15}$ cu 2, obţinem fracţia $\frac{34}{30}$ şi

$$\frac{59}{30}-\frac{34}{30}=\frac{25^{(5}}{30}=\frac{5}{6}.$$

Pentru a face diferenţa între două numere raţionale, dintre care primul este mai mare, reprezentate de fracţii cu numitorii diferiţi, fracţiile le aducem, mai întîi, la acelaşi numitor.

Diferenţa între două numere raţionale reprezentate de fracţii echivalente este egală cu zero, deoarece aducînd fracţiile echivalente la acelaşi numitor, se obţin fracţii şi cu acelaşi numărător.

Fiind date fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, prin amplificarea fiecăreia din ele cu numitorul celeilalte, obţinem fracţiile $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ care au acelaşi numitor, echivalente respectiv cu fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, şi apoi, dacă $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d}$, scăzînd numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{bc}{bd}$ din numărul raţional reprezentat de fracţia $\frac{ad}{bd}$, acestea avînd acelaşi numitor, obţinem un număr raţional reprezentat de fracţia $\frac{ad-bc}{bd}$.

În felul acesta:

Diferenţa între două numere raţionale A şi B, unde A este reprezentat de fracţia $\frac{a}{b}$, B este reprezentat de fracţia $\frac{c}{d}$ şi $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d}$, este un număr raţional D, unde D este reprezentat de fracţia $\frac{ad-bc}{bd}$.

Diferenţa între două numere raţionale A şi B se mai notează cu $A-B$, adică

$$D = A - B.$$

Numărul raţional A se numeşte *descăzut*, iar numărul raţional B se numeşte *scăzător*.

În afară de

$$\frac{59}{30}-\frac{5}{6}=\frac{17}{15}$$

am mai văzut că

$$\frac{59}{30}-\frac{25}{30}=\frac{17}{15},$$

fracţia $\frac{25}{30}$ fiind echivalentă cu fracţia $\frac{5}{6}$.

Din exemplul de mai sus, se constată că:

Numărul raţional D care este diferenţa între două numere raţionale A şi B este acelaşi oricare ar fi reprezentanţii numerelor raţionale A şi B cu care exprimăm pe A şi B.

Prin aceasta am exprimat *independenţa diferenţei între numere raţionale de reprezentanţii descăzutului şi scăzătorului.*

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$; c) $\frac{2}{5}-\frac{1}{10}$; d) $3\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$; e) $2-\frac{1}{2}$; f) $\frac{21}{5}-\frac{11}{4}$; g) $\frac{25}{6}-\frac{9}{4}$; h) $\frac{5}{12}-\frac{1}{18}$; i) $\frac{17}{2^3\cdot 3\cdot 7}-\frac{1}{2^2\cdot 3^2}$; j) $\frac{137}{140}-\frac{17}{210}$; k) $\frac{7}{150}-\frac{1}{75}$; l) $\frac{5}{48}-\frac{1}{72}$; m) $\frac{7}{36}-\frac{1}{150}$; n) $\frac{17}{2}-2$; o) $\frac{8}{7}-1$.

10. ÎNMULŢIREA

ÎNMULŢIREA UNUI NUMĂR RAŢIONAL CU UN NUMĂR NATURAL

Prin produsul $\frac{2}{5}\cdot 3$ vom înţelege

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}.$$

Dar

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{5}=\frac{2+2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4+2}{5}=\frac{6}{5}=\frac{2\cdot 3}{5}.$$

Prin produsul $3 \cdot \frac{2}{5}$ vom înțelege tot $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$ care este $\frac{3 \cdot 2}{5}$.

Prin produsul $\frac{2}{5} \cdot 1$ vom înțelege fracția $\frac{2 \cdot 1}{5}$ care este $\frac{2}{5}$, iar prin produsul $1 \cdot \frac{2}{5}$ vom înțelege fracția $\frac{1 \cdot 2}{5}$ care este $\frac{2}{5}$.

Prin produsul $\frac{2}{5} \cdot 0$ vom înțelege fracția $\frac{2 \cdot 0}{5}$ care este $\frac{0}{5}$, iar prin produsul $0 \cdot \frac{2}{5}$ vom înțelege fracția $\frac{0 \cdot 2}{5}$ care este $\frac{0}{5}$.

Dacă $\frac{2}{5}$ exprimă lungimea a două părți dintr-un segment AB împărțit în 5 părți de aceeași lungime ca în figura 17, atunci $\frac{2}{5} \cdot 3$

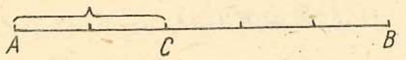


Fig. 17

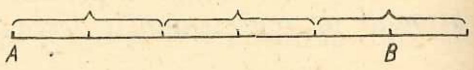


Fig. 18

exprimă de trei ori lungimea segmentului AC, ceea ce exprimă și $3 \cdot \frac{2}{5}$, așa cum se arată în figura 18.

În general:

Produsul unui număr rațional, reprezentat de o fracție, cu un număr natural este un număr rațional reprezentat de o fracție care are ca numărător produsul dintre numărătorul fracției date și numărul natural considerat, iar ca numitor numitorul fracției date.

Altfel spus, dacă un număr rațional este reprezentat de o fracție $\frac{a}{b}$, iar c este un număr natural atunci

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}, \quad c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}.$$

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $2 \cdot \frac{3}{5}$; b) $5 \cdot \frac{1}{7}$; c) $4 \cdot \frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{4} \cdot 4$; e) $\frac{4}{15} \cdot 5$; f) $\frac{1}{5} \cdot 5$.

ÎNMULȚIREA NUMERELOR RAȚIONALE

În figura 19 un segment AB este împărțit în 5 părți de aceeași lungime. Prin $\frac{2}{5}$ exprimăm lungimea segmentului AM format din 2 părți din cele 5 părți de aceeași lungime în care a fost împărțit segmentul AB, considerînd segmentul AB ca unitate de lungime. Împărțim, acum, în 4 părți de aceeași lungime un segment PQ, de aceeași lungime cu segmentul AM și exprimăm prin $\frac{3}{4}$ lungimea segmentului PN format din 3 părți din cele 4 părți de aceeași lungime în care a fost împărțit segmentul PQ, considerînd segmentul PQ ca unitate de lungime. Vom nota cu

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

lungimea segmentului PN considerînd segmentul inițial AB ca unitate de lungime și vom spune că am luat trei pătrimi dintr-o lungime de două cincimi.

Vom arăta că lungimea segmentului PN poate fi exprimată prin fracția $\frac{6}{20}$ obținută prin împărțirea segmentului AB în 20 părți de aceeași lungime și luînd 6 părți din cele 20 părți de aceeași lungime în care a fost împărțit segmentul AB.

În adevăr, dacă împărțim fiecare parte din cele 5 părți ale segmentului AB în tot atîtea părți, adică patru, în cîte a fost împărțit segmentul PQ, rezultă că segmentul AB va fi împărțit în $5 \cdot 4 = 20$ părți de aceeași lungime, iar segmentul AM va fi împărțit în $2 \cdot 4 = 8$ părți de aceeași lungime. Dacă împărțim fiecare parte din cele 4 părți ale segmentului PQ în tot atîtea părți, adică două, în cîte a fost împărțit segmentul AM inițial, atunci segmentul PQ va fi împărțit în $4 \cdot 2 = 8$ părți de aceeași lungime. Deci segmentele AM și PQ avînd aceeași lungime și fiind împărțite în cîte 8 părți de aceeași lungime, înseamnă că părțile în care au fost împărțite sînt de aceeași lungime.

Segmentul PN fiind împărțit în $3 \cdot 2 = 6$ părți de aceeași lungime din cele 20 în care a fost împărțit segmentul AB, lungimea sa poate fi exprimată prin $\frac{6}{20}$ din lungimea segmentului AB.

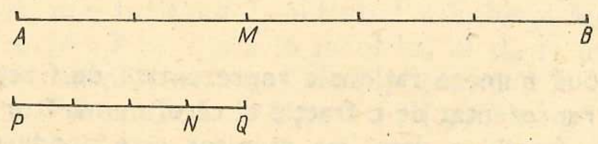


Fig. 19

Dar $6 = 2 \cdot 3$, $20 = 5 \cdot 4$, deci vom scrie

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}.$$

Vom spune că numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{6}{20}$ este *produsul* numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{2}{5}$ și $\frac{3}{4}$.

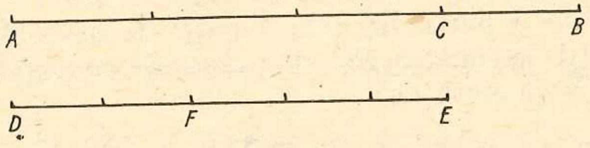


Fig. 20

Să împărțim, acum, în figura 20 segmentul AB din figura 19 în 4 părți de aceeași lungime și să luăm un segment AC format din 3 părți din cele 4 părți de aceeași lungime în care a fost împărțit segmentul AB. Să împărțim apoi în 5 părți de aceeași lungime un segment DE, de aceeași lungime cu segmentul AC și să luăm un segment DF format din 2 părți din cele 5 părți de aceeași lungime în care a fost împărțit segmentul DE. Lungimea segmentului DF o exprimăm prin

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$$

atunci cînd lungimea segmentului AB o considerăm ca unitate de lungime. Raționînd ca în cazul din figura 19, constatăm că lungimea segmentului DF poate fi exprimată prin $\frac{6}{20}$ din lungimea segmentului AB. Deci

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}.$$

Vom spune că numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{6}{20}$ este *produsul* numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{5}$.

În general:

Produsul a două numere raționale reprezentate de fracții este un număr rațional reprezentat de o fracție al cărei numărător este produsul numărătorilor fracțiilor date, iar numitor este produsul numitorilor fracțiilor date.

Altfel spus:

Produsul a două numere raționale A și B, unde A este reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, iar B este reprezentat de fracția $\frac{c}{d}$, este un număr rațional P, unde P este reprezentat de fracția $\frac{ac}{bd}$.

Se scrie

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Produsul a două numere raționale A și B se mai notează cu AB, numerele raționale A și B numindu-se *factorii* produsului.

Exemplu de înmulțire a două numere raționale: $\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{3}=\frac{7\cdot 5}{8\cdot 3}$ deci

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{3}=\frac{35}{24}.$$

Să efectuăm produsul numerelor raționale reprezentate de fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{2}{3}$. Avem

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 3}=\frac{6^{(3}}{21}=\frac{2}{7}.$$

Ajungem la același rezultat simplificînd fracția care reprezintă produsul a două numere raționale, înainte de efectuarea produsului numărătorilor și a produsului numitorilor. În adevăr,

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 2^{(3}}{7\cdot 3}=\frac{{}^{1}\cancel{3}\cdot 2}{7\cdot \cancel{3}_1}=\frac{1\cdot 2}{7\cdot 1}=\frac{2}{7}.$$

Este recomandabil să lucrăm în acest mod.

Alt exemplu

$$\frac{14}{15}\cdot\frac{10}{21}=\frac{14\cdot 10^{(7}}{15\cdot 21}=\frac{{}^{2}\cancel{14}\cdot 10}{15\cdot \cancel{21}_3}=\frac{2\cdot 10^{(5}}{15\cdot 3}=\frac{2\cdot \cancel{10}^{2}}{\cancel{15}_3\cdot 3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}.$$

Am simplificat, mai întîi, cu 7, obținînd 2 în locul lui 14 de la numărător, deoarece $14 : 7 = 2$ și 3 în locul lui 21 de la numitor, deoarece $21 : 7 = 3$. Am simplificat apoi cu 5 obținînd 2 în locul lui 10 de la numărător, deoarece $10 : 5 = 2$ și 3 în locul lui 15 de la numitor, deoarece $15 : 5 = 3$.

Avem $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$ şi $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. Apoi

$$\frac{6}{14}\cdot\frac{4}{6}=\frac{6\cdot 4^{(6\cdot 2}}{14\cdot 6}=\frac{2}{7}.$$

Dar şi $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{7}$ cum am văzut mai înainte. Din acest exemplu se constată că:

Numărul raţional P, care este produsul a două numere raţionale A şi B, este acelaşi oricare ar fi reprezentanţii numerelor raţionale A şi B cu care exprimăm pe A şi B.

Prin aceasta am exprimat *independenţa produsului numerelor raţionale de reprezentanţii factorilor produsului.*

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$; b) $\frac{4}{25}\cdot\frac{5}{16}$; c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4}$; d) $4\cdot\frac{3}{4}$; e) $6\cdot\frac{2}{3}$; f) $\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}$; g) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$;
h) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}$; i) $8\cdot\frac{4}{5}$; j) $5\cdot\frac{5}{48}$; k) $\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3}{24}$; l) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$; m) $2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$; n) $4\cdot 1\frac{1}{2}$.

Indicaţie: La exerciţiile m) şi n) se introduc, mai întîi, întregii în fracţie.

COMUTATIVITATEA ÎNMULŢIRII NUMERELOR RAŢIONALE

Înmulţirea numerelor raţionale este comutativă. În adevăr,

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5},$$

deoarece

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{6}{20} \quad\text{şi}\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{6}{20}.$$

Pentru numerele raţionale, proprietatea de *comutativitate a înmulţirii* a două numere raţionale este următoarea:

Oricare ar fi numerele raţionale A şi B avem

$$AB=BA.$$

ASOCIATIVITATEA ÎNMULŢIRII NUMERELOR RAŢIONALE

Avem

$$\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{8}{11}=\frac{12}{35}\cdot\frac{8}{11}=\frac{96}{385},$$

deoarece

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}=\frac{12}{35}, \qquad \frac{12}{35}\cdot\frac{8}{11}=\frac{96}{385}.$$

Avem

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{32}{77}=\frac{96}{385},$$

deoarece

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11}=\frac{32}{77}, \qquad \frac{3}{5}\cdot\frac{32}{77}=\frac{96}{385}.$$

Se constată că

$$\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{8}{11}=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11}\right).$$

Această proprietate a înmulţirii numerelor raţionale se numeşte *asociativitatea înmulţirii.* Parantezele care cuprind $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}$ sînt puse pentru a sugera că pe locul pe care se află $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\right)$ este de fapt $\frac{12}{35}$. De asemenea, parantezele care cuprind $\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11}$ sînt puse pentru a sugera că pe locul pe care se află $\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11}\right)$ se află de fapt $\frac{32}{77}$. Proprietatea este adevărată oricare ar fi trei numere raţionale considerate:

Oricare ar fi numerele raţionale A, B şi C avem

$$(AB)C=A(BC).$$

Din cauza acestei egalităţi, vom conveni ca prin ABC să înţelegem, ori $(AB)C$, ori $A(BC)$. Deci în loc de $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{8}{11}$ vom scrie $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11}$, ceea ce vom scrie şi în loc de $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11}\right)$.

NUMĂRUL RAȚIONAL 1 ESTE ELEMENT NEUTRU LA ÎNMULȚIREA NUMERELOR RAȚIONALE

Numărul rațional unu este mulțimea fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{1}{1}$ și am convenit să identificăm numărul rațional unu cu numărul natural unu. De aceea, scriem numărul rațional unu ca numărul natural 1.

În orice fracție $\frac{m}{n}$ echivalentă cu fracția $\frac{1}{1}$ avem $m = n$, deoarece echivalența fracțiilor $\frac{m}{n}$, $\frac{1}{1}$ înseamnă

$$m \cdot 1 = n \cdot 1$$

deci $m = n$.

La înmulțirea numerelor raționale cu numărul rațional 1 spunem că numărul rațional 1 este element *neutru*, deoarece are loc următoarea proprietate:

Oricare ar fi numărul rațional A avem

$$A \cdot 1 = A.$$

În adevăr, dacă A este reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, iar pe 1 îl scriem $\frac{1}{1}$, atunci

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

DISTRIBUTIVITATEA ÎNMULȚIRII NUMERELOR RAȚIONALE FAȚĂ DE ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR RAȚIONALE

Pentru trei numere raționale $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$ avem

$$\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3+2}{7} = \frac{4 \cdot (3+2)}{9 \cdot 7},$$

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 7} + \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{9 \cdot 7}$$

și, deoarece $4 \cdot (3 + 2) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2$, avem

$$\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7}.$$

Această proprietate se numește *distributivitatea înmulțirii numerelor raționale față de adunarea numerelor raționale.*

Asemănător

$$\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{7} - \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7}.$$

Această proprietate se numește *distributivitatea înmulțirii numerelor raționale față de scăderea numerelor raționale.*

În general:

Oricare ar fi numerele raționale A, B și C avem:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad A(B - C) = AB - AC,$$

în ultimul caz avînd $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ fiind reprezentantul lui B, iar $\frac{c}{d}$ fiind reprezentantul lui C.

EXERCIȚII

Să se efectueze: a) $5 \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}$; c) $4 - 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$.

11. INVERSUL UNUI NUMĂR RAȚIONAL POZITIV

Fie numărul rațional $\frac{3}{5}$. Prin inversul numărului rațional $\frac{3}{5}$ înțelegem numărul rațional $\frac{5}{3}$. Inversul numărului rațional $\frac{3}{1}$ este numărul rațional $\frac{1}{3}$. Numărul rațional $\frac{0}{7}$ nu are invers, deoarece $\frac{7}{0}$ nu este fracție, sub linia orizontală aflîndu-se 0.

În general:

Inversul numărului rațional reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, în care $a \neq 0$, este numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{b}{a}$.

Observăm că, dacă $\frac{b}{a}$ este inversul numărului rațional $\frac{a}{b}$, atunci

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Numărul natural 5 considerat ca număr rațional, fiind reprezentat de fracția $\frac{5}{1}$, vom spune că inversul numărului natural 5 este numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{1}{5}$. Altfel spus, ceea ce este același lucru, inversul numărului natural 5, sau al numărului rațional 5, este numărul rațional $\frac{1}{5}$.

În general:

Inversul numărului rațional a, unde a este un număr natural diferit de zero, este numărul rațional $\frac{1}{a}$.

EXERCIȚII

1. Să se scrie inversele numerelor raționale: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{4}{5}$.
2. Să se afle inversele numerelor: a) 3; b) 4; c) 5; d) 124.

12. ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR RAȚIONALE POZITIVE

Împărțirea numerelor raționale se definește astfel: cunoscîndu-se produsul a două numere raționale și unul din factori, se determină celălalt factor.

Avem

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{21}{20}.$$

Deoarece $3 \neq 0$, vom scrie

$$\frac{21}{20}:\frac{3}{5}=\frac{7}{4}$$

și, pentru că $7 \neq 0$, vom scrie

$$\frac{21}{20}:\frac{7}{4}=\frac{3}{5}.$$

Numărul rațional care se împarte se numește *deîmpărțit*, numărul rațional cu care se împarte se numește *împărțitor*, iar numărul rațional care este rezultatul împărțirii se numește *cît*. În cazul de față, ambele numere raționale $\frac{3}{5}$ și $\frac{7}{4}$ sînt diferite de 0. Împărțitorul și cîtul sînt factorii produsului exprimat de deîmpărțit.

Se observă că

$$\frac{21}{20}\cdot\frac{5}{3}=\frac{21\cdot 5^{(5}}{20\cdot 3}=\frac{21\cdot \cancel{5}^{1}}{{}_{4}\cancel{20}\cdot 3}=\frac{21\cdot 1^{(3}}{4\cdot 3}=\frac{{}^{7}\cancel{21}\cdot 1}{4\cdot \cancel{3}_{1}}=\frac{7\cdot 1}{4\cdot 1}=\frac{7}{4}=\frac{21}{20}:\frac{3}{5},$$

$$\frac{21}{20}\cdot\frac{4}{7}=\frac{21\cdot 4^{(4}}{20\cdot 7}=\frac{21\cdot \cancel{4}^{1}}{{}_{5}\cancel{20}\cdot 7}=\frac{21\cdot 1^{(7}}{5\cdot 7}=\frac{{}^{3}\cancel{21}\cdot 1}{5\cdot \cancel{7}_{1}}=\frac{3\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{3}{5}=\frac{21}{20}:\frac{7}{4}.$$

În general:

Cîtul între două numere raționale, cel de-al doilea fiind diferit de 0, este un număr rațional care se obține înmulțind primul număr rațional cu inversul celui de-al doilea număr rațional.

Altfel spus:

Cîtul între două numere raționale A și B, unde A este reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, B este reprezentat de fracția $\frac{c}{d}$ și $c \neq 0$, este un număr rațional C, unde C este reprezentat de fracția $\frac{ad}{bc}$.

Se scrie

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Cîtul între două numere raționale A și B se mai notează cu $A : B$ sau $\frac{A}{B}$, adică

$$C = A : B, \quad C=\frac{A}{B}.$$

Numărul rațional A se numește *deîmpărțit*, iar numărul rațional B se numește *împărțitor*.

Fracția $\frac{ad}{bc}$, care reprezintă cîtul C între numerele raționale A și B, reprezentate respectiv de fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, are ca numărător produsul dintre numărătorul fracţiei $\frac{a}{b}$ şi numitorul fracţiei $\frac{c}{d}$, iar ca numitor produsul dintre numitorul fracţiei $\frac{a}{b}$ şi numărătorul fracţiei $\frac{c}{d}$.

Avem

$$\frac{7}{3}:\frac{6}{5}=\frac{35}{18}, \quad \frac{14}{6}:\frac{18}{15}=\frac{35}{18},$$

deoarece

$$\frac{7}{3}:\frac{6}{5}=\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{35}{18}, \quad \frac{14}{6}:\frac{18}{15}=\frac{14}{6}\cdot\frac{15}{18}=\frac{14\cdot 15^{(2}}{6\cdot 18}=\frac{7\cdot 15^{(3}}{3\cdot 18}=\frac{7\cdot 5}{3\cdot 6}=\frac{35}{18}.$$

Fracţiile $\frac{7}{3}$ şi $\frac{14}{6}$ sînt echivalente. De asemenea, fracţiile $\frac{6}{5}$ şi $\frac{18}{15}$ sînt echivalente.

Din acest exemplu, se constată că:

Numărul raţional C, care este cîtul între două numere raţionale A şi B, este acelaşi oricare ar fi reprezentanţii numerelor raţionale A şi B.

Prin aceasta am exprimat *independenţa cîtului între numere raţionale de reprezentanţii deîmpărţitului şi împărţitorului.*

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{9}:2$; c) $\frac{16}{25}:\frac{4}{5}$; d) $\frac{4}{5}:\frac{4}{7}$; e) $\frac{25}{48}:\frac{5}{32}$; f) $\frac{17}{150}:\frac{17}{30}$; g) $\frac{1}{4}:3$; h) $\frac{1}{2}:\frac{11}{20}$.

13. PUTEREA UNUI NUMĂR RAŢIONAL POZITIV

Fie $\frac{4}{3}$ un număr raţional. Înmulţindu-l pe $\frac{4}{3}$ cu el însuşi, obţinem $\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}$. În loc de $\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}$ vom scrie $\left(\frac{4}{3}\right)^2$. Vom spune că $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ este pătratul lui $\frac{4}{3}$ sau puterea a doua a lui $\frac{4}{3}$. Înmulţindu-l pe $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ cu $\frac{4}{3}$ obţinem $\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{3}$, ceea ce se mai poate scrie $\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}$

sau $\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}$. Acest produs îl vom nota cu $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ şi-l vom numi cubul lui $\frac{4}{3}$ sau puterea a treia a lui $\frac{4}{3}$.

Vom spune că $\left(\frac{4}{3}\right)^0$ este 1 şi că $\left(\frac{4}{3}\right)^1$ este $\frac{4}{3}$. Mulţimea puterilor lui $\frac{4}{3}$ este

$$\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^0, \left(\frac{4}{3}\right)^1, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots\right\}$$

în care $\left(\frac{4}{3}\right)^0=1$, $\left(\frac{4}{3}\right)^1=\frac{4}{3}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{3}$ sau $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}$ ş.a.m.d. De exemplu:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^5=\left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}.$$

În cazul numărului raţional 0, nu se defineşte 0^0, dar $0^1=0$, $0^2=0\cdot 0=0$ ş.a.m.d.

În general:

Dacă A este un număr raţional, diferit de 0, mulţimea puterilor lui A este mulţimea

$$\{A^0, A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n, \ldots\}$$

în care $A^0=1$, $A^1=A$, $A^2=A\cdot A$, $A^3=A^2\cdot A$, $A^4=A^3\cdot A$ etc.

Orice putere a unui număr raţional A se notează prin A^n, unde n este un număr natural. Numărul raţional A se numeşte *bază*, iar numărul natural n se numeşte *exponent*. A^n se citeşte „puterea a n-a a lui A". Astfel A^3 este puterea a treia a lui A.

ÎNMULŢIREA DE PUTERI CU ACEEAŞI BAZĂ

Avem

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^5=\left(\frac{4}{3}\right)^{2+3}.$$

În general:

Dacă A este un număr raţional, iar m şi n sînt numere naturale, atunci $A^m\cdot A^n=A^{m+n}$.

Deci

Puterea unei puteri a unui număr rațional este o putere a acestui număr rațional, în care exponentul este produsul exponenților.

PUTEREA UNUI PRODUS

Avem

$$\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^3=\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^6=\left(\frac{4}{3}\right)^{2\cdot 3}$$

În general:

Dacă A este un număr rațional, iar m și n sînt numere naturale, atunci $(A^m)^n = A^{m\cdot n}$.

Deci:

Produsul puterilor aceluiași număr rațional este o putere a acestui număr rațional, în care exponentul este suma exponenților factorilor.

PUTEREA UNEI PUTERI

Avem

$$\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}\right)^3=\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{5}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3.$$

În general:

Un produs se ridică la o putere ridicînd fiecare factor la acea putere și înmulțind puterile obținute.

ÎMPĂRȚIREA DE PUTERI CU ACEEAȘI BAZĂ

Avem

$$\left(\frac{4}{3}\right)^5:\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right):\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)=\frac{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}:\frac{4\cdot4\cdot4}{3\cdot3\cdot3}=$$

$$=\frac{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3\cdot3}{4\cdot4\cdot4}=\frac{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3^{(4\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3}}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4\cdot4}=$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\overset{1}{\cancel{4}}\cdot4\cdot4\cdot\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}\cdot3\cdot3\cdot\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{4}}}=\frac{4\cdot4}{3\cdot3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^{5-3}.$$

Alt exemplu

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2:\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right):\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)=\frac{4\cdot4}{3\cdot3}:\frac{4\cdot4}{3\cdot3}=\frac{4\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3}{4\cdot4}=$$

$$=\frac{4\cdot4\cdot3\cdot3^{(4\cdot4\cdot3\cdot3}}{3\cdot3\cdot4\cdot4}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{4}}}=1=\left(\frac{4}{3}\right)^0=\left(\frac{4}{3}\right)^{2-2}.$$

În general:

Dacă A este un număr rațional, diferit de 0, iar m și n sînt două numere naturale astfel încît $m \geqslant n$, *atunci* $A^m : A^n = A^{m-n}$.

Se mai scrie

$$\frac{A^m}{A^n}=A^{m-n}.$$

Deci:

Cîtul puterilor aceluiași număr rațional, diferit de 0, exponentul deîmpărțitului fiind cel puțin egal cu exponentul împărțitorului, este o putere a acestui număr rațional, în care exponentul este diferența între exponentul deîmpărțitului și exponentul împărțitorului.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; c) $\left(\frac{1}{10}\right)^2$; d) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$; e) $\left(\frac{4}{5}\right)^0:\frac{1}{9}$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$;

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{30}-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}$; h) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$; i) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right]^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$; j) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^3$;

k) $\left(\frac{2}{9}\right)^{50}:\left(\frac{2}{9}\right)^{49}$; l) $\left(\frac{7}{10}\right)^{40}:\left(\frac{7}{10}\right)^{30}-\left(\frac{7}{10}\right)^{10}$.

14. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR

Să calculăm

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot\left\{7+4\cdot\left[\frac{23}{4}-2\cdot\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]-3\right\}+\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$$

Analog celor spuse la numere naturale, *adunarea și scăderea sînt operații de ordinul I, înmulțirea și împărțirea sînt operații de ordinul II, iar ridicarea la putere este operație de ordinul III.*

Efectuăm, mai întîi, calculele dinăuntrul parantezelor. Începem cu efectuarea calculelor din interiorul parantezelor rotunde. În $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ parantezele rotunde sînt utilizate pentru ridicarea lui $\frac{3}{4}$ la puterea a doua. Nu avem nimic de efectuat în interiorul acestor paranteze rotunde.

Trecem la efectuarea calculului

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

În acest calcul, neexistînd paranteze rotunde, operaţiile, fiind de acelaşi ordin, le efectuăm, în general, de la stînga la dreapta. Obţinem

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\,^{3)}\frac{5}{2}+\,^{2)}\frac{1}{3}=\frac{15}{6}+\frac{2}{6}=\frac{17}{6}.$$

Acest calcul îl putem efectua şi astfel

$$2+\,^{3)}\frac{1}{2}+\,^{2)}\frac{1}{3}=2+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=2+\frac{5}{6}=\frac{17}{6},$$

datorită proprietăţii de asociativitate a operaţiei de adunare a numerelor raţionale. Scriem pe $\frac{17}{6}$ în locul lui $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$. Parantezele drepte, în interiorul cărora se aflau parantezele rotunde de mai înainte, neconţinînd alte paranteze rotunde, le transformăm în paranteze rotunde. Acoladele care conţineau parantezele drepte de mai înainte, neconţinînd alte paranteze drepte, le transformăm în paranteze drepte. Obţinem

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot\left[7+4\cdot\left(\frac{23}{4}-2\cdot\frac{17}{6}\right)-3\right]+\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$$

Acum efectuăm calculul

$$\frac{23}{4}-2\cdot\frac{17}{6}.$$

În acest calcul nu există paranteze, dar operaţiile sînt de ordine diferite. Efectuăm, mai întîi, operaţia de ordinul II, anume $2\cdot\frac{17}{6}$ şi obţinem

$$2\cdot\frac{17}{6}=\frac{\cancel{2}^{1}\cdot 17}{\cancel{6}_{3}}=\frac{1\cdot 17}{3}=\frac{17}{3}.$$

Se recomandă ca această înmulţire să se efectueze imediat după efectuarea calculului $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Efectuăm, apoi, operaţia de ordinul I, anume

$$\frac{23}{4}-\frac{17}{3},$$

ceea ce ne dă

$$^{3)}\frac{23}{4}-\,^{4)}\frac{17}{3}=\frac{69}{12}-\frac{68}{12}=\frac{1}{12}.$$

Transformăm parantezele drepte în paranteze rotunde şi obţinem

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot\left(7+4\cdot\frac{1}{12}-3\right)+\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$$

La efectuarea calculului

$$7+4\cdot\frac{1}{12}-3,$$

efectuăm, mai întîi, operaţia de înmulţire, pentru că este de ordinul II şi apoi efectuăm, de la stînga la dreapta, operaţiile de adunare şi scădere, care sînt de ordinul I. Obţinem

$$7+4\cdot\frac{1}{12}-3=7+\frac{1}{3}-3=\frac{22}{3}-3=\frac{13}{3}.$$

Avem, acum, de calculat

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{3}+\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$$

Continuînd cu efectuarea calculelor din interiorul parantezelor rotunde, ajungem la calculul

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}.$$

Neexistînd paranteze, iar operaţiile fiind toate de acelaşi ordin, le efectuăm de la stînga la dreapta. Obţinem

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{13}{6}-\frac{1}{3}=\frac{11}{6}.$$

Ajungem să efectuăm calculul

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{3}+\frac{11}{6}.$$

Nu mai avem de efectuat calcule în interiorul parantezelor. În calculul pe care-l mai avem de efectuat, operaţiile fiind de ordine diferite, efectuăm, mai întîi, ridicarea la putere, pentru că este o operaţie de ordinul III. Căpătăm

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Efectuăm, apoi, operaţia de înmulţire, fiind de ordinul II, şi obţinem

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{13}{3} = \frac{65}{6}.$$

Acum, mai avem de efectuat numai calculul

$$1 - \frac{9}{16} + \frac{65}{6} + \frac{11}{6}$$

în care toate operaţiile sînt de acelaşi ordin, pe care le efectuăm de la stînga la dreapta:

$$1 - \frac{9}{16} + \frac{65}{6} + \frac{11}{6} = {}^{3)}\frac{7}{16} + {}^{8)}\frac{65}{6} + \frac{11}{6} = \frac{21}{48} + \frac{520}{48} + \frac{11}{6} = \frac{541}{48} + {}^{8)}\frac{11}{6} =$$

$$= \frac{541}{48} + \frac{88}{48} = \frac{629}{48}.$$

Trebuie reţinut că ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale este cea de la efectuarea operaţiilor cu numere naturale.

EXERCIŢII

1. Să se efectueze: a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2$; b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$; c) $\left(2 + 3 \cdot \frac{1}{6}\right) : 2\frac{1}{2}$;

d) $\frac{1}{8} \cdot \left(4 + 2 : \frac{1}{2}\right)$; e) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{11}{240}$; f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) : \frac{7}{240}$;

g) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{3}{5}\right) : 300$; h) $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot 30\frac{10}{13}$.

2. Să se efectueze:

a) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}$; b) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$; c) $100 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$.

3. Să se efectueze:

a) $\frac{36}{59} \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{7}{60} + \frac{1}{40}\right)$; b) $14 \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{2} - 1\frac{3}{4}\right) : \frac{7}{8}\right]$;

c) $\left\{\frac{1}{4} + \left[\frac{7}{2} - \left(1 + \frac{3}{4}\right)\right] : \frac{7}{8}\right\} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)$; d) $\left\{\frac{1}{4} + \left[\frac{5}{2} - \left(1 + \frac{3}{4}\right)\right] : \frac{7}{8}\right\} : \frac{1}{14}$;

e) $2 \cdot \left\{1 + 10 \cdot \left[\frac{8}{9} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : 3\right)\right]\right\}$; f) $(1 + 2^{31}) : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{30} : \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{29} + \right.$

$\left. + \frac{2}{3}^{30} : 2^{31}\right]$.

15. MEDIA ARITMETICĂ

Prin adunarea numerelor raţionale $\frac{4}{3}$ şi $\frac{5}{8}$ obţinem

$$^{8)}\frac{4}{3} + {}^{3)}\frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{32 + 15}{24} = \frac{47}{24}.$$

Împărţind, apoi, pe $\frac{47}{24}$ la 2 obţinem

$$\frac{47}{24} : 2 = \frac{47}{24} \cdot \frac{1}{2} = \frac{47}{48}.$$

Numărul raţional $\frac{47}{48}$ se numeşte media aritmetică a numerelor raţionale $\frac{4}{3}$ şi $\frac{5}{8}$. Se scrie

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{8}\right) : 2 = \frac{47}{48}$$

sau

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{8}}{2} = \frac{47}{48}.$$

Se constată că, pentru numerele raţionale reprezentate de fracţiile $\frac{4}{3}$ şi $\frac{5}{8}$ avem

$$\frac{4}{3} > \frac{5}{8},$$

deoarece $4 \cdot 8 > 3 \cdot 5$, anume $32 > 15$. De asemenea, se constată că, media aritmetică $\frac{47}{48}$ a numerelor raționale $\frac{4}{3}$ și $\frac{5}{8}$ este astfel încît între numărul rațional reprezentat de fracția $\frac{47}{48}$ și numerele raționale reprezentate de fracțiile $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{8}$ au loc inegalitățile

$$\frac{4}{3} > \frac{47}{48}; \quad \frac{47}{48} > \frac{5}{8},$$

deoarece $4 \cdot 48 > 3 \cdot 47$, anume $192 > 141$, respectiv $47 \cdot 8 > 48 \cdot 5$, anume $376 > 240$.

În general:

Media aritmetica a două numere raționale A și B este un număr rațional M, pentru care $M = \frac{A+B}{2}$.

Dacă A este reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, B este reprezentat de fracția $\frac{c}{d}$ și M este reprezentat de fracția $\frac{p}{q}$, iar $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, atunci $\frac{a}{b} > \frac{p}{q}$, $\frac{p}{q} > \frac{c}{d}$.

Altfel spus, *media aritmetică a două numere raționale este mai mică decît cel mai mare din ele și mai mare decît cel mai mic din ele, dacă cele două numere raționale sînt diferite.* Dacă cele două numere raționale sînt egale, media lor aritmetică coincide cu fiecare din ele.

Exemplu. Media aritmetică a numerelor raționale $\frac{4}{3}$ și $\frac{4}{3}$ este

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) : 2 = \frac{4+4}{3} : 2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{3 \cdot 2}^{(2} = \frac{\cancel{8}^{\,4}}{3 \cdot \cancel{2}_{\,1}} = \frac{4}{3}.$$

Media aritmetică a mai multor numere raționale este cîtul dintre suma lor și numărul lor.

De exemplu, media aritmetică a trei numere raționale A, B, C este numărul rațional

$$\frac{A+B+C}{3}.$$

Dacă $A = \frac{4}{3}$, $B = \frac{5}{8}$, $C = \frac{2}{3}$ avem

$$A + B + C = \frac{4}{3} + \frac{5}{8} + \frac{2}{3} = \frac{47}{24} + {}^{8)}\frac{2}{3} = \frac{47}{24} + \frac{16}{24} = \frac{47+16}{24} = \frac{63}{24} = \frac{21}{8}.$$

Apoi

$$\frac{A+B+C}{3} = \frac{21}{8} : 3 = \frac{21}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{8}.$$

Și aici se constată că $\frac{4}{3} > \frac{5}{8}$, așa cum am văzut mai înainte, și că $\frac{4}{3} > \frac{2}{3}$, deoarece $4 \cdot 3 > 3 \cdot 2$, anume $12 > 6$, și $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$, deoarece $2 \cdot 8 > 3 \cdot 5$, anume $16 > 15$. Deci dintre numerele raționale $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{8}$ și $\frac{2}{3}$, cel mai mare este $\frac{4}{3}$ și cel mai mic este $\frac{5}{8}$. Se mai constată că

$$\frac{4}{3} > \frac{7}{8}, \quad \frac{7}{8} > \frac{5}{8},$$

deoarece $4 \cdot 8 > 3 \cdot 7$, anume $32 > 21$, respectiv $7 \cdot 8 > 8 \cdot 5$, anume $56 > 40$.

Deci, *media aritmetică a trei numere raționale este mai mică decît cel mai mare din ele și mai mare decît cel mai mic din ele, dacă cel puțin două din cele trei numere raționale sînt diferite.* Dacă cele trei numere raționale sînt egale, media lor aritmetică coincide cu fiecare din ele.

De asemenea, *media aritmetică a mai multor numere raționale este mai mică decît cel mai mare din ele și mai mare decît cel mai mic din ele, dacă cel puțin două din numerele raționale considerate sînt diferite.* Dacă toate numerele raționale considerate sînt egale, media lor aritmetică coincide cu fiecare din ele.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se afle media aritmetică a următoarelor numere:
   a) 4; 6; b) 2; 4; 6; c) 24; 36; 48; d) 23; 3 601; 3 240; 2 000;
2. Media aritmetică a două numere este 5, iar unul din ele este 2. Să se afle celălalt număr.
3. Media aritmetică a două numere este 190, iar unul din ele este 366. Să se afle celălalt număr.
4. Media aritmetică a trei numere este 21, iar două din ele sînt 3 și 24. Să se afle al treilea număr.
5. Membrii unui cerc de meteorologie, luînd temperatura aerului la ora 7 dimineața, în 6 zile consecutive, au constatat următoarele temperaturi: 12 , 16 , 15 , 13 ; 14 , 14 (° C). Care este temperatura medie la ora 7 în cele șase zile?
6. O cooperativă agricolă de producție a trimis la piață, pentru desfacere, trei calități de struguri: 2 000 kg a 9 lei kilogramul, 4 000 kg a 8 lei kilogramul și

2 000 kg a 7 lei kilogramul. Cît a încasat, în medie, cooperativa agricolă de producție pe 1 kg de struguri?

7. Să se afle media aritmetică a următoarelor numere:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$; b) 24, $\frac{5}{36}$; $\frac{1}{24}$, $\frac{5}{72}$, $\frac{1}{48}$.

8. Media aritmetică a trei numere este $\frac{1}{2}$. Să se afle suma celor trei numere.

9. Fie trei numere raționale. Primul este mai mare sau egal cu zero. Al doilea este mai mare decît primul cu 5 și mai mic decît al treilea tot cu 5.

a) Este al doilea număr media aritmetică a celorlalte două numere?

b) Este al doilea număr media aritmetică a celor trei numere?

10. Se consideră trei numere raționale. Primul este număr rațional pozitiv. Al doilea este mai mare decît primul cu 4 și mai mic decît al treilea tot cu 4. Știind că media lor aritmetică este 136, să se afle numerele.

11. Numerele a și c sînt numere naturale mai mari decît zero astfel încît $a < \frac{3}{2} < c$. Știind că unul din numerele $\frac{3}{2}$; a; c este media aritmetică a celorlalte două, să se afle numerele a și c.

16. ECUAȚII

Următoarele propoziții cu o variabilă se numesc *ecuații:*

1) $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, unde $x \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$; 2) $x+\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$, unde $x \in \mathbb{Q}_+$; 3) $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, unde $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{4}, 3\right\}$; 4) $x-\frac{3}{2}=1$, unde $x \in \mathbb{Q}_+$; 5) $\frac{2}{3}x=\frac{5}{7}$, unde $x \in \mathbb{Q}_+$; 6) $x : \frac{1}{2} = 5$, unde $x \in \mathbb{Q}_+$; 7) $x+2=2x+\frac{1}{2}$, unde $x \in \mathbb{Q}_+$.

A rezolva o ecuație înseamnă a găsi mulțimea soluțiilor sale. În cele ce urmează, arătăm cum se rezolvă o ecuație.

1) $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, unde $x \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$.

Înlocuim pe x, pe rînd, cu elementele mulțimii $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$.

$0+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ este o propoziție falsă, deoarece $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, iar $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, avînd în vedere că $1 \cdot 4 < 3 \cdot 2$.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ este o propoziție adevărată.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ este o propoziție falsă, deoarece $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, iar $1 > \frac{3}{4}$.

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ este o propoziție falsă, avînd $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$, iar $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$, numărătorul fracției $\frac{5}{4}$ fiind mai mare decît numărătorul fracției $\frac{3}{4}$.

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ este o propoziție falsă, avînd $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, iar $\frac{3}{2} > \frac{3}{4}$, numitorul fracției $\frac{3}{2}$ fiind mai mic decît numitorul fracției $\frac{3}{4}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației 1) este $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. Se mai scrie $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$, înțelegînd prin S mulțimea soluțiilor ecuației 1).

Ecuația 1) mai poate fi rezolvată în felul următor:

Din $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ deducem $x=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{4}$. Deoarece $\frac{1}{4}$ este element al mulțimii $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$, soluția ecuației 1) este $\frac{1}{4}$. Se mai spune că rădăcina ecuației 1) este $\frac{1}{4}$. Uneori, soluția ecuației 1) se dă scriind $x=\frac{1}{4}$.

2) $x+\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$, unde $x \in \mathbb{Q}_+$.

Nu putem rezolva ecuația 2) înlocuind pe x, pe rînd, cu cîte un număr rațional, deoarece mulțimea $\mathbb{Q}$ este infinită.

Dar ecuația 2) poate fi rezolvată astfel:

Din $x+\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$ deducem $x=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$. Avem $x=\frac{7}{12}$. Verificînd, se constată că $\frac{7}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$. Deci $\frac{7}{12}$ este soluția ecuației 2), deoarece $\frac{7}{12} \in \mathbb{Q}_+$. Verificarea nu este necesară, deoarece din $x=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$ deducem $x+\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$.

„Cea mai cuprinzătoare" mulţime de numere pe care o cunoaştem este Q_+. Din această cauză, ecuaţia 2) se mai scrie sub forma $x + \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$. Nu se mai scrie $x \in Q_+$.

3) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, unde $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{4}, 3\right\}$.

Putem înlocui pe x, pe rînd, cu elementele mulţimii $\left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{4}, 3\right\}$. Obţinem:

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ este o propoziţie falsă, deoarece $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ şi nu avem $\frac{1}{6} = \frac{3}{4}$.

$1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ este o propoziţie falsă, deoarece $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ şi nu avem $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ este o propoziţie adevărată.

$3 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ este o propoziţie falsă, deoarece $3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ şi nu avem $\frac{5}{2} = \frac{3}{4}$.

Soluţia sau rădăcina ecuaţiei 3) este deci $\frac{5}{4}$.

Un alt mod de rezolvare a ecuaţiei 3) este următorul:

Din $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ deducem $x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$. Avem $x = \frac{5}{4}$.

4) $x - \frac{3}{2} = 1$, unde $x \in Q_+$.

Din $x - \frac{3}{2} = 1$ deducem $x = 1 + \frac{3}{2}$. Avem $x = \frac{5}{2}$. Soluţia sau rădăcina ecuaţiei 4) este deci $\frac{5}{2}$.

5) $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$, unde $x \in Q_+$.

Inversul lui $\frac{2}{3}$ este $\frac{3}{2}$. Deci din $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$ deducem $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7}$ sau $x = \frac{15}{14}$. Soluţia sau rădăcina ecuaţiei 5) este $\frac{15}{14}$.

6) $x : \frac{1}{2} = 5$, unde $x \in Q_+$.

Din $x : \frac{1}{2} = 5$ deducem $x \cdot 2 = 5$. Inversul lui 2 este $\frac{1}{2}$. Deci $x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2}$ sau $x = \frac{5}{2}$. Soluţia sau rădăcina ecuaţiei 6) este $\frac{5}{2}$.

7) $x + 2 = 2x + \frac{1}{2}$, unde $x \in Q_+$.

Din $x + 2 = 2x + \frac{1}{2}$ deducem $2 = x + \frac{1}{2}$ sau $x + \frac{1}{2} = 2$. Din $x + \frac{1}{2} = 2$ deducem $x = 2 - \frac{1}{2}$. Deci $x = \frac{3}{2}$. Soluţia ecuaţiei 7) este $\frac{3}{2}$.

Atunci cînd x este ales dintre elementele mulţimii „celei mai cuprinzătoare" pe care o cunoaştem, în ecuaţie nu se mai specifică acest lucru.

În felul acesta, ecuaţiile 2), 4), 5), 6), 7) de mai înainte se mai scriu $x + \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$, $x - \frac{3}{2} = 1$, $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$, $x : \frac{1}{2} = 5$, $x + 2 = 2x + \frac{1}{2}$.

EXERCIŢII

Să se rezolve următoarele ecuaţii în mulţimea Q_+:

a) $x + \frac{2}{3} = 1$; b) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{6} - x = \frac{1}{3}$;

d) $\frac{3}{4}x = 6$; e) $1 + \frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2}$; f) $2x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$;

g) $\frac{2}{5}x + 4 = 8$.

17. INECUAŢII

Următoarele propoziţii cu o variabilă se numesc *inecuaţii*: 1) $\frac{2}{3}x \geqslant 3$, unde $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{11}{2}\right\}$; 2) $5x \geqslant \frac{4}{5}$, unde $x \in Q_+$; 3) $\frac{3}{2}x \leqslant 4$, unde $x \in Q_+$; 4) $x + \frac{1}{2} \geqslant 7x - \frac{3}{8}$, unde $x \in Q_+$.

A rezolva o inecuaţie înseamnă a găsi mulţimea soluţiilor sale. Iată cum se rezolvă o inecuaţie:

1) $\frac{2}{3}x \geqslant 3$, unde $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{11}{2}\right\}$.

Înlocuind pe x, pe rînd, cu elementele mulţimii $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{11}{2}\right\}$ obţinem:

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} \geqslant 3$ este o propoziţie falsă, deoarece $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ şi nu avem $\frac{1}{3} \geqslant 3$.

$\frac{2}{3}\cdot 1 \geqslant 3$ este o propoziţie falsă, deoarece $\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$ şi nu avem $\frac{2}{3} \geqslant 3$.

$\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{2} \geqslant 3$ este o propoziţie adevărată, deoarece $\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{2} = \frac{11}{3}$ şi avem $\frac{11}{3} \geqslant 3$.

Deci $\frac{11}{2}$ este soluţia inecuaţiei 1).

2) $5x \geqslant \frac{4}{5}$, unde $x \in Q_+$.

$\frac{1}{5}$ este inversul lui 5. Din $5x \geqslant \frac{4}{5}$ deducem $\frac{1}{5}\cdot 5x \geqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}$ sau $x \geqslant \frac{4}{25}$. Deci orice număr raţional cel puţin egal cu $\frac{4}{25}$ este o soluţie a inecuaţiei 2).

3) $\frac{3}{2}x \leqslant 4$, unde $x \in Q_+$.

$\frac{2}{3}$ este inversul lui $\frac{3}{2}$. Din $\frac{3}{2}x \leqslant 4$ deducem $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x \leqslant \frac{2}{3}\cdot 4$ sau $x \leqslant \frac{8}{3}$. Deci orice număr raţional nenegativ cel mult egal cu $\frac{8}{3}$ este o soluţie a inecuaţiei 3).

4) $x + \frac{1}{2} \geqslant 7x - \frac{3}{8}$, unde $x \in Q_+$.

Din $x + \frac{1}{2} \geqslant 7x - \frac{3}{8}$ deducem $x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \geqslant 7x$ sau $x + \frac{7}{8} \geqslant 7x$ sau $7x \leqslant x + \frac{7}{8}$. Apoi obţinem $6x \leqslant \frac{7}{8}$. Înmulţind ambii membri ai acestei inecuaţii cu $\frac{1}{6}$ obţinem $\frac{1}{6}\cdot 6x \leqslant \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{8}$ sau $x \leqslant \frac{7}{48}$. Deci orice număr raţional nenegativ cel mult egal cu $\frac{7}{48}$ este o soluţie a inecuaţiei 4).

În cazul în care într-o inecuaţie x este ales dintre elementele mulţimii „celei mai cuprinzătoare" pe care o cunoaştem, inecuaţiile 2), 3), 4) de mai înainte se mai scriu:

$$5x \geqslant \frac{4}{5},\quad \frac{3}{2}x \leqslant 4,\quad x + \frac{1}{2} \geqslant 7x - \frac{3}{8}.$$

EXERCIŢII

Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\frac{1}{2}x \leqslant 3$, $x \in N$; b) $2x > \frac{1}{4}$, $x \in \left\{\frac{1}{9}; \frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right\}$;

c) $\frac{1}{8}x \leqslant \frac{1}{2}$, $x \in N$; d) $\frac{1}{2}x \geqslant \frac{1}{4}$, $x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{20}\right\}$.

18. PROBLEME SIMPLE A CĂROR REZOLVARE CONDUCE LA ECUAŢII DE TIPUL STUDIAT

1) Să se afle un număr ştiind că, adunîndu-l cu $\frac{3}{8}$, obţinem numărul $\frac{5}{4}$.

Rezolvare. Notînd cu x numărul căutat, avem $x + \frac{3}{8} = \frac{5}{4}$. Deci $x = \frac{5}{4} - \frac{3}{8}$, $x = \frac{7}{8}$. Numărul căutat este $\frac{7}{8}$.

2) Dintr-un siloz s-au scos $24\frac{1}{2}$ tone de cereale. În siloz au mai rămas $25\frac{1}{2}$ tone de cereale. Cîte tone de cereale se aflau în siloz?

Rezolvare. Notăm cu x numărul de tone de cereale din siloz. Avem $x - 24\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$. Deci $x = 25\frac{1}{2} + 24\frac{1}{2}$ sau $x = \frac{51}{2} + \frac{49}{2}$ sau $x = \frac{100}{2}$. În siloz se aflau 50 tone de cereale.

3) Să se afle un număr astfel încît prin înmulţirea acestui număr cu 3 să obţinem $\frac{3}{2}$.

Rezolvare. Notînd cu x numărul căutat, avem $3x = \frac{3}{2}$. Deci $\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}$ sau $x = \frac{1}{2}$. Numărul căutat este $\frac{1}{2}$.

4) Să se afle un număr astfel încît prin împărţirea acestui număr cu $\frac{4}{5}$ să obţinem $\frac{1}{2}$.

Rezolvare. Notăm cu x numărul căutat. Avem $x : \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$. Deci $x \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$ sau $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$, $x = \frac{2}{5}$. Numărul căutat este $\frac{2}{5}$.

5) Să se afle un număr, astfel încît, prin înmulţirea acestui număr cu 4 să obţinem acelaşi rezultat ca atunci cînd îl adunăm cu $\frac{3}{5}$.

Rezolvare. Notăm cu x numărul căutat. Avem $4x = x + \frac{3}{5}$. Deci $3x = \frac{3}{5}$ sau $x = \frac{1}{5}$. Numărul căutat este $\frac{1}{5}$.

PROBLEME

1. Să se afle un număr, ştiind că, înmulţindu-l cu $\frac{3}{4}$, obţinem $\frac{1}{2}$.
2. Un număr este de şase ori mai mare decît altul. Dacă înmulţim pe cel mai mic dintre ele cu $\frac{1}{2}$ şi adunăm rezultatul cu celălalt număr, obţinem 117. Să se afle numerele.
3. Dacă înmulţim un număr cu $\frac{2}{3}$, iar rezultatul îl adunăm cu $\frac{1}{5}$, obţinem $\frac{3}{5}$. Să se afle numărul.
4. Să se afle un număr pe care, dacă-l înmulţim cu 3, obţinem acelaşi rezultat ca atunci cînd îl adunăm cu $\frac{1}{2}$.

19. AFLAREA UNEI FRACŢII DINTR-UN NUMĂR NATURAL

Problemă. Un călător are de parcurs o distanţă de 12 km. El a parcurs $\frac{3}{4}$ din această distanţă. Cîţi kilometri a parcurs călătorul?

Rezolvare

Pentru a înţelege bine despre ce este vorba în această problemă, să urmărim figura 21.

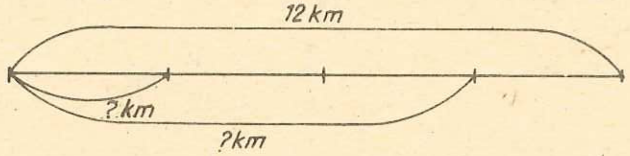


Fig. 21

La $\frac{4}{4}$ corespund 12 km.

La $\frac{1}{4}$ corespund 12 km : 4 = 12 km $\cdot \frac{1}{4}$.

La $\frac{3}{4}$ corespund 12 km $\cdot \frac{1}{4} \cdot 3 =$ 12 km $\cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot$ 12 km = 9 km.

Să renunţăm acum la unitatea de măsură care este kilometrul.

Pentru a afla $\frac{3}{4}$ din numărul natural 12 înmulţim pe $\frac{3}{4}$ cu 12. Deci:

Pentru a afla o fracţie dintr-un număr natural, înmulţim numărul raţional reprezentat de fracţie cu numărul natural.

După cum se vede putem scrie:

$$\frac{3}{4} \cdot 12 = \frac{12}{4} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 12}{4}.$$

Adică, putem rezolva problema în două feluri:

1) Împărţim întîi pe 12 la 4 şi rezultatul îl înmulţim cu 3.

2) Înmulţim pe 3 cu 12 şi rezultatul îl împărţim la 4. Pentru cel de-al doilea mod de rezolvare ne putem folosi de figura 22.

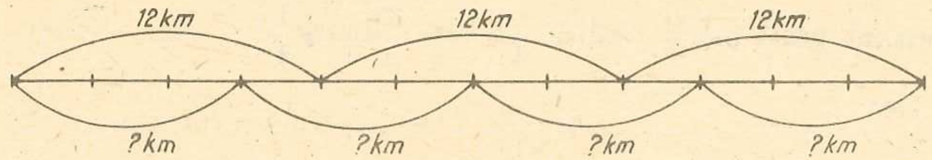


Fig. 22

EXERCIȚII

Să se afle:

1) $\frac{3}{4}$ din 20 kg; 2) $\frac{2}{5}$ din 40 m; 3) $\frac{7}{10}$ din 200 cm; 4) $\frac{5}{7}$ din 21 kg;

5) $\frac{4}{5}$ din 20.

20. AFLAREA UNEI FRACȚII DINTR-O FRACȚIE

Problemă. O bucată de sîrmă are lungimea de $\frac{11}{2}$ m. Se taie $\frac{3}{4}$ din această bucată de sîrmă. Cîți metri s-au tăiat?

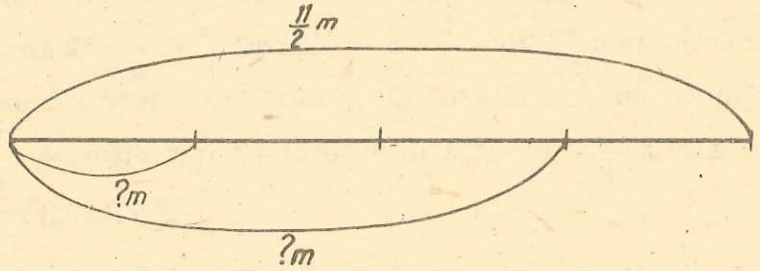


Fig. 23

Rezolvare

Urmăriți cu atenție figura 23.

La $\frac{4}{4}$ corespund $\frac{11}{2}$ m.

La $\frac{1}{4}$ corespund $\frac{11}{2}\text{ m} : 4 = \frac{11}{2}\text{ m}\cdot\frac{1}{4}$.

La $\frac{3}{4}$ corespund $\frac{11}{2}\text{ m}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{11}{2}\text{m}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{11}{2}\text{ m}\cdot = \frac{33}{8}\text{ m} = 4\frac{1}{8}$ m.

Dacă renunțăm la unitatea de măsură, se vede că aflăm $\frac{3}{4}$ din $\frac{11}{2}$ înmulțind pe $\frac{3}{4}$ cu $\frac{11}{2}$, adică $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{2} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$.

Deci:

Aflăm o fracție dintr-o fracție înmulțind numerele raționale reprezentate de cele două fracții.

Exercițiu rezolvat

Să se afle: $\frac{3}{5}$ din $\frac{2}{3}$.

Rezolvare

$\frac{3}{5}$ din $\frac{2}{3}$ înseamnă $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{5}$.

EXERCIȚII

Să se afle:

1) $\frac{2}{7}$ din $3\frac{1}{2}$ m; 2) $\frac{5}{6}$ din 12 h; 3) $\frac{2}{3}$ din $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{4}{5}$ din $\frac{5}{7}$; 5) $\frac{1}{5}$ din $\frac{1}{5}$;

6) $\frac{1}{2}$ din $\frac{2}{5}$.

21. AFLAREA UNUI NUMĂR CÎND CUNOAȘTEM O FRACȚIE DIN ACESTA

Problemă. Un călător a parcurs 12 km, ceea ce reprezintă $\frac{3}{4}$ din lungimea unui drum. Să se afle lungimea drumului.

Rezolvare

Să urmărim figura 24. Judecăm astfel:

La $\frac{3}{4}$ corespund 12 km.

La $\frac{1}{4}$ corespund $12\text{ km} : 3 = 12\text{ km}\cdot\frac{1}{3}$.

La $\frac{4}{4}$ corespund $12\text{ km}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4 = 12\text{ km}\cdot\frac{4}{3}$.

Dar $12\text{ km}\cdot\frac{4}{3} = 12\text{ km} : \frac{3}{4} = 16$ km.

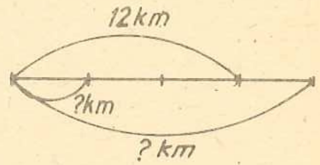


Fig. 24

Deci lungimea drumului este de 16 km. Mai putem proceda și în felul următor:

Lungimea drumului este de x km. Știm că $\frac{3}{4}\cdot x = 12$. De unde:

$$x = 12 : \frac{4}{3},\quad x = 12\cdot\frac{4}{3},\quad x = 16.$$

Drumul are 16 km. Deci:

Pentru a afla un număr cînd cunoaștem o fracție din el, împărțim numărul cunoscut la numărul rațional reprezentat de fracția respectivă.

EXERCIȚII

Să se afle un număr, știind că: 1) $\frac{3}{4}$ din acesta este 20; 2) $\frac{2}{5}$ din acesta este 40; 3) $\frac{7}{10}$ din acesta este 200; 4) $\frac{5}{7}$ din acesta este 21; 5) $\frac{4}{3}$ din acesta este 20; 6) $\frac{2}{3}$ din acesta este $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{4}{5}$ din acesta este $\frac{5}{4}$; 8) $\frac{2}{7}$ din acesta este $3\frac{1}{2}$; 9) $\frac{5}{6}$ din acesta este 12; 10) $\frac{1}{5}$ din acesta este $\frac{1}{6}$; 11) $\frac{1}{2}$ din acesta este $\frac{2}{5}$.

Rezolvarea unor probleme

Problemă. Un număr este egal cu $\frac{3}{5}$ din alt număr, iar suma lor este 80. Să se afle numerele.

I. *Rezolvare prin metoda figurativă*

Reprezentăm primul număr în figura 25, iar al doilea număr în figura 26. Privind figurile 25 și 26 putem scrie:

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{5} = \frac{8}{5}.$$

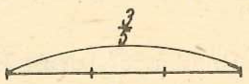


Fig. 25

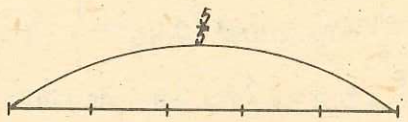


Fig. 26

La $\frac{8}{5}$ corespunde 80. La $\frac{1}{5}$ corespunde $\frac{80}{8}$. La $\frac{5}{5}$ corespunde $\frac{80}{8} \cdot 5 = 50$. La $\frac{3}{5}$ corespunde $\frac{80}{8} \cdot 3 = 30$.

Deci primul număr este 30, iar al doilea 50.

II. *Rezolvare folosind ecuațiile*

Notăm cu x al doilea număr. Primul număr este $\frac{3}{5}$ din x, adică $\frac{3}{5}x$.

În problemă se arată că suma celor două numere este 80. Putem deci scrie:

$$x + \frac{3}{5}x = 80, \quad \frac{5}{5}x + \frac{3}{5}x = 80, \quad \frac{8}{5}x = 80, \quad x = 80 : \frac{8}{5},$$

$$x = \frac{80 \cdot 5}{8}, \quad x = 50.$$

Primul număr este $\frac{3}{5}$ din 50, adică

$$\frac{3}{5} \cdot 50 = 30.$$

Problemă. Să se afle un număr știind că înmulțindu-l cu $\frac{5}{8}$ obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 30 din el.

Rezolvare

I. *Folosind metoda figurativă*

A înmulți un număr cu $\frac{5}{8}$ înseamnă a afla $\frac{5}{8}$ din acel număr. Să urmărim cu atenție figura 27.

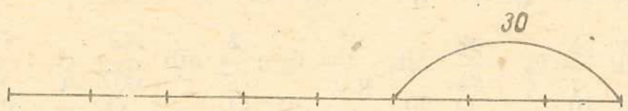


Fig. 27

La $\frac{3}{8}$ corespunde 30. La $\frac{1}{8}$ corespunde 10. La $\frac{8}{8}$ corespunde 80.

II. *Folosind ecuațiile*

Fie x numărul pe care vrem să-l aflăm. Citim foarte atent textul problemei. Scriem:

$$\frac{5}{8}x = x - 30.$$

Mai putem scrie:

$$\frac{5}{8}x = \frac{8}{8}x - 30$$

şi mai departe

$$\frac{8}{8}x = \frac{5}{8}x + 30.$$

Scădem pe $\frac{5}{8}x$ din ambii membri ai ultimei ecuaţii şi obţinem:

$$\frac{3}{8}x = 30; \quad x = 30 : \frac{3}{8} \quad x = 30 \cdot \frac{8}{3}, \quad x = 80.$$

PROBLEME

1. Suma a două numere este 16. Să se afle numerele, ştiind că unul din ele este egal cu $\frac{3}{5}$ din celălalt.
2. Să se afle un număr, astfel încît, dacă-l înmulţim cu $\frac{4}{5}$, obţinem acelaşi rezultat ca atunci cînd scădem 20 din el.
3. Într-un grup de elevi numărul fetelor este de două ori mai mare decît numărul băieţilor. Dacă ar mai veni în grup 9 băieţi şi numărul fetelor ar rămîne acelaşi, atunci numărul băieţilor ar fi egal cu $\frac{3}{4}$ din numărul fetelor. Cîţi băieţi şi cîte fete sînt în grup?

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. *Să se efectueze:*

a) $15 \cdot \frac{2}{5}$; b) $10 \cdot \frac{4}{5}$; c) $20 \cdot \frac{3}{15}$; d) $80 \cdot \frac{7}{90}$; e) $\frac{3}{5} \cdot 30$; f) $\frac{4}{5} \cdot 40$;

g) $\frac{7}{20} \cdot 100$; h) $4 \cdot \frac{5}{4}$; i) $5 \cdot \frac{31}{15}$.

2. *Să se efectueze:*

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{16}$; c) $\frac{4}{3} \cdot \frac{15}{16}$; d) $\frac{4}{5} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right)$; e) $\frac{6}{25} \cdot \left(1 + \frac{1}{24}\right)$;

f) $\left(\frac{2}{3} : \frac{3}{4}\right) \cdot 6$; g) $\frac{5}{16} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4}$; h) $5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$; i) $3 \cdot \frac{2}{15} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right)$;

j) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 6$; k) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) \cdot 30$.

3. *Să se efectueze:*

a) $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{5} : \frac{1}{5}$; c) $\frac{6}{25} : \frac{3}{5}$; d) $\left(2 + \frac{1}{2}\right) : \frac{5}{6}$; e) $\left(4 + \frac{1}{4}\right) : \frac{17}{20}$;

f) $\left(6 + \frac{1}{4}\right) : \left(4 + \frac{1}{6}\right)$.

4. *Să se efectueze:*

a) $4 : \frac{4}{9}$; b) $6 : \frac{2}{3}$; c) $12 : \frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{5} : 2$; e) $\frac{6}{7} : 3$; f) $\left(1 + \frac{1}{7}\right) : 8$.

5. *Să se efectueze:*

a) $\frac{25}{144} : \frac{5}{12}$; b) $\frac{1}{625} : \frac{1}{25}$; c) $\frac{1}{324} : \frac{1}{180}$; d) $\left(1 + \frac{1}{124}\right) : \frac{25}{62}$; e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} : \frac{1}{5}$;

f) $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} : \frac{4}{27}$; g) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$; h) $\left(\frac{9}{2} - \frac{2}{3}\right) : \frac{1}{12}$.

6. *Să se afle:*

a) $\frac{1}{2}$ din 6; b) $\frac{2}{3}$ din 12; c) $\frac{3}{4}$ din 8; d) $\frac{1}{15}$ din 30; e) $\frac{3}{10}$ din 40 kg;

f) $\frac{7}{9}$ din 810 kg; g) $\frac{23}{10}$ din 600 m; h) $\frac{17}{100}$ din 2 400 m;

i) $\frac{41}{100}$ din 3 600 kg; j) $\frac{99}{100}$ din 2 100 kg.

7. *Să se afle:*

a) $\frac{3}{4}$ din $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{15}$ din $\frac{5}{7}$; c) $\frac{2}{15}$ din $\frac{5}{8}$; d) $\frac{2}{3}$ din $\frac{9}{16}$;

e) $\frac{4}{5}$ din $\frac{15}{24}$; f) $\frac{27}{100}$ din $\frac{4}{9}$; g) $\frac{43}{100}$ din $\frac{30}{43}$; h) $\frac{4}{5}$ din $4\frac{4}{7}$.

8. Un călător are de parcurs, în două zile, un drum cu lungimea de 36 km. Cîţi kilometri a parcurs în prima zi, ştiind că a parcurs $\frac{2}{3}$ din drum?
9. Un muncitor a realizat în două zile 140 de piese de acelaşi fel. În prima zi a realizat $\frac{3}{7}$ din numărul pieselor, iar a doua zi restul. Să se afle: a) Cîte piese a realizat în prima zi? b) Cîte piese a realizat în a doua zi?
10. Un lot are 240 ha. Într-o zi s-au arat $\frac{2}{5}$ din lot şi a doua zi restul. Cîte hectare au fost arate a doua zi?

11. Într-un depozit erau 20 t cereale. Într-o zi s-a scos o cantitate de cereale egală cu $\frac{3}{5}$ din cantitatea aflată în depozit, iar în a doua zi restul. Ce cantitate a fost scoasă a doua zi?

12. Lotul cultivat cu grîu al unei cooperative agricole de producție este de 450 ha. Cîte hectare are lotul cultivat cu porumb, dacă el reprezintă $\frac{2}{3}$ din cel cultivat cu grîu?

13. Un călător a parcurs într-o zi 12 km, care reprezintă $\frac{2}{5}$ din tot drumul ce-l are de parcurs. Cîți kilometri are tot drumul?

14. Dintr-un depozit s-a scos într-o zi o cantitate de marfă egală cu $\frac{3}{5}$ din întreaga cantitate, iar a doua zi restul de 40 de tone. Ce cantitate de marfă era la început în depozit?

15. O secție a unei uzine trebuia să producă în două zile un număr de piese de același fel. În prima zi a realizat 250 de piese, adică $\frac{5}{8}$ din toată producția. Cîte piese trebuie să realizeze secția în cele două zile la un loc? Dar numai în a doua zi?

16. Să se afle un număr, știind că, înmulțindu-l cu $\frac{4}{7}$, obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 60 din el.

22. NUMERE RAȚIONALE POZITIVE CARE AU CA REPREZENTANȚI FRACȚII CU NUMITORUL 10, 100, 1 000. SCRIEREA ȘI CITIREA LOR. NOTAȚIA p%

Fie numerele raționale $\frac{137}{10}, \frac{28}{10}, \frac{230}{10}, \frac{13}{100}, \frac{250}{100}, \frac{800}{100}, \frac{17}{1\,000}, \frac{15}{1\,000}, \frac{3\,000}{1\,000}$. Le citim astfel:

„137 zecimi“ în cazul lui $\frac{137}{10}$;

„28 zecimi“ în cazul lui $\frac{28}{10}$;

„230 zecimi“ în cazul lui $\frac{230}{10}$;

„13 sutimi“ în cazul lui $\frac{13}{100}$;

„250 sutimi“ în cazul lui $\frac{250}{100}$;

„800 sutimi“ în cazul lui $\frac{800}{100}$;

„17 miimi“ în cazul lui $\frac{17}{1\,000}$;

„15 miimi“ în cazul lui $\frac{15}{1\,000}$;

„3 000 miimi“ în cazul lui $\frac{3\,000}{1\,000}$.

În loc de $\frac{13}{100}$ se scrie 13%, ceea ce se citește „13 la sută“ sau „13 procente“.

În loc de $\frac{250}{100}$ se scrie 250%, ceea ce se citește „250 la sută“ sau „250 procente“.

În loc de $\frac{800}{100}$ se scrie 800%, ceea ce se citește „800 la sută“ sau „800 procente“.

SCRIEREA ACESTOR NUMERE CU VIRGULĂ ȘI TRECEREA DE LA ACEASTĂ FORMĂ LA CEA INIȚIALĂ

$\frac{137}{10}$ se scrie sub forma 13,7 și se citește „13 întregi și 7 zecimi“;

$\frac{28}{10}$ se scrie sub forma 2,8 și se citește „2 întregi și 8 zecimi“;

$\frac{230}{10}$ se scrie sub forma 23,0 și se citește „23 întregi și 0 zecimi“;

$\frac{13}{100}$ se scrie sub forma 0,13, ceea ce se citește „0 întregi și 13 sutimi“ sau „0 întregi, o zecime și 3 sutimi“;

$\frac{250}{100}$ se scrie sub forma 2,50, ceea ce se citește „2 întregi și 50 sutimi“ sau „2 întregi, 5 zecimi și 0 sutimi“;

$\frac{800}{100}$ se scrie sub forma 8,00, ceea ce se citește „8 întregi și 0 sutimi“ sau „8 întregi, 0 zecimi și 0 sutimi“;

$\frac{17}{1\,000}$ se scrie sub forma 0,017, ceea ce se citește „0 întregi și 17 miimi“ sau „0 întregi, 0 zecimi, o sutime și 7 miimi“;

$\frac{15}{1\,000}$ se scrie sub forma 0,015, ceea ce se citeşte „0 întregi şi 15 miimi" sau „0 întregi, 0 zecimi, o sutime şi 5 miimi".

$\frac{3\,000}{1\,000}$ se scrie sub forma 3,000, ceea ce se citeşte „3 întregi şi 0 miimi" sau „3 întregi, 0 zecimi, 0 sutimi şi 0 miimi".

Scrierile de forma 13,7, 0,13, 0,017 se numesc *fracţii zecimale finite.*

Fracţiile se mai numesc *fracţii ordinare.* De exemplu, $\frac{137}{10}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{17}{1\,000}$ sînt fracţii ordinare.

Se vede că 10, 100, 1 000 sînt puteri ale lui 10, anume $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1\,000 = 10^3$.

Din cele de mai înainte, rezultă că:

Orice număr raţional reprezentat de o fracţie ordinară al cărei numitor este o putere a lui 10 se scrie ca fracţie zecimală finită punînd o virgulă înaintea unui număr de cifre ale numărătorului, socotite de la dreapta la stînga, egal cu exponentul lui 10 de la numitor.

Orice fracţie zecimală finită se scrie ca un număr raţional reprezentat de o fracţie ordinară al cărei numărător este numărul natural ce se obţine din fracţia zecimală finită după suprimarea virgulei, numitorul fiind o putere a lui 10 cu exponentul egal cu numărul de cifre de după virgulă, din fracţia zecimală finită.

Într-o fracţie zecimală finită, înşiruirea de cifre de după virgulă se numeşte *partea zecimală* a fracţiei zecimale finite.

Reţinem că $\frac{230}{10}$ se scrie atît sub forma 23, ceea ce se obţine din $\frac{230}{10}$ după ce am simplificat cu 10, cît şi sub forma 23,0.

De asemenea, $\frac{250}{100}$ se scrie atît sub forma 2,5, ceea ce se obţine din $\frac{25}{10}$, fracţie echivalentă cu $\frac{250}{100}$, cît şi sub forma 2,50.

Aceasta înseamnă că:

Prin adăugare de zerouri la sfîrşitul părţii zecimale a unei fracţii zecimale finite se obţin fracţii zecimale finite pentru scrierea aceluiaşi număr raţional.

De exemplu, 2,5 şi 2,50 sînt notaţii pentru acelaşi număr raţional reprezentat fie de $\frac{25}{10}$, fie de $\frac{250}{100}$.

Prin ştergere de zerouri de la sfîrşitul părţii zecimale a unei fracţii zecimale finite se obţin fracţii zecimale finite pentru scrierea aceluiaşi număr raţional.

De exemplu, 2,500, 2,50, 2,5 sînt notaţii pentru acelaşi număr raţional reprezentat de $\frac{2\,500}{1\,000}$, $\frac{250}{100}$ sau $\frac{25}{10}$.

Fracţiile $\frac{137}{10}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{17}{1\,000}$ sînt ireductibile. Fracţiile $\frac{230}{10}$, $\frac{800}{100}$, $\frac{3\,000}{1\,000}$ se simplifică cu numitorul lor şi deci numerele raţionale reprezentate de aceste fracţii sînt numere naturale. În fine, fracţiile $\frac{28}{10}$, $\frac{250}{100}$, $\frac{15}{1\,000}$ nu sînt nici ireductibile şi nici nu se simplifică cu numitorul lor. Numitorii fracţiilor ireductibile, echivalente cu aceste fracţii, au ca factori numai pe 2 sau 5. Într-adevăr,

$$\frac{28^{(2}}{10} = \frac{14}{5},\quad \frac{250^{(50}}{100} = \frac{5}{2},\quad \frac{15^{(5}}{1\,000} = \frac{3}{200} = \frac{3}{2^3 \cdot 5^2}.$$

Prin amplificare cu o putere a lui 2 sau cu o putere a lui 5 sau cu un produs dintre o putere a lui 2 şi o putere a lui 5 a unei fracţii ordinare al cărei numitor este un produs dintre o putere a lui 2 şi o putere a lui 5 se obţine o fracţie ordinară echivalentă cu fracţia ordinară considerată şi avînd ca numitor o putere a lui 10.

De exemplu, prin amplificare cu 2 a fracţiei $\frac{14}{5}$ se obţine fracţia $\frac{28}{10}$ echivalentă cu $\frac{14}{5}$; prin amplificare cu $2 \cdot 5^2$ a fracţiei $\frac{5}{2}$ se obţine fracţia $\frac{250}{100}$ echivalentă cu fracţia $\frac{5}{2}$; prin amplificare cu 5 a fracţiei $\frac{3}{200}$ se obţine fracţia $\frac{15}{1\,000}$ echivalentă cu fracţia $\frac{3}{200}$.

Deci:

Orice număr raţional reprezentat de o fracţie al cărei numitor este un produs dintre o putere a lui 2 şi o putere a lui 5 sau este o putere a lui 2 sau o putere a lui 5 poate fi scris cu ajutorul unei fracţii zecimale finite.

Nu orice număr raţional poate fi scris sub formă de fracţie zecimală finită. Aceasta se întîmplă dacă numărul raţional este reprezentat de o fracţie ireductibilă al cărei numitor conţine un factor diferit de 2 şi de 5.

OPERAŢII: ADUNAREA, SCĂDEREA, ÎNMULŢIREA, ÎMPĂRŢIREA

În cele ce urmează, pentru scurtarea exprimării, vom spune fracţii zecimale în loc de fracţii zecimale finite.

Adunarea

Fie fracţiile zecimale 78,09 şi 840,952. Le vom scrie respectiv sub forma $\frac{7\,809}{10^2}$ şi $\frac{840\,952}{10^3}$. Suma lor este egală cu

$$78{,}09 + 840{,}952 = \frac{7\,809}{10^2} + \frac{840\,952}{10^3} = \frac{78\,090 + 840\,952}{10^3} = \frac{919\,042}{10^3} = 919{,}042.$$

Deci două fracţii zecimale se adună ca două numere naturale, după ce am făcut ca virgulele din cele două fracţii zecimale să se corespundă, după cum urmează

$$\begin{array}{r} 78{,}09 + \\ 840{,}952 \\ \hline 919{,}042 \end{array}.$$

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) $2{,}4 + 1{,}2$; b) $4{,}86 + 12{,}8$; c) $0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002$;
d) $2 + 4{,}2$; e) $2{,}4 + 240$; f) $2{,}45 + 245$; g) $4{,}21 + 421 + 1{,}2454$.
h) $2 + 111{,}24 + 2{,}899 + 120{,}1 + 1\,401 + 1{,}2$.

Scăderea

Fie fracţiile zecimale 205,53 şi 71,04. Le vom scrie respectiv sub forma $\frac{20\,553}{10^2}$ şi $\frac{7\,104}{10^2}$. Diferenţa dintre 205,53 şi 71,04 este

$$205{,}53 - 71{,}04 = \frac{20\,553}{10^2} - \frac{7\,104}{10^2} = \frac{20\,553 - 7\,104}{10^2} = \frac{13\,449}{10^2} = 134{,}49.$$

Deci o fracţie zecimală se scade dintr-o fracţie zecimală aşa cum se scade un număr natural dintr-un număr natural, după ce am făcut ca virgulele din cele două fracţii zecimale să se corespundă, după cum urmează:

$$\begin{array}{r} 205{,}53 - \\ 71{,}04 \\ \hline 134{,}49 \end{array}.$$

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) $4{,}2 - 1{,}1$; b) $4\,100{,}76 - 299{,}66$;
c) $2{,}46 - 1{,}3$; d) $410{,}16 - 210{,}8$; e) $2{,}1 - 1{,}24$;
f) $471{,}24 - 199{,}998$; g) $2\,300 - 199{,}98$; h) $4\,000 - 299{,}002$;
i) $14{,}756 - 14$.

Înmulţirea

Fie fracţiile zecimale 21,6 şi 34,1. Le vom scrie sub forma $\frac{216}{10}$ şi $\frac{341}{10}$. Produsul lor este egal cu

$$21{,}6 \cdot 34{,}1 = \frac{216}{10} \cdot \frac{341}{10} = \frac{216 \cdot 341}{10^2} = 736{,}56.$$

Deci două fracţii zecimale se înmulţesc ca două numere naturale, rezultatul avînd atîtea cifre după virgulă cîte cifre după virgulă au împreună cele două fracţii zecimale. Ultimul fapt rezultă din aceea că puterile lui 10 de la numitori se înmulţesc, deci exponenţii lor se adună.

La *înmulţirea unei fracţii zecimale cu o putere a lui 10* mutăm virgula la dreapta peste atîtea cifre cît arată exponentul lui 10.

Exemple

a) $21{,}734 \cdot 10^2 = \frac{21\,734}{10^3} \cdot 10^2 = \frac{21\,734}{10} = 2173{,}4$;

b) $21{,}734 \cdot 10^4 = \frac{21\,734}{10^3} \cdot 10^4 = 21\,734 \cdot 10 = 217\,340$.

În ultimul caz, exponentul 4 al lui 10^4, cu care a fost înmulțită fracția zecimală 21,734, fiind mai mare decît numărul cifrelor (egal cu 3) de după virgulă ale acestei fracții zecimale, am adăugat un 0, după ultima cifră, deoarece $4 - 3 = 1$, și am eliminat virgula, rezultatul fiind un număr natural.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $2,4 \cdot 1,5$; b) $20,4 \cdot 40,5$; c) $20,5 \cdot 100,2$;

d) $10,02 \cdot 2\,050$; e) $200,4 \cdot 1,005$; f) $4,05 \cdot 101\,000$.

Împărțirea

La *împărțirea unei fracții zecimale cu o putere a lui 10* mutăm virgula la stînga peste atîtea cifre cît arată exponentul puterii lui 10.

Exemple

a) $216,5 : 10^2 = \frac{2\,165}{10} : 10^2 = \frac{2\,165}{10} \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{2\,165}{10^3} = 2,165;$

b) $216,5 : 10^4 = \frac{2\,165}{10} : 10^4 = \frac{2\,165}{10} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{2\,165}{10^5} = 0,02165.$

În ultimul caz, exponentul 4 al lui 10^4, cu care a fost împărțită fracția zecimală 216,5, fiind mai mare decît numărul cifrelor (egal cu 3) de dinainte de virgulă ale acestei fracții zecimale, am adăugat un 0, deoarece $4 - 3 = 1$, înainte de prima cifră, am scris virgula înainte de acest 0, iar înainte de virgulă am mai scris un 0.

Împărțirea unei fracții zecimale printr-o fracție zecimală

Fie fracțiile zecimale 314,01 și 2,5. Le vom scrie respectiv sub forma $\frac{31\,401}{10^2}$ și $\frac{25}{10}$. Cîtul dintre 314,01 și 2,5 este

$$314,01 : 2,5 = \frac{31\,401}{10^2} : \frac{25}{10} = \frac{31\,401}{10^2} \cdot \frac{10}{25} = \frac{31\,401}{10} \cdot \frac{1}{25} = \frac{31\,401}{250} = 31\,401 : 250.$$

Deci două fracții zecimale se împart ca două numere naturale obținute din fracțiile zecimale date, mutînd virgula la dreapta, în fiecare din ele, peste un număr egal de cifre.

După ce am obținut

$$314,01 : 2,5 = \frac{31\,401}{10} \cdot \frac{1}{25},$$

putem scrie

$$314,01 : 2,5 = \frac{31\,401}{10} : 25 = 3140,1 : 25.$$

Deci cîtul dintre două fracții zecimale este egal cu cîtul dintre fracțiile zecimale ce se obțin, respectiv din fracțiile zecimale date, mutînd virgula la dreapta, în fiecare din ele, peste atîtea cifre zecimale cîte cifre zecimale, după virgulă, sînt în fracția zecimală la care se face împărțirea.

Avem și

$$3\,140,1 : 25 = \frac{31\,401}{10} : 25 = \frac{31\,401}{10} \cdot \frac{1}{25} = \frac{31\,401}{250} = \frac{31\,401}{25} \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= (31\,401 : 25) \cdot \frac{1}{10} = \frac{31\,401 : 25}{10};$$

$$3140,1 : 25 = \frac{31\,401}{10} : 25 = \frac{314\,010}{10^2} \cdot \frac{1}{25} = \frac{314\,010}{2\,500} = \frac{314\,010}{25} \cdot \frac{1}{10^2} =$$

$$= (314\,010 : 25) \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{314\,010 : 25}{10^2}$$

ș.a.m.d. De aici se vede că obținem cîtul dintre o fracție zecimală și un număr natural în modul următor. Mutăm virgula în fracția zecimală peste un număr de cifre, astfel ca fracția zecimală să devină un număr natural. Aplicăm apoi teorema împărțirii întregi celor două numere naturale care se împart, determinînd cîtul și restul împărțirii. În cazul de față avem:

31401	25	314010	25	3140100	25
25	1256	25	12560	25	125 604
=64		=64		=64	
50		50		50	
140		140		140	
125		125		125	
=151		=151		=151	
150		150		150	
==1		==10		==100	
				100	
				===	

În sfîrşit, despărţim la dreapta, în cîtul obţinut, un număr de cifre egal cu numărul de cifre peste care am mutat virgula la dreapta în fracţia zecimală pe care o împărţim la numărul natural. În cazul de faţă, din cîturile 1 256; 12 560; 125 604 obţinem fracţiile zecimale 125,6; 125,60; 125,604. Numerele naturale 31 401 şi 314 010 nu se împart la 25, pe cînd 3 140 100 se împarte la 25. Deci

$$314{,}01 : 2{,}5 = \frac{3\,140\,100 : 25}{10^3} = \frac{125\,604}{10^3} = 125{,}604.$$

Pentru a nu face mai multe calcule, ca mai înainte, procedăm în felul următor:

3140,1	25
25	125,604
=64	
50	
140	
125	
=151	
150	
==100	
100	
===	

În ambele fracţii zecimale 314,01 şi 2,5 virgula a fost mutată la dreapta peste o cifră, pentru a transforma fracţia zecimală 2,5 în numărul natural 25. Apoi calculele se fac ca la numere naturale, punîndu-se virgula la rezultat îndată ce trebuie să utilizăm şi cifre de după virgulă în 3140,1.

Orice număr natural poate fi considerat ca o fracţie zecimală în care virgula figurează după ultima sa cifră. De aceea se pot face operaţii cu numere în care unul din ele este un număr natural, iar celălalt este o fracţie zecimală.

EXERCIŢII

Să se efectueze:

a) 24,1 : 2; b) 2,3 : 4; c) 0,21 : 5; d) 21,6 : 25;
e) 4,2 : 2,1; f) 1,44 : 1,2; g) 3,24 : 0,018;
h) 4 202,5 : 0,205; i) 20 140,2 : 1 005; j) 1 699,74 : 0,213.

23. UNITĂŢI DE MĂSURĂ PENTRU LUNGIME, MASĂ ŞI TIMP

Oamenii au folosit *instrumente de măsură* şi au făcut *măsurări*, încă din cele mai vechi timpuri.

Fără a măsura şi fără a întrebuinţa instrumente de măsură nu se poate desfăşura nici o activitate practică.

CE ÎNSEAMNĂ A MĂSURA LUNGIMEA? UNITATEA DE MĂSURĂ PENTRU LUNGIME

A măsura o lungime înseamnă a o compara cu o lungime pe care o luăm ca unitate de măsură.

Cum putem face aceasta?

Să presupunem că vrem să ştim care este lungimea unei muchii a băncii (fig. 28).

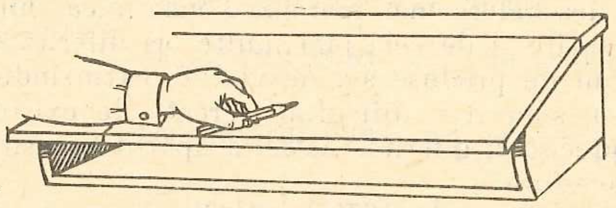


Fig. 28

Pentru aceasta, va fi necesar să alegem un obiect a cărui lungime să o folosim pentru comparare. Putem folosi un creion. Operaţia o facem în felul următor: aşezăm creionul pe muchia băncii în aşa fel încît un capăt al lui să coincidă cu una din extremităţile băncii; punem un semn pe bancă la celălalt capăt al creionului şi mutăm creionul, suprapunîndu-l, în continuare, peste muchia pe care vrem s-o măsurăm ş.a.m.d., pînă la extremitatea cealaltă a muchiei. Să presupunem că am făcut această operaţie de 6 ori. Aceasta înseamnă că lungimea muchiei este de 6 ori mai mare decît lungimea creionului.

În măsurarea făcută, lungimea creionului este o *unitate de lungime*. Rezultatul măsurării poate fi scris:

lungimea băncii $= 6 \times$ lungimea creionului.

Desigur, operaţia o poate face şi un coleg de-al nostru folosind creionul lui care, să spunem, este mai scurt decît al nostru.

În acest caz, lungimea băncii este comparată cu o altă unitate de măsură. Să presupunem că, procedînd la fel ca noi, colegul supra-pune creionul de 8 ori. El obține pentru aceeași lungime un rezultat diferit:

lungimea băncii = 8 × lungimea creionului.

Ne dăm seama că *rezultatul unei măsurări depinde de unitatea de măsură pe care o folosim.*

Comunicînd unei persoane rezultatul măsurării lungimii băncii, aceasta nu ar putea să-și dea seama cît de lungă este o bancă din clasa noastră, deoarece nu cunoaște unitatea de măsură folosită. Pentru a putea să ne înțelegem asupra rezultatelor măsurării este necesar să existe o unitate de măsură cunoscută și folosită de toată lumea.

În vremurile îndepărtate, oamenii, trăind în colectivități izolate, au folosit unități de măsură diferite, care le erau mai la îndemînă. Pentru măsurarea lungimii au folosit palma, piciorul, cotul, pasul, grosimea degetului mare ș.a.

Aceste unități au două neajunsuri importante:

1) Nu sînt în toate cazurile de aceeași mărime; pasul unui om poate avea o deschidere mai mare sau mai mică, lungimea palmei a doi oameni poate fi de cele mai multe ori diferită ș.a.m.d.

2) Schimbul de produse s-a dezvoltat; extinzîndu-se la regiuni tot mai întinse, s-au ivit dificultăți create de existența unităților de măsură neprecise și diferite. Astfel a apărut necesitatea precizării și unificării acestora.

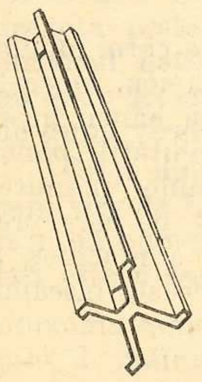


Fig. 29

În 1875 s-a încheiat un acord numit „Convenția metrului“ prin care s-a hotărît să se folosească, ca unitate de măsură a lungimii, *metrul* (scris prescurtat m).

Pentru ca lungimea metrului să fie aceeași peste tot, s-a fabricat o bară din platină și iridium, de forma din figura 29.

Un metru reprezintă lungimea între cele două linii trasate pe bară aproape de capetele ei (fig. 29).

Fiecare țară care a semnat această convenție a primit cîte o copie exactă, care are rolul de a servi ca unitate de lungime. Orice instrument folosit la măsurarea lungimii este comparat cu acest metru. Există lungimi pe care nu le putem exprima în metri printr-un număr natural. Așa de exemplu, înălțimea unui om este, în general, mai mare de un metru, dar mai mică de doi metri. Chiar lungimea băncii, măsurată cu metrul, nu se exprimă printr-un număr natural. De asemenea, ar fi incomod să exprimăm distanța Pămînt—Lună în metri (384 000 000 m).

De aceea, au fost stabiliți multiplii și submultiplii metrului. **Multiplii și submultiplii se exprimă prin cuvinte compuse prin adăugarea unor prefixe[1] în fața cuvîntului care indică unitatea de măsură (în cazul nostru metrul). Fiecare prefix indică de cîte ori multiplul sau submultiplul obținut este mai mare sau mai mic decît unitatea de măsură.**

Dăm exemple de astfel de prefixe:

— kilo (k) care semnifică: de 1 000 ori mai mare;
— hecto (h) care semnifică: de 100 ori mai mare;
— deca (da) care semnifică: de 10 ori mai mare;
— deci (d) care semnifică: de 10 ori mai mic;
— centi (c) care semnifică: de 100 ori mai mic;
— mili (m) care semnifică: de 1 000 ori mai mic.

În cazul lungimilor, multiplii și submultiplii se formează în felul următor:

kilo (k)		kilometrul (km) $= 1000\ \text{m} = 10^3\ \text{m}$;
hecto (h)		hectometrul (hm) $= 100\ \text{m} = 10^2\ \text{m}$;
deca (da)		decametrul (dam) $= 10\ \text{m}$;
deci (d)	*metrul* (*m*)	decimetrul (dm) $= \frac{1}{10}\ \text{m} = 0{,}1\ \text{m}$;
centi (c)		centimetrul (cm) $= \frac{1}{100}\ \text{m} = \frac{1}{10^2}\ \text{m} = 0{,}01\ \text{m}$;
mili (m)		milimetrul (mm) $= \frac{1}{1\,000}\ \text{m} = \frac{1}{10^3}\ \text{m} = 0{,}001\ \text{m}$.

Observăm că un multiplu sau submultiplu al metrului este de 10 ori mai mare decît cel imediat inferior și de 10 ori mai mic decît cel imediat superior.

Deci, rezultatul măsurării unei lungimi cu ajutorul metrului, al multiplilor și submultiplilor lui, se poate exprima printr-o fracție zecimală.

Exemplu. 6,37 m înseamnă 6 metri, 3 zecimi de metru (adică 3 decimetri) și 7 sutimi de metru (adică 7 centimetri). Se mai poate scrie: 6 m, 3 dm și 7 cm, sau 6 m și 37 cm.

Să presupunem că avem o lungime de 24,375 m; unitatea de măsură este metrul, zecimile reprezintă decimetri, sutimile, centimetri, iar miimile, milimetri.

24,375 m înseamnă: 24 m, 3 dm, 7 cm, 5 mm.

---

[1] Prefix — grup de litere care, așezat înaintea unui cuvînt, formează un cuvînt compus cu un înțeles nou.

Putem exprima aceeaşi lungime, tot printr-o fracţie zecimală, folosind însă decimetrul:

$$24{,}375 \text{ m} = 243{,}75 \text{ dm}.$$

Într-adevăr, 243,75 dm înseamnă:

200 dm, adică 20 m (căci 10 dm = 1 m),
40 dm, adică 4 m,
3 dm,
7 zecimi de decimetru, adică 7 cm,
5 sutimi de decimetru, adică 5 mm,
adică 24,375 m.

Pentru a exprima în decimetri o lungime exprimată în metri, înmulţim numărul de metri cu 10; lungimea de 38 m, în decimetri, va fi 380 dm, iar 12,075 m va fi 120,75 dm. Pentru a trece de la metri la centimetri, înmulţim numărul de metri cu 100; de la metri la milimetri, înmulţim numărul de metri cu 1000. Pentru a trece de la metri la decametri, împărţim numărul de metri la 10, de la metri la hectometri, împărţim numărul de metri la 100 ş.a.m.d.

Cînd avem probleme în care apar lungimi care trebuie adunate sau scăzute, acestea trebuie să fie exprimate cu aceeaşi unitate de măsură (multiplu sau submultiplu al unităţii de măsură).

De exemplu, pentru a aduna 25 km cu 256 m exprimăm lungimile ori în km, ori în m. Observăm că este mai comod să le exprimăm în m. Atunci procedăm astfel:

$$25 \text{ km} = 25\,000 \text{ m};$$

şi apoi

$$25\,000 \text{ m} + 256 \text{ m} = 25\,256 \text{ m}.$$

Pentru a efectua transformările, trebuie să ţinem seama de cîte ori multiplul sau submultiplul folosit este mai mare sau mai mic decît multiplul sau submultiplul în care vrem să exprimăm lungimea.

Exemple

1. 356 km = ? m.

Ştim că metrul este de 1000 de ori mai mic decît kilometrul. Înseamnă că, pentru a afla rezultatul, trebuie să înmulţim pe 356 cu 1000. Aceasta înseamnă că 356 km = 356 000 m.

2. 12 567 m = ? km. Ştim că km este de 1000 de ori mai mare decît m. Trebuie deci să împărţim pe 12 567 la 1000. Aceasta înseamnă că 12 567 m = 12,567 km.

Este foarte important ca anumite lungimi să le exprimăm cît mai potrivit, folosind multiplii sau submultiplii unităţii de măsură.

De exemplu, nu ar fi potrivit ca distanţa de la Pămînt la Soare să o exprimăm altfel decît în km. (Distanţa de la Pămînt la Soare este de aproximativ 150 000 000 km.) Încercaţi s-o exprimaţi în metri şi apoi în mm. De asemenea, nu este potrivit să exprimăm lungimi foarte mici, cum ar fi grosimea unei cărţi sau a unei foi de hîrtie în dm sau în m. Ar fi mai potrivită exprimarea acestor lungimi în cm sau mm.

EXERCIŢII

1. Să se exprime în dm: 0,4 m; 121,003 m; 3,073 m.
2. Să se exprime în m: 1 km; 0,1 km; 3,5 km; 2 cm; 20 cm; 10 005 mm; 3 mm; 2,507 km.
3. Să se exprime în km: 236 m; 10 570 m; 25 m; 1 007 m.
4. Să se exprime lungimile de 8 326,96 dm; 30,562 dm; 0,005 dm în m.
5. Să se exprime în m lungimile de 320 cm; 4 000 cm; 32 cm.
6. Să se exprime în m lungimile de 5 km; 30 km; 0,4 km; 7 hm; 2 dam.
7. Să se exprime în m lungimile de 132,2 dm; 1 365 mm; 1 235 cm.
8. În ce unităţi, multipli sau submultipli, este mai potrivit să exprimăm:
   a) lungimea, lăţimea şi adîncimea unui rîu?
   b) lungimea, lăţimea şi grosimea unei foi de tablă?
   c) lungimea, lăţimea şi grosimea unui ochi de geam?

PERIMETRUL

Perimetrul figurilor formate din segmente de dreaptă este suma lungimilor acestor segmente.

Perimetrul pătratului $= a \cdot 4 = 4a$, a fiind latura pătratului.
Perimetrul dreptunghiului şi al paralelogramului $= a \cdot 2 + b \cdot 2 = (a + b) \cdot 2 = 2(a + b)$, a şi b fiind lungimile laturilor lor.
Perimetrul triunghiului $= a + b + c$, a, b şi c fiind laturile triunghiului.

PROBLEME

1. De cîţi stîlpi este nevoie pentru împrejmuirea cu un gard de sîrmă a unui lot şcolar în formă de pătrat, care are latura de 105 m, dacă stîlpii se plasează la distanţa de 2,5 m unul de altul? Cît costă toţi stîlpii, dacă preţul unuia este de 54,5 lei?

2. Terenul experimental al unei școli are forma de triunghi, cu laturile: $a = 75$ m; $b = 95$ m și $c = 100$ m. Cît ar costa împrejmuirea lui, dacă un metru de gard costă 85 lei?

3. Măsurați perimetrul curții școlii și calculați cît ar costa împrejmuirea ei, dacă un metru de gard s-ar plăti cu 225 lei.

4. La ieșirea din municipiul București, pe marginea din dreapta a șoselei, este plantat un indicator kilometric (fig. 30).
Folosind datele din indicator, să se calculeze distanțele între: Ploiești — Brașov; Ploiești — Cluj-Napoca; Ploiești — Oradea; Brașov — Cluj-Napoca; Brașov — Oradea și Cluj-Napoca — Oradea.

Fig. 30

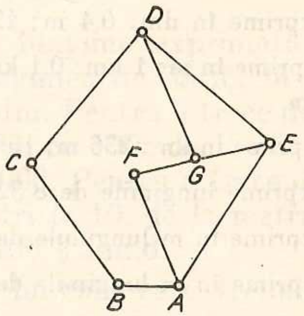


Fig. 31

5. A, B, C, D, E, F, G sînt niște localități legate prin cale ferată, așa cum se vede în figura 31. Se știe că $AB = 20$ km, $BC = 60$ km, $CD = 100$ km, $DE = 70$ km, $EA = 100$ km, $AF = 50$ km, $FG = 30$ km, $GD = 60$ km, $GE = 40$ km. Cineva vrea să ajungă din A în D pe drumul de cea mai mică lungime (pe drumul de lungime minimă). Cîți kilometri are acest drum?

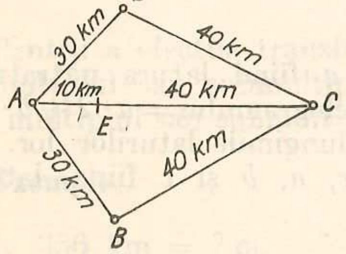


Fig. 32

6. Un camion trebuie să transporte marfă, pe drumurile indicate în figura 32, de la un depozit aflat în D la orașele A, B, C, E și să se întoarcă în D. Care este itinerarul ce trebuie urmat de camion pentru ca drumul să fie cel mai scurt?

7. La un costum de copil intră 2,4 m de stofă. La o casă de copii școlari s-a cumpărat stofă pentru 32 de costume. Dacă un metru de stofă costă 240 lei, ce sumă s-a plătit pentru întregul material de costume?

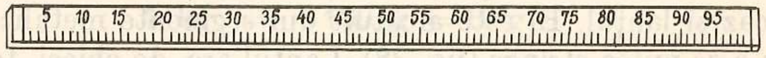
8. De cîte ori este mai mare distanța dintre Pămînt și Soare, în comparație cu distanța dintre Pămînt și Lună? (Distanța Pămînt — Soare = 150 000 000 km; distanța Pămînt — Lună = 384 000 km).

9. Un copil are lungimea pasului de 50 cm. Care este distanța de acasă pînă la școală, exprimată în m, dacă pe acest drum el face 735 de pași?

10. Mai mulți elevi măsoară distanța de la intrarea în curtea școlii pînă la intrarea în școală și obțin următoarele rezultate: a) 15,8 m; b) 16,1 m; c) 15,75 m; d) 15,92 m; e) 16,01 m; f) 10,6 m. Care din elevi a greșit cu siguranță?

INSTRUMENTE DE MĂSURĂ PENTRU LUNGIMI

Pentru măsurarea stofei și a pînzei se folosește o bară rigidă din lemn cu lungimea de 1 m, gradată în centimetri (fig. 33). Tîmplarii și dulgherii folosesc un instrument cu lungimea de 1 m, format din mai

Fig. 33


multe segmente articulate, fiecare de lungimea unui dm și împărțite în cm și mm (fig. 34). Instrumentul acesta, numit metrul de tîmplărie, este alcătuit din mai multe segmente pentru a putea fi strîns și păstrat în buzunar în timpul lucrului.

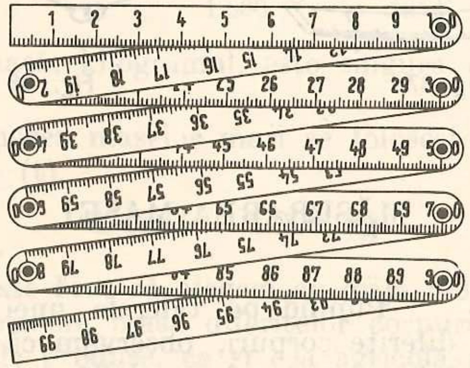


Fig. 34

La croitorie se folosește o panglică de 1,5 m divizată în cm (fig. 35).

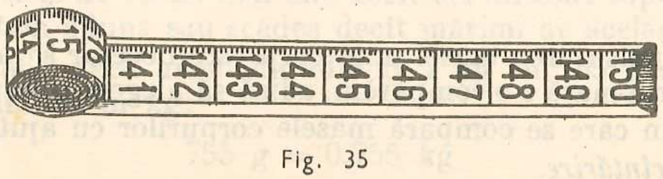


Fig. 35

La desenarea figurilor geometrice, şcolarii folosesc o riglă confecţionată din lemn sau material plastic, divizată în cm şi mm (fig. 36).

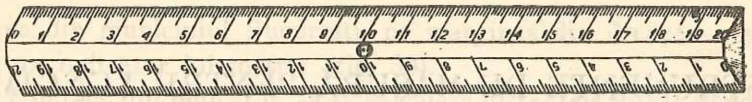


Fig. 36

Lungimea terenurilor, a şoselelor etc. se măsoară cu o panglică lungă de 20 m care se poate înfăşura (fig. 37). Se mai foloseşte, în acest caz, şi lanţul. El este alcătuit din segmente metalice, articulate pentru a se putea strînge (fig. 38). Lanţul are, de obicei, tot o lungime de 20 m.

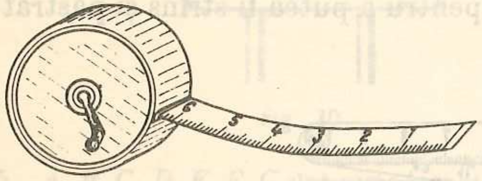


Fig. 37

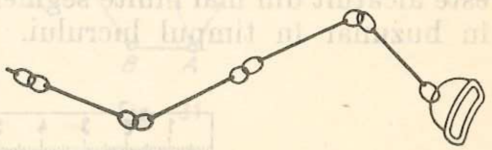


Fig. 38

MĂSURAREA MASEI

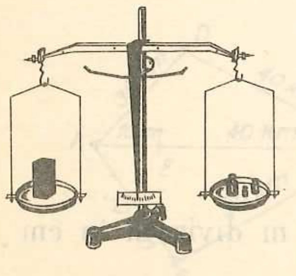


Fig. 39

Punînd pe talerele unei balanţe (fig. 39) diferite corpuri, observăm că aceasta se înclină într-o parte, în cealaltă parte, ori rămîne în echilibru.

Spunem despre corpul care înclină balanţa în partea lui că are o masă mai mare decît corpul care se află pe celălalt taler, iar despre corpurile care lasă balanţa în echilibru spunem că au mase egale.

Pentru măsurarea masei unui corp este necesar să alegem un alt corp cu a cărui masă s-o comparăm, adică să alegem o *unitate de masă*. Operaţia prin care se compară masele corpurilor cu ajutorul balanţei se numeşte *cîntărire*.

Pentru aceleaşi motive care au stat la baza stabilirii unităţii de lungime, a fost necesar să se ajungă la o convenţie cu privire la unitatea de masă pe care s-o accepte toată lumea. Masa corpului din figura 40 reprezintă unitatea de masă, numită *kilogram*. Pornind de la aceasta, prin comparaţie se construiesc corpuri cu masa marcată sau etaloane de masă pentru cîntărirea corpurilor.

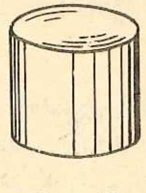


Fig. 40

Submultiplii zecimali ai unităţii de măsură pentru masă se formează adăugînd în faţa cuvîntului gram (g) prefixele cunoscute, astfel:

$$1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g} = 10^3 \text{g}$$

$$1 \text{ hg} = 100 \text{ g} = 10^2 \text{g}$$

$$1 \text{ dag} = 10 \text{ g}$$

$$1 \text{ dg} = \frac{1}{10} \text{ g} = 0{,}1 \text{ g}$$

$$1 \text{ cg} = \frac{1}{100} \text{ g} = \frac{1}{10^2} \text{ g} = 0{,}01 \text{ g}$$

$$1 \text{ mg} = \frac{1}{1\,000} \text{ g} = \frac{1}{10^3} \text{ g} = 0{,}001 \text{ g}.$$

Unitatea de masă, kilogramul, este singura unitate formată cu un prefix.

Pentru exprimarea maselor mari se foloseşte şi un multiplu al kilogramului, tona (t).

$$1 \text{ tonă} = 1\,000 \text{ kg}.$$

În practică, este bine să alegem cu grijă multiplul sau submultiplul în care exprimăm masa diferitelor corpuri. Astfel, producţia industrială, la unele produse, ca şi cea agricolă pe întreaga ţară se exprimă în tone, cumpărăturile de produse alimentare se exprimă mai ales în kilograme, compoziţia diferitelor produse farmaceutice se exprimă în miligrame ş.a.m.d.

În calcule trebuie să ţinem seama că un anumit submultiplu al unităţii de măsură pentru masă este de 10 ori mai mare decît cel imediat inferior şi de 10 ori mai mic decît cel imediat superior. Amintim că nu putem aduna sau scădea decît mărimi de acelaşi fel.

De exemplu, dacă avem de adunat 2 kg cu 755 g este necesar să le exprimăm fie în kg:

$$755 \text{ g} = 0{,}755 \text{ kg}$$

și apoi

$$2 \text{ kg} + 0{,}755 \text{ kg} = 2{,}755 \text{ kg},$$

fie în g:

$$2 \text{ kg} = 2\,000 \text{ g}$$

și apoi

$$2\,000 \text{ g} + 755 \text{ g} = 2\,755 \text{ g}.$$

Observăm că am ajuns la același rezultat, pentru că

$$2{,}755 \text{ kg} = 2\,755 \text{ g}.$$

În figura 41 sînt reprezentate cîteva dintre corpurile folosite la cîntărire. Ele sînt construite în forme și din materiale diferite, în funcție de mărimea maselor corpurilor pe care vrem să le cîntărim, pentru a fi manevrate mai ușor. Toate aceste corpuri sînt construite prin comparație cu cel reprezentat în figura 40 și au masa înscrisă pe ele. Ele se numesc, cum s-a arătat, corpuri cu masa marcată.

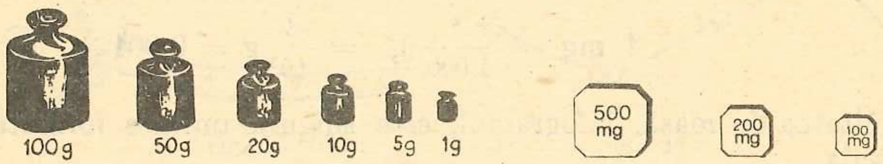


Fig. 41

Pentru cîntărirea unui corp, acesta este așezat pe unul din talerele balanței, iar pe celălalt taler se pun corpuri cu masa marcată, combinîndu-le în așa fel încît să se echilibreze balanța.

De exemplu, în cazul cîntăririi unui corp, așezat pe un taler, pentru echilibrarea balanței a fost necesar să punem pe celălalt taler patru corpuri cu masa marcată și anume: unul de 500 g, unul de 200 g, unul de 100 g și unul de 50 g. Deoarece: 500 g + 200 g + + 100 g + 50 g = 850 g spunem că acest corp are masa de 850 g.

Exemplu. Masa de 11,350 kg se poate compune din:

a) 5 kg + 5 kg + 1kg + 200 g + 100 g + 50 g;

b) 5 kg + 2 kg + 2 kg + 1 kg + 1 kg + 100 g + 100 g + + 100 g + 50 g;

c) 5 kg + 2 kg + 1 kg + 1 kg + 1 kg + 500 g + 500 g + + 200 g + 100 g + 50 g.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Avînd la dispoziție cîte 4 etaloane de cîte 50 g, 100 g, 200 g, 500 g, 1 kg, 2 kg și 5 kg, să se compună cel puțin cîte trei posibilități pentru cîntărirea fiecăruia din corpurile care au următoarele mase: 12,550 kg; 23,150 kg; 18,350 kg.
2. Să se exprime în g: 250 mg; 1,5 kg; 3,4 cg.
3. Să se exprime în kg: 1,86 t; 25 007 g.
4. Să se exprime în grame masele de 2 kg; 1 kg,45g; 0,575 kg, 1 kg,1 g.
5. Să se exprime în tone: 1 826 kg; 5 830 kg; 500 kg.
6. Să se exprime în grame: 56 000 mg; 8 300 mg; 85 mg.
7. Să se calculeze: 3 kg + 1 500 g.
8. Să se calculeze: 0,05 kg + 157 dag + 20 g.
9. Să se citească masele de mai jos, folosind pentru fiecare cifră denumirea corespunzătoare a multiplilor și submultiplilor: 72,385 g; 4,35 kg; 4 350 g.
10. Cu ajutorul unei balanțe, ia 2 kg din 9 kg, făcînd cel mult trei măsurări, avînd la dispoziție doar două corpuri cu masa marcată: unul de 50 g și altul de 200 g.
11. În ce unități este mai potrivit să se exprime masa:
    a) recoltei de pe un teren al C.A.P.?
    b) recoltei de pe un teren experimental al școlii?
    c) legumelor și zarzavaturilor pe care le aduce mama din piață într-o zi?
    d) corpului unui copil?
    e) unei bucăți de ciocolată?
    f) unei pastile de aspirină?
12. Pentru o grădiniță s-au cumpărat odată 54,5 kg de zahăr, altă dată 27,8 kg și altă dată 29,2 kg. Știind că un kg de zahăr costă 14 lei, să se calculeze cît s-a plătit de fiecare dată.
13. Pentru conectarea unui sat la rețeaua de energie electrică este necesar să se întindă cablul pe distanța de 3,624 km. Cît va costa acesta, dacă 1 m de sîrmă cîntărește 125 g, iar un kg de sîrmă costă 17,5 lei? Se consideră că legătura se face prin trei fire.
14. Cît va încasa o C.A.P. pentru roșiile livrate, dacă are cultivate 4 ha cu roșii, producția la hectar este de 16,5 t, iar prețul de livrare este de 3 lei kg?
15. Ce cantitate de fructe s-a transportat în 30 de lăzi, fiecare cîntărind 30 de kg, dacă fiecare ladă cîntărește, goală, 2 kg? Calculați în două moduri.
16. Cîte cutii de cîte 200 g pot fi transportate de un camion care poate încărca 2 t?

17. Fiecare din elevii unei școli a adunat în cursul unui an cîte 1,25 kg plante medicinale. Ce cantitate de plante a predat școala, dacă ea are 857 elevi?

18. Ce cantitate de hîrtie s-a adunat într-o școală în timpul unui an, dacă în școală sînt 556 elevi, iar fiecare elev a adus la școală cîte 12,75 kg de hîrtie?

19. Cîte transporturi trebuie să facă un camion pentru a transporta 53 t de materiale, dacă el poate încărca 5 t?

MĂSURAREA TIMPULUI

De multă vreme, oamenii au observat în natură fenomene care se repetă, cum ar fi, de exemplu, înșiruirea cu regularitate a zilelor și a nopților sau a anotimpurilor. Omul și-a dat seama că lucrurile din jurul lui se modifică și că el însuși se schimbă. El a pus schimbările observate în legătură cu trecerea timpului și l-a măsurat comparîndu-l cu intervalul de timp necesar desfășurării unor fenomene care se repetă cu regularitate, cum ar fi durata unei zile și a unei nopți, durata în care se schimbă cele patru anotimpuri ș.a.

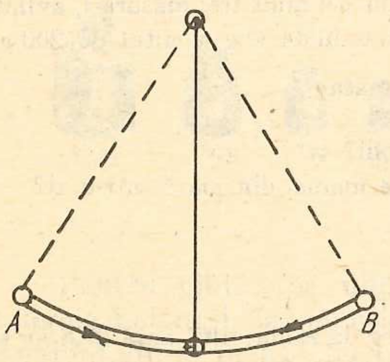


Fig. 42

Există fenomene care se repetă la intervale de timp egale. Un astfel de fenomen este mișcarea unui pendul (fig. 42). Pendulul este alcătuit dintr-o mică bilă metalică suspendată printr-un fir într-un punct fix. Dacă deplasăm bila din poziția verticală (de repaus), ea revine și se deplasează de o parte și de alta a acestei poziții: se duce din A în B și se întoarce în A. Spunem că face o oscilație. Durata oricărui drum din A în B și înapoi în A este mereu aceeași. Durata acestei mișcări, fiind mereu aceeași, este foarte potrivită pentru a fi aleasă ca unitate de timp.

Orice alt interval de timp îl putem compara cu intervalul de timp în care se face o oscilație a pendulului.

De exemplu, putem să facem ca pendulul să înceapă mișcarea o dată cu plecarea unui coleg dintr-un colț al clasei către colțul alăturat și să numărăm cîte oscilații a făcut pendulul pînă cînd colegul a parcurs o latură a clasei.

Timpul în care se mișcă elevul este măsurat prin comparație cu timpul în care se efectuează o oscilație a pendulului, care este, în acest caz, unitatea de timp.

Ca și în cazul lungimii și al masei, s-a adoptat, prin convenție, o anumită unitate de timp.

Unitatea de măsură a timpului este secunda (s).

Instrumentul care măsoară timpul reproduce și repetă, cu exactitate, această unitate de timp și înregistrează cîte secunde au trecut de la un moment dat. Acest lucru îl face ceasul.

Temă în clasă. Pendulul poate fi un instrument pentru măsurarea timpului. Putem să-l potrivim astfel încît o oscilație să dureze o secundă. Încercați să faceți acest lucru. Ascultați tic-tacul ceasornicului și micșorați treptat lungimea pendulului. Veți observa că timpul cît durează o oscilație se scurtează. Cu oarecare îndemînare și răbdare veți ajunge să faceți ca pendulul să execute o oscilație în fiecare secundă.

Pentru exprimarea timpului există și multipli. Astfel sînt:

minutul (min) $= 60$ s;

ora (h) $= 60$ min $= 3\,600$ s;

ziua (d) $= 24$ h $= 86\,400$ s;

săptămîna $= 7$ zile.

De asemenea, intervalul de timp de la 1 ianuarie, ora 0, pînă la 31 decembrie, ora 24, se numește an.

Anul are 12 luni (ianuarie 31 de zile, februarie 28 sau 29 de zile, martie 31 de zile, aprilie 30 de zile, mai 31 de zile, iunie 30 de zile, iulie 31 de zile, august 31 de zile, septembrie 30 de zile, octombrie 31 de zile, noiembrie 30 de zile, decembrie 31 de zile).

Un an are 365 sau 366 de zile, după cum luna februarie are 28 sau 29 de zile. Anii care au 366 de zile se numesc *ani bisecți*. În șirul anilor, anii bisecți se succed (urmează) din 4 în 4; este bisect un an al cărui număr de ordine se împarte la 4. În șirul 1971, **1972**, 1973, 1974 1975, **1976**, 1977, 1978, 1979, **1980**, 1981, 1982, 1983 sînt scoși în evidență anii bisecți. Într-un an bisect, luna februarie are 29 de zile; într-un an obișnuit, ea are 28 de zile.

Un interval de timp de 1 000 de ani formează un mileniu, iar un interval de timp de 100 de ani formează un secol; anii de la 1 pînă la 100 constituie secolul întîi, de la 101 la 200, secolul al doilea etc. Anul 1848 este în secolul al nouăsprezecelea (căci cu anul 1801 începe secolul al 19-lea); noi sîntem în secolul al douăzecilea.

Un interval de timp de 10 ani formează un deceniu. De exemplu, anii 1979 și 1980 sînt în deceniul al optulea al secolului al douăzecilea, iar anul 1983 este în deceniul al noulea al aceluiași secol.

Este important ca anumite durate să le exprimăm în unități de timp cît mai potrivite.

De exemplu, durata vieţii unui om e bine s-o exprimăm în ani; timpul cît un copil poate parcurge o distanţă de 100 m, este potrivit să-l exprimăm în secunde, durata unei perioade a anului şcolar în luni sau în săptămîni ş.a.m.d.

EXERCIŢII

1. Să se exprime în secunde: 3 zile 2 h 14 min; 5 h 14 min 32 s.
2. Să se exprime în minute şi secunde: 10 h 48 min 17 s; 3 zile 12 min 3 s; 5 zile 2 h 37 s; 7 h 5 min 25 s.
3. Să se exprime în ore, minute şi secunde: 4 520 s; 102 min.
4. Cîte zile au la un loc anii 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975?
5. Cîte zile sînt de la 1 aprilie la 30 noiembrie inclusiv, ale aceluiaşi an?
6. Într-o şcoală se află 370 elevi în clasele I—IV. Să se arate că printre elevii acestei şcoli se află neapărat cel puţin 2 elevi care-şi serbează ziua de naştere în aceeaşi zi.
7. În ce mod este mai potrivit să exprimăm:
   a) durata unei pauze la şcoală?
   b) timpul în care parcurgem distanţa de acasă pînă la şcoală?
   c) timpul care a trecut de la ocuparea Daciei de către romani?
   d) durata unui spectacol de film?
   e) timpul necesar, în fiecare zi, pentru pregătirea lecţiilor?

24. APLICAŢII ALE CALCULELOR ARITMETICE ÎN PROBLEME DE GEOMETRIE

UNITATEA DE MĂSURĂ A ARIEI

Cunoaştem că ariile dreptunghiului şi pătratului se exprimă prin produsul a două lungimi. Este normal ca unităţile de măsură pentru arie să fie şi ele exprimate prin pătratul unităţii de lungime.

Unitatea de măsură pentru arie rezultă deci din unitatea de măsură pentru lungime şi este metrul pătrat (m^2). Spunem că m^2 este o unitate derivată.

Metrul pătrat (m^2) reprezintă aria unui pătrat care are latura de 1m. Un multiplu al m^2 este km^2.

Kilometrul pătrat este aria unui pătrat care are latura de 1 km. Deci, dacă 1 kilometru este $10^3 \times 1$ m, atunci 1 km^2 este

$$(10^3 \times 1 \text{ m})^2 = 10^6 \times 1 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2.$$

Milimetrul pătrat (mm^2), un submultiplu al m^2, este aria unui pătrat care are latura de 1 mm.

Deci, dacă 1 mm este $\frac{1}{1000}$ m $= \frac{1}{10^3}$ m $= 0{,}001$ m, atunci 1 mm^2 este $\left(\frac{1}{10^3}\cdot 1 \text{ m}\right)^2 = \frac{1}{10^6}\cdot 1 \text{ m}^2 = \frac{1}{1\,000\,000} \text{ m}^2 = 0{,}000001 \text{ m}^2$.

În mod asemănător judecăm şi pentru ceilalţi multipli sau submultipli ai m^2.

Vom observa că un multiplu sau submultiplu al m^2 este de 100 de ori mai mare decît cel imediat inferior şi de 100 de ori mai mic decît cel imediat superior.

De exemplu, faptul că 1 m^2=100 dm^2, se poate înţelege mai uşor cu ajutorul figurii 43. Fie un pătrat cu latura de 1m. De-a lungul unei laturi, putem aşeza unul lîngă altul 10 pătrate mici cu latura de 1 dm, deci cu aria de 1 dm^2, fiecare. Cele 10 pătrate mici, astfel aşezate, formează un rînd de pătrate cu aria 10×1 dm^2 = 10 dm^2.

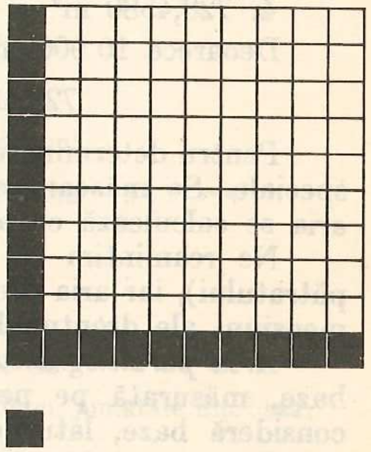


Fig. 43

În tot pătratul, cu aria de 1 m^2, încap 10 astfel de rînduri. Cum aria unui rînd de pătrate este 10 dm^2, aria celor 10 rînduri de pătrate va fi 10×10 dm^2 = 100 dm^2. Deci 1 m^2 = 100 dm^2.

De acest lucru trebuie să ţinem seama cînd facem transformări ale multiplilor şi submultiplilor metrului pătrat.

În practică, km^2 se foloseşte pentru a exprima ariile continentelor, ţărilor sau judeţelor.

De exemplu, Europa are 10 500 000 km^2, Asia 43 450 000 km^2, Republica Socialistă România are 237 000 km^2.

Pentru arii mai mici, cum ar fi, de exemplu, cele ale terenurilor agricole, aria se exprimă de obicei în hectare (ha), adică în hm^2. 1 hm^2 = 10 000 m^2.

Înainte de a aduna sau scădea arii trebuie să le exprimăm în acelaşi mod, făcînd transformările necesare.

Exemple

1. 728,4580 m^2 = ? dm^2.

Deoarece 1 m^2 = 100 dm^2, înmulţim cu 100:

$$728{,}4580\ m^2 = 72\,845{,}80\ dm^2.$$

2. 728,4580 m^2 = ? dam^2.

Deoarece 100 m^2 = 1 dam^2, împărţim la 100:

$$728{,}4580\ m^2 = 7{,}284580\ dam^2.$$

3. 728,4580 m^2 = ? cm^2.

Deoarece 1 m^2 = 100 dm^2 = 100 × 100 cm^2 = 10 000 cm^2, înmulţim cu 10 000:

$$728{,}4580\ m^2 = 7\,284\,580\ cm^2.$$

4. 728,4580 m^2 = ? hm^2.

Deoarece 10 000 m^2 = 1 hm^2, împărţim la 10 000:

$$728{,}4580\ m^2 = 0{,}07284580\ hm^2.$$

Pentru determinarea ariilor nu se folosesc instrumente de măsură speciale. Se măsoară anumite lungimi ale figurilor geometrice, iar aria se calculează cu ajutorul acestora.

Ne reamintim că aria pătratului = $a \cdot a = a^2$ (a fiind latura pătratului), iar aria dreptunghiului = $a \cdot b$ (a şi b fiind cele două dimensiuni ale dreptunghiului).

Aria paralelogramului = $a \cdot i$; i fiind distanţa dintre cele două baze, măsurată pe perpendiculară (linia punctată din desen). Se consideră baze, laturile orizontale din figura 44.

De ce procedăm astfel? Dacă tăiem triunghiul dintr-o parte şi-l lipim în partea cealaltă (fig. 44) obţinem un dreptunghi cu aceleaşi dimensiuni.

Aria triunghiului = $\frac{a \cdot i}{2}$, i fiind perpendiculara dusă din vîrful opus pe latura considerată ca bază, în cazul nostru latura a.

Ne dăm seama, dacă observăm figura 45, că aria oricărui triunghi este jumătate din aria unui paralelogram care are aceeaşi înălţime, iar ca bază, baza triunghiului.

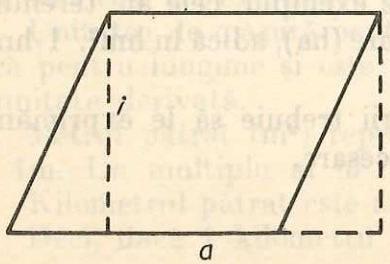


Fig. 44

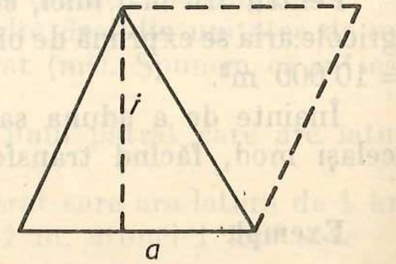


Fig. 45

Observăm că, la paralelogram, la dreptunghi şi la triunghi, oricare latură poate fi considerată bază.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. În ce multipli sau submultipli este mai potrivit să exprimăm:
   a) aria unui lot de pămînt al cooperativei agricole de producţie;
   b) aria terenului experimental al şcolii;
   c) aria pardoselii sălii de clasă;
   d) aria unui ochi de geam?
   În ce situaţii este necesar să cunoaştem ariile în cazurile c şi d?
2. Să se exprime în dm^2, dam^2, hm^2 aria de 14 008,2 m^2.
3. Să se exprime în m^2 aria de 81,004 dam^2?
4. Să se exprime în hectare: 850 000 m^2; 4 520 m^2; 876 m^2.
5. Să se exprime în metri pătraţi: 26,5 dam^2; 32 656 dm^2; 15 625 cm^2: 15 356 217 mm^2.
6. Să se afle ariile următoarelor figuri geometrice:
   a) pătratul cu latura de 4 cm;
   b) dreptunghiul cu baza de 4 cm şi înălţimea de 3 cm;
   c) dreptunghiul cu baza de 4 cm şi înălţimea egală cu jumătate din bază;
   d) triunghiul cu baza de 4 cm şi înălţimea de 4 cm.
7. Un dreptunghi are perimetrul de 440 m. Ştiind că lăţimea sa este mai mică cu 20 m decît lungimea, să se afle aria dreptunghiului.
8. Un dreptunghi are lungimea de trei ori mai mare decît lăţimea, iar perimetrul său este 48 cm. Să se afle aria dreptunghiului.
9. Un dreptunghi are aria de 360 m^2, iar lăţimea de 18 m. Să se afle lungimea.
10. Un dreptunghi are lungimea de 5 ori mai mare decît lăţimea şi aria de 45 m^2. Să se afle perimetrul dreptunghiului (faceţi un desen).
11. O parcelă a lotului şcolar, în formă de pătrat, are perimetrul de 36 m. Pe această parcelă s-au plantat roşii. Ştiind că pe fiecare m^2 sînt 9 fire de roşii şi că de pe fiecare din ele s-au obţinut, în medie, 1,25 kg de roşii, să se afle cît a fost întreaga recoltă de roşii.
12. Împrejmuirea curţii şcolii este în formă de pătrat, avînd latura de 80 m. Elevii au hotărît să vopsească acest gard. De cîte kg de vopsea au nevoie, dacă pentru un metru pătrat de gard se consumă 75 g de vopsea, iar gardul are 1,5 m înălţime?

13. Calculaţi ariile dreptunghiurilor care au următoarele dimensiuni, toate avînd perimetrul de 36 m.

1) $a = 17$ m, $b = 1$ m; 4) $a = 14$ m, $b = 4$ m; 7) $a = 11$ m, $b = 7$ m;
2) $a = 16$ m, $b = 2$ m; 5) $a = 13$ m, $b = 5$ m; 8) $a = 10$ m, $b = 8$ m;
3) $a = 15$ m, $b = 3$ m; 6) $a = 12$ m, $b = 6$ m; 9) $a = 9$ m, $b = 9$ m.

Ce observaţi?

14. Un teren, în formă de triunghi, are baza de 1,05 km şi înălţimea de 250 m. Ce recoltă de cartofi se strînge de pe acest teren, dacă, în medie, de pe fiecare m^2 se recoltează 6 kg de cartofi?

15^d. Un dreptunghi are lăţimea de 23 m. Să se calculeze lungimea sa ştiind că dacă aceasta ar fi de două ori mai mare, iar lăţimea cu 2 m mai mare, aria sa ar fi cu 1 215 m^2 mai mare (faceţi un desen).

16^d. Pe un lot, al unei intreprinderi agricole de stat, culturile sînt repartizate ca în fig. 46. Să se afle, în hectare, suprafaţa cultivată cu fiecare din culturi, folosind datele indicate pe desen.

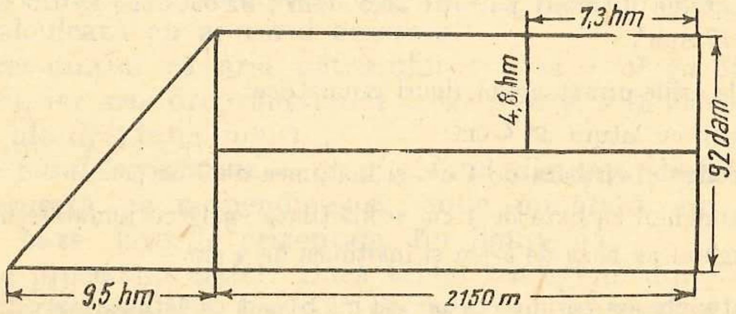


Fig. 46

17. Faceţi desenul lotului şcolar cu împărţirea pe culturi. Măsuraţi dimensiunile lotului şi ale terenurilor ocupate de diferite culturi şi treceţi rezultatele pe desen. Calculaţi aria lotului şi cea ocupată de fiecare cultură.

18. De pe terenul în formă de dreptunghi al unei cooperative agricole de producţie, se strînge o recoltă de 384 t de grîu. Ce recoltă se va strînge de pe un teren de aceeaşi formă, care dă aceeaşi recoltă la hectar, dacă:

a) terenul are aceeaşi lungime, dar este mai îngust de 3 ori?
b) terenul are aceeaşi lăţime, dar este de 3 ori mai scurt?
c) lungimea şi lăţimea terenului ar fi de 3 ori mai mici?

19. O grădină dreptunghiulară este tăiată de două alei, aşa cum arată figura 47. Aleile au lăţimea de 1,5 m. Să se afle întîi aria totală cultivabilă, apoi aria fiecăreia din cele 4 parcele, folosind datele din desen şi să se verifice dacă aria totală a fost calculată bine.

Observaţie. Să se ţină seama că aleile se încrucişează.

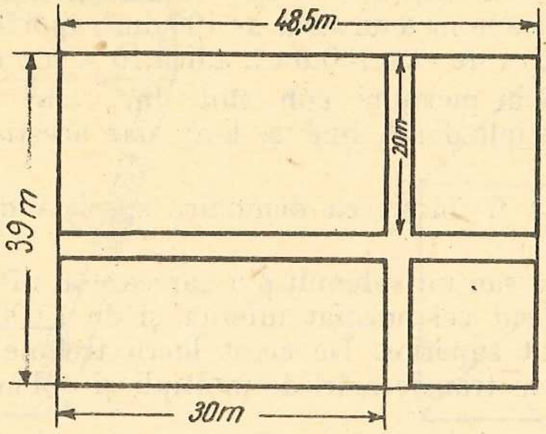


Fig. 47

20. Un teren în formă de triunghi, avînd baza de 560 m şi înălţimea de 0,5 km, s-a cultivat cu cartofi. Ce recoltă s-a obţinut în total, dacă producţia a fost de 36 tone la hectar?

UNITATEA DE MĂSURĂ A VOLUMULUI

Unitatea de măsură pentru volum provine, de asemenea, din unitatea de măsură pentru lungime. Unitatea de măsură pentru volum este egală cu volumul unui cub cu muchia de 1 m.

Volumul unui cub este $a \times a \times a = a^3$, a fiind muchia cubului. Dacă $a = 1$ m, volumul cubului va fi 1 m $\times$ 1 m $\times$ 1 m = 1 m^3.

Unitatea de măsură pentru volum este deci 1 m^3.

Dacă 1 dm este $\frac{1}{10}$ m $= 0{,}1$ m, atunci 1 decimetru cub (1 dm^3) este $\left(\frac{1}{10} \times 1 \text{ m}\right)^3 = \frac{1}{10^3} \times 1 \text{ m}^3 = \frac{1}{1\,000} \text{ m}^3 = 0{,}001 \text{ m}^3$. Cu alte cuvinte, putem spune că 1 m^3 = 1 000 dm^3. Pentru a ne da seama de aceasta, să ne închipuim că avem o cutie cu pereţi foarte subţiri în formă de cub cu muchia de 1 m (fig. 48). Baza este un pătrat cu latura de 1 m, care poate fi împărţit în 100 de decimetri pătraţi. Dacă aşezăm pe fundul cutiei decimetri cubi,

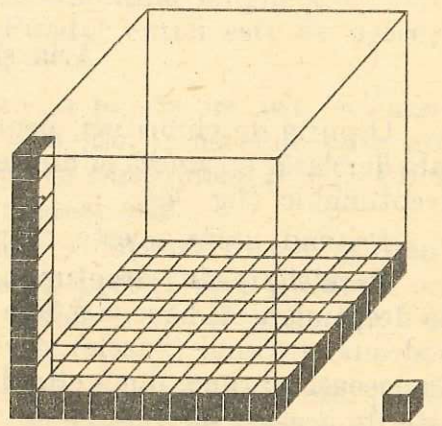


Fig. 48

va încăpea exact un strat de 100 dm^3 (fig. 48); dar în afară de acesta, deasupra mai încape încă un strat de 100 dm^3, apoi încă unul ş.a.m.d., în total 10 straturi de cîte 100 dm^3, adică 10×100 $dm^3 = 1\,000$ dm^3.

Submultipli ai metrului cub sînt dm^3, cm^3 şi mm^3; metrul cub are ca multipli dam^3, hm^3 şi km^3, dar aceştia se folosesc mai rar.

Litrul poate fi folosit ca denumire specială dată decimetrului cub.

Un multiplu sau un submultiplu oarecare al m^3 este de 1 000 de ori mai mare decît cel imediat inferior şi de 1 000 de ori mai mic decît cel imediat superior. De acest lucru trebuie să ţinem seama atunci cînd facem transformări de multipli şi submultipli ai metrului cub.

Exemple de transformări

1) Să exprimăm 4,8506 m^3 în dm^3. Deoarece 1 $m^3 = 1\,000$ dm^3, înmulţim cu 1 000; deci 4,8506 m^3 = 4 850,6 dm^3.

2) Să exprimăm 4,8506 m^3 în cm^3. Deoarece 1 $m^3 = 1\,000 \times \times 1\,000$ cm^3, înmulţim numărul cu $1\,000 \times 1\,000$; mutăm virgula peste $3 + 3 = 6$ cifre spre dreapta; deci, 4,8506 m^3 = 4 850 600 cm^3.

Nici pentru măsurarea volumelor nu se folosesc instrumente de măsură; se măsoară anumite lungimi ale corpurilor, iar volumul lor se calculează cu ajutorul acestora.

Înainte de a calcula, să avem grijă să facem transformările necesare.

PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC ŞI CUBUL

Aria şi volumul lor

O cutie de chibrituri, penarul, o cărămidă, o scîndură, o grindă, sala de clasă, o cameră şi multe alte corpuri au formă de paralelipiped dreptunghic (fig. 49).

Privind atent aceste corpuri găsim următoarele proprietăţi:

Paralelipipedul dreptunghic (fig. 49) are 6 feţe, toate în formă de dreptunghi: 2 baze şi 4 feţe laterale. La o cameră cele 6 feţe sînt: podeaua, tavanul (bazele) şi cei 4 pereţi (feţele laterale). Feţele sînt de aceeaşi mărime, două cîte două (de exemplu, la o cameră podeaua este de aceeaşi mărime cu tavanul; de asemenea, un perete este de aceeaşi mărime cu cel opus).

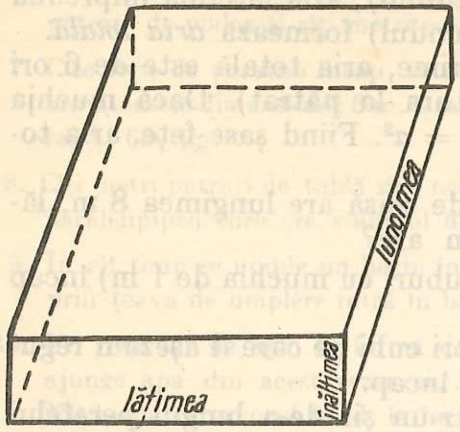


Fig. 49

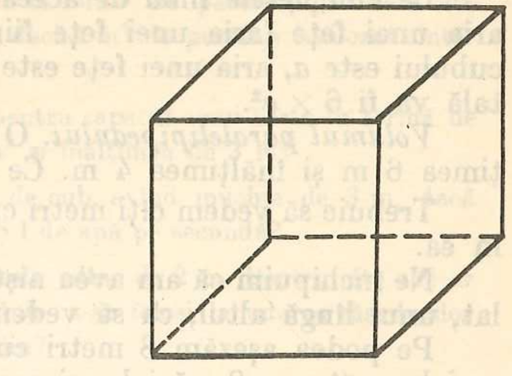


Fig. 50

Paralelipipedul are 12 muchii (de exemplu, la o cameră sînt 4 muchii care mărginesc tavanul, 4 muchii care mărginesc podeaua şi 4 muchii verticale între pereţi), 8 colţuri (la o cameră, 4 colţuri la tavan, 4 colţuri la podea).

Paralelipipedul dreptunghic are 3 *dimensiuni:* lungimea (L), lăţimea (l) şi înălţimea (i).

Cubul (fig. 50) este tot un paralelipiped dreptunghic care are dimensiunile egale (lungimea, lăţimea şi înălţimea sînt de aceeaşi mărime cu muchia cubului).

Aria paralelipipedului. Pentru a calcula aria paralelipipedului, calculăm ariile feţelor, apoi le adunăm.

Exemplu. O cutie de carton în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea 4 dm, lăţimea 3 dm şi înălţimea 2 dm. Cît carton (ce suprafaţă) s-a folosit pentru construirea cutiei?

Răspuns: 1) Aria capacului o aflăm înmulţind lungimea cu lăţimea $L \times l$, adică $4 \times 3 = 12$ (dm^2). Fundul cutiei este de aceeaşi mărime cu capacul.

2) Pereţii cutiei îi grupăm cîte doi: un perete are aria = lungimea $\times$ înălţimea ($L \times i$) adică $4 \times 2 = 8$ (dm^2); peretele opus are aceeaşi arie; alt perete are aria = lăţimea $\times$ înălţimea ($l \times i$) adică $3 \times 2 = 6$ (dm^2) şi peretele opus are aceeaşi arie.

În total avem: de două ori lungimea $\times$ lăţimea (capac şi fund) plus de două ori lungimea $\times$ înălţimea (2 pereţi) plus de două ori lăţimea $\times$ înălţimea (ceilalţi 2 pereţi), adică $2 \times L \times l + 2 \times L \times i + + 2 \times l \times i = 24 + 16 + 12 = 52$ dm^2.

Aria celor 4 pereţi se mai numeşte *aria laterală* (ea se mai poate afla şi înmulţind perimetrul bazei cu înălţimea: aria laterală este egală cu aria unui dreptunghi de lungime egală cu perimetrul bazei şi lăţime egală cu înălţimea paralelipipedului); aria laterală împreună cu ariile celor două baze (capacul şi fundul) formează *aria totală.*

La cub, feţele fiind de aceeaşi mărime, aria totală este de 6 ori aria unei feţe (aria unei feţe fiind latura la pătrat). Dacă muchia cubului este a, aria unei feţe este $a \times a = a^2$. Fiind şase feţe, aria totală va fi $6 \times a^2$.

Volumul paralelipipedului. O sală de clasă are lungimea 8 m, lăţimea 6 m şi înălţimea 4 m. Ce volum are?

Trebuie să vedem cîţi metri cubi (cuburi cu muchia de 1 m) încap în ea.

Ne închipuim că am avea nişte metri cubi pe care îi aşezăm regulat, unul lîngă altul, ca să vedem cîţi încap.

Pe podea aşezăm 8 metri cubi într-un şir de-a lungul peretelui mai lung (încap 8, căci lungimea este 8 m); alături aşezăm încă un şir de 8 metri cubi, apoi încă unul, în total vor încăpea 6 şiruri a cîte 8 m^3 (căci lăţimea este 6 m). Deci, în total pe podea încap de 6 ori cîte 8 m^3, adică $8 \cdot 6 = 48$ (m^3). Am aşezat numai pe podea un strat de 48 m^3; deasupra lui putem pune încă un strat de 48 m^3 şi încă unul ş.a.m.d., în total 4 straturi (căci înălţimea este 4 m). În total vor încăpea $48 \cdot 4 = 192$ (m^3).

Cum am procedat? Am înmulţit întîi lungimea cu lăţimea (ceea ce ne dă aria bazei), apoi rezultatul l-am înmulţit cu înălţimea. Deci:

Volumul paralelipipedului dreptunghic = aria bazei × înălţimea sau: $L \times l \times i$ (produsul celor 3 dimensiuni).

Exemplu. *Un dulap are lungimea 1,5 m, lăţimea 4 dm şi înălţimea 2 m. Ce volum are?*

Transformînd toate dimensiunile în decimetri, volumul în decimetri cubi va fi $15 \cdot 4 \cdot 20 = 1\,200$ (dm^3).

La cub, volumul este egal cu latura la cub, sau l^3.

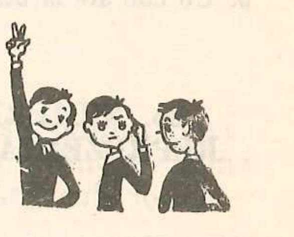
Exemplu. Volumul cubului cu latura de 4 m este $4^3 = 64$ (m^3).

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. În ce multipli şi submultipli ai metrului cub este mai potrivit să exprimăm:
   a) volumul unui bazin de apă;
   b) volumul unui acvariu de cameră;
   c) volumul unui pahar de apă?
2. Să se exprime în metri cubi: 12 000 dm^3; 4 256 416 cm^3.
3. Să se exprime în decimetri cubi: 12 m^3; 4,5 m^3.
4. Să se exprime în metri cubi: 826 dm^3; 172 000 cm^3.
5. Să se afle ariile laterale, ariile totale şi volumele paralelipipedelor care au:
   a) aria bazei de 24 m^2, perimetrul bazei de 20 m şi înălţimea de 5 m;
   b) cele trei dimensiuni egale cu 6 m, 4 m şi 5 m.

6. Măsuraţi dimensiunile sălii de clasă în care învăţaţi. Calculaţi cîţi metri pătraţi de podea şi cîţi metri cubi revin pentru fiecare elev.
7. Cîte tone de porumb încap într-un siloz în formă de paralelipiped care are următoarele dimensiuni: 6 m, 4 m, 1,8 m, dacă 1 m^3 de porumb însilozat cîntăreşte 680 kg?
8. Cîţi metri pătraţi de tablă sînt necesari pentru capacul unui bazin în formă de paralelipiped care are volumul de 45 m^3 şi înălţimea de 3 m?
9. În cît timp se umple un bazin în formă de cub, avînd muchia de 3 m, dacă prin ţeava de umplere intră în bazin 1,5 l de apă pe secundă?
10. Un rezervor de apă, în formă de cub, este adînc de 2 m. Pentru cîte zile ar ajunge apa din acest rezervor, dacă zilnic s-ar folosi la udarea răsadurilor 250 l apă, rezervorul fiind, la început, plin?
11. De cîtă vopsea este nevoie pentru vopsirea interioară a unui rezervor în formă de cub, dacă muchia cubului este de 2,75 m, ştiind că pentru vopsirea unui m^2 este nevoie de 150 g vopsea, iar capacul nu se vopseşte?
12. Elevii unei şcoli vor să confecţioneze un cub pentru cabinetul de matematică, ale cărui muchii să fie din sîrmă. Ce lungime trebuie să aibă sîrma din care-l confecţionează dacă muchia cubului trebuie să fie de 30 cm?
13. Cîţi m^3 de pietriş sînt necesari pentru a pava o alee lungă de 25 m şi lată de 1,5 m, dacă pietrişul trebuie să aibă o grosime de 15 cm?
14. De cîţi litri de apă este nevoie pentru a umple acvariul din laboratorul de biologie, ştiind că acesta este lung de 0,75 m, lat de 3,5 dm, iar apa trebuie să aibă o adîncime de 30 cm?
15. Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 4 m, 3 m 1,5 m. El urmează să fie umplut cu motorină. Cîte transporturi trebuie să se facă, dacă cisterna cu care se aduce are o capacitate de 1 600 litri?

LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUŞIRII UNOR CUNOŞTINŢE DE BAZĂ



Lucrarea I

I. Să se facă transformările:
a) 2 m = ? dm; b) 5,4 m = ? cm; c) 2,4 km = ? m; d) 420 mm = ? cm;
e) 72 mm = ? m; f) 420 m = ? km.

II. Să se facă transformările:
a) 7,4 kg = ? g; b) 240 g = ? kg; c) 2t = ? kg;

III. Să se facă transformările:

a) 2 h = ? min; b) 8 min = ? s; c) 3 h = ? s.

IV. Să se facă transformările:

a) 2,4 m^2 = ? cm^2; b) 7,2 dm^2 = ? mm^2; c) 4,5 m^2 = ? ha; d) 240 dam^2 = ? ha.

V. Să se facă transformările:

a) 2,4 m^3 = ? dm^3; b) 240 mm^3 = ? cm^3; c) 720 cm^3 = ? dm^3.

VI. În două pungi sînt 5,725 kg de zahăr. În prima pungă sînt 800 g zahăr. Cîte kilograme de zahăr sînt în punga a doua?

Lucrarea II

1. Un dreptunghi are lungimea de 6 m și lățimea de 2 m.
   Să se afle:
   1) Perimetrul.
   2) Aria.

2. Un pătrat are latura de 5 m. Să se afle:
   1) Perimetrul.
   2) Aria.

3. Un triunghi are o latură de 6 m, iar înălțimea corespunzătoare ei de 4 m. Să se afle aria.

4. Un paralelipiped dreptunghic are lungimea de 10 m, lățimea de 4 m și înălțimea de 6 m. Să se afle aria totală și volumul.

5. Un cub are latura de 3 m. Să se afle volumul.

25. NUMERE RAȚIONALE POZITIVE CARE NU AU CA REPREZENTANȚI FRACȚII CU NUMITORUL 10, 100, 1 000

FRACȚII PERIODICE SIMPLE. FRACȚII PERIODICE MIXTE. SCRIEREA CU VIRGULA

Dacă o fracție ordinară cuprinde la numitor un factor prim, diferit de 2 și 5, care nu poate fi simplificat, atunci nu reușim să terminăm calculele, oricît am continua împărțirea dintre numărătorul și numitorul fracției ordinare date.

De exemplu, pentru

$$\frac{1}{7}$$

obținem

$$\begin{array}{r|l}
1 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{0} & 0{,}1428571 \\
10 & \\
\underline{7} & \\
=30 & \\
\underline{28} & \\
=20 & \\
\underline{14} & \\
=60 & \\
\underline{56} & \\
=40 & \\
\underline{35} & \\
=50 & \\
\underline{49} & \\
=10 & \\
\underline{7} & \\
=3 &
\end{array}$$

Am pus 0 înainte de virgulă, deoarece cîtul împărțirii dintre 1 și 7 este 0. Împărțirea nu se termină niciodată, deoarece resturile 1, 3, 2, 6, 4, 5 se repetă, în această ordine, indefinit. Vom spune că fracția ordinară $\frac{1}{7}$ se transformă în fracția zecimală infinită

0,1428571...

în care cifrele 1, 4, 2, 8, 5, 7 se repetă indefinit, în această ordine. Repetarea indefinită a cifrelor 1, 4, 2, 8, 5, 7, în această ordine, se pune în evidență scriind fracția zecimală infinită obținută sub forma

0,(142857)

pe care o vom numi *fracție zecimală periodică* cu *perioada* 142 857. Această fracție zecimală periodică neavînd nici un grup de cifre, după virgulă, care nu se repetă, se numește *periodică simplă*.

Fie numărul rațional reprezentat de fracția ireductibilă

$$\frac{43}{825}.$$

Avem $825 = 3 \cdot 11 \cdot 5^2$, deci numitorul conține și factori diferiți de 2 și 5. Obținem

$$\begin{array}{r|l} 4300 & 825 \\ \cline{2-2} \underline{4125} & 0{,}05212 \\ =1750 & \\ \underline{1650} & \\ =1000 & \\ \underline{825} & \\ =1750 & \\ \underline{1650} & \\ =100 & \end{array}$$

Resturile 175, 100 se repetă în această ordine indefinit. Vom spune că fracția ordinară $\frac{43}{825}$ se transformă în fracția zecimală infinită

$$0{,}05212\ldots$$

în care cifrele 2, 1 se repetă indefinit în această ordine. Repetarea, indefinită a cifrelor 2, 1, în această ordine, se pune în evidență scriind fracția zecimală infinită obținută sub forma

$$0{,}05(21)$$

pe care o vom numi *fracție zecimală periodică* cu *perioada* 21. Această fracție zecimală periodică avînd un grup de cifre, după virgulă, anume 05, care nu se repetă, se numește *periodică mixtă*.

EXERCIȚII

Să se transforme următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{7}{125}$.

b) $\frac{7}{100}$; $\frac{17}{1\,000}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{10\,009}{10\,000}$; $\frac{141}{20}$; $\frac{407}{400}$. c) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{227}{198}$.

TRANSFORMAREA UNEI FRACȚII ZECIMALE PERIODICE SIMPLE ÎNTR-O FRACȚIE ORDINARĂ

Fie fracția zecimală periodică simplă

$$1{,}(752).$$

Să notăm cu $\frac{a}{b}$ fracția ordinară care se transformă în fracția zecimală periodică simplă

$$0{,}(752)$$

prin împărțirea lui a la b. Atunci prin împărțirea lui $a \cdot 10^3$ la b vom obține fracția zecimală periodică simplă 752,(752) cifrele 7, 5, 2 apărînd o dată, în această ordine, înainte de virgulă. Dar

$$752{,}(752) = 752 + 0{,}(752),$$

pentru că

$$752{,}(752) = 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \ldots,$$

deoarece împărțirea dintre $a \cdot 10^3$ și b se continuă indefinit. Deci

$$\frac{a \cdot 10^3}{b} = 752 + \frac{a}{b}$$

sau

$$\frac{a(999+1)}{b} = 752 + \frac{a}{b}; \quad \frac{a \cdot 999}{b} + \frac{a}{b} = 752 + \frac{a}{b}; \quad \frac{a \cdot 999}{b} = 752.$$

De aici obținem

$$\frac{a \cdot 999}{b} \cdot \frac{1}{999} = 752 \cdot \frac{1}{999}$$

sau

$$\frac{a}{b} = \frac{752}{999}.$$

În general:

O fracție zecimală periodică simplă, care înainte de virgulă are numai cifra 0, se transformă într-o fracție ordinară care la numărător are numărul natural alcătuit din perioada fracției zecimale periodice simple date, iar la numitor are un număr natural alcătuit din atîtea cifre de 9 cîte cifre are perioada fracției zecimale periodice simple date.

Fracția zecimală periodică simplă

$$1{,}(752)$$

se transformă deci în

$$1 + \frac{752}{999} = \frac{999 + 752}{999} = \frac{1\,751}{999}.$$

O fracție zecimală periodică simplă se transformă într-o fracție ordinară obținută prin adunarea numărului natural de dinainte de virgulă cu fracția ordinară în care se transformă fracția zecimală periodică simplă obținută din fracția zecimală periodică simplă dată, prin înlocuirea cu 0 a părții de dinainte de virgulă.

TRANSFORMAREA UNEI FRACŢII ZECIMALE PERIODICE MIXTE ÎNTR-O FRACŢIE ORDINARĂ

Fie fracţia zecimală periodică mixtă

$$1,43(752).$$

Să notăm cu $\frac{a}{b}$ fracţia ordinară care se transformă în fracţia zecimală periodică mixtă

$$0,43(752).$$

Dacă prin împărţirea lui a la b obţinem fracţia zecimală periodică mixtă 0,43(752), atunci prin împărţirea lui $a \cdot 10^2$ la b vom obţine fracţia zecimală periodică simplă 43,(752). Notînd cu $\frac{c}{d}$ fracţia ordinară care se transformă în fracţia zecimală periodică simplă 0,(752) avem

$$\frac{c}{d} = \frac{752}{999}.$$

Dar

$$\frac{a \cdot 10^2}{b} = 43 + \frac{c}{d} = 43 + \frac{752}{999} = \frac{43 \cdot 999 + 752}{999} =$$

$$= \frac{43(1\,000 - 1) + 752}{999} = \frac{43\,752 - 43}{999}.$$

Deci

$$\frac{a \cdot 10^2}{b} \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{43\,752 - 43}{999} \cdot \frac{1}{10^2}$$

sau

$$\frac{a}{b} = \frac{43\,752 - 43}{99\,900}.$$

În general:

O fracţie zecimală periodică mixtă, care înainte de virgulă are numai cifra 0, se transformă într-o fracţie ordinară care la numărător are diferenţa între numărul natural exprimat de partea neperiodică urmată de perioadă şi numărul natural exprimat de partea neperiodică, iar ca numitor are un număr natural format din atîtea cifre de 9 cîte cifre are perioada, urmate de atîtea zerouri cîte are partea neperiodică.

Fracţia zecimală periodică mixtă

$$1,43(752)$$

se transformă deci în

$$1 + \frac{43\,752 - 43}{99\,900} = 1 + \frac{43\,709}{99\,900} = \frac{99\,900 + 43\,709}{99\,900} = \frac{143\,609}{99\,900}.$$

O fracţie zecimală periodică mixtă se transformă într-o fracţie ordinară obţinută prin adunarea numărului natural de dinainte de virgulă cu fracţia ordinară în care se transformă fracţia zecimală periodică mixtă obţinută din fracţia zecimală periodică mixtă dată, prin înlocuirea cu 0 a părţii de dinainte de virgulă.

EXERCIŢII

1. Să se transforme în fracţii ordinare ireductibile următoarele fracţii zecimale:

a) 0,7; 0,2; 0,25; 0,6; 0,35; 0,75; 0,02; 1,45; 3,002; 4,0001.

b) 0,(3); 0,(6); 0,(23); 0,(145); 0,(24); 0,1(24); 0,2(4); 1,12(34); 0,12(3).

2. Să se efectueze:

a) $[0,(5) + 0,5] : \frac{19}{90}$; b) $\left[0,(3) + 1,(18) + 0,1(25) - \frac{62}{495}\right] \cdot 0,11$;

c) $\left(\frac{5}{24} + \frac{2}{45} + \frac{5}{108}\right) : 0,25.$

3. Să se efectueze:

a) $\left(\frac{1}{3} + 0,25\right) : \left(7 + \frac{1}{4}\right)$; b) $\frac{12}{17} \cdot \left(\frac{11}{6} + 0,375\right)$; c) $\left(4 + \frac{1}{3}\right) : \left(1,25 - \frac{1}{6}\right)$;

d) $75 : \left(0,5 + \frac{1}{4}\right)$; e) $\left(2,4 + 4\frac{3}{5}\right) : 3,5$; f) $\left(\frac{0,12}{0,24} + \frac{0,003}{0,006} + \frac{0,3}{0,4}\right) \cdot \frac{0,4}{0,004}$;

g) $(0,1^2 + 0,02^2 + 0,2^3) \cdot 10^4$; h) $(0,01^3 + 0,001^2) \cdot 10^5$; i) $\dfrac{\left(0,5 - \frac{1}{3}\right)^3}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2}$;

j) $\left[\frac{1}{30} + \frac{1}{19} \cdot \left(\frac{2}{3} + 0,6\right)\right] : 0,01$; k) $2 \cdot \left\{1 + 0.5 \cdot \left[2 + 0,25 : \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{16}\right)\right]\right\}$;

l) $\left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left[0,5 + \left(2 + \frac{1}{3} - 1,75\right)^2 : \frac{7}{24}\right]$;

m) $\left\{2,4 + \frac{126}{1\,163} \cdot \left[2 + \frac{5}{126} - \left(1 + \frac{7}{60}\right)\right]\right\} : (2,48 + 2,52)$;

n) $\frac{1}{6} \cdot \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot [10 \cdot (513,25 - 1,25) + 36] + 5\right\}.$

PROBLEME

1. Un număr este înmulțit cu 10. La rezultat adunăm 15. Din noul rezultat scădem 60,5 și obținem 199,5. Să se afle numărul inițial.
2. Un număr este înmulțit cu 10. La rezultat se adună 15. Rezultatul se împarte la 2. Din noul rezultat se scade 60,75 și se obține 59,25. Să se afle numărul inițial.
3. Un drumeț parcurge 1,2 km care reprezintă $\frac{3}{4}$ din lungimea întregului drum pe care-l are de parcurs. Să se afle lungimea drumului.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Desenați segmentele de dreaptă avînd următoarele lungimi:

   a) $\frac{1}{2}$ cm; b) $\frac{3}{4}$ dm; c) $\frac{3}{5}$ dm.

2. În figura 51 am hașurat $\frac{1}{4}$ dintr-un pătrat.

   Rezolvați în mod asemănător exercițiile:

   a) Desenați un pătrat. Hașurați $\frac{1}{2}$ din acest pătrat.

   b) Desenați un pătrat. Hașurați $\frac{3}{4}$ din acest pătrat.

3. Pe caietul de matematică, desenați un dreptunghi cu lungimea de 6 cm și lățimea de 1 cm și un pătrat cu latura de 4 cm. Hașurați: a) $\frac{5}{6}$ din dreptunghi. b) $\frac{7}{16}$ din pătrat.

4. În figura 52 am hașurat $\frac{1}{3}$ dintr-un cerc. Figura respectivă se numește diagramă circulară. Rezolvați în mod asemănător exercițiile:

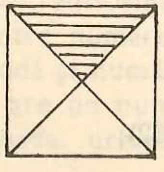


Fig. 51

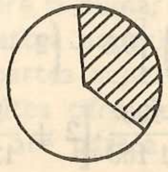


Fig. 52

a) Desenați un cerc. Hașurați $\frac{1}{2}$ din acest cerc.

b) $\frac{1}{2}$ din lotul unei C.A.P. este semănat cu grîu, $\frac{1}{4}$ cu porumb, $\frac{1}{8}$ cu orz și restul cu secară. Desenați diagrama circulară corespunzătoare.

5. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\};\ B = \left\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\};\ C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Să se efectueze: a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $B \cup C$; d) $A \cap C$; e) $A \cap B$; f) $A - B$.

6. Să se arate că următoarele fracții sînt echivalente:

   a) $\frac{3}{5}; \frac{6}{10}$; b) $\frac{1}{2}; \frac{7}{14}$; c) $\frac{305}{1\,000}; \frac{610}{2\,000}$.

7. Să se afle o fracție echivalentă cu $\frac{3}{25}$ și care să aibă numitorul 100.

8. Să se afle o fracție echivalentă cu $\frac{3}{4}$ și care să aibă numitorul 100.

9. Să se afle o fracție echivalentă cu $\frac{1}{5}$ și care să aibă numărătorul 4.

10. Să se amplifice cu 10 următoarele fracții:

$$\frac{1}{4}; \frac{5}{7}; \frac{7}{24}; \frac{7}{10}; \frac{1}{102}; \frac{307}{1\,001}.$$

11. Să se amplifice cu 100 următoarele fracții:

$$\frac{1}{240}; \frac{1}{111}; \frac{23}{324}.$$

12. Să se simplifice fracțiile, obținînd fracții ireductibile:

$$\frac{6}{9}; \frac{12}{50}; \frac{48}{56}; \frac{2\,008}{4\,016}; \frac{180}{324}; \frac{2\,024}{15\,236}.$$

13. Să se simplifice fracțiile, obținînd fracții ireductibile:

   a) $\frac{120}{240}; \frac{240}{360}; \frac{25}{750}; \frac{48}{960}; \frac{410}{8\,200}; \frac{540}{2\,700}$;

   b) $\frac{240}{3\,240}; \frac{25}{6\,250}; \frac{820}{16\,400}; \frac{1\,750}{2\,250}; \frac{102}{10\,404}$.

14. Să se simplifice fracțiile, obținînd fracții ireductibile:

$$\frac{410}{820}; \frac{240}{480}; \frac{450}{900}; \frac{180}{1\,800}; \frac{222}{4\,440}; \frac{333}{3\,330}; \frac{180}{3\,600}; \frac{160}{320}; \frac{160}{480}; \frac{450}{9\,000};$$

$$\frac{300}{1\,200}; \frac{200}{2\,000}; \frac{30}{9\,000}; \frac{140}{280}; \frac{450}{1\,900}; \frac{17}{340}; \frac{90}{900}; \frac{252}{1\,008}; \frac{378}{6\,930}.$$

15. Să se aducă următoarele fracţii la cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{10}$; b) $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; c) $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; d) $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{8}$; e) $\frac{2}{35}$; $\frac{1}{70}$; $\frac{1}{140}$;

f) $\frac{1}{32}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{7}{40}$; $\frac{1}{48}$; g) $\frac{1}{450}$; $\frac{1}{324}$; $\frac{5}{162}$; h) $\frac{1}{1\,260}$; $\frac{1}{5\,940}$; $\frac{1}{1\,323}$;

i) $\frac{6}{64}$; $\frac{3}{168}$; $\frac{7}{160}$; $\frac{1}{320}$.

16. Să se aducă următoarele fracţii la cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{1}{324}$; $\frac{7}{360}$; $\frac{1}{900}$; b) $\frac{5}{168}$; $\frac{11}{252}$; $\frac{5}{1\,296}$; $\frac{13}{2\,240}$; c) $\frac{1}{120}$; $\frac{1}{3\,600}$; $\frac{1}{48\,000}$.

17. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}$;

c) $\frac{1}{36}+\frac{5}{36}+\frac{7}{36}+\frac{11}{36}$; d) $\frac{5}{118}+\frac{3}{118}+\frac{7}{118}$; e) $\frac{1}{360}+\frac{1}{360}+\frac{1}{360}$.

18. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}$; d) $\frac{2}{3}+\frac{5}{9}+\frac{7}{18}$;

e) $\frac{1}{12}+\frac{5}{24}+\frac{7}{48}$; f) $\frac{1}{48}+\frac{7}{80}$; g) $\frac{3}{28}+\frac{1}{72}+\frac{5}{84}$; h) $\frac{1}{24}+\frac{5}{36}+\frac{7}{48}+\frac{5}{96}$;

i) $\frac{3}{50}+\frac{1}{75}+\frac{3}{125}$; j) $\frac{1}{24}+\frac{1}{45}+\frac{1}{108}$; k) $\frac{1}{140}+\frac{1}{210}+\frac{3}{700}+\frac{11}{280}$;

l) $\frac{1}{120}+\frac{7}{240}+\frac{11}{400}$; m) $\frac{11}{60}+\frac{1}{64}+\frac{7}{90}+\frac{5}{168}$; n) $\frac{7}{180}+\frac{1}{360}+\frac{11}{720}$;

o) $\frac{7}{324}+\frac{1}{648}+\frac{1}{972}$; p) $\frac{1}{480}+\frac{7}{2\,400}+\frac{11}{9\,600}$;

q) $\frac{1}{350}+\frac{3}{4\,900}+\frac{3}{1\,750}+\frac{1}{2\,940}$.

19. Să se afle numărul cu $\frac{2}{5}$ mai mare decît $\frac{3}{5}$.

20. Să se afle numărul cu $\frac{3}{5}$ mai mare decît $\frac{1}{2}$.

21. Să se afle numărul cu $\frac{5}{6}$ mai mare decît $\frac{1}{4}$.

22. Să se afle numărul cu 2 mai mare decît $\frac{3}{5}$.

23. Care este numărul cu $2\frac{1}{4}$ mai mare decît $4\frac{1}{6}$?

24. Cineva cumpără într-o zi $\frac{3}{4}$ kg roşii, iar în altă zi $1\frac{1}{2}$ kg roşii. Cîte kg roşii a cumpărat în cele două zile la un loc?

25. Cineva cumpără într-o zi $\frac{1}{2}$ m stofă, iar a doua zi cu $2\frac{1}{4}$ m mai multă stofă decît în prima zi. Să se afle: a) Cîţi metri de stofă a cumpărat a doua zi? b) Cîţi metri de stofă a cumpărat în cele două zile la un loc?

26. Un muncitor a efectuat într-o zi $\frac{1}{5}$ dintr-o lucrare, iar a doua zi $\frac{3}{10}$ din ea. A cîta parte din lucrare a efectuat muncitorul în cele două zile la un loc?

27. Un muncitor a efectuat într-o zi $\frac{2}{25}$ dintr-o lucrare, a doua zi $\frac{1}{10}$ din aceeaşi lucrare şi în a treia zi $\frac{7}{100}$ din ea. A cîta parte din lucrare a executat muncitorul în cele trei zile la un loc?

28. Să se scoată întregii din următoarele fracţii:

$\frac{7}{2}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{17}{5}$; $\frac{41}{4}$; $\frac{601}{3}$; $\frac{345}{23}$; $\frac{2\,457}{12}$; $\frac{20\,003}{100}$; $\frac{10\,001}{20}$.

29. Să se scoată întregii din următoarele fracţii şi să se simplifice fracţiile rezultate, obţinînd fracţii ireductibile:

$\frac{6}{4}$; $\frac{8}{6}$; $\frac{15}{10}$; $\frac{2\,006}{1\,002}$; $\frac{405}{24}$; $\frac{1\,111}{22}$; $\frac{36}{24}$; $\frac{175}{50}$; $\frac{204}{136}$; $\frac{1\,050}{205}$; $\frac{3\,245}{1\,520}$;

$\frac{7\,500}{425}$; $\frac{720}{48}$; $\frac{475}{225}$; $\frac{2\,435}{785}$; $\frac{2\,435}{25}$.

30. Să se efectueze:

a) $2+\frac{1}{2}$; $1+\frac{1}{3}$; $2+\frac{1}{7}$; $3+\frac{2}{5}$; $10+\frac{1}{3}$; $3+\frac{17}{24}$; $100+\frac{1}{24}$;

$1\,200+\frac{1}{12}$; $102+\frac{7}{103}$; $1\,001+\frac{1}{2\,001}$; $420+\frac{17}{110}$.

b) $2+\frac{1}{5}$; $4+\frac{1}{10}$; $50+\frac{1}{10}$; $20+\frac{1}{7}$.

c) $24+\frac{1}{125}$; $25+\frac{1}{25}$; $14+\frac{1}{245}$; $105+\frac{1}{206}$.

31. Să se arate care din următoarele propoziţii sînt adevărate şi care sînt false:

a) $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4} < \frac{3}{7}$; d) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$; e) $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$; f) $\frac{7}{10} < \frac{9}{10}$;

g) $\frac{7}{23} < \frac{8}{23}$; h) $\frac{18}{19} < \frac{19}{20}$; i) $\frac{88}{89} > \frac{89}{90}$; j) $\frac{101}{102} < \frac{102}{103}$.

Indicaţie:

La punctele h), i), j) cercetaţi cît lipseşte la fiecare fracţie pînă la un întreg.

32. Să se efectueze:

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$; c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$; d) $\frac{7}{32} - \frac{3}{32}$; e) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4}$;

f) $2\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$; g) $20\,124\frac{5}{8} - 124\frac{1}{8}$.

33. Să se efectueze:

a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; d) $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$; e) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$; f) $\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$.

34. Să se efectueze:

a) $\frac{5}{12} - \frac{1}{24}$; b) $\frac{5}{36} - \frac{1}{24}$; c) $\frac{5}{48} - \frac{1}{36}$; d) $\frac{7}{45} - \frac{1}{60}$; e) $\frac{7}{324} - \frac{1}{405}$.

35. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$; b) $5\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6}$; c) $3\frac{1}{12} - 2\frac{3}{8}$; d) $5\frac{1}{5} - 2\frac{3}{10}$;

e) $4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$; f) $4\frac{1}{240} - 1\frac{1}{1\,800}$; g) $4 - \frac{1}{2}$; h) $3 - \frac{2}{3}$;

i) $5 - 1\frac{1}{4}$; j) $6 - 1\frac{1}{24}$; k) $\frac{7}{2} - 1$; l) $\frac{19}{3} - 2$; m) $\frac{177}{10} - 4$.

36. Să se efectueze:

a) $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$; b) $1\frac{6}{7} - \frac{5}{7}$; c) $5\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$; e) $3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$;

f) $3\frac{4}{15} - 1\frac{7}{12}$; g) $\frac{13}{168} - \frac{1}{90}$; h) $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8}$; i) $\frac{4}{5} - \frac{1}{7} + \frac{34}{35}$;

j) $\frac{149}{150} - \frac{1}{450} + \frac{7}{300}$.

37. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{3} - \frac{4}{6}$; c) $\frac{2}{5} - \frac{4}{10}$; d) $\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + \frac{1}{5}$;

e) $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{6}{10}$; f) $\frac{31}{150} - \frac{62}{300} + \frac{7}{160} - \frac{1}{320}$.

38. Să se afle numărul cu $\frac{1}{5}$ mai mic decît $\frac{3}{5}$.

39. Să se afle numărul cu $\frac{1}{2}$ mai mic decît $\frac{5}{6}$.

40. Să se afle numărul cu $\frac{2}{3}$ mai mic decît 4.

41. Cu cît este mai mic numărul $4\frac{1}{6}$ decît 9?

42. Într-o pungă sînt 3 kg de zahăr, iar în alta cu $\frac{1}{2}$ kg mai puţin. Cît zahăr este în ambele pungi la un loc?

43. Cineva cumpără într-o zi $4\frac{1}{2}$ m stofă, iar a doua zi cu $\frac{1}{4}$ m mai puţină stofă, de acelaşi fel, decît în prima zi. Să se afle: a) Cîţi metri de stofă a cumpărat a doua zi? b) Cîţi metri de stofă a cumpărat în cele două zile la un loc?

44. O grădină de formă dreptunghiulară are lungimea de 30 m, iar lăţimea cu $2\frac{1}{2}$ m mai mică decît lungimea. Ce lungime are gardul care înconjură grădina?

45. Doi muncitori au executat împreună o lucrare. Primul muncitor a efectuat $\frac{4}{5}$ din lucrare. A cîta parte din lucrare a efectuat al doilea muncitor?

46. O ladă, cu marfă cu tot, cîntăreşte 10 kg. Cît cîntăreşte marfa, dacă lada goală cîntăreşte $2\frac{1}{2}$ kg?

47. Suma a două numere este $\frac{1}{2}$. Unul din aceste numere este $\frac{1}{4}$. Să se afle celălalt număr.

48. Suma a două numere este $3\frac{1}{4}$, iar unul dintre ele este $1\frac{1}{2}$. Să se afle celălalt număr.

49. Să se efectueze:

a) $\frac{4}{5} \cdot 15$; b) $\frac{3}{4} \cdot 16$; c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7}$; f) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$;

g) $\frac{102}{111} \cdot \frac{222}{306}$; h) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{70} \cdot \frac{7}{20} \cdot 100$; i) $5\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{11}$; j) $33 \cdot \frac{1}{121} \cdot \left(3 + \frac{2}{3}\right)$.

50. Să se afle numărul de două ori mai mare decît $\frac{1}{4}$.

51. Să se afle numărul de 10 ori mai mare decît $3\frac{1}{2}$.

52. Cineva cumpără în fiecare zi cîte $1\frac{1}{2}$ kg cartofi. Cîte kilograme de cartofi a cumpărat în patru zile?

53. Un drumeț parcurge cîte $10\frac{1}{2}$ km pe zi. Cîți kilometri parcurge drumețul în 5 zile?

54. Un dreptunghi are lungimea de 4 cm și lățimea de $\frac{1}{2}$ cm. Să se afle aria dreptunghiului.

55. Un automobil are viteza de 60 km pe oră. Ce distanță parcurge în $3\frac{1}{2}$ ore?

56. Să se efectueze:

a) $\frac{4}{15}:\frac{3}{5}$; b) $\frac{4}{9}:\frac{1}{3}$; c) $\left(4+\frac{1}{2}\right):\frac{3}{5}$; d) $\frac{10}{17}:\frac{5}{17}$; e) $\left(3+\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}$;

f) $\left(5+\frac{1}{5}\right):\frac{13}{15}$; g) $\left(2-\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)$; h) $\left(5-\frac{1}{6}\right):\left(1-\frac{1}{3}\right)$.

57. Să se efectueze:

a) $\frac{4}{5}:2$; b) $\frac{1}{3}:3$; c) $\left(2+\frac{1}{2}\right):5$; d) $\left(4+\frac{1}{2}\right):3$.

58. Să se efectueze:

a) $\frac{204}{35}:\frac{102}{7}$; b) $\frac{34}{405}:\frac{17}{45}$.

59. Să se efectueze:

a) $3:\frac{1}{3}$; b) $6:\frac{5}{6}$; c) $2:\frac{2}{3}$; d) $4:\frac{2}{9}$; e) $15:\frac{3}{5}$; f) $15:\left(2+\frac{1}{2}\right)$;

g) $18:\left(1+\frac{1}{8}\right)$.

60. Să se afle numărul de 3 ori mai mic decît $\frac{6}{11}$.

61. Să se afle numărul de 5 ori mai mic decît $\frac{1}{5}$.

62[d]**.** Se dau numerele raționale $\frac{35}{396}$ și $\frac{28}{297}$. Găsiți cel mai mic număr natural prin împărțirea căruia la fiecare din numerele raționale date să se obțină numere naturale.

63. Să se efectueze:

a) $\left(\frac{3}{4}:\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{6}{8}$; b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{11}:\frac{3}{4}$; c) $\left(1+\frac{3}{8}\right)\cdot\left(3+\frac{2}{11}\right):\frac{7}{16}$;

d) $\dfrac{\left(12+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(4+\frac{1}{5}\right)}{5+\frac{1}{3}}$; e) $\dfrac{\left(11+\frac{1}{3}\right)\left(5+\frac{1}{4}\right)}{4+\frac{1}{4}}$; f) $\dfrac{\left(5+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(3+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(6+\frac{1}{5}\right)}{\left(2+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4+\frac{4}{5}\right)\cdot 31}$;

g) $\dfrac{\left(5+\frac{1}{8}\right)\cdot 3}{\left(5+\frac{1}{8}\right):3}:\dfrac{5\cdot\frac{5}{35}}{\frac{11}{40}:\left(2+\frac{2}{9}\right)}$; h) $\dfrac{\left(20+\frac{1}{2}\right):4}{\left(3+\frac{3}{4}\right)\cdot 2}:\dfrac{\left(5+\frac{1}{3}\right)\cdot 4}{3:\frac{3}{4}}$.

64. Să se efectueze (oral):

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 8$; b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot 9$; c) $\left(4+\frac{1}{2}-4\right):2$; d) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):2$;

e) $3\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{5}+\frac{5}{6}\right)$; f) $\frac{24}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$; g) $4\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)$;

h) $2\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)$; i) $\left(1-\frac{1}{3}\right):\frac{2}{3}$; j) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)$;

k) $6:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$; l) $6\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$; m) $2\cdot\left(\frac{26}{5}-\frac{1}{5}\right)$;

n) $4\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 2\right)$; o) $3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$; p) $2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$; r) $6:\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)$;

s) $8\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)$; t) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{4}$.

65. Să se efectueze:

a) $12\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)$; b) $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}\right):\frac{1}{21}$; c) $\left(\frac{3}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{105}\right):\frac{1}{140}$;

d) $8\cdot\left[\frac{9}{4}-\left(1+\frac{5}{6}\right)\right]$; e) $\left[\frac{16}{5}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{1}{20}$;

f) $\left[\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right):2+1\right]:\frac{9}{64}$; g) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right):3$; h) $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot 5\right):\frac{3}{5}$; i) $\left(5+5:\frac{1}{10}\right):110$;

j) $20\cdot\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\right)$; k) $\frac{1}{3}:\left\{\frac{1}{3}+3\cdot\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:\frac{1}{3}\right)\right]\right\}$.

66. Să se efectueze:

a) $\frac{111}{700}:\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{70}+\frac{1}{700}\right)$; b) $\left(\frac{7}{9}+\frac{77}{99}+\frac{777}{999}\right):\frac{7}{9}$;

c) $$\frac{\frac{1}{33}+\frac{1}{303}+\frac{1}{3\,003}+\frac{1}{30\,003}}{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\frac{1}{1\,001}+\frac{1}{10\,001}}.$$

67. Să se efectueze:

$$\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{150}-\frac{1}{200}\right):\frac{1}{300}+\frac{14}{25}\cdot\left(\frac{1}{42}+\frac{5}{36}+\frac{1}{63}\right)\right].$$

68. Să se efectueze:

a) $9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$; b) $32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$; d) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$;

e) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{25}$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{45}\cdot 4^{22}$.

69. Să se efectueze (oral):

a) $\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}:\left(1-\frac{5}{6}\right)\right]:\frac{7}{12}$; b) $\left(3+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right):\frac{5}{7}$.

70. Să se efectueze:

$$10\cdot\left\{1+10\cdot\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\right)\right]\right\}.$$

71. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{\frac{1}{2}}$; b) $\frac{\frac{4}{5}}{2}$; c) $\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}+\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}$; d) $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}:\frac{4}{7}}{\left(\frac{1}{4}:\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{7}{4}}$; e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{3}$.

72. Să se efectueze:

a) $\left(1+\frac{1}{11}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)$;

b) $\left(2+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):\left(3+\frac{1}{6}\right)$;

c) $\left(\frac{2}{105}+\frac{1}{490}+\frac{5}{588}\right):\left(1-\frac{1}{5}\right)$;

d) $$\frac{\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{135}+\frac{1}{324}+\frac{4}{405}\right):\frac{1}{81}}.$$

73. Să se efectueze:

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{3}\right)$; b) $\frac{1}{40}+\frac{4}{5}+\frac{1}{23}\cdot\left(\frac{5}{32}-\frac{1}{80}\right)$;

c) $\frac{1}{3}\cdot\left[12+11:\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)\right]$; d) $6\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right)\right]$;

e) $\frac{17}{42}:\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\right):\frac{7}{30}-\frac{1}{3}\right]$;

f) $\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}\right):\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{20}\right):\left(1+\frac{9}{20}\right)\right]:\frac{1}{50}$;

g) $\frac{51}{400}:\left[\frac{1}{19}\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}\right)+\frac{1}{360}:\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{45}\right)\right]$;

h) $1:\left\{\frac{1}{3}+\frac{12}{13}\cdot\left[\frac{1}{3}+1:\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)\right]\right\}$;

i) $\frac{1}{2}:\left\{\left(1-\frac{1}{12}\right):\left[\frac{1}{5}+4\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:2\right)\right]+\frac{1}{12}\right\}$;

j) $\frac{4}{19}\cdot\left\{\frac{1}{2}+\frac{11}{15}:\left[\frac{1}{60}+162\cdot\left(\frac{1}{270}+\frac{1}{405}+\frac{1}{360}\right)\right]\right\}$;

k) $\left(28+\frac{2}{21}\right):\left\{\frac{33}{7}+\left(1+\frac{11}{14}\right)\cdot\left(4+\frac{2}{3}\right)+\left[\frac{29}{9}-\left(1+\frac{5}{6}\right)\right]\cdot\frac{18}{25}\right\}$;

l) $\frac{101}{959}:\left[\frac{1}{2\,877}+\left(\frac{1}{137}-\frac{1}{227}\right)\cdot\left(\frac{11}{18\,900}+\frac{13}{21\,000}\right)\right]$;

m) $$\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{400}\cdot 2^{398}\right]^2}{\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{80}\right):\left(\frac{1}{4}\right)^2}.$$

74. Să se afle media aritmetică a următoarelor numere:

a) 2; 4; b) 2; 3; 4; c) 1; 4; 5; 10; d) $\frac{1}{2}$; 1; e) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$;

f) $2\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{2}$.

75. x este media aritmetică a numerelor naturale a și b. Ştiind că a este mai mic decît b să se scrie cele trei numere în ordine crescătoare.

76[d]. Suma a trei numere naturale distincte este 45. Fiecare din ele este divizibil cu 5, iar unul din ele este media aritmetică a celorlalte două. Diferența între cel mai mare și cel mai mic din ele este mai mică decît 18. Să se afle numerele.

77. Să se rezolve ecuațiile:

I. a) $x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; b) $x + \frac{1}{2} = 1$; c) $\frac{3}{4} + x = \frac{5}{6}$; d) $\frac{5}{6} + x = \frac{15}{16}$.

II. a) $x - 2 = \frac{1}{2}$; b) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$; c) $x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$; d) $x - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$;

e) $x - \left(2 + \frac{1}{4}\right) = 3 + \frac{1}{6}$; f) $\frac{4}{5} - x = \frac{1}{5}$; g) $3 - x = \frac{1}{2}$;

h) $\frac{4}{5} - x = \frac{1}{2}$; i) $\frac{5}{2} - x = \frac{1}{4}$.

78. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2x = 6$; b) $2x = \frac{4}{9}$; c) $3x = \frac{9}{17}$; d) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$;

e) $\frac{3}{4}x = 9$; f) $\frac{4}{5}x = 16$; g) $\frac{2}{3}x = \frac{4}{9}$; h) $\frac{1}{5}x = \frac{1}{20}$;

i) $\frac{3}{4}x = 7$; j) $\frac{3}{5}x = 6$; k) $2x = \frac{4}{5}$; l) $\frac{4}{5}x = \frac{2}{3}$.

79. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x : \frac{3}{4} = 2$; b) $x : \frac{1}{2} = 10$; c) $x : 3 = \frac{2}{3}$; d) $x : \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$;

e) $x : \frac{1}{3} = 6$; f) $4 : x = \frac{4}{7}$, $(x \neq 0)$; g) $\frac{1}{2} : x = 2$, $(x \neq 0)$;

h) $\left(2 + \frac{1}{2}\right) : x = 5$, $(x \neq 0)$.

80. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; b) $2x + \frac{3}{5} = 1$; c) $3x + \frac{7}{10} = 1$; d) $4x + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2}$;

e) $\frac{2}{5}x + 2 = 6$; f) $\frac{4}{5}x - 2 = 6$; g) $\frac{7}{6} - 2x = 1$; h) $4 + \frac{1}{2} - 2x = \frac{1}{2}$.

81. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}x = 16$; b) $\frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{3}x$; c) $\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}x = 6$;

d) $\frac{1}{2}x + 2 = 2 + \frac{1}{4}$; e) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x = 2$; f) $\frac{3}{4}x + 2 = 2 + \frac{1}{2}$;

g) $2x - \frac{1}{2} = x$.

82. Să se rezolve inecuațiile:

a) $2x > \frac{1}{3}$, $x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{5}; \frac{1}{15}\right\}$;

b) $\frac{1}{2}x \leqslant \frac{1}{3}$, $x \in \left\{\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right\}$; c) $3x \geqslant \frac{1}{4}$, $x \in \left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{5}\right\}$;

d) $\frac{1}{2}x \leqslant 2$, $x \in \mathbb{N}^*$.

83. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{2}$ din 6 m; b) $\frac{2}{3}$ din 6 kg; c) $\frac{4}{5}$ din 20 km; d) $\frac{1}{2}$ din 4 m;

e) $\frac{4}{5}$ din 225.

84. Să se calculeze:

a) $\frac{2}{3}$ din $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{5}$ din $\frac{5}{7}$; c) $\frac{2}{3}$ din $\frac{4}{7}$; d) $\frac{3}{5}$ din $\frac{1}{2}$ kg; e) $\frac{3}{4}$ din $\frac{1}{2}$ kg;

f) $\frac{2}{3}$ din $\frac{1}{2}$ km.

85. Un tractorist a arat $\frac{3}{5}$ dintr-un lot de 120 ha, iar altul $\frac{1}{3}$ din același lot. Cu cîte hectare a arat mai mult un tractorist decît celălalt?

86. Un lot are 300 ha. $\frac{3}{4}$ din acest lot sînt semănate cu grîu, 32 ha cu orz, iar restul cu porumb. Cîte ha sînt semănate cu porumb?

87. Să se afle un număr știind că $\frac{3}{4}$ din el este egal cu 24.

88. Să se afle un număr știind că $\frac{3}{5}$ din el este egal cu 9.

89. Să se afle un număr știind că $\frac{3}{4}$ din el este egal cu 60.

90. Să se afle o distanță știind că $\frac{4}{5}$ din ea reprezintă 80 km.

91. Să se afle o cantitate de marfă știind că $\frac{2}{3}$ din ea este egală cu 40 kg.

92. Să se afle un număr știind că $\frac{3}{5}$ din el este egal cu $\frac{6}{7}$.

93. Să se afle o cantitate de marfă știind că $\frac{3}{5}$ din ea este egală cu $30\frac{3}{4}$ kg.

94. Într-o săptămînă, o echipă a săpat $\frac{7}{9}$ dintr-un șanț și i-au mai rămas de săpat 36 m. Cît de lung este întregul șanț?

95. Cîți puieți trebuie să fie plantați pe un teren, dacă după ce s-au plantat $\frac{90}{100}$ din ei, au mai rămas de plantat 4 000?

96. Un cetățean a parcurs $\frac{3}{4}$ km care reprezintă $\frac{3}{4}$ din lungimea unui drum. Cîți km are drumul?

97. Dintr-un balot de stofă de 12 m, cineva cumpără $\frac{1}{2}$ din balot și încă $\frac{1}{2}$ m. Cîți metri de stofă au rămas în balot?

98d. Într-o clasă sînt 40 de elevi. Se organizează cu elevii clasei o vizită la o uzină și o vizită într-o cooperativă agricolă de producție. Fiecare elev participă la cel puțin una din aceste două vizite. Se știe că numai $\frac{4}{5}$ din numărul elevilor participă la vizita la uzină, iar numai $\frac{3}{5}$ din numărul elevilor participă la vizita în cooperativa agricolă de producție. Să se arate cîți elevi participă la ambele vizite.

99d. Dintr-un vas se scoate prima oară $\frac{1}{4}$ din conținut. A doua oară $\frac{2}{9}$ din rest și încă 10 l. A treia oară $\frac{1}{3}$ din rest. Mai rămîn 40 l. Cîți litri erau în vas?

100. Un elev are depuși la C.E.C. 375 de lei. Cîți lei îi mai rămîn la C.E.C., dacă scoate $\frac{13}{25}$ din ei?

101. Mai mulți elevi, numărînd piesele lucrate și constatînd că sînt 864, își dau seama că au efectuat $\frac{2}{3}$ din lucrarea care le-a fost repartizată. Cîte piese trebuie să mai facă?

102. În prima zi de lucru, un tractorist a efectuat $\frac{1}{4}$ din lucrul repartizat, iar în a doua zi $\frac{1}{3}$ din el. Cît teren a fost repartizat acestui tractorist, dacă în cele două zile de lucru a făcut lucrări pe 63 ha?

103. Să se afle un număr știind că $\frac{3}{5}$ din el este egal cu $\frac{1}{2}$.

104. Trei brigăzi ale unei cooperative agricole de producție au avut de semănat grîu pe un lot. O brigadă a semănat $\frac{1}{4}$ din întregul lot, alta $\frac{1}{2}$ din întregul lot și cea de-a treia $\frac{1}{5}$ din întregul lot. În felul acesta, au semănat grîu pe 114 ha. Ce arie are lotul?

105. Un turism a parcurs în prima zi $\frac{3}{17}$ din întregul drum programat, în a doua zi $\frac{8}{51}$ din drum și în a treia zi $\frac{1}{6}$ din drum. Știind că în acest fel a parcurs 182 km, să se afle cîți kilometri are tot drumul programat.

106. O brigadă de tractoriști a arat $\frac{11}{42}$ din terenul pe care îl avea repartizat pentru arat; au mai rămas de arat 465 ha. Ce teren era de arat în total?

107. Un autobuz, după ce a parcurs $\frac{16}{21}$ din distanța pe care o avea de parcurs, mai are de mers încă 110 km. Cît este întreaga distanță pe care trebuie s-o parcurgă?

108. Să se afle un număr pe care dacă îl înmulțim cu 2, obținem același rezultat ca atunci cînd îl adunăm cu $\frac{3}{4}$.

109. Un număr este egal cu $\frac{4}{5}$ din altul. Să se afle numerele știind că suma lor este 90.

110. Un număr este egal cu $\frac{1}{4}$ din alt număr. Știind că suma lor este 150, să se afle numerele.

111. Să se afle un număr, știind că înmulțindu-l cu $\frac{2}{7}$, obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 30 din el.

112. Suma a două numere este 84. Să se afle numerele, știind că unul este egal cu $\frac{2}{5}$ din celălalt.

113. Suma a două numere este 60. Să se afle numerele, știind că unul din ele este egal cu $\frac{1}{8}$ din celălalt.

114. Perimetrul unui dreptunghi este de 42 m, iar o latură a sa este $\frac{3}{4}$ din cealaltă. Să se afle aria dreptunghiului.

115. Suma a trei numere este 400. Să se afle numerele, știind că al doilea este cu $2\frac{1}{2}$ mai mare decît primul, iar al treilea de 4 ori mai mare decît al doilea.

116. Să se afle un număr, știind că înmulțindu-l cu $\frac{3}{7}$, obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 40 din el.

117[d]. Dacă se mărește o dimensiune a unui dreptunghi cu $\frac{4}{5}$ din ea și cealaltă se micșorează tot cu $\frac{4}{5}$ din ea (din a doua dimensiune), se obține un dreptunghi cu aria de 900 m^2. Să se afle aria primului dreptunghi.

118. Un teren al unei cooperative agricole de producție a fost repartizat astfel: $\frac{2}{5}$ din teren pentru cultivarea grîului, $\frac{2}{3}$ din rest pentru cultivarea porumbului, iar restul terenului, de 60 ha, pentru cultivarea sfeclei de zahăr. Cîte hectare au fost repartizate pentru cultivarea grîului și cîte hectare pentru cultivarea porumbului?

119[d]. Două echipe de muncitori, lucrînd împreună, pot termina o lucrare în 12 ore. După ce au lucrat împreună 9 ore, lucrarea a fost terminată numai de una din echipe în 7 h 30 min. În cîte ore ar termina lucrarea fiecare echipă lucrînd singură?

120. O latură a unui dreptunghi este $\frac{2}{3}$ din cealaltă, iar aria sa este de 54 m^2. Să se afle perimetrul dreptunghiului.

121. O latură a unui dreptunghi este $\frac{5}{8}$ din cealaltă, iar aria sa este de 40 m^2. Să se afle perimetrul dreptunghiului.

122[d]. Cum putem tăia dintr-o bucată de sfoară de $\frac{2}{3}$ m o jumătate de metru, fără să avem la îndemînă un etalon de lungime?

123[d]. Într-o clasă, numărul elevilor absenți era $\frac{1}{8}$ din numărul celor prezenți. Cînd din clasă au plecat doi elevi, numărul celor absenți a devenit $\frac{1}{5}$ din numărul celor prezenți. Cîți elevi erau prezenți în clasă?

124[d]. Mama a pus pe masă un număr de mere și le-a spus celor trei băieți ca întorcîndu-se de la școală să și le împartă în părți egale. Întîi a venit Marin, a luat o treime din numărul merelor și a plecat. Apoi s-a întors de la școală Petre, a luat $\frac{1}{3}$ din numărul merelor ce rămăseseră pe masă și a plecat. Apoi a venit Ion și a luat $\frac{1}{3}$ din numărul merelor pe care le-a găsit. Cîte mere le-a lăsat mama dacă Ion a luat 4 mere?

125[d]. 12 oameni duc 12 pîini. Fiecare bărbat duce cîte două pîini, fiecare femeie cîte o jumătate de pîine, iar fiecare copil cîte un sfert de pîine. Cîți bărbați, cîte femei și cîți copii sînt? Cîte soluții are problema? (Se presupune că în grupul de 12 oameni există cel puțin un bărbat, cel puțin o femeie și cel puțin un copil.)

Indicație: Arătați, mai întîi, că bărbații nu pot fi mai puțini decît 5 și apoi că nu pot fi mai mulți decît 5.

126[d]. Un elev are o sumă de bani. În prima zi cheltuiește jumătate din ea, a doua zi o treime din rest, a treia zi jumătate din noul rest, iar a patra zi o treime din suma rămasă. După aceste cheltuieli mai rămîne cu 12 lei. Ce sumă a avut elevul la început?

127. Un muncitor execută $\frac{1}{5}$ dintr-o lucrare într-o oră. În cîte ore execută întreaga lucrare?

128. Lucrînd singur, un muncitor execută $\frac{1}{6}$ dintr-o lucrare într-o oră. Lucrînd singur, un alt muncitor execută $\frac{2}{3}$ din aceeași lucrare într-o oră.

a) În cît timp execută lucrarea fiecare muncitor lucrînd singur?
b) În cît timp execută lucrarea cei doi muncitori lucrînd împreună?

129[d]. O lucrare poate fi efectuată în 20 zile de 15 muncitori. Deoarece, după 8 zile de lucru, unii dintre acești muncitori pleacă pe alt șantier, lucrarea se termină după alte 30 de zile. Cîți muncitori au plecat pe alt șantier?

130. Să se efectueze:
a) $1{,}26 + 0{,}126 + 12{,}6$; b) $4{,}25 + 4{,}25 + 0{,}425 + 42{,}5 + 4\,250$;
c) $0{,}0157 + 15{,}7 + 1\,570 + 1{,}572 + 204{,}74$.

131. Să se efectueze:
a) $4{,}524 - 2{,}012$; b) $74{,}5 - 12{,}5$; c) $745{,}4 - 241{,}2$; d) $642{,}45 - 611{,}45$;
e) $624 - 32 - 24{,}33$; f) $4{,}75 - 0{,}8$; g) $982{,}456 - 112{,}24$; h) $187{,}25 - 24$;
i) $456{,}2 - 216{,}964$; j) $5 - 0{,}005$; k) $900 - 0{,}009$.

132. Să se efectueze:
a) $4{,}52 \cdot 10$; b) $0{,}247 \cdot 100$; c) $4{,}57 \cdot 100$; d) $0{,}247 \cdot 1\,000$; e) $2{,}47 \cdot 1\,000$;
f) $0{,}2 \cdot 100\,000$; g) $2{,}4 \cdot 200$; h) $0{,}25 \cdot 4\,000$.

133. Să se efectueze:
a) $25 \cdot 0{,}1$; b) $524{,}8 \cdot 0{,}01$; c) $240 \cdot 0{,}001$; d) $4\,000 \cdot 0{,}001$; e) $200 \cdot 0{,}02$;
f) $5\,000 \cdot 0{,}04$.

134. Să se efectueze:
a) $2{,}4 \cdot 9{,}8$; b) $32{,}6 \cdot 0{,}24$; c) $4{,}5 \cdot 24$; d) $20{,}4 \cdot 4{,}06$; e) $2{,}004 \cdot 300{,}5$; f) $48{,}4 \cdot 6{,}95$.

135. Să se efectueze:
a) $2{,}8 \cdot 75$; b) $8{,}01 \cdot 20{,}4$; c) $50{,}02 \cdot 100{,}5$.

136. Să se efectueze:
a) $24{,}5:10$; b) $45{,}7:100$; c) $75:100$; d) $45:1\,000$; e) $250:1\,000$; f) $400:10\,000$.

137. Să se efectueze:

a) 2 456,4 : 2; b) 754,7:2; c) 4,75:0,2; d) 4,56:0,25; e) 4,567:0,16; f) 7,5:0,64; g) 8,262 : 4,05; h) 2 001,3002 : 50,02; i) 57,52:24,3 (cu două zecimale exacte[1] și să se facă proba); j) 134,5:0,33 (cu trei zecimale exacte și să se facă proba).

138. Să se efectueze:

a) 645 : 64,5; b) 645 : 0,645; c) 6450 : 6,45; d) 6,45 : 64,5; e) 0,645 : 645; f) 2,22 : 1,11; g) 22,2 : 1,11; h) 0,444 : 22,2.

139. Să se efectueze:

a) 0,25 : 0,1; b) 0,24 : 0,01; c) 2,5 : 0,001; d) 45 : 0,001; e) 755 : 0,002.

140. Să se efectueze:

a) 7,5 : 10; b) 47,5 : 100; c) 2,3 : 100; d) 75 : 10; e) 7 : 1 000; f) 40 : 1 000; g) 400 : 1 000.

141. Să se efectueze următoarele împărțiri cu trei zecimale exacte și să se facă proba:

a) 1,7 : 0,3; b) 4,3 : 0,33; c) 1,24875 : 4,08.

142. Să se efectueze:

a) $45{,}24\cdot 2{,}3-0{,}9998$; b) $20{,}4+20{,}4\cdot 40{,}5$; c) $2{,}04+2{,}04:2$; d) $7+2{,}5:0{,}16$; e) $(0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}1):0{,}01$; f) $1\,000\cdot(245:2{,}45+0{,}245:245+2{,}45:24{,}5)$; g) $0{,}9+(40{,}5\cdot 2{,}06-3{,}43):800$; h) $1\,000\cdot[0{,}91+(20{,}01-4{,}1):0{,}1]$; i) $10\cdot\{10+10\cdot[0{,}1+0{,}1\cdot(1{,}1-0{,}1)]\}$; j) $100\cdot\{0{,}456+10\cdot[0{,}07+0{,}1\cdot(2{,}485-0{,}48)]\}$; k) $\{7{,}5+1\,500\cdot[0{,}2+0{,}2\cdot(24{,}5+0{,}785+456{,}24)]\}:100$.

143. Să se efectueze:

a) 123 + 0,123 + 1 230 + 12,3 + 1,23; b) 5,76 — 1,24; c) 7,45 — 2,05; d) 9,112 — 2,75; e) 40,5 — 3,75; f) 12,3 · 2,4; g) 40,5 · 206; h) 7,68 : 3,2; i) 6,25 : 0,25; j) 408 : 1,2; k) 47,2154 : 0,24 (cu două zecimale exacte și să se facă proba).

144. Să se afle numărul care este cu 415,7 mai mare decît 4,157.

145. Să se afle numărul care este cu 4,505 mai mare decît 297.

146. Într-o cantină s-au consumat într-o zi 180,750 kg de alimente, iar a doua zi o cantitate de alimente cu 10,500 kg mai mare decît în prima zi. Ce cantitate de alimente s-a consumat în cele două zile la un loc?

147. Să se afle numărul care este cu 4,57 mai mic decît 75,4.

148. Să se afle numărul care este cu 0,05 mai mic decît 5.

149. Cineva a cheltuit într-o zi 240 lei, iar în altă zi cu 32,75 lei mai puțin. Cît a cheltuit în cele două zile la un loc?

150. Să se afle numărul de 45 ori mai mare decît 24,4;

151. Să se afle numărul de 102 ori mai mare decît 4,05.

---

[1] A face împărțirea cu două zecimale exacte înseamnă a nu mai continua efectuarea împărțirii după obținerea primelor două zecimale.

152. Să se afle numărul de 405 ori mai mare decît 2,006.

153. Un creion costă 0,90 lei, iar un caiet costă 1,45 lei. Cît costă 4 creioane și 7 caiete la un loc?

154. Un stilou costă 32,50 lei și un caiet 1,45 lei. Cît costă 3 stilouri și 5 caiete la un loc?

155. Într-un sac sînt 46,500 kg cartofi. Cîte kilograme de cartofi sînt în 3 saci de același fel?

156. Cineva a cumpărat într-o zi 2,5 m de stofă, iar a doua zi 4,25 m stofă de aceeași calitate. Știind că 1 m de stofă costă 250 lei, cît costă toată stofa?

157. 1 kg de mălai costă 3,50 lei. Cît costă 6,5 kg de mălai de aceeași calitate?

158. Să se afle numărul de 20 ori mai mic decît 2,45.

159. Să se afle numărul de 40 ori mai mic decît 74,5.

160. Să se afle numărul de 16 ori mai mic decît 0,032.

161. 5 cutii de paste făinoase costă 22,50 lei. Cît costă o cutie de paste făinoase de aceeași calitate?

162. 5 ouă costă 7,50 lei. Cît costă 10 ouă? Dar 17 ouă?

163. Ionel are în pușculiță o sumă de 80,50 lei, iar Petrică o sumă de două ori mai mică. Ce sumă are Petrică?

164. 7,5 kg de alimente costă 56,25 lei. Cît costă 1 kg de alimente? Dar 14,5 kg?

165. Suma a două numere este 0,405. Să se afle numerele știind că unul este de patru ori mai mare decît celălalt.

166. Suma a două numere este 5. Să se afle numerele știind că unul este de 499 de ori mai mare decît celălalt.

167. Să se efectueze:

a) $0{,}4+\frac{1}{3}$; b) $0{,}45+\frac{1}{30}$; c) $2{,}05-\frac{1}{60}$; d) $0{,}24\cdot\frac{1}{6}$; e) $0{,}001:\left(4+\frac{1}{250}\right)$;

f) $\left(\frac{1}{3}+0{,}25\right)\cdot\left(1+\frac{5}{7}\right)$; g) $\frac{2}{3}:\left(0{,}5+0{,}5\cdot\frac{1}{3}\right)$; h) $0{,}375\cdot\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(0{,}2+\frac{1}{3}\right)$;

i) $\left[\left(0{,}75+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{6}{17}+0{,}1:\frac{1}{5}\right]:0{,}(3)$; j) $[2\cdot 2^2\cdot 2^{300}+3^{90}:3^{20}+(5^2)^{100}]:(2^{303}+3^{70}+5^{200})$; k) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot[3{,}331-(1+0{,}1)^3]^2$; l) $\dfrac{[0{,}(2)]^2}{(0{,}05^2+1{,}05^2):\left(1+\frac{21}{200}\right)}$.

168. Să se efectueze:

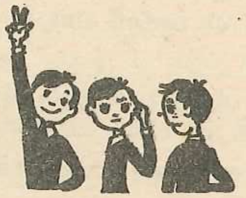
a) $\left[\frac{1}{2}+\frac{53}{240}:\left(\frac{1}{6}+0{,}275\right)\right]:0{,}001$; b) $\left(1+\frac{13}{25}\right):\left(0{,}24+\frac{1}{75}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1{,}17}{3}-0{,}03\right)$;

c) $\left(0{,}0625+\frac{5}{96}+\frac{1}{84}\right):\frac{8{,}5}{672}$; d) $0{,}375:\left[0{,}75+\frac{439}{21\,168}:\left(\frac{1}{756}+\frac{3}{784}+\frac{1}{567}\right)\right]$;

e) $\left(\frac{2}{947}+\frac{740}{743}+\frac{945}{947}+\frac{3}{743}\right):0{,}02$; f) $[0{,}(3)+3{,}(3)]:\left(0{,}3+\frac{0{,}2}{3}\right)$;

g) $\left(1{,}5+\frac{1}{3}\right):[0{,}(6)+6{,}(6)]$; h) $\left[0{,}1(26):\frac{25}{198}+2\right]:0{,}2$;

i) $\left\{111:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+\frac{1}{500}\right)+[0{,}(5)+0{,}(27)]\cdot\frac{198}{41}\right\}:0{,}06$; j) $0{,}4+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+0{,}5}}$.



LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUŞIRII UNOR CUNOŞTINŢE DE BAZĂ

Lucrarea I

1. Să se simplifice fracţiile: $\frac{4}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{240}{3\,200}$.

2. Să se amplifice cu 2 următoarele fracţii: $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{7}$.

3. Să se aducă următoarele fracţii la cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{180}$; $\frac{5}{168}$; $\frac{2}{315}$.

4. Să se introducă întregii în fracţie: $3\frac{1}{2}$; $24\frac{1}{10}$.

5. Să se scoată întregii din fracţie: $\frac{7}{2}$; $\frac{177}{10}$; $\frac{2\,447}{23}$.

6. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{44}+\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{2}{5}$; d) $\frac{5}{24}+\frac{7}{36}+\frac{1}{90}$;

e) $\frac{1}{180}+3\frac{5}{336}+\frac{2}{315}$.

7. Să se efectueze:

a) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$; b) $2-\frac{2}{3}$; c) $\frac{2}{3}-\frac{1}{66}$; d) $\frac{347}{2}-\left(1+\frac{3}{4}\right)$; e) $\frac{7}{150}-\frac{1}{175}$.

8. Să se efectueze:

a) $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}$; b) $\frac{3}{5}\cdot 7$; c) $\frac{2}{3}\cdot 6$; d) $\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}$; e) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{4}$.

9. Să se efectueze:

a) $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$; b) $\frac{6}{7}:3$; c) $\frac{4}{9}:\frac{1}{3}$; d) $\dfrac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5}}$; e) $\dfrac{\frac{4}{7}}{2}$; f) $\dfrac{5}{\frac{5}{7}}$.

10. Să se efectueze:

$\left(\frac{8}{15}:\frac{4}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}:2\right)-\frac{1}{15}$.

11. $72\cdot\left[1+\left(\frac{1}{48}+\frac{5}{64}+\frac{1}{96}\right):\left(2-\frac{1}{4}\right)\right]$.

12. $\left(\frac{3}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

13. Un călător a parcurs în două zile, cu mijloace de transport, distanţa de 450 km. În prima zi a parcurs $\frac{2}{5}$ din distanţă. Ce distanţă a parcurs a doua zi?

14. Într-o familie s-a consumat în două luni de zile o anumită cantitate de alimente. Ştiind că în prima lună s-au consumat 60 kg, care reprezintă $\frac{3}{5}$ din întreaga cantitate, să se afle ce cantitate de alimente s-a consumat în cele două luni la un loc.

Lucrarea II

Să se transforme următoarele fracţii zecimale în fracţii ireductibile:

1) 0,5; 2) 0,25; 3) 0,75; 4) 0,002; 5) 2,4; 6) 0,2; 7) 0,15; 8) 0,025; 9) 5,6.

Să se transforme următoarele fracţii în fracţii zecimale:

10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{7}{4}$; 12) $\frac{9}{200}$; 13) $\frac{3}{8}$; 14) $1\frac{1}{5}$; 15) $\frac{407}{200}$.

Să se efectueze:

16) $\left(\frac{1}{3}+0{,}25\cdot 10\right):\frac{1}{6}$.

17) Într-o pungă sînt $3\frac{1}{4}$ kg zahăr, iar în alta 750 g. Cîte kg de zahăr sînt în ambele pungi la un loc?

18) Să se afle media aritmetică a numerelor 0,5 şi $\frac{1}{3}$.

Lucrarea III

Să se efectueze:

1) $24{,}5+2\,450+0{,}245+245$; 2) $4{,}24-1{,}23$; 3) $4{,}06-1{,}898$; 4) $3{,}12-3{,}1$; 5) $2{,}7\cdot 3{,}5$; 6) $0{,}4\cdot 345$; 7) $20{,}05\cdot 400{,}2$; 8) $7{,}5:2$; 9) $0{,}768:3{,}2$; 10) $0{,}25:0{,}64$; 11) $6{,}25:0{,}025$; 12) $4{,}1616:20{,}4$; 13) $2{,}45:0{,}23$ (Împărţirea se va efectua cu două zecimale exacte şi se va face proba.); 14) $0{,}5^2+0{,}01^3$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME SUPLIMENTARE

A) Exerciții și probleme diverse

1. Într-un oraș, toate piețele sînt legate prin străzi, așa cum se arată în figura 53. Un observator, aflat într-una din piețe, poate vedea numai piețele care sînt legate *direct* prin străzi cu piața în care se află el. (De exemplu, un observator aflat în piața B poate vedea numai piețele A, F, H și C.) Care este cel mai mic număr de observatori și în care piețe trebuie să fie plasați pentru a cuprinde în același timp, cu privirea, toate piețele înfățișate în desen?

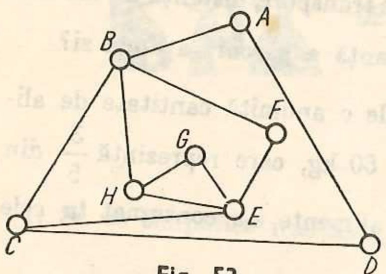


Fig. 53

2[d]. Într-un grup se află un maestru al sportului pe care-l cheamă Căruntu, un antrenor de fotbal pe care-l cheamă Blondu și un spectator pe care-l cheamă Roșcatu. Unul dintre ei, care avea părul blond, zice:
— Ia uite, unul din noi este cărunt, altul roșcat și al treilea blond. Dar la nici unul culoarea părului nu corespunde cu numele de familie. Am dreptate?
— Ai, a confirmat maestrul sportului. Ce culoare de păr avea antrenorul? Arătați cum au judecat.

3[d]. Pe o hîrtie sînt desenate următoarele figuri: un triunghi, un dreptunghi, un cerc și un pătrat.
O figură este de culoare verde, alta de culoare galbenă, alta albastră, alta roșie. Să se afle în ce ordine se află figurile și ce culoare are fiecare din ele, știind că:
a) Figura roșie se află lîngă cea verde și lîngă cea albastră.
b) La dreapta figurii galbene se află figura dreptunghiulară.
c) Figura de forma unui cerc se află la dreapta celei triunghiulare și a celei dreptunghiulare.
d) Figura de formă triunghiulară nu se află la margine.
e) Figura albastră nu se află lîngă figura galbenă.
f) Figura triunghiulară nu este verde.

4[d]. Un elev a scris toate numerele naturale mai mari decît zero și mai mici decît 100. Să se afle:
a) De cîte ori a fost folosită cifra zero?
b) De cîte ori a fost folosită cifra 1?
c) De cîte ori a fost folosită cifra 3?

5[d]. Se consideră numărul 4 728 913 102. Eliminați trei cifre astfel încît cu cifrele care rămîn, păstrîndu-se ordinea în care se găsesc, să se formeze cel mai mic număr natural cu 7 cifre ce se poate obține în aceste condiții. Care este acel număr?

6. Dacă, într-o clasă, în fiecare bancă se așază cîte doi elevi, 3 bănci rămîn libere. Știind că în clasă sînt 32 elevi, să se spună cîte bănci sînt în clasă.

7. Dacă, într-o sală, pe fiecare bancă stau cîte trei tineri, doi tineri rămîn în picioare. Știind că în sală sînt 15 bănci, să se spună cîți tineri sînt în sală.

8[d]. Dacă, într-o clasă, se așază cîte doi elevi într-o bancă, rămîn 3 elevi în picioare. Dacă se așază cîte 3 elevi într-o bancă, rămîn 4 bănci libere. Cîți elevi și cîte bănci sînt în clasă?

9. Într-o curte sînt găini și iepuri, în total 43 de capete și 124 de picioare. Cîte găini și cîți iepuri sînt în curte?

Rezolvare

O metodă prin care se poate rezolva această problemă este metoda falsei ipoteze.

Presupunem că în curte ar fi numai găini. În acest caz ar fi $43 \cdot 2 = 86$ (picioare).

Diferența de $124-86=38$ (picioare) rezultă din faptul că în curte există și iepuri.

Un iepure are cu două picioare mai mult decît o găină. Aflăm numărul iepurilor, împărțind diferența de 38 picioare la 2. Sînt deci 19 iepuri și $43 - 19 = 24$ (găini).

Verificare:

$19 + 24 = 43$; $\quad 19 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 124$.

Rezolvați, prin aceeași metodă, următoarea problemă:

Într-un bloc sînt 132 apartamente cu două, respectiv trei camere, în total 334 camere. Cîte apartamente cu două camere și cîte apartamente cu trei camere sînt în bloc?

10[d]. Fiecare din cei 80 elevi ai unui colectiv știu cel puțin una din limbile franceză și engleză. 41 știu limba franceză, iar 60 limba engleză. Cîți dintre elevi știu numai engleza și cîți numai franceza? Cîți elevi știu ambele limbi?

11. Să se efectueze:

a) $\dfrac{154}{0{,}75} : \left[\dfrac{1}{3{,}75} + \dfrac{2{,}3}{3{,}75} : \left(0{,}04 + \dfrac{1}{75} + \dfrac{1}{125}\right)\right]$;

b) $\left\{20{,}5 : \left[25 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{5}\right) + \left(2\dfrac{1}{3} - 0{,}75\right) \cdot \dfrac{6}{19}\right]\right\}^2$.

12[d]. O echipă de tipografi care trebuie să tipărească trei cărți: A, B și C are la dispoziție două mașini: una pentru cules și a doua pentru tipărirea textului. Pentru culegerea textului fiecărei cărți se consumă cîte 3 ore. Dar tipărirea cărții A durează 2 ore, a cărții B, 4 ore și a cărții C, 1 oră. În ce ordine trebuie să execute operațiile, astfel încît cele trei cărți să poată fi terminate cît mai repede? (O carte, mai întîi se culege toată, iar apoi se tipărește.) („Problema tipografului".)

13[d]. La sfîrșitul unui an școlar, fiecare dintre elevii unei clase a primit cîte o fotografie de la fiecare din colegii săi. În total au fost schimbate 992 fotografii. Cîți elevi erau în clasă?

14. $\dfrac{3}{4}$ dintr-un număr este 52,5. Să se afle numărul.

15. $\dfrac{2}{5}$ dintr-un număr este 4,4. Să se afle numărul.

16. Să se afle valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) $\frac{1}{2}$ m = 5 dm; b) $\frac{1}{4}$ m = 25 cm; c) $\frac{1}{10}$ dm = 1 cm; d) 40 cm = $\frac{2}{5}$ dm;
e) 500 g = $\frac{1}{2}$ kg; f) 250 g = $\frac{1}{4}$ kg; g) 750 g = $\frac{3}{4}$ kg; h) $\frac{1}{2}$ h = 30 min;
i) $\frac{1}{4}$ h = 15 min; j) 45 min = $\frac{3}{4}$ h; k) 24 s = $\frac{3}{5}$ min; l) 16 min = $\frac{7}{15}$ h.

17. Într-un magazin se vînd, în două zile, 450 m de stofă. În prima zi se vinde $\frac{3}{5}$ din întreaga cantitate, iar a doua zi restul. Cîţi metri s-au vîndut în prima zi şi cîţi metri s-au vîndut a doua zi?

18. Un pătrat are perimetrul de 12 m. Să se afle aria.

19. Un dreptunghi are lungimea de trei ori mai mare decît lăţimea, iar perimetrul de 80,8 m. Să se afle aria dreptunghiului.

20. Diferenţa dintre lungimea unui dreptunghi şi lăţimea sa este de 6 m, iar perimetrul este de 20 m. Să se afle aria.

21. Într-un magazin se vînd, în două zile, 340 m de stofă. În prima zi se vinde $\frac{2}{5}$ din întreaga cantitate, iar a doua zi restul. Cîţi metri s-au vîndut în prima zi şi cîţi metri s-au vîndut a doua zi?

22. Să se afle un număr, ştiind că, înmulţindu-l cu $\frac{3}{5}$, obţinem acelaşi rezultat ca atunci cînd scădem 60,6 din el.

23. Perimetrul unui dreptunghi este de 160 m, iar o dimensiune este $\frac{3}{5}$ din cealaltă dimensiune. Să se afle aria dreptunghiului.

24. Perimetrul unui dreptunghi este de 60,5 m. Dacă se măreşte lungimea cu $\frac{1}{4}$ din ea, iar lăţimea rămîne aceeaşi, perimetrul dreptunghiului obţinut este de 70 m. Să se afle aria dreptunghiului iniţial.

25. Aria unui dreptunghi este de 240 m². Să se afle laturile, ştiind că una din ele este egală cu $\frac{3}{5}$ din cealaltă.

26. Să se afle toate numerele naturale n, astfel încît să avem $\frac{6-n}{2} \in \mathbb{N}$.

B) Exerciţii şi probleme date la olimpiadele de matematică, la clasa a V-a, în ţara noastră

1972 I. Să se determine un număr de cinci cifre, ştiind că produsul dintre numărul format din primele două cifre şi numărul format din ultimele cifre este 1 111.

II. Elevii unei clase au participat la muncă patriotică, în două zile, astfel: în prima zi 15 elevi, în a doua de două ori mai mulţi ca în prima zi. Să se afle numărul elevilor din clasă, dacă 12 din ei au venit în fiecare zi, iar 3 elevi în nici o zi.

III. La o împărţire de numere naturale se ştie că deîmpărţitul este 5 883, iar restul 1.
a) Să se afle împărţitorul şi cîtul, ştiind că sînt diferite de 1 şi că împărţitorul este mai mare decît cîtul.
b) Cîte soluţii are problema?

IV. Suma a trei numere naturale diferite este 54. Ştiind că unul din ele este media aritmetică a celorlalte două şi că fiecare număr este divizibil cu 6, să se afle cele trei numere. (Să se găsească toate soluţiile.)

V. Andrei este cel mai mic din cinci fraţi şi Barbu cel mai mare. Emil este mai mic decît Călin, Dumitru este mai mare decît Emil şi decît Călin.
Fiecare dintre fraţi este cu un acelaşi număr întreg de ani mai mic decît următorul. (Se consideră ani împliniţi, exprimaţi prin numere întregi.)
a) Să se scrie, în ordinea crescătoare a vîrstei, cei cinci fraţi.
b) Dacă mijlociul are 7 ani, care este suma vîrstelor?
c) Care este maximul vîrstei pe care ar putea-o avea cel mare?

VI. a) Dovediţi că suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3
b) În ce caz, suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 6?

VII. Pe un şantier, în patru clădiri, sînt cazaţi 436 de muncitori. În prima clădire sînt cu 10 muncitori mai mult decît în clădirea a patra, unde sînt cu 8 muncitori mai mult decît în clădirea a treia, iar în clădirea a doua sînt cu 10 muncitori mai mult ca în a treia. Să se afle cîţi muncitori sînt în fiecare clădire.

VIII. Un număr de 2 cifre este $\frac{2}{9}$ din răsturnatul său. Care este numărul?

1973 I. Pe o cale ferată dublă, circulă, pe o linie, un tren cu viteza de 72 km/h, trenul avînd o lungime de 126 metri. Pe cealaltă linie ferată, circulă un alt tren lung de 378 metri cu viteza de 54 km/h.
a) Să se afle timpul cît durează trecerea unui tren pe lîngă celălalt dacă merg în sensuri contrare.
b) Să se afle cît timp durează trecerea unui tren pe lîngă celălalt dacă ambele trenuri merg în acelaşi sens.

II. Un muncitor calificat face într-o zi 20 de piese şi unul începător face 15 piese pe zi. Să se formeze o echipă de 12 oameni care să facă într-o zi cel puţin 220 de piese şi care să fie formată totuşi din cît mai mulţi începători.

III. Să se dea mai multe exemple de cîte trei numere dintre care unul să fie media aritmetică a celorlalte două.
Care dintre cazurile următoare sînt posibile?
a) Fiecare număr este diferit de celelalte două.
b) Două din cele trei numere sînt egale între ele, dar diferite de al treilea.
c) Toate cele trei numere sînt egale între ele.

IV. Despre trei numere se ştie că produsul dintre primul număr şi al doilea este 30,2, iar produsul dintre primul număr şi al treilea este 19,8. Să se afle produsul dintre primul număr şi suma celorlalte două.

V. Să se găsească un număr prim de trei cifre, ştiind că produsul cifrelor lui este 252. Justificaţi răspunsul.

VI. Într-un magazin au fost aduse nişte obiecte în zece lăzi, fiecare ladă avînd acelaşi număr de obiecte. Acestea au fost reambalate în cinci lăzi astfel în a doua ladă cu un obiect mai mult decît în prima, în a treia cu un obiect mai mult ca în a doua ş.a.m.d. O persoană cumpără lada cu cel mai mare număr fără soţ (impar) de obiecte. Din lăzile rămase, altă persoană cumpără toate lăzile care conţin la un loc cel mai mare număr par (cu soţ) de obiecte.

În magazin au rămas 13 obiecte. Cîte obiecte erau în total în magazin şi cîte în fiecare ladă?

VII. Dintre numerele de forma $\overline{71x\,84y}$ divizibile cu 18, care este cel mai mare şi care este cel mai mic?

VIII. Să se găsească două numere naturale, astfel ca de 6 ori primul înmulţit cu de 4 ori al doilea să se obţină 1 680 şi de trei ori primul să fie mai mare cu 1 ca al doilea.

IX. Într-un săculeţ sînt 10 bile albe, 12 bile negre şi 16 bile roşii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să-l scoatem, fără a ne uita în săculeţ, pentru a fi siguri că am scos 3 bile de aceeaşi culoare? De ce?

1974 I. Un dreptunghi are lungimea de două ori mai mare decît lăţimea.

Dacă lungimea dreptunghiului se măreşte cu 1 m, iar lăţimea sa se măreşte tot cu 1 m, aria dreptunghiului creşte cu 412 m². Să se afle lungimea şi lăţimea dreptunghiului.

II. Cîte numere naturale mai mici decît 1 003 putem pune în locul lui x în $(x + 1) : 2$, astfel încît fiecare număr obţinut să fie număr natural? Care este cel mai mare şi care este cel mai mic dintre aceste numere?

III. Se consideră numărul de patru cifre $N = \overline{a\,23b}$(a, b sînt cifre).
1. Să se determine a şi b astfel ca numărul N să fie multiplu de 18.
2. Să se determine a şi b astfel ca N să fie divizibil cu 36. Aceeaşi întrebare pentru 72.
3. Să se determine a şi b astfel ca numărul N să fie multiplu de 45.

IV. Care este cel mai mic şi care este cel mai mare număr de patru cifre care la împărţirea cu 74 să dea rest 19? Cîte numere de patru cifre împărţite la 74 dau rest 19?

V. $\frac{1}{2}$ din aria unei tarlale, mai puţin 60 ha, a fost semănată cu porumb, iar cu grîu $\frac{5}{8}$ din rest şi încă 180 hectare. Să se calculeze cîte hectare are întreaga tarla.

VI. Petre a plecat în oraş cu $\frac{2}{3}$ din banii economisiţi, iar Mihai cu $\frac{3}{4}$ din banii săi. Fiecare a cheltuit, din banii cu care a plecat în oraş, $\frac{3}{4}$, respectiv $\frac{2}{3}$.

Să se explice care a cheltuit mai mult dacă acasă au lăsat sume egale.

VII. Trei numere naturale a, $3a$, $6a$ satisfac condiţia că produsul P al lor se divide prin suma lor S.

a) Justificaţi că suma celor trei numere se divide cu 50.

b) Cîtul dintre produsul P şi suma S este un număr natural, multiplul lui 45? De ce?

VIII. Să se arate cu cît se modifică produsul a patru numere dacă primul se măreşte cu jumătatea lui, al doilea se măreşte cu a treia parte, al treilea se micşorează cu a patra parte, iar al patrulea se micşorează cu a treia parte din el.

IX. Un dreptunghi are lăţimea $\frac{3}{5}$ din lungime şi aria 1 215 m². Să se afle perimetrul dreptunghiului.

1978 I. Să se găsească numărul x, ştiind că:
$6 - (18 - 12) : 6 = [8 - 3 \cdot (9 - 7)] \cdot x.$

II. Se dau mulţimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{0, 7, 8\}$.
Să se determine $(A \cup B) \cap C$.

III. Să se găsească 10 numere naturale diferite (în baza 10), de două cifre, ştiind că toate afirmaţiile ce urmează sînt adevărate:

a) trei dintre ele au cifra zecilor 1;

b) patru dintre ele au cifra zecilor 2;

c) două dintre ele au cifra zecilor 3;

d) unul dintre ele are cifra zecilor 4;

e) patru dintre ele au cifra unităţilor 5;

f) două au cifra unităţilor 6;

g) trei au cifra unităţilor 7;

h) unul are cifra unităţilor 8.

IV. La un concurs sportiv, s-au acordat trei premii în valoare totală de 252 lei. Să se afle ce sumă a primit fiecare, ştiind că sportivul situat pe locul întîi a primit cu 24 de lei mai mult decît al doilea, iar acesta primeşte jumătate din cît primeşte primul şi al treilea la un loc.

1979 I. Să se determine perechile de numere naturale avînd suma pătratelor egală cu 50.

II. Un biciclist a parcurs $\frac{5}{7}$ dintr-un drum şi încă 40 km şi i-au mai rămas de parcurs $\frac{3}{4}$ din drum fără 118 km. Care este lungimea acelui drum?

III. Un dreptunghi D are lăţimea de 18 cm. Să se calculeze lungimea lui D în cazul cînd mărind lungimea lui D cu 3 cm se obţine un dreptunghi cu aria de 1 260 cm².

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Pag. 7—8. 1) 28. **2)** 13 400. **3)** a) 159; b) 303. **4)** 1960 t. **6)** a) 387; b) 398; c) 389; d) 2 810; e) 5 900. **7)** a) 1 423; b) 10 415; c) 902 042; d) 102 458; e) 306 631.

8) 1 + 0 sau 0 + 1.

10) a) $\begin{array}{r} 186\,+\\ 16\\ \hline 202\end{array}$ b) $\begin{array}{r} 3\,545\,+\\ 5\,739\\ \hline 9\,284\end{array}$

O soluție. O soluție.

c) $\begin{array}{r} 1\,833\,+\\ 7\,920\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,832\,+\\ 7\,921\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,831\,+\\ 7\,922\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,830\,+\\ 7\,923\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,829\,+\\ 7\,924\\ \hline 9\,753\end{array}$

sau $\begin{array}{r} 1\,828\,+\\ 7\,925\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,827\,+\\ 7\,926\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,826\,+\\ 7\,927\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,825\,+\\ 7\,928\\ \hline 9\,753\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 1\,824\,+\\ 7\,929\\ \hline 9\,753\end{array}$

Sînt zece soluții.

d) $\begin{array}{r} 2\,756\,+\\ 1\,075\\ 3\,823\\ \hline 7\,654\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 2\,756\,+\\ 3\,075\\ 1\,823\\ \hline 7\,654\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 2\,756\,+\\ 2\,075\\ 2\,823\\ \hline 7\,654\end{array}$ Sînt trei soluții.

11) Trei cartonașe. Șapte cartonașe.

12) Este posibil să punem 10 bile în 4 cutii. În prima cutie o bilă, în a doua 2 bile, în a treia 3 bile, în a patra 4 bile.

$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$

Nu este posibil să punem 14 bile în 5 cutii.
Nu este posibil să punem 27 bile în 7 cutii.

13) a) $1 + 40 + 45 = 86$ (bile); b) $32 + 40 + 1 = 73$ (bile).

Pag. 11. 1) a) 7 200; b) 5 024; c) 17 001 167; d) 200 001. **2)** 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. **3)** 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **4)** 10. **5)** 99. **6)** 100. **7)** 999. **8)** 99 999. **9)** 1 050. **10)** 10 800. **11)** 18 003. **12)** 999 321. **13)** 109. **14)** 34 501.

Pag. 13—14. 1) 4. **2)** 252. **3)** Cu 64 624 tractoare. **5)** a) 17 100; b) 13 022; c) 3 299; d) 11 202; e) 3 513; f) 81 640; g) 118 080; h) 52 100; i) 38 001; j) 430 910; k) 19 091. **6)** a) 188 552; b) 152 358. **7)** 160 lei. **8)** 33.

13) a) $\begin{array}{r} 240\,-\\ 199\\ \hline 41\end{array}$ b) $\begin{array}{r} 7\,054\,-\\ 616\\ \hline 6\,438\end{array}$ c) $\begin{array}{r} 769\,-\\ 254\\ \hline 515\end{array}$

Pag. 18. 1) 20. **2)** 22 140. **4)** a) 1 740; b) 24 000; c) 2 172; d) 1 944; e) 1 220 940; f) 324 810; g) 2 009 010; h) 209 100; i) 3 686 400; j) 191 520 000; k) 3 348 822. **5)** a) 3 900; b) 78 970; c) 17 500; d) 247 500; e) 247; f) 0; g) 0. **6)** 2 304 piese. **7)** Dacă 2 kg de zahăr tos și 3 litri de ulei de floarea-soarelui costă

82 lei, atunci 4 kg de zahăr tos și 6 litri de ulei (deci o cantitate de marfă de două ori mai mare) costă de două ori mai mult, adică $2 \cdot 82 = 164$ (lei).

9) $\begin{array}{r} 25\,\times\\ 16\\ \hline 150\\ 25\\ \hline 400\end{array}$ sau $\begin{array}{r} 25\,\times\\ 36\\ \hline 150\\ 75\\ \hline 900\end{array}$

Două soluții.

10) $5 \cdot 1$ sau $1 \cdot 5$.

11) $77 = 7 \cdot 11$; $77 = 7 + 11 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{59\ \text{ori}}.$

Numărul 1 a fost luat de 59 ori, pentru că

$$77 - (7 + 11) = 59.$$

$$77 = 7 \cdot 11 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{59\ \text{ori}}.$$

Pag. 20. a) 30; b) 20; c) 20; d) 1 036; e) 220 200; f) 247; g) 0; h) 20; i) 2 644 800; j) 4 910; k) 3 675 024.

Pag. 22—23. 1) 12. **3)** a) 85; b) 720; c) 377; d) 104; e) 2 004; f) 140; g) 1 800; h) 1 020; i) 2 004; j) 2 500; k) 6 050; l) 3 689; m) 1 908; n) 20 070; o) 78 300.

4) Pe distanța de 50 km consumă de două ori mai puțin decît pe distanța de 100 km, adică 4 litri.

Pe distanța de 25 km consumă 2 litri. Pe distanța de 125 km consumă 10 litri.

8) 1 kg de zahăr tos și 2 litri de ulei de floarea-soarelui costă 50 lei;
1 kg de zahăr tos și 4 litri de ulei de floarea-soarelui costă 86 lei.

După cum se vede, și prima oară și a doua oară se cumpără tot 1 kg de zahăr tos.

Cîți litri de ulei se cumpără prima oară și cîți litri se cumpără a doua oară?

Judecați, în continuare, și veți ajunge la concluzia că 9 kg de zahăr tos și 6 litri de ulei de floarea-soarelui costă 234 lei.

9) *Cazul în care sînt 4 jucători.*

Priviți figura 1 R. Să considerăm 4 jucători indicați în figură prin literele A; B; C; D.

A joacă cu B, cu C și cu D. S-au jucat 3 partide;
B joacă cu C și cu D (B a jucat cu A). S-au jucat încă 2 partide;
C joacă cu D (C a jucat cu A și cu B). S-a jucat încă 1 partidă;
D a jucat deja cu toți.

Dacă notăm cu N_p numărul de partide jucate, avem:
$N_p = 3 + 2 + 1 = 6$ (partide).

Altă rezolvare. Priviți din nou cu atenție figura 1 R.

A a luat parte la 3 partide, B a luat parte la 3 partide, C a luat parte la 3 partide, iar D a luat parte tot la 3 partide. Sînt 4 jucători și fiecare a luat parte la cîte 3 partide. Judecînd în continuare ajungem la

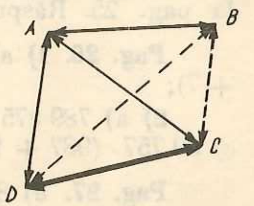


Fig. 1R

concluzia că N_p se mai poate calcula și astfel:

$N_p = (4 \cdot 3) : 2.$

Observație:

Fie $S = 1 + 2 + 3$. Mai putem scrie $S = 3 + 2 + 1$.

Avem:

$S = 1 + 2 + 3$
$S = 3 + 2 + 1$

obținem:

$2S = (1 + 3) + (2 + 2) + (3 + 1)$
$2S = 4 + 4 + 4$
$2S = 4 \cdot 3$
$S = (4 \cdot 3) : 2.$

După cum se vede, dacă S este numărul de partide, adică dacă avem $S = N_p$ am ajuns la concluzia de mai sus și anume: $N_p = (4 \cdot 3) : 2$. Evident că acest mod de calcul pentru suma $3 + 2 + 1$ nu este avantajos.

Dar dacă numărul de termeni este mare ca în exemplul următor:

$1 + 2 + 3 + \ldots + 2\,000$ este evident că aplicarea acestui mod de calcul prezintă mari avantaje.

Răspuns: Dacă sînt 4 jucători, s-au jucat 6 partide;
Dacă sînt 5 jucători, s-au jucat 10 partide;
Dacă sînt 6 jucători, s-au jucat 15 partide;
Dacă sînt 30 jucători, s-au jucat 435 partide.

Pag. 26. 1) a) Cîtul 35, restul 2. b) Cîtul 66, restul 4. c) Cîtul 1 014, restul 34. d) Cîtul 102, restul 90. e) Cîtul 2 430, restul 1. f) Cîtul 6 931, restul 112. **2)** Împărțitorul fiind 5, restul poate fi: 0 sau 1 sau 2 sau 3 sau 4.

Avem $0 = 5 \cdot 0 + 0$

sau

$6 = 5 \cdot 1 + 1$

sau

$12 = 5 \cdot 2 + 2$

sau

$18 = 5 \cdot 3 + 3$

sau

$24 = 5 \cdot 4 + 4.$

Numerele sînt: 6; 12; 18; 24.

3) 35; 36; 37; 38; 39. **4)** Cîtul q și restul 10·r. **5)** Vezi problema rezolvată la pag. 25. **Răspuns:** 665; 9; 73.

Pag. 26. 1) a) $2 \cdot (5 + 7)$; b) $3 \cdot (7 + 11)$; c) $2 \cdot (5 + 7 + 13)$; d) $17 \cdot (1 + 7)$;

2) a) $789\,875 \cdot (9 + 1) = 7\,898\,750$; b) $99\,999 \cdot (998 + 2) = 99\,999\,000$; c) $89\,757 \cdot (987 + 11 + 2) = 89\,757\,000$.

Pag. 27. a) 8; b) 48; c) 800; d) 11; e) 413; f) 11; g) 895.

Pag. 30—31. 1) a) 4; b) 27; c) 125; d) 100; f) 225; h) 16; l) 11 236; m) 1; o) 0; p) 8; r) 9; s) 1; t) 9. **2)** c) 0; e) $508^6 - 508^6 + 508 = 508$; j) 3; l) 0; m) 1; n) 1.

Pag. 34. 1) a) 12; b) 7; c) 80; d) 300; e) 620; f) 9 730; g) 56. **3)** a) 408 870; b) 159 530; c) 1 071 420; d) 879 022 400; e) 3 325 510. **4)** a) 18; b) 130; c) 110 000; d) 600; e) 44; f) 910; g) 70.

Pag. 34—35. *Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază*

I. a) 32; b) 13 491; c) 220 863: **II.** a) 24; b) 1 511; c) 723; d) 235; e) 165 819; f) 1 006; g) 71 600. **III.** a) 75; b) 492; c) 768; d) 57 000; e) 29 400; f) 26 400; g) 417 359; h) 21 730; i) 2 014 020. **IV.** a) 24; b) 1 238; c) 36; d) 240; e) 2 000; f) 857; g) 106; h) 1 005; i) 10 020; j) Cîtul 18 828, restul 23; k) cîtul 20, restul 1. **V.** a) 31; b) 214; c) 6; d) 0; e) 49; f) 10; g) 10; h) 8; i) 1. **VI.** a) 12; b) 10; c) 6; d) 5 908; e) 66 230.

Pag. 37—38. 1) a) 2 800 lei; b) 11 lei. **2)** 1 400 lei. **3)** 112 lei. **4)** 8 și 4. **5)** 5 și 15. **6)** 494 și 247. **7)** 126 și 504. **8)** 5 și 3. **9)** În anul 1965 s-au fabricat 101 000 televizoare, iar în anul 1981 s-au fabricat 498 000 televizoare. **10)** 309; 197. **11)** 360; 240. **12)** 135; 45. **13)** 6 000 și 250. **14)** 5 292 și 42. **15)** 2 000 lei și 1 000 lei. **16)** Ioana are 32 lei, iar Mioara 96 lei.

17) Folosim figura 2 R.

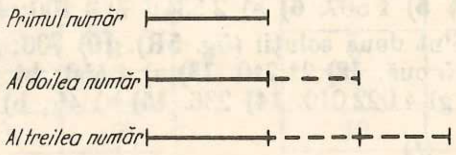


Fig. 2R

Suma numerelor $= 3 \cdot$ numărul al doilea $= 3 \cdot 245 = 735$.

18) Primul număr este 245. Al doilea număr este 247. Al treilea număr este 494. **19)** 40; 12. **20)** Prima persoană primește 240 lei, a doua 260 lei și a treia 300 lei. **21)** Mama are 28 ani și fata 9 ani. **22)** Dacă 27 bile nu sînt negre, atunci 27 bile sînt galbene și roșii. Dacă 39 bile nu sînt roșii, atunci 39 bile sînt galbene și negre.

Numărul bilelor negre este de 2 ori mai mare decît numărul bilelor roșii (fig. 3R).

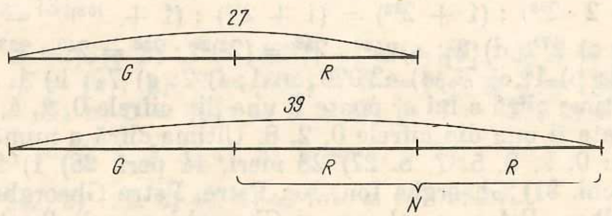


Fig. 3R

Calculăm numărul bilelor roșii:
$39 - 27 = 12$ (bile roșii).
Calculăm numărul bilelor negre:
$2 \cdot 12 = 24$ (bile negre).

Calculăm numărul bilelor galbene:
$27 - 12 = 15$ (bile galbene).

Răspuns: 12 bile roșii, 24 bile negre și 15 bile galbene.

23) Dacă mutăm 41 creioane din prima cutie în a doua, numărul creioanelor din ambele cutii (la un loc) rămîne același, adică 820.

Să presupunem că luăm 41 de creioane din prima cutie și le punem în a doua. Folosim figura 4 R. După această operație avem:

Numărul creioanelor din prima cutie

Numărul creioanelor din cutia a doua

Fig. 4R

Pentru a vedea cît „reprezintă o parte" împărțim pe 820 la $4 (820 : 4 = 205)$.

Deci dacă mutăm 41 creioane din prima cutie în a doua cutie, în a doua cutie vor fi 205 creioane, iar în prima $3 \cdot 205 = 615$ (creioane).

Rezultă că în prima cutie sînt $615 + 41 = 656$ (creioane), iar în a doua cutie $205 - 41 = 164$ (creioane).

Răspuns: În prima cutie sînt 656 creioane, iar în a doua cutie sînt 164 creioane.

Pag. 42—46. 1) a) 3 928; b) 5 005; c) 10 025; d) 400 024; e) 4 000 004; f) 5 020 004. **2)** 22; 23; 25; 32; 33; 35; 52; 53; 55. **3)** 2 461. **4)** a) 2 394; b) 11 126; c) 18 374; **5)** 1 507. **6)** a) 2 534; b) 3 100; c) 70 019.

7) 4. **8)** 46. **9)** Sînt două soluții (fig. 5R). **10)** 706; 576. **11)** În primul coș 4 ouă, în al doilea coș 5 ouă. **12)** 21 210. **13)** a) 1 450; b) 14 000; c) 490; d) 768; e) 220 010; f) 41 820; g) 4 022 010. **14)** 236. **15)** a) 45; b) 820; c) 2 500; d) 204;

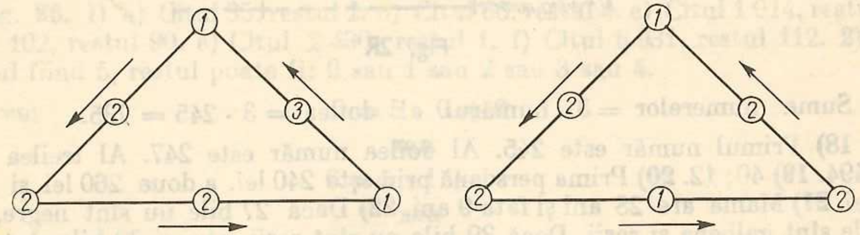


Fig. 5R

e) 407; f) 2 004; g) 6 500. **16)** 3. **17)** 6. **18)** a) 7; b) 13; c) 1 030; d) 1 475; e) 11 714; f) 5; g) 0; h) 111 110. **19)** a) 2^6; b) 5^2; c) 7; d) 2^2; e) 2; f) 0; g) 1; h) 1; i) $(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2^{50}) : (1 + 2^{52}) = (1 + 2^{52}) : (1 + 2^{52}) = 1$; j) 1. **20)** 1. **21)** a) 2^2; b) 2^2; c) 2^{77}; d) 2^2; e) $4^{20} : 2^{38} = (2^2)^{20} : 2^{38} = 2^{40} : 2^{38} = 2^2$. **22)** 10^{20}. **23)** 3^{46}; **24)** a) 84; b) 1; c) 7^2. d) 42 029; e) 1; f) 2; g) 74; h) 1. **25)** a) 6; b) 9; c) 3; d) 2. **26)** Ultima cifră a lui a^2 poate fi una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9. Ultima cifră a lui $2a^2$ poate fi una din cifrele 0, 2, 8. Ultima cifră a numărului $3a^2$ poate fi una din cifrele: 0, 2, 3, 5, 7, 8. **27)** 28 meri, 14 peri. **28)** 1) 194 000 perechi; 2) cu 19 000 perechi. **31)** Gheorghe Ion, Ion Petre, Petre Gheorghe. **32)** Ionel primește creionul galben, Petre pe cel roșu și Gheorghe pe cel albastru. **33)** Elevilor Anton, Marin, Stan le place numai fotbalul. Oina place elevilor Barbu, George, Petre, Tudor. **35)** 29 600. **36)** 157 de numere. **37)** 30 m. **38)** Da. **39)** 13 monede de 5 lei și 37 bancnote de 10 lei. **40)** $11 = 1011_{(2)}$; $23 = 10111_{(2)}$. **41)** $1101_{(2)} = 13$; $101010_{(2)} = 42$.

Pag. 49. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pag. 51. 1) Adevărată; **2)** Adevărată; **3)** Falsă.

Pag. 52. 1) $A \cap B = \{6, 7\}$; **2)** $A \cap C = \emptyset$; **3)** $B \cap C = \{8\}$; **4)** $A \cap \{0\} = \emptyset$; **5)** $\emptyset \cap C = \emptyset$.

Pag. 53. 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$; **2)** $A \cup C = \{1, 2, 3\}$; **3)** $B \cup C = \{1, 3, 4\}$.

Pag. 55—56. 1) {i, p, r, t, u}. **2)** {c, e, r}. **3)** {a, d, e, i, l, p, r}. **5)** (1) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; (2) $B = \{4, 5, 6, 7\}$; (3) $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; (4) $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; (5) $E = \{1, 2, 3\}$. **6)** $b \in A$, $b \in B$; $d \in B$, $d \in D$. **7)** $\emptyset$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{1, 2\}$. **8)** Da. **9)** 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$; 2) $A \cup C = \{1, 2, 3, 7, 8\}$; 3) $B \cup C = \{1, 2, 6, 7, 8\}$; 4) $B \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 6\}$; 5) $C \cup C = \{7, 8\}$; 6) $A \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$; **10)** $X = \{c\}$; $X = \{a, b, c\}$; $X = \{a, c\}$; $X = \{b, c\}$. 4 soluții. **11)** 1) $A \cap B = \{1, 2\}$; 2) $B \cap C = \{7\}$; 3) $A \cap C = \emptyset$; 4) $C \cap \{0\} = \emptyset$; 5) $B \cap B = \{1, 2, 7\}$; 6) $A \cap \emptyset = \emptyset$. **12)** $X = \{a, b, c\}$; $Y = \{a, b, c, d\}$. **13)** $A = \{a, b, d\}$. **14)** 1) $A - B = \emptyset$; 2) $B - A = \{3\}$; 3) $B - C = \{1, 2, 3\}$; 4) $A - C = \{1, 2\}$; 5) $A - \{0\} = \{1, 2\}$; 6) $B - \emptyset = \{1, 2, 3\}$. **15)** 1) $(A \cup B) \cap C = \emptyset$; 2) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2\}$; 3) $A - (B \cap C) = \{1, 2\}$; 4) $C - (A \cup B) = \{4, 6\}$. **16)** $X = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$; $Y = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$. **17)** a) $A \cap B$ are 5 elemente; b) $A \cup B$ are 9 elemente. **18)** $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; $Y = \{a, e, f, g, h\}$. **19)** $X = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$; $Y = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Pag. 58. 1) 1) $5a$; 2) $b + 2$; 3) $a + c$; 4) $3 \cdot (a + b)$; 5) ab; 6) $a(b + c)$.

2) a)

a	$2a$	$3a$	$a + 1$
2	4	6	3
3	6	9	4
1	2	3	2
0	0	0	1

c)

$a + b$	$2(a + b)$	$3(a + b)$
5	10	15
7	14	21
10	20	30

3) a) $6x$; b) $3x$; c) $2x$; d) $3x$; e) 0; f) 0; g) $6y$; h) $4y$; i) $6x + 1$; j) $5x + 1$; k) $5y + 1$; l) 2; m) $4x + 2$; n) $2x$; o) $4x + 6$; p) $2y$; r) $3x + 2$; s) $3x + 2y + 1$.

Pag. 59—60. 1) a) *A*; b) *F*; c) *F*; d) *A*. **2)** a) *A*; b) *F*; c) *F*; d) *A*; e) *F*. **3)** a) *A*; b) *F*; c) *F*; d) *A*; e) *A*; f) *A*; g) *F*; h) *F*; i) *A*; j) *A*; k) *A*; l) *A*; m) *F*; n) *F*; o) *A*; p) *A*; r) *A*; s) *A*; t) *A*; u) *F*. **4)** a) *A*; b) *F*; c) *F*; d) *A*; e) *F*; f) *A*; g) *F*; h) *F*; i) *F*.

Pag. 65. $S = \{3\}$.

Pag. 69. a) $S = \{3\}$; b) $S = \{223\}$; c) $S = \{0\}$; d) $S = \{6\}$; e) $S = \{4\}$; f) $S = \{774\}$; g) $S = \{2\}$; h) $S = \{66\}$; i) $S = \{4\}$; j) $S = \{150\}$; k) $S = \{0\}$; l) $S = \emptyset$; m) $S = \emptyset$; n) $S = \{5\}$; o) $S = \emptyset$; p) $S = \{3\}$; r) $S = \{3\}$.

Pag. 71. 1) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **2)** $S = \{0, 1, 2\}$.

Pag. 74. 1) 242. **2)** 122. **3)** 40. **4)** 49 fete și 147 băieți.

Pag. 74—76. 1) a) $\{1; 2; 3; 5\}$; b) $\{1; 2; 3\}$; c) $\{1, 2\}$; d) $\emptyset$; e) $\emptyset$; f) $\{2\}$; g) $\emptyset$; h) $\emptyset$; i) $\{2\}$. **2)** a) $5a$; b) $7a$; c) $4a$; d) 0; e) $8x$; f) $2x$; g) $5x + 1$; h) $4x + 2$; i) $7x + 1$. **3)** $ab + ac = 12$. **4)** $a = 10$. **5)** $b + c = 5$. **6)** 1) $a + b + c = 38$; 2) $2a + b + c = 40$; 3) $3a + 3b + 3c = 114$; 4) $2a + 3b + 3c = 112$; 5) $a + 2(b + c) = 74$; 6) $ab + ac = 72$; 7) $(b + c) : a = 18$. **7)** 8; 2; 0; 0. **8)** $10a(b + c) = 2 460$. **9)** a) *A*; b) *A*; c) *A*; d) *A*; e) *F*; f) *A*; g) *F*; h) *A*.

10) a) $S = \{6\}$; b) $S = \{398\}$; c) $S = \{8\}$; d) $S = \{368\}$; e) $S = \{4\}$; f) $S = \{115\}$; g) $S = \{2\}$; h) $S = \{3\}$; i) $S = \{0\}$; j) $S = \emptyset$; k) $S = \emptyset$; **11)** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{13\}$; c) $S = \{3\}$; d) $S = \{18\}$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \{12\}$; g) $S = \{15\}$; h) $S = \{2\}$; i) $S = \{62\}$; j) $S = \{17\}$; k) $S = \{12\}$; l) $S = \emptyset$; m) $S = \{82\}$; n) $S = \{1\,728\}$; o) $S = \{25\}$; p) $S = \{74\}$; r) $S = \{24\}$. **12)** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{2\}$. **13)** a) $S = \{0, 1, 2\}$; b) $S = \{1, 2, 3\}$; c) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **14)** a) A; b) F. **15)** 879 elemente. **16)** 62 elemente. **17)** 105; 315. **18)** 95; 142. **19)** 298 pagini. **20)** 80; 56. **21)** 54 kg. **22)** 2. **23)** 24; 25; 26. **24)** Problema are 3 soluții: {9; 10; 11} sau {6; 7; 8; 9} sau {4; 5; 6; 7; 8}. **25)** Ionel are 48 lei, iar Petre 24 lei. **26)** $2x + 4 = 734$. $S = \{365\}$. **27)** 21 zile; 18 zile. **28)** Peste 22 ani. **29)** Automobilul a parcurs distanța de 300 km cu viteza de 75 km/h. **30)** Citind cu atenție fraza: „Un băiat afirmă că are tot atîtea surori cît și frați", tragem concluzia că numărul băieților este cu 1 mai mare decît numărul fetelor.

Notăm cu x numărul fetelor. Numărul băieților este $x + 1$.

Citind în continuare problema putem scrie ecuația

$$2(x - 1) = x + 1.$$

Obținem $x = 3$.

Răspuns: 4 băieți și 3 fete.

Pag. 77. *Lucrări pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază*

Lucrarea I

I) a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) A; g) F; h) F. **II)** a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$; c) $B \cap C = \{3, 4\}$; d) $A \cap B = \emptyset$; e) $C - B = \{2\}$; f) $A - D = \{1, 2\}$; g) $G - D = \{2\}$.

Lucrarea II

1) a) $S = \{2\}$; b) $S = \{5\}$; c) $S = \{6\}$; d) $S = \{1\}$; e) $S = \{2\}$. **2)** a) $S = \{73\}$; b) $S = \{826\}$; c) $S = \{92\}$; d) $S = \{406\}$. **3)** 64. **4)** 14. **5)** a) $S = \{0, 1, 2\}$; b) $S = \{0, 1, 2\}$.

Exerciții pentru repetarea unor cunoștințe din capitolele anterioare

a) 271; b) 12 857; c) 435; d) 68 010; e) 480; f) 24 000; g) 950; h) 6 942; i) 83 430; j) 297 600; k) 2 014 020; l) 26; m) 230; n) 1 875; o) 140; p) 1 800; r) 2 050; s) 2 004; t) 856.

Pag. 80. 1) a) Adevărată; b) Falsă; c) Adevărată; d) Adevărată; e) Adevărată; f) Falsă; g) Adevărată; h) Falsă. **2)** a) F; b) F.

Pag. 89. 1) 72; 80; 900; 1 746; 112 834; 8. **2)** Adevărată; Adevărată; Falsă; Adevărată. **3)** 1 000. **4)** 9 998.

Pag. 90. 1) 120; 45; 245; 1 400. **2)** 995. **3)** 100.

Pag. 92. 1) Adevărată; Adevărată; Adevărată. **2)** 36; 1 548; 2 400; 19 324. **3)** 996.

Pag. 95. 1) 231; 4 269; 201 303. **2)** Adevărată; Falsă; Adevărată; Falsă. **3)** 123; 153; 183.

Pag. 96. 1) 450; 49 527; 9 909 918. **2)** Adevărată; Falsă; Adevărată; Falsă. **3)** 9 999. **4)** 1 008.

Pag. 97. D_{14} este mulțimea divizorilor. D'_{14} este mulțimea divizorilor proprii.

D''_{14} este mulțimea divizorilor improprii. $D_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$.

$D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,

$D'_{14} = \{2, 7\}$, $D'_{20} = \{2, 4, 5, 10\}$; $D'_{30} = \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$,

$D''_{14} = \{1, 14\}$, $D''_{20} = \{1, 20\}$, $D''_{30} = \{1, 30\}$.

Pag. 98. 1) $M_4 = \{0, 4, 8, 16, ..., 4n, ...\}$. **2)** $\{0, 5, 10, 15, ..., 5n, ...\}$.

Pag. 99. 1) 53; 59. **2)** a) Falsă; b) Falsă.

Pag. 100. 131 este prim; 173 este prim; 223 este prim.

Pag. 103. 2) a) $2^2 \cdot 5 \cdot 29$; b) $2 \cdot 3 \cdot 37$; c) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$; d) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$; e) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23^2$; f) $2^2 \cdot 5$; g) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$; h) $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$; i) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^5$; j) $2 \cdot 5 \cdot 11^2$; k) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$; l) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23$.

Pag. 103—104. 1) a) $2^4 \cdot 3^3$; b) 0; c) $2^2 \cdot 3$. **2)** a) $2^2 \cdot 3^2$; b) $3 \cdot 5$; c) 2; d) 8; e) $3 \cdot 7$; f) $2 \cdot 3^2$. **3)** a) $2^8 \cdot 3^7 \cdot 7^2 \cdot 11$; b) $2 \cdot 3^4$; e) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 11$.

Pag. 106. 2) a) 6; b) 8; c) 12; d) 12; e) 36.

Pag. 107. 1) 7 422; 7 428. **2)** 4 590; 4 572; 4 554; 4 536; 4 518.

Pag. 108. a) [2, 5] = 10; b) [2, 10] = 10; c) [2, 4, 5] = 20; d) [20, 40, 80] = 80.

Pag. 110. 2) a) 240; b) 9 000; c) 2 160; d) 52 920; e) 25 668; f) 59 400; g) 453 600.

Pag. 112—116. 1) 24, 26, 28, 30, 32, 34.

2)

Numere divizibile cu 2	Numere divizibile cu 5	Numere divizibile cu 4	Numere divizibile cu 3	Numere divizibile cu 9
22	420	32	3 606	693
32	735	736	420	14 589
736	4 700	420	735	
3 606	2 350	4 700	693	
420			14 589	
4 700			1 002	
2 350				
4 258				
1 002				

4) 30; 32; 34; 36; 38. **5)** 430; 432; 434; 436; 438. **6)** 530; 535. **7)** 535. **8)** 6 015; 6 045; 6 075. **9)** 6 015; 6 045. **10)** 300; 500; 350; 530; 330; 550. **11)** Falsă. **12)** 405; 415; 425; 435; 445; 455; 465; 475; 485; 495. **13)** 0; 5; 10; 15. **14)** 0; 15; 30. **15)** 2; 5; 8. **16)** 0; 3; 6; 9; 12. **17)** 0; 9; 18; 27; 36; 45; 54. **18)** 4 527. **19)** 7 416; 7 436; 7 456; 7 476; 7 496. **20)** Da. **21)** Da.

22) a) Fie D_{28} mulțimea divizorilor lui 28 și D'_{28} mulțimea divizorilor proprii ai lui 28. $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$; $D'_{28} = \{2, 4, 7, 14\}$. Analog, $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; $D'_{30} = \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$. **23)** $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. **24)** $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. **25)** $M = \{2, 3, 4, 6\}$; $P = \{1, 102\}$. **26)** 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35. **28)** 2, 9; 4, 9. **29)** $170 = 2 \cdot 5 \cdot 17$; $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. **30)** $3\,240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$; $22\,100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 17$; $306\,000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 17$. **31)** a) 1;

b) 4. **32)** a) 12; b) 3; c) 12; d) 10; e) 600. **33)** a) 12; b) 12; c) 20; d) 60; e) 800; f) 400; g) 60; h) 20; i) 1 600. **34)** a) 150; 4 500; b) 12; 240; c) 20; 18 000 d) 14; 25 200; e) 1 400; 7 000; f) 2; 4 200; g) 450; 5 400. **35)** În A, 6 cm, 12 cm, 18 cm ... . **36)** A. **37)** Dacă notăm cu n numărul pe care trebuie să-l aflăm, $n+1$ este cel mai mic număr natural care se divide și cu 5 și cu 6 și cu 8 și cu 9.

Deci $n+1$ este c.m.m.m.c. al numerelor 5; 6; 8; 9. Avem deci $n+1=360$. Rezultă $n=359$.

Verificare

Dacă împărțim pe 359 la 5 obținem cîtul 71 și restul 4.
Dacă împărțim pe 359 la 6 obținem cîtul 59 și restul 5.
Dacă împărțim pe 359 la 8 obținem cîtul 44 și restul 7.
Dacă împărțim pe 359 la 9 obținem cîtul 39 și restul 8.

39) 200; 288 000. **41)** 12; 14. **42)** 120 elevi. **43)** {1; 102} sau {2; 51} sau {3; 34} sau {6; 17}. Patru soluții. **44)** 990; 135. **47)** 35. **48)** Putem scrie $n=180\cdot c+72$. 72 se divide cu 36. 180 se divide cu 36. Rezultă că și n se divide cu 36. **49)** 17 elevi. **50)** 28 m. **51)** 40. **52)** 9 900; 7 902; 5 904; 3 906; 1 908. Se adaugă condiția 6); se obțin soluțiile: 9 900, 5 904, 1 908 . **53)** Impar. **54)** a) 1 097; b) 111. **55)** Fie n numărul elevilor. Fiecare elev primește $n-1$ fotografii. S-au schimbat deci $n(n-1)$ fotografii. Dar $n(n-1)$ este produsul a două numere naturale consecutive care este număr par. **56)** 24 733, 2. **57)** a) {238}; b) {225}; c) {161}; d) {12}. **58)** 1) Nu. 2) Da. **59)** 27; 108. **60)** 5 copii; 110 lei.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

1) 1 350; 1 732; 754; 1 236; 7 978; 4 200. **2)** 1 236; 4 599 081; 9 991 863. **3)** 112; 2 136; 7 500; 89 372. **4)** 72 245; 897 980; 47 243 600. **5)** 1 980; 5 004; 2 430. **6)** 1 981; 3 430. **7)** 23; 29; 31; 37. **8)** $18=2\cdot 3^2$; $1\,260=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$; $324\,000=2^5\cdot 3^4\cdot 5^3$. **9)** c.m.m.m.c. al numerelor 150, 1 800, 1 260 este 12 600; cel mai mare divizor comun al numerelor 150, 1 800, 1 260 este 30.

Pag. 119. 1) $\frac{11}{11}; \frac{13}{31}; \frac{17}{71}$. 4) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$. 6) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right\}$.

Pag. 122. a) Fracțiile $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{6}$ sînt echivalente, deoarece $2\cdot 6=3\cdot 4$. b) Fracțiile $\frac{1}{7}$ și $\frac{2}{14}$ sînt echivalente, deoarece $1\cdot 14=2\cdot 7$; c) Fracțiile $\frac{1}{3}$ și $\frac{5}{15}$ sînt echivalente, deoarece $1\cdot 15=3\cdot 5$.

Pag. 123. a) $^{2)}\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$; $^{2)}\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$; $^{2)}\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$; $^{2)}\frac{1}{10}=\frac{2}{20}$; $^{2)}\frac{2}{33}=\frac{4}{66}$; $^{2)}\frac{41}{770}=\frac{82}{1\,540}$; b) $^{4)}\frac{1}{5}=\frac{4}{20}$; $^{4)}\frac{2}{7}=\frac{8}{28}$; $^{4)}\frac{20}{33}=\frac{80}{132}$, $^{4)}\frac{11}{430}=\frac{44}{1\,720}$.

Pag. 125. 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{9}{14}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{18}{1}$.

2) a) $\frac{20+5}{5}=\frac{5(4+1)^{(5}}{5}=\frac{4+1}{1}=\frac{5}{1}$; b) $\frac{15+7}{14+30}=\frac{15+7^{\;(15+7}}{2(7+15)}=\frac{1}{2}$;

c) $\frac{32-24}{40-16}=\frac{8(4-3)^{(8}}{8(5-2)}=\frac{1}{3}$.

Pag. 130. a) $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{6}$; b) $\frac{8}{20}$; $\frac{15}{20}$; c) $\frac{3}{12}$; $\frac{10}{12}$; d) $\frac{5}{30}$; $\frac{20}{30}$; $\frac{21}{30}$; e) $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{9}{12}$; f) $\frac{15}{30}$; $\frac{20}{30}$; $\frac{24}{30}$; g) $\frac{10}{15}$; $\frac{9}{15}$; h) $\frac{5}{10}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{3}{10}$; i) $\frac{12}{24}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{3}{24}$; j) $\frac{3}{33}$; $\frac{5}{33}$; k) $\frac{9}{108}$; $\frac{15}{108}$; $\frac{14}{108}$; l) $\frac{24}{360}$; $\frac{10}{360}$; $\frac{5}{360}$; m) $\frac{18}{450}$; $\frac{6}{450}$; $\frac{25}{450}$; n) $\frac{21}{1\,260}$; $\frac{98}{1\,260}$; $\frac{20}{1\,260}$; o) $\frac{108}{3\,528}$; $\frac{105}{3\,528}$; $\frac{8}{3\,528}$.

Pag. 139. a) 1; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{3}{7}$; e) $\frac{1}{4}$; f) $\frac{3}{8}$; g) $\frac{3}{16}$; h) $\frac{1}{9}$; i) $\frac{1}{5}$; j) $\frac{2}{131}$.

Pag. 141. a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{7}{6}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $\frac{9}{10}$; e) $\frac{11}{10}$; f) $\frac{5}{12}$; g) $\frac{5}{6}$; h) $\frac{2}{9}$; i) $\frac{7}{24}$; j) $\frac{17}{720}$; k) $\frac{83}{2\,160}$; l) $\frac{9}{140}$; m) $\frac{11}{168}$.

Pag. 144. $2\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$; $10\frac{1}{2}$; $100\frac{1}{5}$; $105\frac{1}{102}$; $19\,000\frac{1}{7}$.

Pag. 145. $\frac{5}{2}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{41}{4}$; $\frac{10\,303}{102}$.

Pag. 149. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $1\frac{1}{3}$; e) $2\frac{1}{2}$; f) 4; g) 2; h) $\frac{2}{15}$.

Pag. 151. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{15}$; c) $\frac{3}{10}$; d) $2\frac{3}{4}$; e) $1\frac{1}{2}$; f) $1\frac{9}{20}$; g) $1\frac{11}{12}$; h) $\frac{13}{36}$; i) $\frac{37}{2^3\cdot 3^2\cdot 7}$; j) $\frac{377}{420}$; k) $\frac{1}{30}$; l) $\frac{13}{144}$; m) $\frac{169}{900}$; n) $6\frac{1}{2}$; o) $\frac{1}{7}$.

Pag. 152. a) $1\frac{1}{5}$; b) $\frac{5}{7}$; c) 2; d) 3; e) $\frac{4}{3}$; f) 1.

Pag. 156. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{20}$; c) 1; d) 3; e) 4; f) $\frac{1}{4}$; g) $\frac{1}{10}$; h) $\frac{1}{9}$; i) $6\frac{2}{5}$; j) $\frac{25}{48}$; k) $\frac{1}{18}$; l) $\frac{4}{5}$; m) $\frac{1}{2}$; n) 6.

Pag. 159. a) $\frac{7}{10}$; b) $\frac{5}{12}$; c) 3.

Pag. 160. **1)** a) 2; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{5}{4}$. **2)** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{1}{124}$.

Pag. 162. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{9}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $1\frac{2}{5}$; e) $3\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{5}$; g) $\frac{1}{12}$; h) $\frac{10}{11}$.

Pag. 165. a) $\frac{4}{25}$; b) $\frac{1}{27}$; c) $\frac{1}{100}$; d) $\frac{1}{1\,000}$; e) 9; f) $\frac{1}{32}$; g) 0; h) $\frac{1}{64}$; i) 0; j) $\frac{1}{216}$; k) $\frac{2}{9}$; l) 0.

Pag. 168—169. 1) a) $\frac{3}{4}$; b) 1; c) 1; d) 1; e) 20; f) 20; g) $\frac{22}{9\,000}$; h) 20. **2)** a) $1\frac{4}{5}$; b) $1\frac{3}{5}$; c) $99\frac{3}{7}$. **3)** a) $\frac{1}{10}$; b) $15\frac{1}{2}$; c) 3; d) $15\frac{1}{2}$; e) 22; f) 6.

Pag. 171 — 172. 1) a) 5; b) 4; c) 36; d) 2 216. **2)** 8. **3)** 14. **4)** 36. **5)** 14°. **6)** 8 lei. **7)** a) $\frac{109}{240}$. **8)** $\frac{3}{2}$. **9)** Fie a primul număr. Al doilea număr este $a + 5$, iar al treilea număr este $a + 10$.

a) Se vede că avem:

$$\frac{a + a + 10}{2} = \frac{2a + 10}{2} = \frac{2(a + 5)}{2} = a + 5.\ \text{Răspuns: da;}$$

b) Se vede că avem:

$$\frac{a + a + 5 + a + 10}{3} = \frac{3a + 15}{3} = \frac{3(a + 5)}{3} = a + 5.\ \text{Răspuns: da.}$$

10) Al doilea număr este 136. Primul număr este 132, iar al treilea este 140. **11)** $\frac{3}{2}$ este media aritmetică a lui a și c și deci avem $(a + c) : 2 = \frac{3}{2}$. Rezultă $a + c = 3$. Știind că a și c sînt numere naturale diferite de zero, avem $a = 1$ și $c = 2$.

Pag. 175. a) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$; b) $S = \left\{1\frac{1}{4}\right\}$; c) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; d) $S = \{8\}$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \left\{\frac{1}{8}\right\}$; g) $S = \{10\}$.

Pag. 177. a) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; c) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; d) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Pag. 178. 1) $\frac{2}{3}$. **2)** 108; 18. **3)** $\frac{3}{5}$. **4)** $\frac{1}{4}$.

Pag. 180. 1) 15 kg. **2)** 16 m. **3)** 140 cm. **4)** 15 kg. **5)** 16.

Pag. 181. 1) 1 m. **2)** 10 h. **3)** $\frac{1}{3}$. **4)** $\frac{4}{7}$. **5)** $\frac{1}{25}$. **6)** $\frac{1}{5}$.

Pag. 182. 1) $\frac{80}{3}$. **2)** 100. **3)** $\frac{2\,000}{7}$. **4)** $\frac{147}{5}$. **5)** 15. **6)** $\frac{3}{4}$. **7)** $1\frac{9}{16}$. **8)** $12\frac{1}{4}$. **9)** $14\frac{2}{5}$. **10)** $\frac{5}{6}$. **11)** $\frac{4}{5}$.

Pag. 184. 1) 10; 6. **2)** 100. **3)** 18 băieți și 36 fete.

Pag. 184—186. 1) a) 6; b) 8; c) 4; d) $6\frac{2}{9}$; e) 18; f) 32; g) 35; h) 5; i) $10\frac{1}{3}$. **2)** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{9}{40}$; c) $1\frac{1}{4}$; d) 2; e) $\frac{1}{4}$; f) $5\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{32}$; h) 2; i) 1; j) 5; k) 4. **3)** a) $\frac{2}{3}$ b) 4; c) $\frac{2}{5}$; d) 3; e) 5; f) $1\frac{1}{2}$. **4)** a) 9; b) 9; c) 16; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{1}{7}$. **5)** a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{1}{25}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $2\frac{1}{2}$; e) 1; f) 2; g) 1; h) 46. **6)** a) 3; b) 8; c) 6; d) 2; e) 12 kg; f) 630 kg; g) 1 380 m; h) 408 m; i) 1 476 kg; j) 2 079 kg. **7)** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{12}$; d) $\frac{3}{8}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{25}$; g) $\frac{3}{10}$; h) $3\frac{23}{35}$. **8)** 24 km. **9)** a) 60 piese; b) 80 piese. **10)** 144 ha. **11)** 8 t. **12)** 300 ha. **13)** 30 km. **14)** 100 t. **15)** 400 piese în total; 150 piese a doua zi. **16)** 140.

Pag. 190. a) 3,6; b) 17,66; c) 0,222; d) 6,2; e) 242,4; f) 247,45; g) 426,4554; h) 1 638,439.

Pag. 191. a) 3,1; b) 3 801,1; c) 1,16; d) 199,36; e) 0,86; f) 271,242; g) 2 100,02; h) 3 700,998; i) 0,756.

Pag. 192. a) 3,6; b) 826,2; c) 2 054,1; d) 20 541; e) 201,402; f) 409 050.

Pag. 194. a) 12,05; b) 0,575; c) 0,042; d) 0,864; e) 2; f) 1,2; g) 180; h) 20 500; i) 20,04; j) 7 980.

Pag. 199. 1) 4 dm; 1 210,03 dm; 30,73 dm. **2)** 1 000 m; 100 m; 3 500 m; 0,02 m; 0,2 m; 10,005 m; 0,003 m; 2 507 m. **3)** 0,236 km; 10,570 km; 0,025 km; 1,007 km. **4)** 832,696 m; 3,0562 m; 0,0005 m. **5)** 3,20 m; 40 m; 0,32 m. **6)** 5 000 m; 30 000 m; 400 m; 700 m; 20 m. **7)** 13,22 m; 1,365 m; 12,35 m.

Pag. 199—201. 1) 168 stîlpi; 9 156 lei. **2)** 22 950 lei. **4)** 111 km; 386 km; 535 km; 275 km; 424 km; 149 km. **5)** Drumul este *AFGD* de 140 km. **6)** *DCBAEAD* sau *DAEABCD*. **7)** 18 432 lei. **8)** De 390,6 ori aproximativ. **9)** 367,5 m. **10)** f.

Pag. 205—206. 2) 0,25 g; 1 500 g; 0,034 g. **3)** 1 860 kg; 25,007 kg. **4)** 2 000 g; 1 045 g; 575 g; 1 001 g. **5)** 1,826 t; 5,830 t; 0,5 t. **6)** 56 g; 8,3 g; 0,085 g. **7)** 4,5 kg. **8)** 1 640 g. **10)** La prima măsurare se pun pe cele două talere cîte 4,5 kg. La a doua măsurare se pun pe cele două talere cîte 2,25 kg. La a treia măsurare, pe un taler se pun masele marcate de 200 g și 50 g, iar pe al doilea taler se pun 250 g scoase din 2,25 kg. **12)** 763 lei; 389,20 lei; 408,80 lei. **13)** 23 782,5 lei. **14)** 198 000 lei. **15)** 840 kg. **16)** 10 000 cutii. **17)** 1 071,25 kg. **18)** 7 089 kg. **19)** 11 transporturi.

Pag. 208. 1) 267 240 s; 18 872 s. **2)** 648 min 17 s; 4 332 min 3 s; 7 320 min 37 s; 425 min 25 s. **3)** 1 h 15 min 20 s; 1 h 42 min. **4)** 2 191 zile. **5)** 244 zile.

Pag. 211—213. **2)** 1 400 820 dm²; 140,0082 dam²; 1,400082 hm². **3)** 8 100,4 m². **4)** 85 ha; 0,4520 ha; 0,0876 ha. **5)** 2 650 m²; 326,56 m²; 1,5625 m²; 15,356 217 m². **6)** a) 16 cm²; b) 12 cm²; c) 8 cm²; d) 8 cm². **7)** 12 000 m². **8)** 108 cm². **9)** 20 m.

10) Priviţi figura 6 R.
Am notat cu l lăţimea dreptunghiului şi cu L lungimea sa. Avem $L = 5\,l$.
Considerăm cele 5 pătrate în care a fost împărţit dreptunghiul.
Aria unui pătrat este egală cu $45 : 5 = 9$ (m²)

$l^2 = 9$ m². Deci $l = 3$ m.

$L = 5l = 5 \cdot 3 = 15$ (m).

Perimetrul dreptunghiului $=$ $=2(L+l) = 2 \cdot (15+3) = 36$ (m).

Problema se mai poate rezolva şi altfel.

Răspuns: 36 m.

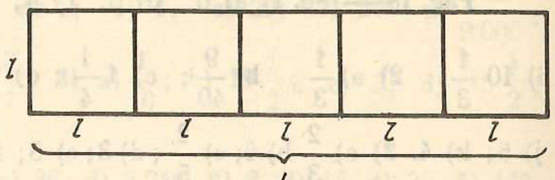


Fig. 6R

11) 911,25 kg. **12)** 36 kg. **13)** 1) 17 m²; 32 m²; 45 m²; 56 m²; 65 m²; 72 m²; 77 m²; 80 m²; 81 m². Ariile cresc pînă ce dimensiunile devin egale. **14)** 787 500 kg.

15) Priviţi figura 7 R. Dreptunghiul este haşurat.
Aria figurii nehaşurate este egală cu 1 215 m².
Din figura nehaşurată puteţi obţine o figură de forma unui dreptunghi cu lăţimea de 27 m, după cum se vede în figura 8R.

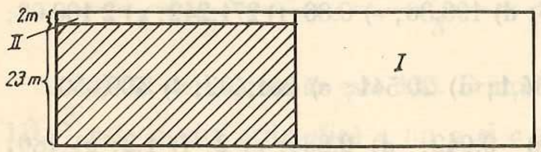


Fig. 7R

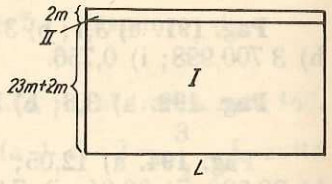


Fig. 8R

Aria acestui dreptunghi este egală cu 1 215 m².
Avem $L = 1\,215 : 27 = 45$ (m).
Problema se mai poate rezolva şi altfel.
Răspuns: $L = 45$ m.

16) 43,70 ha; 68,16 ha; 35,04 ha; 94,60 ha. **18)** a) 128 t; b) 128 t; c) 42,66 t. **19)** 1 762,5 m² (600 m²; 340 m²; 525 m²; 297,5 m²). **20)** 504 t.

Pag. 216—217. **2)** 12 m³; 4,256416 m³. **3)** 12 000 dm³; 4 500 dm³. **4)** 0,826 m³; 0,172 m³. **5)** a) şi b) 100 m²; 148 m²; 120 m³. **7)** 29,376 t. **8)** 15 m². **9)** 5 ore. **10)** 32 zile. **11)** 5 671,875 g. **12)** 360 cm. **13)** 5,625 m³. **14)** 78,75 l. **15)** 12 transporturi.

Pag. 220. a) 0,5; 0,25; 0,2; 0,4; 0,8; 0,75; 0,375; 0,05; 0,3125; 0,04; 0,056. b) 0,07; 0,017; 1,7; 1,0009; 7,05; 1,0175. c) 0,(3); 0,1(6); 0,(6); 1,1(46).

Pag. 223. **1)** a) $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{50}$; $\frac{29}{20}$; $\frac{1\,501}{500}$; $\frac{40\,001}{10\,000}$.

b) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{23}{99}$; $\frac{145}{999}$; $\frac{8}{33}$; $\frac{41}{330}$; $\frac{11}{45}$; $\frac{5\,561}{4\,950}$; $\frac{37}{300}$. **2)** a) 5; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{323}{270}$.
3) a) $\frac{7}{87}$; b) $\frac{53}{34}$; c) 4; d) 100; e) 2; f) 175; g) 184; h) 0,2; i) $\frac{1}{6}$; j) 10; k) 4,8; l) $\frac{50}{9}$; m) 0,5; n) $\frac{2\,599}{24}$.

Pag. 224. **1)** 24,5. **2)** 22,5. **3)** 1,6 km.

Pag. 225—243. **5)** a) $A \cup B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$; b) $A \cup C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}\right\}$; c) $B \cup C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}\right\}$; d) $A \cap C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$; e) $A \cap B = \emptyset$; f) $A - B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$.
7) $\frac{12}{100}$. **8)** $\frac{75}{100}$. **9)** $\frac{4}{20}$. **10)** $\frac{10}{40}$; $\frac{50}{70}$; $\frac{70}{240}$; $\frac{70}{100}$; $\frac{10}{1\,020}$; $\frac{3\,070}{10\,010}$ **11)** $\frac{100}{24\,000}$; $\frac{100}{11\,100}$; $\frac{2\,300}{32\,400}$. **12)** $\frac{2}{3}$; $\frac{6}{25}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{506}{3\,809}$. **13)** a) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{27}$; $\frac{1}{250}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{102}$. **14)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{300}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{9}{38}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{55}$. **15)** a) $\frac{6}{10}$; $\frac{1}{10}$; b) $\frac{2}{6}$; $\frac{5}{6}$; c) $\frac{10}{12}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{6}{12}$; d) $\frac{32}{40}$; $\frac{20}{40}$; $\frac{25}{40}$; e) $\frac{8}{140}$; $\frac{2}{140}$; $\frac{1}{140}$; f) $\frac{15}{480}$; $\frac{100}{480}$; $\frac{84}{480}$; $\frac{10}{480}$; g) $\frac{18}{8\,100}$; $\frac{25}{8\,100}$; $\frac{250}{8\,100}$; i) $\frac{210}{2\,240}$; $\frac{40}{2\,240}$; $\frac{98}{2\,240}$; $\frac{7}{2\,240}$.
16) a) $\frac{50}{16\,200}$; $\frac{315}{16\,200}$; $\frac{18}{16\,200}$; b) $\frac{5\,400}{181\,440}$; $\frac{7\,920}{181\,440}$; $\frac{700}{181\,440}$; $\frac{1\,053}{181\,440}$; c) $\frac{1\,200}{144\,000}$; $\frac{40}{144\,000}$; $\frac{3}{144\,000}$. **17)** a) $1\frac{1}{5}$; b) 3; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{15}{118}$; e) $\frac{1}{120}$. **18)** a) $\frac{5}{6}$; b) $1\frac{9}{20}$; c) 2; d) $1\frac{11}{18}$; e) $\frac{7}{16}$; f) $\frac{13}{120}$; g) $\frac{13}{72}$; h) $\frac{109}{288}$; i) $\frac{73}{750}$; j) $\frac{79}{1\,080}$; k) $\frac{233}{4\,200}$; l) $\frac{13}{200}$; m) $\frac{6\,179}{20\,160}$; n) $\frac{41}{720}$; o) $\frac{47}{1\,944}$; p) $\frac{59}{9\,600}$; q) $\frac{29}{5\,250}$. **19)** 1.
20) $1\frac{1}{10}$. **21)** $1\frac{1}{12}$. **22)** $2\frac{3}{5}$. **23)** $6\frac{5}{12}$. **24)** $2\frac{1}{4}$ kg. **25)** a) $2\frac{3}{4}$ m; b) $3\frac{1}{4}$ m.
26) $\frac{1}{2}$ din lucrare. **27)** $\frac{1}{4}$ din lucrare. **28)** $3\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$; $3\frac{2}{5}$; $10\frac{1}{4}$; $200\frac{1}{3}$; 15; $204\frac{3}{4}$; $200\frac{3}{100}$; $500\frac{1}{20}$. **29)** $1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{501}$; $16\frac{7}{8}$; $50\frac{1}{2}$;

$1\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $5\frac{5}{41}$; $2\frac{41}{304}$; $17\frac{11}{17}$; 15; $2\frac{1}{9}$; $3\frac{16}{157}$; $97\frac{2}{5}$. **30)** a) $\frac{5}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{17}{5}$; $\frac{31}{3}$; $\frac{89}{24}$; $\frac{2\,401}{24}$; $\frac{14\,401}{12}$; $\frac{10\,513}{103}$; $\frac{2\,003\,002}{2\,001}$; $\frac{46\,217}{110}$; b) $\frac{11}{5}$; $\frac{41}{10}$; $\frac{501}{10}$; $\frac{141}{7}$; c) $\frac{3\,001}{125}$; $\frac{626}{25}$; $\frac{3\,431}{245}$; $\frac{21\,631}{206}$. **31)** a) A; b) A; c) F; d) A; e) A; f) A; g) A; h) A; i) F; j) A. **32)** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{8}$; e) $1\frac{1}{2}$; f) $2\frac{2}{3}$; g) $20\,000\frac{1}{2}$. **33)** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{3}{10}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{3}{10}$; e) $\frac{7}{12}$; f) $\frac{13}{20}$. **34)** a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{7}{72}$; c) $\frac{11}{144}$; d) $\frac{5}{36}$; e) $\frac{31}{1\,620}$; **35)** a) $\frac{1}{12}$; b) $3\frac{1}{6}$; c) $\frac{17}{24}$; d) $2\frac{9}{10}$; e) $2\frac{1}{6}$; f) $3\frac{13}{3\,600}$; g) $3\frac{1}{2}$; h) $2\frac{1}{3}$; i) $3\frac{3}{4}$; j) $4\frac{23}{24}$. **36)** a) $\frac{1}{5}$; b) $1\frac{1}{7}$; c) $3\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $1\frac{3}{4}$; f) $1\frac{41}{60}$; g) $\frac{167}{2\,520}$; h) $\frac{29}{40}$; i) $1\frac{22}{35}$; j) $1\frac{13}{900}$. **37)** a) $\frac{3}{5}$; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{5}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{13}{320}$. **38)** $\frac{2}{5}$. **39)** $\frac{1}{3}$. **40)** $3\frac{1}{3}$. **41)** cu $4\frac{5}{6}$. **42)** $5\frac{1}{2}$ kg. **43)** a) $4\frac{1}{4}$ m stofă; b) $8\frac{3}{4}$ m stofă. **44)** 115 m. **45)** $\frac{1}{5}$ din lucrare. **46)** $7\frac{1}{2}$ kg. **47)** $\frac{1}{4}$. **48)** $1\frac{3}{4}$. **49)** a) 12; b) 12; c) $\frac{8}{15}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{2}{3}$; h) 2; i) $\frac{1}{3}$; j) 1. **50)** $\frac{1}{2}$. **51)** 35. **52)** 6 kg. **53)** $52\frac{1}{2}$ km. **54)** 2 cm². **55)** 210 km. **56)** a) $\frac{4}{9}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) $7\frac{1}{2}$; d) 2; e) 7; f) 6; g) $3\frac{1}{2}$; h) $7\frac{1}{4}$; **57)** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $1\frac{1}{2}$. **58)** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{2}{9}$. **59)** a) 9; b) $7\frac{1}{5}$; c) 3; d) 18; e) 25; f) 6; g) 16. **60)** $\frac{2}{11}$. **61)** $\frac{1}{25}$. **62)** 140. **63)** a) $\frac{27}{40}$; b) $\frac{8}{11}$; c) 10; d) $9\frac{39}{40}$; e) 14; f) $\frac{9}{40}$; h) $\frac{41}{320}$. **64)** a) 6; b) $4\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 1; e) $4\frac{4}{5}$; f) 2; g) 1; h) 5; i) 1; j) $\frac{1}{4}$; k) 2; l) 1; m) 10; n) 3; o) 2; p) 2; r) 2; s) 2; t) 1. **65)** a) $6\frac{1}{2}$; b) 4; c) $15\frac{1}{3}$; d) $3\frac{1}{3}$; e) 34; f) $7\frac{5}{9}$; g) $\frac{2}{9}$; h) 1; i) $\frac{1}{2}$; j) $38\frac{2}{3}$; k) $\frac{1}{8}$. **66)** a) 1; b) 3; c) $\frac{1}{3}$. **67)** 1. **68)** a) $1\frac{4}{9}$; b) $8\frac{3}{16}$; c) $\frac{7}{60}$; d) $\frac{3}{10}$;

e) $\frac{9}{25}$; f) $\frac{1}{2}$. **69)** a) 2; b) 7. **70)** 80. **71)** a) 2; b) $\frac{2}{5}$; c) 4; d) 2; e) $1\frac{5}{9}$. **72)** a) 1; b) 3; c) $\frac{29}{784}$; d) 2. **73)** a) $1\frac{1}{8}$; b) $\frac{133}{160}$; c) 8.; d) $2\frac{2}{7}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $5\frac{5}{9}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{39}{151}$; i) 1; j) $\frac{4}{19}$; l) 300; m) $1\frac{1}{16}$. **74)** a) 3; b) 3; c) 5; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{13}{15}$; f) $\frac{233}{240}$. **75)** $a < x < b$. **76)** Ne folosim de figura 9R. Primul segment reprezintă numărul cel mic.

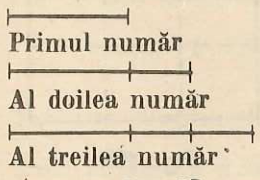


Fig. 9R

Deducem că suma celor trei numere este triplul numărului al doilea. Aflăm numărul al doilea împărțind pe 45 la 3. Deci numărul al doilea este 15. Știind că fiecare număr este divizibil cu 5 și că diferența între cel mai mare și cel mai mic din ele este mai mică decît 18, aflăm cele trei numere.

Acestea sînt: 10; 15; 20.

77) I. a) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{12}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{5}{48}\right\}$. II. a) $S=\left\{2\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\left\{1\frac{1}{10}\right\}$; c) $S=\{1\}$; d) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$; e) $S=\left\{5\frac{5}{12}\right\}$; f) $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$; g) $S=\left\{2\frac{1}{2}\right\}$; h) $S=\left\{\frac{3}{10}\right\}$; i) $S=\left\{2\frac{1}{4}\right\}$; **78)** a) $S=\{3\}$; b) $S=\left\{\frac{2}{9}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{3}{17}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) $S=\{12\}$; f) $S=\{20\}$; g) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$; h) $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$; i) $S=\left\{9\frac{1}{3}\right\}$; j) $S=\{10\}$; k) $S=\left\{\frac{2}{5}\right\}$; l) $S=\left\{\frac{5}{6}\right\}$. **79)** a) $S=\left\{1\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\{5\}$; c) $S=\{2\}$; d) $S=\left\{\frac{4}{15}\right\}$; e) $S=\{2\}$; f) $S=\{7\}$; g) $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$; h) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **80)** a) $S=\left\{\frac{1}{8}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{10}\right\}$; d) $S=\{2\}$; e) $S=\{10\}$; f) $S=\{10\}$; g) $S=\left\{\frac{1}{12}\right\}$; h) $S=\{2\}$. **81)** a) $\{20\}$; b) $\{6\}$; c) $\{15\}$; d) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) $\{4\}$; f) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$; g) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **82)** a) $S=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{5}\right\}$; d) $S=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. **83)** a) 3 m; b) 4 kg; c) 16 km; d) 2 m; e) 180. **84)** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{8}{21}$; d) $\frac{3}{10}$ kg; e) $\frac{3}{8}$ kg; f) $\frac{1}{3}$ km. **85)** Cu 32 ha. **86)** 43 ha porumb. **87)** 32. **88)** 15. **89)** 80. **90)** 100 km. **91)** 60 kg. **92)** $1\frac{3}{7}$. **93)** $51\frac{1}{4}$ kg. **94)** 162 m. **95)** 40 000 puieți. **96)** 1 km. **97)** $5\frac{1}{2}$ m. **98)** 16 elevi participă la ambele vizite. **99)** 120 l. **100)** 180 lei. **101)** 432 piese.

102) 108 ha. **103)** $\frac{5}{6}$. **104)** 120 ha. **105)** 364 km. **106)** 630 ha. **107)** 462 km.

108) $\frac{3}{4}$. **109)** 40; 50. **110)** 30; 120. **111)** 42. **112)** 24; 60. **113)** $6\frac{2}{3}$; $53\frac{1}{3}$.

114) 108 m². **115)** $64\frac{7}{12}$; $67\frac{1}{12}$; $268\frac{1}{3}$. **116)** 70. **117)** 2 500 m². **118)** 120 ha; 120 ha. **119)** 20 h; 30 h.

120) *Soluția I.* Privind figura 10R, se vede că cele 6 pătrate care s-au obținut au împreună aria de 54 m². Calculăm aria unui pătrat:

$$54 : 6 = 9 \ (\text{m}^2)$$

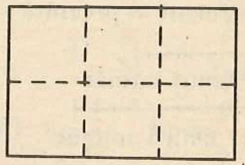


Fig. 10R

Latura pătratului este de 3 m. Lungimea dreptunghiului este de 9 m, iar lățimea sa este de 6 m. Perimetrul dreptunghiului este de 30 m.

Soluția II (vezi fig. 11R). Notăm cu x lungimea dreptunghiului (în m). Lățimea sa este $\frac{2}{3}x$.

Aria dreptunghiului este $\frac{2}{3}x \cdot x$, adică $\frac{2}{3}x^2$.

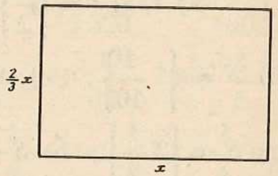


Fig. 11R

Putem scrie:

$$\frac{2}{3}x^2 = 54 \text{ de unde } x^2 = 54 : \frac{2}{3} = 54 \cdot \frac{3}{2} = 27 \cdot 3 = 3^4 = (3^2)^2 = 9^2.$$

Avem $x = 9$.

Lungimea este deci de 9 m. Calculăm lățimea dreptunghiului:

$$\frac{2}{3} \cdot 9\text{m} = 6\text{m}$$

Soluția III. Completăm dreptunghiul astfel încît să obținem un pătrat, după cum se vede în figura 12R.

Se constată că aria dreptunghiului este $\frac{2}{3}$ din aria pătratului.

Calculăm aria pătratului:

$$54 : \frac{2}{3} = \frac{54 \cdot 3}{2} = 3^4 = (3^2)^2 = 9^2 \ (\text{m}^2).$$

Latura pătratului este de 9 m. Deci lungimea dreptunghiului este de 9 m, iar lățimea sa de 6 m.

Observație. Să ne întoarcem la „Soluția II" (fig. 11 R). Am notat cu x lungimea dreptunghiului (în m). Am scris: $\frac{2}{3}x^2 = 54$. Priviți figurile 11R și 12 R.

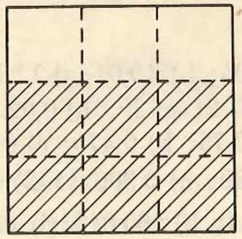


Fig. 12R

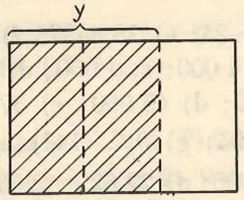


Fig. 13R

Constatăm că x^2 este aria pătratului mare (fig. 12R), iar aria dreptunghiului hașurat este $\frac{2}{3}$ din aria pătratului mare, adică $\frac{2}{3}x^2$.

Soluția IV. Observînd fig. 13R, constatăm că aria pătratului hașurat este $\frac{2}{3}$ din aria dreptunghiului. Calculăm aria pătratului hașurat: $\frac{2}{3} \cdot 54 \text{ m}^2 = 36 \text{ m}^2$. Dacă notăm cu y latura pătratului hașurat putem scrie: $y^2 = 36$ de unde $y = 6$.

Lățimea dreptunghiului este egală cu latura pătratului hașurat. Lățimea dreptunghiului este deci de 6 m. Lungimea dreptunghiului este de 9 m.

121) 26 m. **122)** Ce fracție din $\frac{2}{3}$ este $\frac{1}{2}$? Fie $\frac{p}{q}$ această fracție. Avem deci: $\frac{p}{q} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. De aici, deducem: $\frac{p}{q} = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$. Luăm deci $\frac{3}{4}$ din lungimea sforii. Putem împărți ușor lungimea sforii în 2, 4, 8 etc. părți egale fără a avea la îndemînă un etalon de lungime. Problema se mai poate rezolva și altfel. Răspuns: tăiem $\frac{3}{4}$ din sfoară. **123)** 32 elevi prezenți (clasa avea 36 elevi). **124)** Ion a găsit pe masă 4 mere adică $\frac{2}{3}$ din numărul de mere pe care le-a găsit pe masă Petre. Deci Petre a găsit pe masă 6 mere, adică $\frac{2}{3}$ din numărul de mere pe care le-a găsit Marin. Deci, Marin a găsit pe masă 27 mere. **125)** cinci bărbați; o femeie; șase copii. **126)** 108 lei. **127)** În $\frac{1}{\frac{1}{5}}$ h, adică în 5 h. **128)** a) În $\frac{1}{\frac{1}{6}}$ h, adică în 6 ore. În $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ h, adică în $\frac{3}{2}$ h $\left(\frac{3}{2}\text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}\right)$. b) În $\frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{2}{3}}$ h, adică în 1 h 12 min. **129)** 9 muncitori. **130)** a) 13,986; b) 4 301,425; c) 1 792,0277. **131)** a) 2,512; c) 504,2; d) 31; e) 567,67; f) 3,95; g) 870,216; h) 163,25; i) 239,236; j) 4,995; k) 899,991. **132** a) 45,2; b) 24,7; c) 457; d) 247; e) 2 470; f) 20 000; g) 480; h) 1 000. **133)** a) 2,5; b) 5,248; c) 0,24; d) 4; e) 4; f) 200. **134)** a) 23,52; b) 7,824; c) 108; d) 82,824; e) 602,202; f) 336,38. **135)** a) 210; b) 163,404; c) 5 027,01. **136)** a) 2,45; b) 0,457; c) 0,75; d) 0,045; e) 0,25; f) 0,04. **137)** a) 1 228,2; b) 377,35;

c) 23,75; d) 18,24; e) 28,54375; f) 11,71875; g) 2,04; h) 40,01; i) 2,36; j) 407,575. **138)** a) 10; b) 1 000; c) 1 000; d) 0,1; e) 0,001; f) 2; g) 20; h) 0,02. **139)** a) 2,5; b) 24; c) 2 500; d) 45 000; e) 377 500. **140)** a) 0,75; b) 0,475; c) 0,023; d) 7,5; e) 0,007; f) 0,04; g) 0,4. **141)** a) 5,666; b) 13,030; c) 0,306. **142)** a) 103,0522; b) 846,6; c) 3,06; d) 22,625; e) 37; f) 100 101; g) 1; h) 160 010; i) 120; j) 316,1; k) 1 447,65. **143)** a) 1 366,653; b) 4,52; c) 5,4; d) 6,362; e) 36,75; f) 29,52; g) 8 343; h) 2,4; i) 25; j) 340; k) 196,73. **144)** 419,857. **145)** 301,505. **146)** 372 kg. **147)** 70,83. **148)** 4,95. **149)** 447,25 lei. **150)** 1 098. **151)** 413,1. **152)** 812,43. **153)** 13,75 lei. **154)** 104,75 lei. **155)** 139,500 kg. **156)** 1 687,50 lei. **157)** 22,75 lei. **158)** 0,1225. **159)** 1,8625. **160)** 0,002. **161)** 4,50 lei **162)** 15 lei; 25,50 lei. **163)** 40,25 lei. **164)** 7,50 lei; 108,75 lei. **165)** 0,081; 0,324. **166)** 4,99; 0,01. **167)** a) $\frac{11}{15}$; b) $\frac{29}{60}$; c) $2\frac{1}{30}$; d) $\frac{1}{25}$; e) $\frac{1}{4\,004}$; f) 1; g) 1; h) $\frac{1}{60}$; i) 3; j) 1; k) $\frac{1}{2}$; l) $\frac{4}{81}$. **168)** a) 1 000; b) $6\frac{3}{25}$; c) 10; d) $\frac{1}{10}$; e) 100; f) 10; g) $\frac{1}{4}$; h) 15; i) 8 400; j) 1.

Lucrări pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

Lucrarea I

1) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{40}$. **2)** $\frac{8}{10}$; $\frac{2}{14}$. **3)** a) $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{9}{12}$. b) $\frac{15}{60}$; $\frac{50}{60}$; $\frac{12}{60}$. c) $\frac{14}{2\,520}$; $\frac{75}{2\,520}$; $\frac{16}{2\,520}$. **4)** $\frac{7}{2}$; $\frac{241}{10}$. **5)** $3\frac{1}{2}$; $17\frac{7}{10}$; $106\frac{9}{23}$. **6)** a) 2; b) $1\frac{25}{132}$; c) $1\frac{19}{60}$; d) $\frac{149}{360}$; e) $3\frac{3}{112}$. **7)** a) $\frac{2}{3}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) $\frac{43}{66}$; d) $171\frac{3}{4}$; e) $\frac{43}{1\,050}$. **8)** a) $\frac{1}{3}$; b) $4\frac{1}{5}$; c) 4; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{7}$. **9)** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{7}$; c) $1\frac{1}{3}$; d) $\frac{4}{5}$; e) $\frac{2}{7}$; f) 7. **10)** $\frac{5}{6}$. **11)** $76\frac{1}{2}$. **12)** $4\frac{1}{2}$. **13)** 270 km. **14)** 100 kg.

Lucrarea II

1) $\frac{1}{2}$. **2)** $\frac{1}{4}$. **3)** $\frac{3}{4}$. **4)** $\frac{1}{500}$. **5)** $\frac{12}{5}$. **6)** $\frac{1}{5}$. **7)** $\frac{3}{20}$. **8)** $\frac{1}{40}$. **9)** $\frac{28}{5}$. **10)** 0,5. **11)** 1,75. **12)** 0,045. **13)** 0,375. **14)** 1,2. **15)** 2,035. **16)** 17. **17)** 4 kg. **18)** $\frac{5}{12}$.

Lucrarea III

1) 2 719,745. **2)** 3,01. **3)** 2,162. **4)** 0,02. **5)** 9,45. **6)** 138. **7)** 8 024,01. **8)** 3,75. **9)** 0,24. **10)** 0,390625. **11)** 250. **12)** 0,204. **13)** 10,65. **14)** 0,250001.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME SUPLIMENTARE
A. EXERCIȚII ȘI PROBLEME DIVERSE

Pag. 244—247. 1) 2 observatori, unul în A și altul în E. **2)** Cărunt. **3)** Pătrat galben; dreptunghi verde; triunghi roşu; cerc albastru. **4)** a) De 9 ori; b) de 20 ori; c) de 20 ori. **5)** 2 813 102. **6)** 19. **7)** 47. **8)** 33 elevi; 15 bănci. **10)** 41 elevi știu franceza. Deci $80 - 41 = 39$ (elevi) nu știu franceza; ei știu numai engleza (întrucît fiecare știe cel puțin una din limbile franceză sau engleză). $80 - 60 = 20$ (elevi) știu numai franceza. Știu o singură limbă $39 + 20 = 59$ (elevi). Știu ambele limbi 21 elevi. **12)** B, A, C. **13)** 32 elevi. **14)** 70. **15)** 11. **16)** a) A; b) A; c) A; d) F; e) A; f) A; g) A; h) A; i) A; j) A; k) F; l) F. **17)** 270 m; 180 m. **18)** 9 m^2. **19)** 306,03 m^2. **20)** 16 m^2. **21)** 136 m; 204 m. **22)** 151,5. **23)** 1 500 m^2. **24)** 213,75 m^2. **25)** 20 m; 12 m. **26)** Numărul $6 - n$ trebuie să fie un număr natural divizibil cu 2, iar n trebuie să fie un număr natural mai mic sau egal cu 6 și divizibil cu 2. Deci $n = 0$; $n = 2$; $n = 4$; $n = 6$.

Mai putem rezolva problema și astfel: Putem scrie: $\frac{6-n}{2} = 3 - \frac{n}{2}$. Deci $\frac{n}{2}$ trebuie să fie un număr natural mai mic sau egal cu 3. Dacă $\frac{n}{2} = 0$, avem $n = 0$. Dacă $\frac{n}{2} = 1$, avem $n = 2$. Dacă $\frac{n}{2} = 2$, avem $n = 4$. Dacă $\frac{n}{2} = 3$, avem $n = 6$.

Tabel cu numerele prime pînă la 1 000

2	61	149	239	347	443	563	659	773	883
3	67	151	241	349	449	569	661	787	887
5	71	157	251	353	457	571	673	797	907
7	73	163	257	359	461	577	677	809	911
11	79	167	263	367	463	587	683	811	919
13	83	173	269	373	467	593	691	821	929
17	89	179	271	379	479	599	701	823	937
19	97	181	277	383	487	601	709	827	941
23	101	191	281	389	491	607	719	829	947
29	103	193	283	397	499	613	727	839	953
31	107	197	293	401	503	617	733	853	967
37	109	199	307	409	509	619	739	857	971
41	113	211	311	419	521	631	743	859	977
43	127	223	313	421	523	641	751	863	983
47	131	227	317	431	541	643	757	877	991
53	137	229	331	433	547	647	761	881	997
59	139	233	337	439	557	653	769		

CUPRINS

Nr. colilor de tipar: 17
Bun de tipar: 15.03.1989

Com. nr. 35051/80426
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.