Lei 25

ISBN 973–30–1223–8

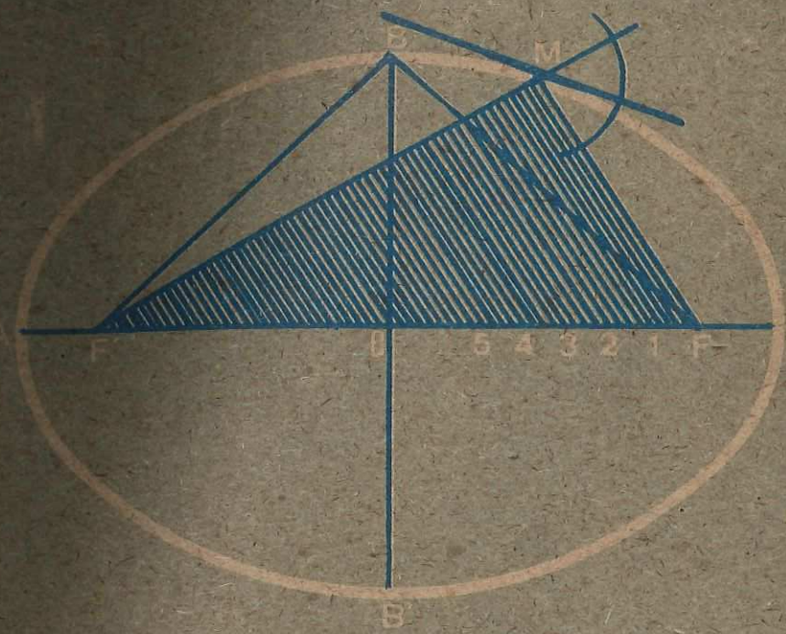
MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI ȘI ȘTIINȚEI

VALERIA TOMULEANU

STANTIN UDRIȘTE

GHEORGHE VERNIC

MATEMATICĂ



GEOMETRIE ANALITICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1991

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI ȘTIINȚEI

Prof. univ. dr. Constantin Udrişte
Prof. Valeria Tomuleanu
Prof. Gheorghe Vernic

MATEMATICĂ

GEOMETRIE ANALITICA

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — București

Manualul a fost elaborat în anul 1981. Actuala ediție este în concordanță cu programa școlară, numărul 39732/1987.

Referenți: prof. dr. docent *Radu Miron*, prof. univ. dr. *Dan I. Papuc*, prof. univ. dr. *Octavian Stănășilă*, conf. dr. *Vasile Oproiu*, lector dr. *Oltin Dogaru*, lector dr. *Ianuș Stere*, lector dr. *Liviu Nicolescu*, lector *Dumitru Smaranda*, prof. gr. I *Ion Maftei*

La definitivarea prezentei ediții a manualului s-a ținut seama și de observațiile unor profesori din București, Caracal, Iași, Timișoara și din județele Dîmbovița și Teleorman.

ISBN 973—30—1223—8

REDACTOR: prof. VIORICA FĂTU
TEHNOREDACTOR: ION MIREA
COPERTA: ELISABETA VERONICA-DUMITRACHE

Capitolul I

DREAPTA

§ 1. Coordonate carteziene în plan

Fie un plan $\mathcal{P}$ și d o dreaptă oarecare din planul $\mathcal{P}$. Fie O, $A \in d$ două puncte distincte și $\mathbf{R}$ mulțimea numerelor reale. Prin *axioma riglei* admitem că există o funcție bijectivă $f : d \to \mathbf{R}$, $f(M) = x$, care îndeplinește următoarele condiții:

1) $f(O) = 0$, $f(A) > 0$;
2) $PQ = |f(Q) - f(P)|$, $\forall P, Q \in d$,

unde PQ este distanța dintre punctele P și Q. O asemenea funcție se numește *sistem de coordonate* pe dreapta d, iar dreapta d pe care s-a fixat un sistem de coordonate se numește *axă de coordonate*. Punctul O se numește *originea* sistemului de coordonate, iar sensul de la O la A pe axă se numește *sens pozitiv*. Numărul real x se numește *abscisa* sau *coordonata* punctului M în sistemul de coordonate considerat.

Prin tradiție, în loc de $f(M) = x$ se scrie $M(x)$ și se citește „punctul M de abscisă (coordonată) x" sau „M de x", iar sensul pozitiv pe axă se marchează printr-o săgeată. Axa de coordonate se desenează ca în figura I.1 și se notează cu Ox. Punctul I de abscisă 1 se numește *punct unitate*.

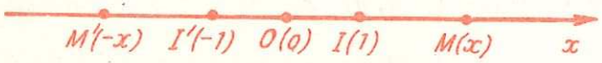


Fig. I.1

Fie (Ox, Oy) o pereche ordonată de axe ortogonale în planul $\mathcal{P}$, cu originea O comună și cu sensurile pozitive ale axelor indicate prin săgeți ca în figura I.2. Acest ansamblu poartă numele de *reper cartezian* în planul $\mathcal{P}$ și se notează cu xOy. Punctul O se numește *originea* reperului.

Observație. Punctele unitate I pe Ox și J pe Oy ($OI = OJ$) impun scara desenelor. Evident aceste puncte nu trebuie să fie neapărat nominalizate în desene (fig. I.3)

Fie M un punct din planul $\mathcal{P}$ în care s-a fixat un reper cartezian xOy. Paralela prin M la axa Oy întîlnește axa Ox în punctul P, iar paralela prin M la axa Ox întîlnește axa Oy în punctul Q. Fie x coordonata lui P pe axa Ox și y coordo-

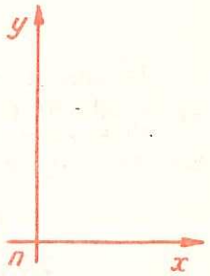


Fig. I.2

Denumirea „carteziene" provine de la numele latin al matematicianului și filosofului francez René Descartes (latinizat—Renatus Cartesius) (1596—1650) care a fundamentat geometria analitică în plan ca o metodă ce a înlocuit studiul figurilor geometrice plane prin studiul perechilor ordonate de numere reale, convertind raționamentele sintetice în raționamente algebrice sau invers. Conceptul de coordonate definit de Descartes a fost prima contribuție fundamentală la dezvoltarea geometriei de după Euclid (aprox. 365—300 î.e.n.)

nata lui Q pe axa Oy. În acest fel punctului M (fig. I.3) i se atașează o pereche ordonată unică de numere reale (x, y). Funcția $f : \mathfrak{P} \to \mathbf{R}^2$, $f(M) = (x, y)$ este bijectivă și se numește *sistem de coordonate cartezian* definit de reperul xOy pe planul $\mathfrak{P}$. Prin tradiție, în loc de $f(M) = (x, y)$ se scrie $M(x, y)$ și se citește „punctul M de abscisă x și ordonată y" sau „punctul M de coordonate carteziene x și y" sau „M de x și y".

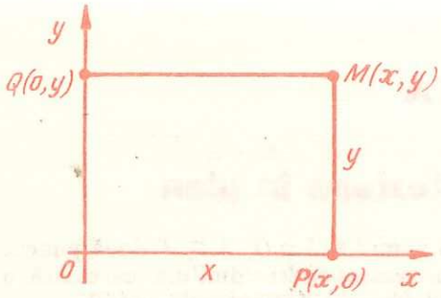


Fig. I.3

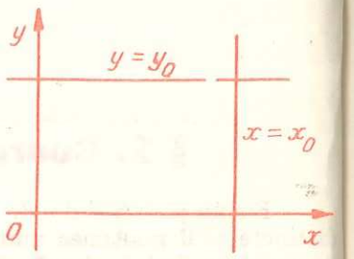


Fig. I.4

Axa Ox (prima axă) se numește *axa abscselor*, iar axa Oy (a doua axă) se numește *axa ordonatelor*.

Cazuri particulare: originea O este caracterizată prin perechea (0, 0). Punctul unitate I de pe axa Ox are coordonatele (1, 0), punctul unitate J de pe axa Oy are coordonatele (0,1). Toate punctele de pe axa Ox sînt caracterizate prin faptul că au *ordonata nulă*, toate punctele de pe axa Oy sînt caracterizate prin faptul că au *abscisa nulă*.

Punctele de pe o dreaptă paralelă cu axa Ox au aceeași ordonată, iar punctele de pe o dreaptă paralelă cu axa Oy au aceeași abscisă (fig. I.4)

Axele Ox și Oy împart planul $\mathfrak{P}$ în patru regiuni

$\mathrm{I} = \{M(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$, $\mathrm{II} = \{M(x, y) \mid x < 0,\ y > 0\}$,

$\mathrm{III} = \{M(x, y) \mid x < 0,\ y < 0\}$, $\mathrm{IV} = \{M(x, y) \mid x > 0,\ y < 0\}$,

numite *cadrane deschise*. Mulțimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y > 0\}$ se numește *semiplanul superior deschis*, iar mulțimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y < 0\}$ se numește *semiplanul inferior deschis*.

§ 2. Formula distanței

În planul $\mathfrak{P}$ considerăm reperul cartezian xOy și punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ care pot fi confundate sau distincte.

Presupunem că $M_1 \neq M_2$, iar segmentul $[M_1M_2]$ nu este paralel nici cu axa Ox nici cu axa Oy (fig. I.5). Notăm cu P_1, Q_1, respectiv P_2, Q_2 picioarele perpendi-

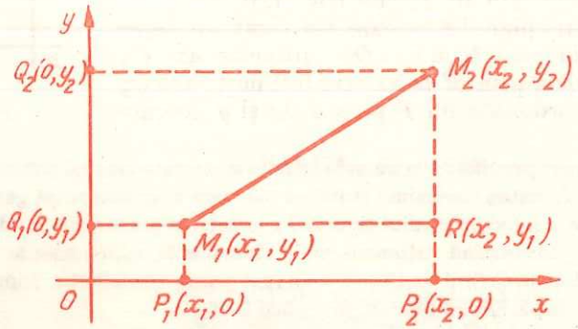


Fig. I.5

culare lor coborîte din M_1 respectiv M_2 pe axe și cu R punctul de intersecție a dreptelor Q_1M_1 și P_2M_2. Distanța M_1M_2 se poate exprima în funcție de coordonatele celor două puncte utilizînd teorema lui Pitagora pentru triunghiul dreptunghic M_1RM_2 împreună cu axioma riglei (pe axe). Rezultă

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Această egalitate are loc și în cazurile: $M_1 = M_2$, $M_1 \neq M_2$ și $M_1M_2 \parallel Ox$ (fig. I.6), $M_1 \neq M_2$ și $M_1M_2 \parallel Oy$ (fig. I.7). De aceea este numită *formula distanței* dintre punctele oarecare $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$.

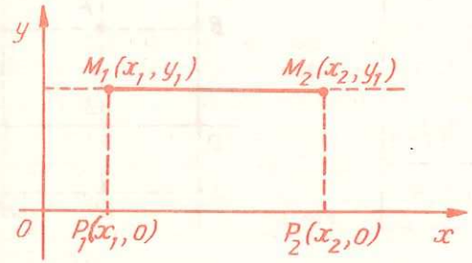


Fig. I.6

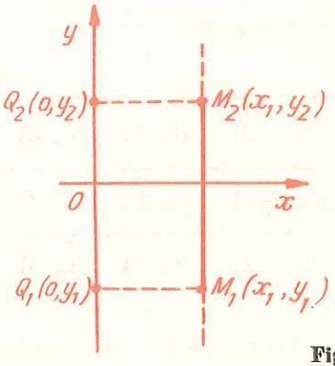


Fig. I.7

Reamintim de asemenea coordonatele mijlocului segmentului $[M_1M_2]$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

PROBLEME

Este util ca rezolvarea oricărei probleme de geometrie să înceapă cu desenarea figurilor corespunzătoare.

1. Să se arate că punctele $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(2, 4)$ sînt coliniare.

Soluție. Avînd în vedere poziția relativă a punctelor A, B, C, observăm că $AB + BC = AC$ este o condiție necesară și suficientă pentru coliniaritate. Această egalitate este satisfăcută deoarece $AB = \sqrt{(1-0)^2 + [1-(-2)]^2} = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{(2-0)^2 + [4-(-2)]^2} = 2\sqrt{10}$.

2. Fie a, b, c trei numere reale fixate. Să se arate că punctele $A(a, 2a - 1)$, $B(b, 2b - 1)$, $C(c, 2c - 1)$ sînt coliniare.

3. Un triunghi are vîrfurile $A(-2, -1)$, $B(1, 2)$, $C(0, 5)$.

1) Să se calculeze perimetrul triunghiului.

2) Să se determine aria triunghiului și lungimea înălțimii corespunzătoare celei mai scurte laturi.

4. Aceleași date ca și în problema precedentă.

1) Să se ordoneze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

2) Să se determine coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului ABC.

3) Să se găsească coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC și raza acestui cerc.

5. În plan fixăm reperul cartezian xOy.

Să se figureze punctele corespunzătoare elementelor produsului cartezian $\{0, 3, 6\} \times \{-2, 0, 3, 5\}$.

Să se găsească cea mai mică și cea mai mare distanță dintre aceste puncte.

Există în această mulțime trei puncte care să determine un triunghi isoscel? Dar echilateral?

Soluție. Elementele produsului cartezian sînt date în tabelul 1. Dacă notăm $A(0, -2)$, $O(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(0, 5)$, $D(3, -2)$, $E(3, 0)$, $F(3, 3)$, $G(3, 5)$, $H(6, -2)$, $K(6, 0)$, $L(6, 3)$, $M(6, 5)$ obținem figura I.8.

TABELUL 1

x	−2	0	3	5
0	(0, −2)	(0, 0)	(0, 3)	(0, 5)
3	(3, −2)	(3, 0)	(3, 3)	(3, 5)
6	(6, −2)	(6, 0)	(6, 3)	(6, 5)

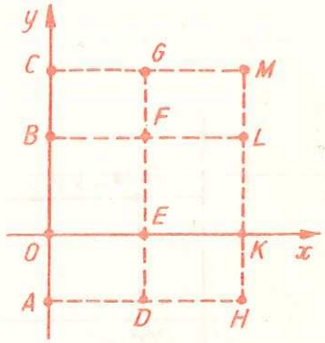


Fig. I.8

Se observă că $OA = 2$, iar figura I.8 pune în evidență că acest număr reprezintă cea mai mică distanță. Analog, $AM = HC = \sqrt{85}$ este cea mai mare distanță.

Deoarece $OB = BF$, $OB \perp BF$ triunghiul OBF este dreptunghic isoscel. Nu există nici un triunghi echilateral întrucît triunghiurile isoscele ce se pot forma sînt fie dreptunghice, fie au lungimea jumătății bazei și lungimea înălțimii numere întregi.

6. Două șosele perpendiculare sînt reprezentate ca axele Ox și Oy ale reperului cartezian xOy. Punctele A și B din cadranul întîi reprezintă două localități. Să se determine punctul $M \in Ox$ și punctul $N \in Oy$ astfel încît lungimea drumului (linie frîntă) $AMNB$ să fie minimă.

7. Fie punctele $A(1,3)$, $B(5,1)$. Să se determine abscisa punctului C de pe axa Ox astfel încît $AC = CB$ și abscisele punctelor D_1, D_2 de pe axa Ox pentru care $\mu(\widehat{AD_1B}) = \frac{\pi}{2}$, $\mu(\widehat{AD_2B}) = \frac{\pi}{2}$.

Indicație. Fie $C(x, 0)$. Deci $AC = \sqrt{(x-1)^2 + 9}$, $CB = \sqrt{(x-5)^2 + 1}$ și se obține $x = 2$. Dacă $D(x, 0)$, atunci $DA^2 + DB^2 = AB^2$ etc.

8. Fie $C(1, 3)$. Să se determine un punct A pe Ox al cărui simetric față de C este situat pe Oy.

§ 3. Panta unei drepte oblice

În planul $\mathcal{P}$ fixăm reperul cartezian xOy. Axa Ox și toate dreptele paralele cu ea se numesc *drepte orizontale*. Axa Oy și toate dreptele paralele cu ea se numesc *drepte verticale*. Dreptele care nu sînt verticale se numesc *drepte oblice*.

Intuitiv este clar că dreptele oblice d_1, d_2, d_3 din figura I.9 au diferite înclinări față de axa Ox. Aceste înclinări față de orizontală pot fi caracterizate cu ajutorul tangentelor unghiurilor pe care dreptele respective le fac cu axa Ox.

Ne concentrăm atenția asupra unei singure drepte d (fig. I.10). Notăm cu s semicercul de rază 1, cu centrul în origine, situat în semiplanul superior ($y \geqslant 0$). Paralela prin originea O a axelor la dreapta d intersectează semicercul s în punctul P. Prin definiție, unghiul dreptei d cu axa Ox este $\widehat{AOP}$. Notăm acest unghi cu $(\widehat{d, Ox})$ și măsura lui în radiani cu $\theta \in [0, \pi]$.

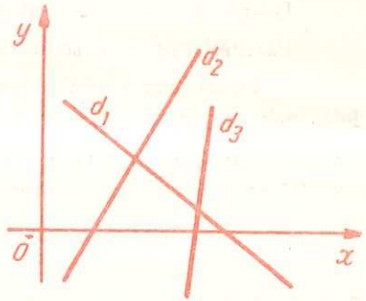


Fig. I.9

Definiție. Fie d o dreaptă oblică și $\theta = \mu(\widehat{d, Ox}) \neq \frac{\pi}{2}$. Numărul real tg θ se numește panta dreptei d sau coeficientul unghiular al dreptei d și se notează cu m.

Cu excepția dreptelor verticale (care nu au pantă!), orice altă dreaptă are pantă (unică!). *Unghiul* dintre dreapta d și axa Ox este *obtuz* dacă și numai dacă *panta* lui d este *negativă*; *unghiul* dintre dreapta d și axa Ox este *ascuțit* dacă și numai dacă *panta* lui d este *pozitivă*; *unghiul* dintre dreapta d și axa Ox este *nul* sau *alungit* dacă și numai dacă *panta* lui d este *zero*. *Unghiul* dintre dreapta d și axa Ox este *drept* dacă și numai dacă d este *paralelă* cu Oy (verticală!).

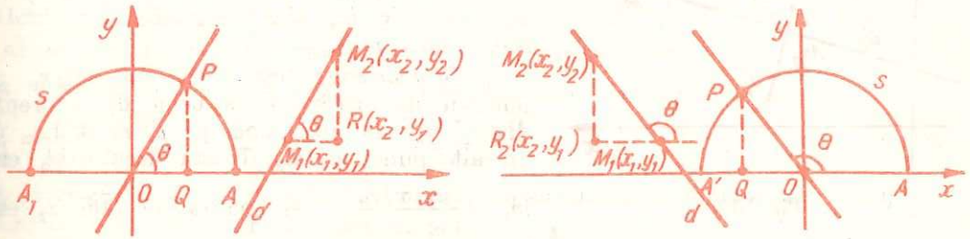


Fig. I.10

Teoremă. *Fie d o dreaptă oblică pe care fixăm două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Panta m a dreptei d este dată de formula:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1.$$

Demonstrație. Urmărim figura I.10. Deoarece $\triangle OQP \sim \triangle M_1RM_2$ găsim

$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{QP}{OQ} = \frac{RM_2}{M_1R} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Analog se tratează cazul unghiului obtuz. De asemenea se observă că formula dată în teoremă nu depinde de alegerea punctelor distincte M_1, M_2 și nici de ordinea lor. Altfel spus numărul m este același atît timp cît M_1 și M_2 sînt două puncte distincte ale aceleiași drepte oblice.

Dreptele verticale sînt paralele între ele.

Paralelismul dreptelor oblice poate fi descris cu ajutorul pantei.

1) Două drepte oblice paralele au aceeași pantă, întrucît admit aceeași paralelă prin origine.

2) Dacă două drepte oblice au aceeași pantă, atunci ele sînt paralele întrucît determină cu Ox unghiuri congruente.

În concluzie este adevărată următoarea teoremă.

Teoremă. *Dreptele oblice d_1 și d_2, de pante m_1 respective m_2, sînt paralele dacă și numai dacă $m_1 = m_2$.*

Mulțimea formată din dreapta d și din toate dreptele paralele cu d se numește *direcția dreptei d*. Fiecare dreaptă este un *reprezentant* al direcției din care face parte. O direcție poate fi verticală sau oblică (în particular orizontală) după cum este reprezentantul ei. Caracterizarea paralelismului dreptelor oblice prin „aceeași pantă" permite să definim *panta unei direcții oblice* ca fiind panta uneia dintre dreptele ce aparțin direcției respective.

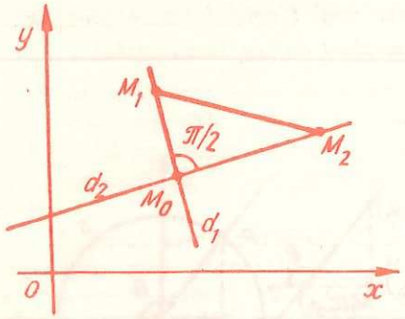


Fig. I.11

O dreaptă orizontală este perpendiculară pe o dreaptă verticală. Rămîne să găsim o condiție de perpendicularitate pentru două drepte care nu sînt respectiv paralele cu axele de coordonate.

Teoremă. *Dreptele d_1 și d_2, de pante m_1, respectiv m_2, sînt perpendiculare dacă și numai dacă $m_1 m_2 = -1$.*

Demonstrație (fig. I.11). Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul de intersecție a celor două drepte, $M_1(x_1, y_1)$ un alt punct pe d_1 și $M_2(x_2, y_2)$ un alt punct pe d_2. Panta dreptei d_1 este $m_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, iar panta dreptei d_2 este $m_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$. Perpendicularitatea dintre dreptele d_1 și d_2 este echivalentă cu teorema lui Pitagora în triunghiul $M_0M_1M_2$. Dar $M_0M_1^2 + M_0M_2^2 = M_1M_2^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - x_0x_1 - y_0y_1 - x_0x_2 - y_0y_2 + x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) +$ $+ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1$.

PROBLEME

1. Să se calculeze pantele dreptelor care determină respectiv cu axa Ox unghiuri de măsură $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{5}$, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ și $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) +$ $+ \operatorname{arctg} 1$.

2. Fie punctele $A(2, 3)$, $B(3, 5)$. Să se determine panta dreptei AB și coordonatele punctului C de pe Ox astfel încît $\mu(\widehat{ABC}) = \frac{\pi}{2}$.

Soluție. $m_{AB} = \dfrac{5-3}{3-2} = 2$. Fie $C(x, 0)$. Deci $m_{BC} = \dfrac{0-5}{x-3}$. Condiția $AB \perp BC$ este echivalentă cu $10 = x - 3$ și deci $x = 13$.

3. Se dau punctele $A(5, 6)$, $B(13, 6)$, $C(11, 2)$, $D(1, 2)$. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez și să se determine măsurile unghiurilor pe care le fac laturile lui cu axa Ox.

4. (Continuare) Să se determine pantele suporturilor diagonalelor trapezului $ABCD$ și măsurile unghiurilor pe care acestea le fac cu axa Ox. Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.

5. Se dau punctele $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(2, 4)$. Sînt A, B, C coliniare? De ce?

Soluție. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{1-(-2)}{1-0} = 3$, iar panta dreptei BC este $m_{BC} = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$. Rezultă că dreapta AB coincide cu dreapta BC și deci A, B, C sînt coliniare.

6. O dreaptă care are panta -2 conține punctul $A(-1, 3)$. Care este abscisa punctului M, de pe dreaptă, care are ordonata -4?

7. Dreapta d are panta 2 și conține punctul $A(1, 1)$. Să se determine punctele lui d care se află la distanța 1 față de A.

8. Utilizînd formula distanței sau pantele suporturilor laturilor și diagonalelor, să se caracterizeze patrulaterele ale căror vîrfuri sînt

1)	$A(-2, 2)$,	$B(2, -2)$,	$C(4, 2)$,	$D(2, 4)$;
2)	$A(-1, 5)$,	$B(5, 1)$,	$C(6, -2)$,	$D(0, 2)$;
3)	$A(-5, 4)$,	$B(3, 5)$,	$C(7, -2)$,	$D(-1, -3)$.

9. Să se găsească $v \in \mathbf{R}$ astfel încît dreapta determinată de punctele $A(-2, v)$, $B(1, 1)$ să fie paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(-1, -1)$, $D(4, v^2 + v)$.

10. Fie paralelogramul $ABCD$. Se duc $CE \perp BC$, $AE \perp AB$. Să se arate că $ED \perp AC$.

Soluție. Conținutul acestei probleme este independent de fixarea unui reper cartezian în plan. De aceea se preferă reperul cartezian care simplifică calculele.

Fixăm reperul cartezian xOy ca în figura I.12. Rezultă $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, r)$, $D(d, r)$, $c - d = b > 0$, $r > 0$, ca elemente fixate inițial în problemă. Fie $E(0, y)$.

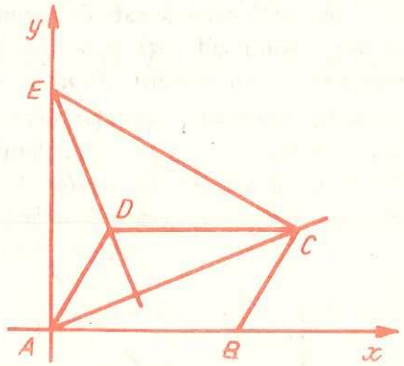


Fig. I.12

Panta dreptei BC este $\dfrac{r}{c-b}$, iar panta dreptei CE este $\dfrac{y-r}{-c}$. Relația $\dfrac{r}{c-b} \cdot \dfrac{y-r}{-c} = -1$ implică $y = \dfrac{r^2 - bc + c^2}{r}$.

Dreapta ED are panta $\frac{r-y}{d}$, iar dreapta AC are panta $\frac{r}{c}$. Deoarece $c-d=b>0$, găsim $\frac{r-y}{d}\cdot\frac{r}{c}=\frac{r}{d}\cdot\frac{r-y}{c}=\frac{r}{c-b}\cdot\frac{r-y}{c}=-1$, adică $ED\perp AC$.

11. Fie pătratul $ABCD$ și $M\in BD-\{B,D\}$. Punctul M se proiectează pe AB, AD în M', respectiv M''. Să se arate că perpendiculara din M pe M', M'' trece prin punctul C.

§ 4. Ecuația dreptei oblice determinată de un punct și de o pantă

O dreaptă oblică d este bine determinată printr-un punct $M_0(x_0, y_0)\in d$ și prin panta m (care dă direcția dreptei). Ce condiție trebuie să verifice x și y pentru ca punctul $M(x, y)$ să fie situat pe dreapta d?

Teoremă. *Fie dreapta d definită prin punctul $M_0(x_0, y_0)\in d$ și prin panta m. Punctul $M(x, y)$ aparține dreptei d dacă și numai dacă $y-y_0=m(x-x_0)$.*

Demonstrație. Evident, $M_0(x_0, y_0)\in d$ satisface relația din teoremă. De asemenea punctul $M(x, y)\neq M_0(x_0, y_0)$ aparține dreptei d dacă și numai dacă panta dată este egală cu panta calculată (fig. I.13), adică

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0},\quad x\neq x_0.$$

Afirmația „dreapta d este mulțimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ și $y-y_0=m(x-x_0)$" este prescurtată prin $d: y-y_0=m(x-x_0)$.

Această ecuație este de forma $y=mx+n$, unde m este panta, iar $n=y_0-mx_0$. Numărul real n se numește *ordonata la origine* deoarece dreapta d intersectează Oy în punctul $(0, n)$.

În particular, ecuația dreptei oblice care trece prin origine, $x_0=0$, $y_0=0$, și are panta m este $y=mx$. Pentru $m=1$ obținem $y=x$ care este *ecuația primei bisectoare a unghiurilor axelor de coordonate*, iar pentru $m=-1$ găsim $y=-x$ care este *ecuația celei de a doua bisectoare a unghiurilor axelor de coordonate* (fg. I.14).

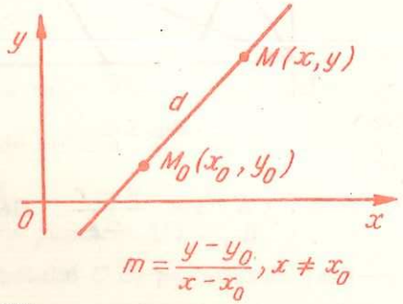


Fig. I.13

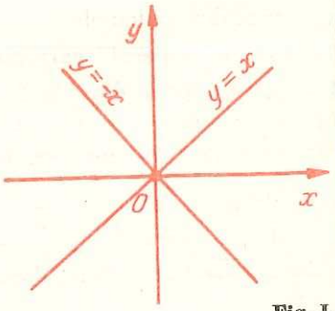


Fig. I.14

Comentarii. 1) Fie m și n două numere reale date, $m\neq 0$. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$ se numește *funcție de gradul întîi (afină)*. Graficul ei este dreapta de ecuație $y=mx+n$. Funcția f este strict crescătoare (descrescătoare) dacă și numai dacă panta m a graficului său este strict pozitivă (negativă).

2) Dacă m este fixat, iar n este un parametru real, atunci $y=mx+n$ reprezintă orice dreaptă paralelă cu dreapta $y=mx$.

Dacă m și n sînt parametri reali atunci $y=mx+n$ reprezintă orice dreaptă oblică din plan.

Dreptele oblice care trec prin origine se reprezintă prin ecuația $y=mx$, unde m este un parametru real.

PROBLEME

1. Se dă triunghiul de vîrfuri $A(-1, 3)$, $B(2, -1)$, $C(3, 6)$.
Să se găsească:
1) ecuația dreptei AC;
2) ecuația paralelei prin B la AC;
3) ecuația mediatoarei segmentului $[BC]$;
4) ecuația medianei din C;
5) ecuația înălțimii din C.

Soluție parțială. 1) Panta dreptei AC este $m=\frac{6-3}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$. Această pantă și punctul $A(-1,3)$ fixează ecuația $y-3=\frac{3}{4}(x+1)$ sau, în forma carteziană explicită, $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$.

2) Orice paralelă la AC are panta $m=\frac{3}{4}$. De aceea paralela prin B la AC are ecuația $y+1=\frac{3}{4}(x-2)$ sau explicit $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$.

3) Mijlocul M al segmentului BC are coordonatele $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$. Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{6-(-1)}{3-2}=7$. Mediatoarea segmentului BC este dreapta perpendiculară pe BC ce trece prin mijlocul M. Astfel mediatoarea are panta $m=-\frac{1}{m_{BC}}=-\frac{1}{7}$ și ecuația $y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{7}\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

2. Cantitatea x de cloroform necesară pentru a ține adormită o persoană timp de h ore poate fi găsită din $4x-3=5x-6+h$. Această ecuație reprezintă o dreaptă?

3. Pentru a produce x unități de marfă un atelier cheltuiește y lei, dependența fiind dată de tabelul următor

x	0	30	60	90	120
y	212	222	232	242	252

Să se determine funcția de gradul întîi asociată acestui tabel. Cîți lei se cheltuiesc pentru a se produce 42 de unități de marfă?

4. Să se arate că orice dreaptă oblică din planul xOy este paralelă sau coincide cu una dintre dreptele d_λ de ecuație $y=(\lambda^3-1)x$.

Indicație. Problema revine la a arăta că funcția $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(\lambda) = \lambda^3 - 1$ este surjectivă.

5. Să se verifice că triunghiul de vîrfuri $A(3, 3)$, $B(6, 3)$ și $C(3, 6)$ este dreptunghic isoscel. Să se scrie ecuațiile medianelor și mediatoarelor triunghiului ABC.

Soluție parțială. $AB^2 = (6-3)^2 + (3-3)^2 = 9$, $AC^2 = (3-3)^2 + (6-3)^2 = 9$, $BC^2 = (6-3)^2 + (3-6)^2 = 18$, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

6. 1) Știind că $A(1, 2)$ este piciorul perpendicularei duse din origine pe dreapta d, să se scrie ecuația dreptei d.

2) Să se găsească proiecția punctului $B(-2, 1)$ pe dreapta d: $2x + y + 1 = 0$.

3) Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $C(1, 3)$ și este echidistantă de punctele $M_1(-1,0)$, $M_2(1, -1)$.

4) Să se determine coordonatele simetricelor punctului $D(-1, 2)$ față de dreapta $d : x + y + 1 = 0$ și față de punctul $E(-1, -4)$.

§ 5. Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ determină o dreaptă unică d.

Dacă $x_1 = x_2$, atunci dreapta d este verticală și are ecuația $x = x_1$. Dacă $y_1 = y_2$, atunci dreapta d este orizontală și are ecuația $y = y_1$. Dacă $x_1 \neq x_2$, atunci dreapta d este oblică (fig. I.15). Ecuația carteziană a dreptei oblice

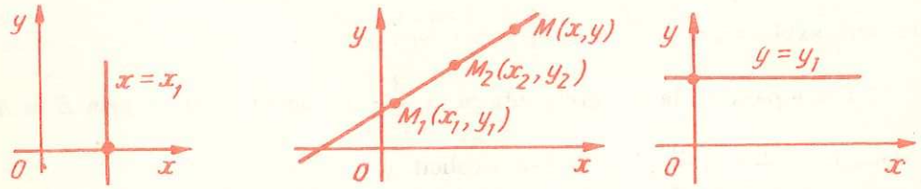


Fig. I.15

d este determinată de punctul $M_1(x_1, y_1)$ și de panta $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Astfel,

$$d : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Dacă $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$ (adică dreapta nu este orizontală și nici verticală), atunci ecuația dreptei d se scrie echivalent sub forma:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

Uneori se utilizează această reprezentare chiar dacă $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$. În acest caz se face convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero. Evident, datorită ipotezei $M_1 \neq M_2$, numitorii nu se pot anula simultan.

Un calcul imediat arată că ecuația anterioară se poate scrie folosind determinanții. De exemplu,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Condiția de coliniaritate a trei puncte $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ se scrie:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația dreptei prin tăieturi. Fie d o dreaptă care nu trece prin origine și nu este nici orizontală nici verticală. Intersecțiile sale cu axele Ox și Oy se numesc *tăieturi*. Dacă $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $ab \neq 0$, sînt tăieturile, atunci ecuația dreptei d se poate scrie sub forma $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

PROBLEME

1. Se dau punctele $A\left(-\dfrac{4}{5}, 2\right)$, $B\left(\dfrac{2}{5}, 4\right)$, $C(1,5)$. Să se găsească ecuația dreptei AB și să se verifice că punctele A, B, C sînt coliniare.

Soluție. Dreapta AB are ecuația $\dfrac{x + \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{y-2}{4-2}$, adică $\dfrac{x + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{y-2}{2}$. Deoarece $\dfrac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{5-2}{2}$, punctul C se află pe dreapta AB, adică punctele A, B, C sînt coliniare.

2. Să se scrie ecuațiile dreptelor fixate prin următoarele perechi de puncte: (1) $A(-2, 1)$, $B(1, 2)$; (2) $A(5, 7)$, $B(-1, -2)$; (3) $A(2, 0)$, $B(0, 2)$.

3. Se dă dreapta d: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3}$. Să se scrie ecuația dreptei d prin tăieturi. Să se găsească ecuațiile simetricelor dreptei d față de axele Ox, Oy și față de origine.

Soluție. Ecuația dreptei d poate fi scrisă în formele $\dfrac{x}{-1} + 1 = \dfrac{y}{3} - \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{x}{\frac{5}{3}} + \dfrac{y}{5} = 1$. Ultima este ecuația prin tăieturile $A\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, $B(0, 5)$.

Pentru a găsi ecuația simetricei unei drepte d_1 față de un punct M sau față de o dreaptă d_2 este suficient să găsim coordonatele simetricelor a două puncte ale lui d_1 față de M respectiv d_2.

Simetrica dreptei d față de axa Ox este determinată de tăieturile $A\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, $B'(0, -5)$. Deci ea are ecuația $\dfrac{x}{\frac{5}{3}} + \dfrac{y}{-5} = 1$.

Analog simetrica dreptei d față de axa Oy are ecuația $\dfrac{x}{\frac{-5}{3}} + \dfrac{y}{5} = 1$, iar simetrica față de O are ecuația $\dfrac{x}{\frac{-5}{3}} + \dfrac{y}{-5} = 1$. Se observă că aceste ecuații se pot obține din $\dfrac{x}{\frac{5}{3}} + \dfrac{y}{5} = 1$ prin schimbările $y \to -y$ (simetrie față de axa Ox), $x \to -x$ (simetrie față de axa Oy) respectiv $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$ (simetrie față de origine).

4. Să se determine ecuațiile simetricelor dreptei $d_1 : -x + 2y - 1 = 0$, față de dreapta $d_2 : x - y = 0$ și respectiv față de punctul $A(-2, 5)$.

5. Se dau punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$. Dreapta BC taie axa Ox în D și dreapta AB taie axa Oy în E. Să se arate că mijloacele segmentelor $[OB]$, $[AC]$, $[DE]$ sînt coliniare.

6. Care patrulater are două laturi paralele, iar punctul comun diagonalelor aparține dreptei determinată de mijloacele celorlalte două laturi? Justificați răspunsul.

§ 6. Punctul care împarte un segment într-un raport dat

Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ două puncte diferite care determină segmentul $[M_1M_2]$ și dreapta M_1M_2. Fie $M \in M_1M_2 - \{M_2\}$, $M(x, y)$. Numărul

$$k = \begin{cases} -\dfrac{MM_1}{MM_2}, & \text{dacă } M \in [M_1M_2), \\ \dfrac{MM_1}{MM_2}, & \text{dacă } M \in M_1M_2 - [M_1M_2] \end{cases}$$

se numește *raportul în care punctul M împarte segmentul nenul* $[M_1M_2]$. Evident $k \neq 1$.

Teoremă. *Fie segmentul nenul $[M_1M_2]$, $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ și numărul real $k \neq 1$. Coordonatele (x, y) ale punctului M care împarte segmentul $[M_1M_2]$ în raportul k sînt*

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

Demonstrație. Fie $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ (fig. I.16) și $M \in [M_1M_2)$. Ținem seama de *teorema paralelelor neechidistante*,

$$k = -\frac{MM_1}{MM_2} = -\frac{PP_1}{PP_2} = -\frac{QQ_1}{QQ_2}.$$

Rezultă $x - x_1 = k(x - x_2)$, $y - y_1 = k(y - y_2)$ și deci $x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k}$, $y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k}$. Analog se demonstrează celelalte cazuri.

Observații. 1) Pentru $k = 0$ obținem punctul $M_1(x_1, y_1)$, iar pentru $k = -1$ obținem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$. Pentru $k < 0$, punctul M este interior segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $k \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, punctul M este exterior segmentului $[M_1M_2]$, pe dreapta M_1M_2.

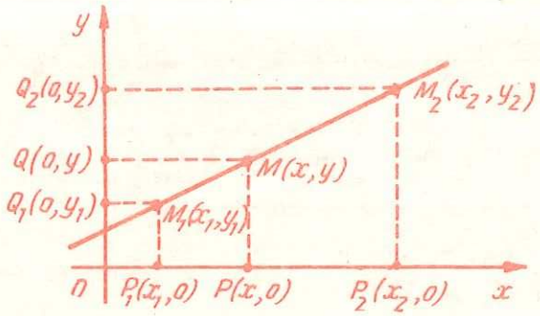


Fig. I.16

2) Privim pe $k \in \mathbf{R} - \{1\}$ drept *parametru*. Relațiile $x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k}$, $y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k}$ se numesc *ecuații parametrice*. Ele reprezintă reuniunea semidreptelor deschise determinate de punctul M_2 pe dreapta M_1M_2. Eliminînd pe k din cele două ecuații parametrice găsim ecuația carteziană a celor două semidrepte, $\dfrac{x - x_1}{x - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$.

Ecuația sub formă de rapoarte a dreptei M_1M_2 este $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Valoarea comună a rapoartelor precedente este un parametru real t. În ipoteza că $M(x, y) = M_2(x_2, y_2)$, valoarea lui t este 1; în ipoteza că $M(x, y)$ fixat este diferit de $M_2(x_2, y_2)$, valoarea lui t este chiar raportul în care punctul M_1 împarte segmentul $[MM_2]$. Deci

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t, \quad t \in \mathbf{R}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Aceste ultime egalități se numesc *ecuații parametrice ale dreptei M_1M_2*.

Segment. Fie punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Se observă imediat că segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \ t \in [0, 1] \end{cases}$$

sau altfel scris

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2, \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Pentru $t = 0$ obținem punctul $M_1(x_1, y_1)$, pentru $t = 1$ găsim punctul $M_2(x_2, y_2)$, iar pentru $t = \dfrac{1}{2}$ se găsește *mijlocul* segmentului $[M_1M_2]$, adică punctul de coordonate $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Evident, punctele corespunzătoare lui $t \in (0, 1)$ sînt puncte interioare pentru segmentul $[M_1M_2]$ și ordinea din $[0, 1]$ induce o ordine pe $[M_1M_2]$.

Centru de greutate. Fie punctele distincte $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, ..., n$ și numerele reale m_i, $i = 1, ..., n$ cu proprietatea $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$. Punctul $G(x, y)$ definit prin

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + ... + m_ny_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

se numește *centrul de greutate al sistemului de puncte* $(M_1, M_2, ..., M_n)$ *relativ la sistemul de ponderi* $(m_1, m_2, ..., m_n)$.

Dacă $m_1 = m_2 = ... = m_n$, atunci se spune că sistemul de puncte este *omogen*. În acest caz centrul de greutate are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}.$$

În particular, pentru $n = 2$ obținem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $n = 3$ obținem coordonatele centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

PROBLEME

1. Să se scrie diverse ecuații ale dreptei d determinată de punctele $M_0(-1, 2)$, $N(1, 3)$.

Soluție. Ecuația carteziană sub formă de rapoarte: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1}$; ecuație carteziană sub formă de determinant:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ecuația explicită: $y - 2 = \frac{1}{2}(x+1)$; ecuația prin tăieturi: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2,5} = 1$; ecuațiile parametrice $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$, $t \in \mathbf{R}$.

2. Aceeași problemă pentru $M_0(-1, -3)$, $N(0, -1)$.

3. Ecuațiile mișcării uniforme a unui punct material $M(x, y)$ sînt $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, unde $t \in [0, \infty)$ reprezintă timpul.

1) Care este viteza lui M?

2) Să se găsească distanța parcursă de la momentul $t_1 = 0$ la momentul $t_2 = 10$.

Soluție. Se observă că ecuațiile parametrice date reprezintă o semidreaptă determinată de punctele $M_1(5, -3)$ și $N(3, -1)$ care corespund la $t = 0$, respectiv $t = 1$. Perechea $(-2, 2)$ reprezintă componentele vectorului viteză, $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

1) Mărimea vitezei $\vec{v}$ este $v = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

2) Pentru $t_1 = 0$ obținem punctul $M_1(5, -3)$, iar pentru $t_2 = 10$ obținem punctul $M_2(-15, 17)$. Distanța cerută este $M_1M_2 = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} = v(t_2 - t_1)$.

4. Aceeași problemă pentru $x = 1 - t$, $y = -1 + 3t$, $t \in [0, \infty)$.

5. Ce reprezintă ecuațiile:

$$(1) \begin{cases} x = |x_0 + ut|, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} t \in \mathbf{R}; \quad (2) \begin{cases} x = \text{cost}, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} t \in \mathbf{R}?$$

6. Se dau punctele $A(-1, 0)$, $B(1, -2)$. Să se determine:

1) coordonatele simetricului lui A față de B,

2) coordonatele punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $k \in \left\{-\frac{2}{3}, -1, \pi\right\}$.

7. Fie punctele $A(4, 3)$ și $B(1, 1)$. Simetricul lui B în raport cu dreapta OA este punctul C. Să se afle coordonatele lui C și coordonatele punctului M care împarte segmentul $[BC]$ în raportul $\cos \alpha$ (Discuție după α).

8. Să se verifice că mijlocul segmentului care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater de vîrfuri $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ este centrul de greutate al sistemului omogen de puncte (M_1, M_2, M_3, M_4).

Soluție (fig. I.17). Coordonatele mijlocului A al segmentului $[M_4M_2]$ sînt

$$x_A = \frac{x_4 + x_2}{2}, \quad y_A = \frac{y_4 + y_2}{2},$$

iar coordonatele mijlocului B al segmentului $[M_1M_3]$ sînt $x_B = \frac{x_1 + x_3}{2}$, $y_B = \frac{y_1 + y_3}{2}$.

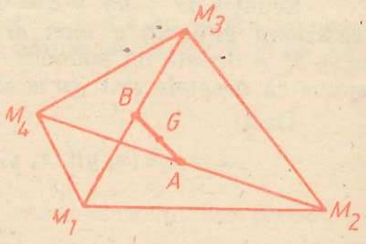


Fig. I.17

Mijlocul G al segmentului $[AB]$ are coordonatele

$$x_G = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4},$$

adică G este centrul de greutate specificat în problemă.

9. Pe înălțimea din A a triunghiului ABC fixează punctele D și E. Perpendicularele din aceste puncte pe laturile AB și AC determină un paralelogram cu $[DE]$ ca diagonală. Să se arate că a doua diagonală a acestui paralelogram este perpendiculară pe mediana din A a triunghiului.

§ 7. Ecuația carteziană generală a unei drepte

Ecuația $y - y_0 = m(x - x_0)$ și ecuația explicită $y = mx + n$ sînt ecuații de gradul întîi în x, y (sau în $\mathbf{R}^2$), echivalente între ele. Apoi ecuația dreptei sub forma $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (unde numitorii nu se anulează simultan!) este tot o ecuație de gradul întîi în x, y.

Forma generală a ecuației de gradul întîi în x, y este

$$ax + by + c = 0,$$

unde coeficienții a, b nu sînt simultan nuli $(a^2 + b^2 > 0)$.

Dacă $b \neq 0$, atunci această ecuație se transcrie $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ și, în raport cu reperul xOy, reprezintă dreapta de pantă $m = -\frac{a}{b}$ și ordonată la ori-

gine $n = -\frac{c}{b}$. Dacă $b = 0$, $a \neq 0$, atunci ecuația este echivalentă cu $x = -\frac{c}{a}$ și, în raport cu reperul xOy, reprezintă paralela la Oy prin punctul $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

Considerațiile precedente constituie demonstrația teoremei următoare.

Teoremă. *În raport cu reperul cartezian xOy, orice dreaptă este caracterizată printr-o ecuație de forma*

$$ax + by + c = 0,$$

unde a și b nu se anulează simultan.

Ecuația $ax + by + c = 0$ în $\mathbb{R}^2$, pentru care $a^2 + b^2 \neq 0$, se numește *ecuația carteziană generală a unei drepte*. Deoarece $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$, $a^2 + b^2 \neq 0$, este un polinom de gradul întîi în x și y *(funcție afină!)*, deseori se spune că dreptele sînt *curbe algebrice de ordinul întîi*.

Deci

$$d = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0\}$$

sau mai scurt

$$d: ax + by + c = 0,$$

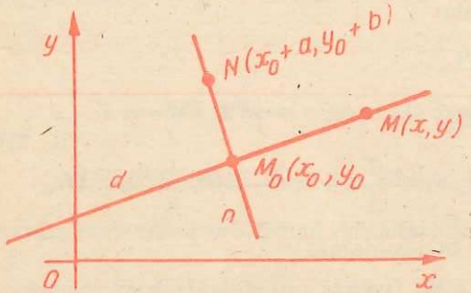


Fig. I.18

Fie dreapta d dată prin ecuația carteziană generală $ax + by + c = 0$ și $M_0(x_0, y_0) \in d$, adică $ax_0 + by_0 + c = 0$. Rezultă $c = -ax_0 - by_0$ și reînlocuind obținem d: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Dreapta ce trece prin $M_0(x_0, y_0) \in d$ și este perpendiculară pe d are ecuația $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ și se numește *normala dreptei d* în punctul M_0 (fig. I.18). În cazul $b \neq 0$ rezultă panta $m = -\frac{a}{b}$ și ecuația dreptei corespunzătoare se poate scrie în *forma carteziană explicită*

$$y = mx + n.$$

Ecuația generală a unei *drepte ce trece prin origine*, este

$$ax + by = 0.$$

Dacă $b \neq 0$, atunci putem scrie $y = mx$, $m = -\frac{a}{b}$.

Comentarii. 1) Fie dreapta d: $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se află pe dreapta d dacă și numai dacă $ax_0 + by_0 + c = 0$.

2) Considerăm dreapta d: $2x + 3y + 1 = 0$. Punînd $x = 1$ găsim $y = -1$, adică d trece prin punctul de coordonate $(1, -1)$. Analog constatăm că d conține punctul $(-5, 3)$. Rezultă că ecuația dreptei d este echivalentă cu $\frac{x - 1}{-3} = \frac{y + 1}{2}$. De aici se obțin ecuațiile parametrice $x = 1 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Pentru fiecare $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ dreptele de ecuații $ax + by + c = 0$ și $t(ax + by + c) = 0$ coincid. Deci ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ reprezintă aceeași dreaptă dacă și numai dacă au coeficienți corespondenți proporționali.

Pentru $t = 0$ ecuația $t(ax + by + c) = 0$ reprezintă planul $\mathcal{P}$.

4) Considerăm dreapta d: $ax + by + c = 0$. Pentru trasarea dreptei d în raport cu reperul cartezian este necesar să determinăm fie un punct și panta, fie două puncte distincte.

5) Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Pentru a găsi ecuația carteziană a dreptei M_1M_2 ne putem servi de ecuația generală a unei drepte, $ax + by + c = 0$, a, b, c = parametri reali, $a^2 + b^2 \neq 0$, după cum urmează.

Punem condiția ca (x_1, y_1) și (x_2, y_2) să verifice ecuația generală. Rezultă sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

de două ecuații cu trei necunoscute (a, b, c), dintre care a și b nu se pot anula simultan. Se rezolvă sistemul precedent și valorile găsite pentru (a, b, c) se înlocuiesc în $ax + by + c = 0$.

PROBLEME

1. Știind că $M_0(3, 4)$ este piciorul perpendicularei coborîtă din origine pe dreapta d, să se scrie ecuația dreptei d.

Soluție. Dreapta d este determinată de punctul $M_0(3, 4)$ și de panta $-\frac{3}{4}$. De aceea ecuația carteziană implicită a dreptei d este $3(x - 3) + 4(y - 4) = 0$, adică $3x + 4y - 25 = 0$.

2. Se dau punctele $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ și dreapta $d : x - 4y + 7 = 0$. Să se determine coordonatele punctului $C \in d$ astfel încît triunghiul ABC să fie isoscel cu baza $[AB]$.

3. Să se scrie ecuațiile parametrice ale dreptei d' ce trece prin punctul $M_0(1, 2)$ și este perpendiculară pe dreapta d: $3x - 2y + 2 = 0$. Să se găsească proiecția lui M_0 pe d și simetricul lui M_0 față de d.

4. În patrulaterul convex $ABCD$, E este mijlocul laturii $[AB]$ și F mijlocul laturii $[CD]$. Să se demonstreze că dacă AB nu este paralelă cu CD, atunci mijloacele segmentelor $[AF]$, $[CE]$, $[BF]$, $[DE]$ sînt vîrfurile unui paralelogram. Să se arate că acest paralelogram nu poate fi romb sau pătrat.

Soluție. Fixăm reperul cartezian xOy ca în figura I.19 și notăm cu L, M, N, P mijloacele segmentelor specificate. Ținînd seama de ipotezele problemei putem scrie

$$F\left(\frac{d + b}{2}, \frac{e + c}{2}\right),\ L\left(\frac{d + b - 2a}{4}, \frac{e + c}{4}\right),\ M\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right),$$

$$N\left(\frac{d + b + 2a}{4}, \frac{e + c}{4}\right),\ P\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}\right),$$

unde $c > 0$, $e > 0$, $c \neq e$. Utilizînd pantele găsim $LM \parallel PN$, $LP \parallel MN$ și deci $LMNP$ este un paralelogram.

Dreapta LN este orizontală, iar dreapta PM este oblică. De aceea diagonalele $[LN]$ și $[PM]$ nu pot fi perpendiculare, adică $LMNP$ nu poate fi romb sau pătrat.

5. Se consideră funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a \mid x + 1 \mid + \mid x - 1 \mid + (2 - a)x - a - 1$, unde a este un parametru real. Să se determine valorile lui a pentru care f_a este bijectivă și apoi să se găsească inversa f_a^{-1}. Să se deseneze graficele funcțiilor f_a și f_a^{-1}.

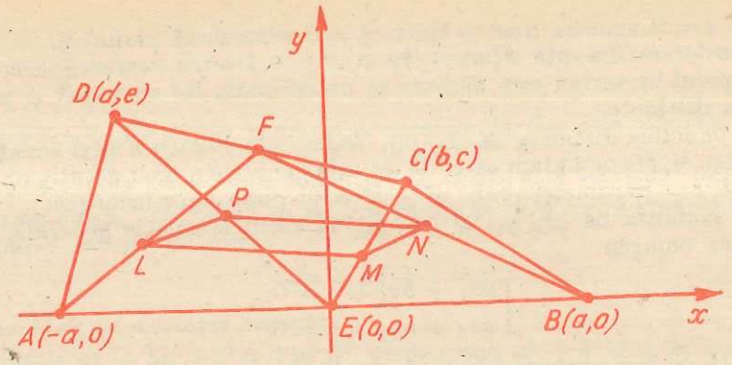


Fig. I.19

§ 8. Intersecția și reuniunea a două drepte

Două drepte sînt (1) paralele, (2) coincidente, (3) secante dacă și numai dacă intersecția lor este (1) mulțimea vidă, (2) o dreaptă (3) un punct (fig. I.20).

Fie două drepte de coeficienți unghiulari m_1 și m_2. Condiția de paralelism a lor este $m_1 = m_2$, iar condiția de perpendicularitate este $m_1 m_2 = -1$.

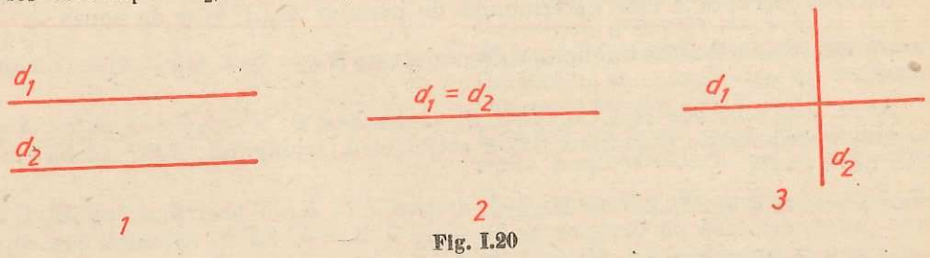


Fig. I.20

Fie $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Ținînd cont de pante rezultă imediat că dreptele d_1 și d_2 sînt (1) *paralele* dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (fig. I.21.1). (2) *coincidente* dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (fig. I.21.2), (3) *secante* dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă și numai dacă $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (fig. I.21.3).

Punctul de intersecție a dreptelor secante d_1, d_2 are proprietatea de a fi unicul punct ale cărui coordonate verifică simultan ambele ecuații ale dreptelor d_1 și d_2.

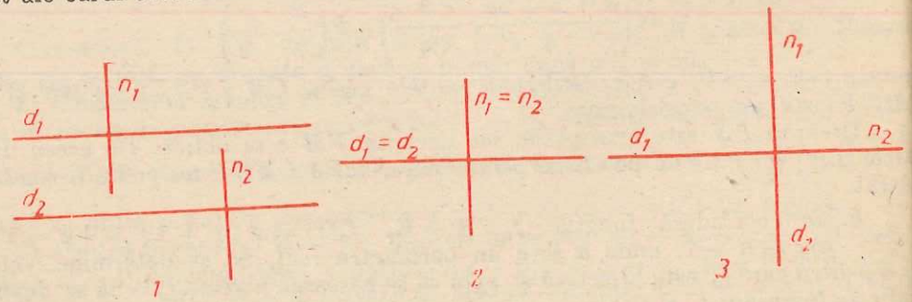


Fig. I.21

Așadar, coordonatele punctului de intersecție $\{M_0\} = d_1 \cap d_2$ reprezintă soluția sistemului

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Condiția ca trei drepte să fie concurente. Fie dreptele distincte $d_i : a_ix + b_iy + c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Pentru ca aceste drepte să fie concurente trebuie să existe un punct $M_0(x_0, y_0)$ și numai unul ale cărui coordonate să fie soluție a sistemului liniar

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0, \end{cases}$$

de trei ecuații cu două necunoscute (x, y). Se știe însă, de la algebră, că un asemenea sistem este compatibil determinat (soluție unică!) dacă și numai dacă

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 2.$$

Această egalitate se reține sub numele de *„condiția ca trei drepte să fie concurente"*.

Teoremă. *Dacă* $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, *atunci*

$$d_1 \cup d_2 : (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Demonstrație: Fie $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0\}$. Trebuie să arătăm că $d_1 \cup d_2 = \Gamma$ (fig. I.22), adică $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ și $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

Incluziunea $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ decurge din următorul șir de implicații: $(x_0, y_0) \in d_1 \cup d_2 \Rightarrow$ sau $(x_0, y_0) \in d_1$ sau $(x_0, y_0) \in d_2 \Rightarrow$ sau $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ sau $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \Rightarrow (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \Gamma$.

Reciproc: dacă $(x_0, y_0) \in \Gamma$, atunci $(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0$ și deci cel puțin un factor este zero, să zicem $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$; rezultă $(x_0, y_0) \in d_1 \subseteq d_1 \cup d_2$ și deci $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

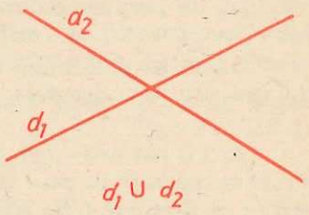


Fig. I.22

Comentarii. 1) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ cu $b^2 - 4ac > 0$ reprezintă două drepte distincte în plan, care trec prin origine. De exemplu, ecuația $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ reprezintă reuniunea dreptelor $x = y$ și $x = -3y$. Similar, ecuația $xy = 0$ reprezintă reuniunea axelor Ox și Oy etc.

2) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ cu $b^2 - 4ac < 0$, reprezintă un punct în plan și anume originea $O(0, 0)$.

PROBLEME

1. Se consideră dreptele $d_1 : x - 2y + 3 = 0$, $d_2 : 4x - y - 9 = 0$, $d_3 : 2x + 3y - 1 = 0$ care sînt suporturile laturilor $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[AC]$ ale triunghiului ABC.

1) Să se determine coordonatele vîrfurilor triunghiului ABC.

2) Să se scrie ecuațiile înălțimilor și ecuațiile medianelor triunghiului ABC.

Soluție parțială. 2) $AB: x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = -2$, unde m_1 este panta înălțimii corespunzătoare laturii $[AB]$ și ecuația înălțimii corespunzătoare este $y + 1 = -2(x - 2)$, care se mai scrie $2x + y - 3 = 0$. Pentru celelalte înălțimi se procedează în mod analog.

Dacă $A(-1, 1)$ și $B(3, 3)$ atunci mijlocul C' al laturii $[AB]$ va avea coordonatele $(1, 2)$. Deci $C'(1, 2)$ și

$$CC': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad CC': 3x + y - 5 = 0.$$

Analog se determină ecuațiile celorlalte mediane.

2. Se consideră punctele $O(0, 0)$; $A(6, 0)$; $B(1, 5)$; $C(0, 4)$. Să se arate că:
1) patrulaterul $OABC$ este inscriptibil;
2) picioarele perpendicularelor duse din origine pe laturile triunghiului ABC sînt coliniare.

Soluție parțială. 1) $OA = 6$, $OC = 4$, $AC = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$, $BC = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$, $OB = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$.

Evident $OC \perp OA$ dar $AC^2 = BC^2 + BA^2 \Rightarrow m(\hat{B}) = 90 \Rightarrow m(\hat{O} + \hat{B}) = 180$, deci patrulaterul este inscriptibil.

Variantă. Se verifică relația Ptolemeu $BC \cdot OA + OC \cdot AB = OB \cdot AC$. Într-adevăr, $\sqrt{2} \cdot 6 + 4 \cdot \sqrt{50} = \sqrt{52} \cdot \sqrt{26} \Leftrightarrow 26\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$.

2) Se scriu ecuațiile perpendicularelor din O pe laturi ținîndu-se seama de condiția de perpendicularitate a două drepte. După determinarea coordonatelor celor trei puncte, se verifică condiția de coliniaritate.

3. Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului determinat de dreptele $d_1: 4x - y + 2 = 0$, $d_2: x - 4y - 8 = 0$, $d_3: x + 4y - 8 = 0$.

4. Pe catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în exterior, pătrate în care vîrfurile opuse lui A sînt respectiv D și E. Să se demonstreze că dreptele CD, BE și înălțimea AH a triunghiului sînt concurente.

Indicație. Axele de coordonate se pot fixa prin dreptele AB și AC.

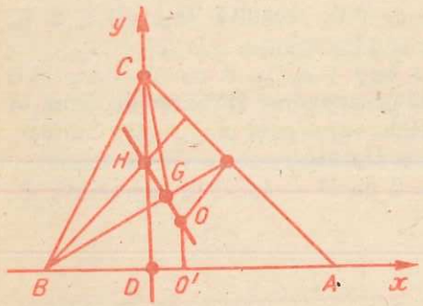


Fig. I.23

5. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că ortocentrul H, centrul de greutate G și centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC sînt coliniare.

Soluție. Se iau drept axe de coordonate latura BA și înălțimea DC. Se notează $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ și $C(0, c)$ (fig. I.23).

Înălțimea CD are ecuația $x = 0$. Deoarece coeficientul unghiular al dreptei AC este $-\frac{c}{a}$, se găsește ecuația înălțimii din $B: ax - by - ab = 0$. Rezultă $H\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$.

Mediana din B are ecuația $cx - (a - 2b)y - bc = 0$, iar cea din C are ecuația $2cx + (a + b)y - c(a - b) = 0$. Rezultă $G\left(\frac{a + b}{3}, \frac{c}{3}\right)$. De altfel acest lucru se putea obține direct cu formulele pentru coordonatele centrului de greutate.

Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuația $x = \frac{a + b}{2}$, iar mediatoarea segmentului $[CA]$ are ecuația $y - \frac{c}{2} = \frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{2}\right)$. De aceea $O\left(\frac{a + b}{2}, \frac{c^2 + ab}{2c}\right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a + b}{3} & \frac{c}{3} & 1 \\ \frac{a + b}{2} & \frac{c^2 + ab}{2c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

punctele H, G și 0 sînt coliniare.

Notă. Conținutul problemei este independent de fixarea unui reper cartezian în plan. De aceea se preferă sistemul de coordonate care ușurează calculele.

6. Se consideră mulțimea de puncte $M(x, y)$ ale căror coordonate verifică ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$. Să se arate că această mulțime este reuniunea a două drepte perpendiculare, care trec prin origine.

Soluție. Fie $\Gamma: 12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbb{R}^2$ este echivalentă cu ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbb{R}$, cu parametrul $y \in \mathbb{R}$.
Rezultă $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 4y)(4x + 3y) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$ sau $4x + 3y = 0$. Deci $\Gamma = d_1 \cup d_2$ unde $d_1: 3x - 4y = 0$ și $d_2: 4x + 3y = 0$. Deoarece $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$, condiția de perpendicularitate $m_1 m_2 = -1$ se verifică imediat.

7. Să se arate că fiecare dintre ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y - 45 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

reprezintă reuniunea a două drepte și să se rezolve sistemul.

§ 9. Fascicul de drepte

Presupunem că sînt date două drepte $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ care nu sînt paralele sau egale. Intersecția $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ este caracterizată prin sistemul liniar

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Reciproc, dacă se dă un punct $M_0(x_0, y_0)$, atunci el poate fi gîndit ca punctul de intersecție a dreptelor de ecuații $x = x_0$ și $y = y_0$. Este evident că prin M_0 trec o infinitate de drepte.

Definiție. Mulțimea tuturor dreptelor din plan care trec printr-un punct dat M_0 se numește fascicul de drepte. Punctul M_0 se numește vîrful fasciculului (fig. I.24).

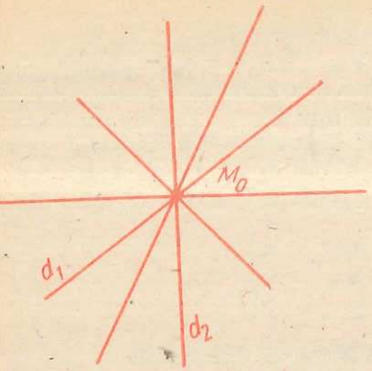


Fig. I.24

Teoremă. *Dacă punctul M_0 este determinat ca intersecție a dreptelor d_1 și d_2, atunci ecuația unei drepte oarecare din fasciculul de vîrf M_0 este*

$$r(a_1x + b_1y + c_1) + s(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

$$r^2 + s^2 \neq 0, \ (r, s) \in \mathbf{R}^2.$$

Demonstrație. Întrucît $(ra_1 + sa_2)^2 + (rb_1 + sb_2)^2 > 0$, pentru fiecare pereche $(r, s) \neq (0, 0)$, ecuația scrisă în teoremă, fiind de gradul întîi în necunoscutele x, y, reprezintă o dreaptă $d_{r,s}$. Într-adevăr, $ra_1 + sa_2 = 0$ și $rb_1 + sb_2 = 0$ unde $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ implică $r = s = 0$.

Deoarece $M_0(x_0, y_0)$ verifică ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, verifică și ecuația din teoremă, deci toate dreptele $d_{r,s}$ trec prin $M_0(x_0, y_0)$. Pe de altă parte, pentru fiecare $M_1(x_1, y_1)$ al planului, diferit de $M_0(x_0, y_0)$, există o singură dreaptă $d_{r,s}$ care trece prin M_1 și anume aceea pentru care (r, s) satisface

$$r(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) + s(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0, \ (r, s) \neq (0, 0).$$

Ecuația din teorema precedentă se numește *ecuația fasciculului de vîrf* M_0.

Numerele reale r și s sînt *parametri*, cel puțin unul fiind nenul. De aceea în aplicații se lucrează cu $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $t(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$, fie cu $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ și $a_1x + b_1y + c_1 + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0$.

Fie $d : ax + by = 0$ o dreaptă care trece prin origine. Direcția dreptei d (adică mulțimea tuturor dreptelor paralele sau egale cu d) se numește *fasciculul de drepte paralele*. Dreapta d se numește *linia de reper a fasciculului* (fig. I.25). Evident o dreaptă oarecare din fasciculul de drepte paralele cu linia de reper, are ecuația

$$ax + by + r = 0,$$

unde r este un parametru real. Această ecuație se mai numește și *ecuația fasciculului de drepte paralele*.

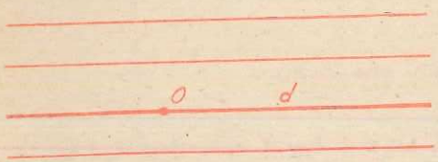


Fig. I.25

Observații. 1) Reuniunea dreptelor dintr-un fascicul este planul $\mathcal{P}$.

2) Ecuația fasciculului cînd se cunoaște vîrful $M_0(x_0, y_0)$ este $r(x - x_0) + s(y - y_0) = 0$, $(r, s) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

3) Trei drepte distincte sînt concurente dacă și numai dacă una dintre ele face parte din fasciculul determinat de celelalte două.

PROBLEME

1. Într-un reper cartezian se dau punctele $A(r, 0)$, $B(0, s)$ și $M(r, s)$. Să se scrie ecuația carteziană a perpendicularei din M pe AB. Să se arate că dacă A și B sînt variabile, astfel încît $r + s = 1$, atunci această perpendiculară trece printr-un punct fix.

Soluție. Fie h dreapta ce trece prin M și este perpendiculară pe AB (fig. I.26). Panta dreptei AB este $-\frac{s}{r}$. De aceea ecuația carteziană implicită a lui h este $-r(x-r) + s(y - s) = 0$, adică $rx - sy + s^2 - r^2 = 0$.

Pentru r, s variabile, condiția $r + s = 1$ implică $r(x + y - 2) + 1 - y = 0$, $\forall r \in \mathbf{R}$, adică h face parte din fasciculul de drepte al cărui vîrf este soluția sistemului $x + y - 2 = 0$, $1 - y = 0$, adică $(1, 1)$.

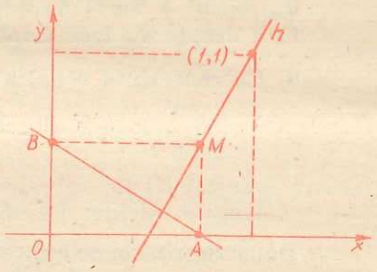


Fig. I.26

2. Se dau dreptele $AB : x - 2y + 3 = 0$, $AC : 2x - y - 3 = 0$, $BC : 3x + 2y + 1 = 0$.

Să se scrie ecuația carteziană a înălțimii din A și a medianei respective în triunghiul ABC.

Soluție. Dreptele AB și AC determină fasciculul de ecuație $r(x - 2y + 3) + s(2x - y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Aceasta se transcrie sub forma $x(r + 2s) + y(-2r - s) + 3(r - s) = 0$. Alegem dreapta din fascicul perpendiculară pe BC, adică punem condiția $3(r + 2s) + 2(-2r - s) = 0$. Rezultă $r = 4s$. Aceasta împreună cu ipoteza $s \neq 0$ conduce la ecuația $2x - 3y + 3 = 0$.

Variantă. Presupunînd $s \neq 0$ și notînd $\frac{r}{s} = t$, ecuația cu parametrii r, s se transcrie $t(x - 2y + 3) + 2x - y - 3 = 0$, sau după ordonare, $(2 + t)x - (1 + 2t)y - 3 + 3t = 0$.

Panta unei drepte oblice din această familie este $m = \frac{2 + t}{1 + 2t}$, $t \neq -\frac{1}{2}$.

Pe de altă parte panta dreptei BC este $m' = -\frac{3}{2}$.

Punem condiția de perpendicularitate $mm' = -1$ și obținem $t = 4$. După înlocuire, se obține ecuația înălțimii.

Pentru mediană se poate proceda analog.

3. Se dau patru drepte $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, $d'_1 : x - 2y + 3 = 0$, $d_2 : x + 3y - 2 = 0$, $d'_2 : -x + 2y + 3 = 0$.

1) Să se scrie ecuația carteziană a dreptei care trece prin punctele determinate de $d_1 \cap d'_1$ și $d_2 \cap d'_2$.

2) Să se găsească ecuația carteziană a dreptei care este paralelă cu d_1 și trece prin punctul determinat de $d_2 \cap d'_2$.

4. Fiind dat fasciculul de drepte $(1 - t)x + (2 - t)y + t - 3 = 0$, $t \in \mathbf{R}$ și $x + y - 1 = 0$, se cere:

1) să se determine vîrful fasciculului;

2) să se determine dreapta din fascicul care taie axele Ox și Oy respectiv în M, N astfel încît $OM^2 \cdot ON^2 = 4(OM^2 + ON^2)$.

5. Se consideră fasciculul de vîrf $M_0(5, 0)$. O dreaptă arbitrară din fascicul taie dreptele $d_1 : y - 2 = 0$ și $d_2 : y - 3 = 0$, respectiv în M_1 și M_2. Să se arate că paralela dusă prin M_1 la dreapta OM_2 trece printr-un punct fix.

6. Fie triunghiul ABC și punctul D fixat în planul triunghiului. Pe dreapta AB se consideră un punct variabil M a cărui proiecție pe dreapta AC se notează cu N. Fie E proiecția punctului A pe dreapta MD. Să se arate că dreapta NE trece printr-un punct fix.

7. Fie m un parametru real și dreapta variabilă
$d_m : x(m^3 + 2m + 1) + y(-2m^3 - m + 1) - 3m(m^2 + 1) = 0$.
Cîte drepte d_m trec printr-un punct (x, y) al planului? Discuție.

8. Ce reprezintă ecuația $\dfrac{1}{x + y + 1} = \dfrac{2}{x - y + 1}$?

§ 10. Calculul măsurii unui unghi

Două drepte concurente determină patru unghiuri astfel încît cele opuse sînt congruente, iar cele adiacente sînt suplementare. Ne propunem să găsim măsura în radiani a unuia dintre aceste patru unghiuri ținînd seama de ecuațiile dreptelor din care fac parte laturile unghiului respectiv.

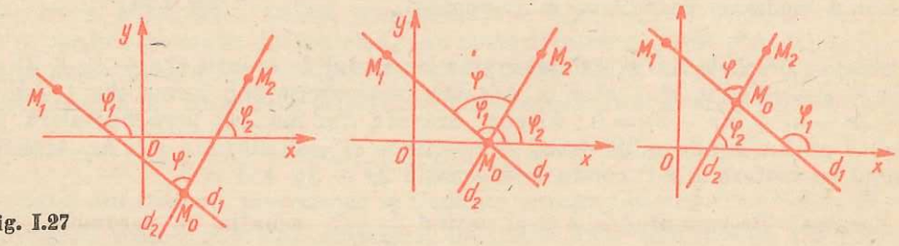


Fig. I.27

Fixăm reperul cartezian xOy și dreptele oblice $d_1 : y = m_1x + n_1$, $d_2 : y = m_2x + n_2$ concurente în punctul $M_0(x_0, y_0)$. Se știe că $m_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, unde φ_1 este măsura unghiului dintre d_1 și axa Ox, iar $m_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, unde φ_2 este măsura unghiului dintre d_2 și axa Ox. Fie $\widehat{M_1M_0M_2}$, $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$ unghiul ale cărei laturi intersectează simultan semiplanul superior (fig. I.27). Cunoscînd pantele m_1 și m_2, măsura φ a unghiului $\widehat{M_1M_0M_2}$ se poate determina în două moduri: 1) din $\operatorname{tg} \varphi_1 = m_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = m_2$ se găsesc $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ și apoi $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$; 2) relațiile $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ și ipoteza $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ implică $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}$ și deci măsura φ este soluția ecuației trigonometrice

$$(*) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}, \quad \varphi \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Evident, formula (*) se poate aplica fără precauții privind ordinea dintre φ_1 și φ_2, dar atunci prin ea se găsește fie măsura unghiului $\widehat{M_1M_0M_2}$, fie măsura suplementului său.

PROBLEME

1. Se dau dreptele $d_1 : x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$, $t \in \mathbf{R}$ și $d_2 : x - y + 1 = 0$.
1) Să se determine măsurile unghiurilor dintre d_1, respectiv d_2 și axa Ox.
2) Să se găsească măsura unghiului ale cărui laturi sînt incluse în d_1, respectiv d_2 și intersectează simultan semiplanul superior.

Soluție. 1) Eliminăm parametrul t și găsim ecuația carteziană explicită a lui d_1, adică $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{x}{2}$. Rezultă $\operatorname{tg} \varphi_1 = -\dfrac{1}{2}$ și deci $\varphi_1 = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
Analog $d_2 : y = x + 1$ și $\operatorname{tg} \varphi_2 = 1$, adică $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2) Deoarece $\varphi_1 > \varphi_2$, găsim $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{4} + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Dreptele $d_1 : x - 3y + 4 = 0$ și $d_2 : 2x - y - 5 = 0$ determină patru unghiuri. Să se găsească măsura unghiului al cărui interior conține originea.

3. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului fixat prin dreptele $d_1 : x + y = 0$, $d_2 : x - 2y = -1$, $d_3 : 2x - y - 1 = 0$.

4. Se consideră dreptele $d_m : x = \dfrac{2}{m} - \dfrac{y}{m^2}$, unde m este un parametru real nenul.
1) Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului?
2) În familia d_m există drepte paralele? Dar perpendiculare?
3) Să se arate că pentru fiecare $m_2^2 \in (1, \infty)$ există un singur $m_1^2 \in (0, 1)$ astfel încît $\mu(d_{m_1}, d_{m_2}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Soluție. 1) Răspunsul se obține din numărul soluțiilor ecuației $m^2x + 2m + y = 0$, cu necunoscuta $m \neq 0$ și parametrii reali (x, y). Se constată că prin fiecare punct al mulțimii $(Ox \cup Oy) - \{0\}$ trece o singură dreaptă d_m. Pentru $x \neq 0$ și $y \neq 0$ ecuația de gradul al doilea în m are soluții reale numai dacă $1 - xy \geqslant 0$. Rezultă: prin fiecare punct (x, y) caracterizat prin $xy = 1$ trece o singură dreaptă d_m, prin fiecare punct (x, y) care satisface relațiile $xy < 1$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ trec două drepte distincte, prin punctele (x, y) care satisfac relația $xy > 1$ nu trece nici o dreaptă.

2) $d_m \parallel d_{-m}$. Nu există drepte perpendiculare.

3) Fie $d_{m_1} : y = -m_1^2x + 2m_1$, $d_{m_2} : y = -m_2^2x + 2m_2$ și $m_1^2 < m_2^2$. Din $1 = \dfrac{-m_1^2 + m_2^2}{1 + m_1^2 m_2^2}$, rezultă $m_1^2 = \dfrac{m_2^2 - 1}{m_2^2 + 1}$. Această relație dovedește afirmația făcută în problemă.

5. Fie $A(p, 0)$, $B(q, 0)$, $C(p + q, p - q)$, unde p și q sînt numere întregi mai mari decît unu. Să se cerceteze dacă triunghiul ABC are un unghi obtuz.

§ 11. Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi

1. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan și h o dreaptă de ecuație carteziană implicită $ax + by + c = 0$. Fie $M_1(x_1, y_1)$ proiecția lui M_0 pe dreapta h (fig. I.28). Lungimea segmentului $[M_1M_0]$ se numește *distanța de la punctul M_0 la dreapta h* și se notează $d(M_0; h)$.

Să găsim expresia analitică a distanței $d(M_0; h)$. Pentru aceasta fie

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb, \quad t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

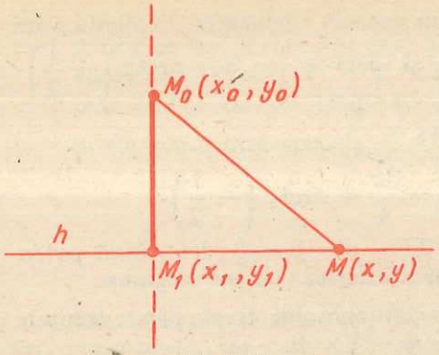


Fig. I.28

ecuațiile parametrice ale normalei dreptei h fixată de punctul M_0. Valoarea t_1 a lui t corespunzătoare punctului $M_1(x_1, y_1)$ satisface relația $a(x_0 + t_1 a) + b(y_0 + t_1 b) + c = 0$ și deci ea este

$$t_1 = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Numărul t_1, împreună cu formula distanței dintre două puncte, conduc la

$$d(M_0;\ h) = M_0M_1 =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = |t_1| \sqrt{a^2 + b^2}$$

și deci

$$d(M_0;\ h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Reținem această egalitate ca *formula distanței de la punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *la dreapta* $h : ax + by + c = 0$.

Comentariu. Ținînd seama că dintre toate segmentele $[M_0M]$, $M \in h$ (perpendiculară și oblice!) segmentul $[M_0M_1]$ are cea mai mică lungime, rezultă $d(M_0;\ h) = \min\limits_{M \in h} d(M_0,\ M)$. Prezența coordonatelor și faptul că minimul distanței se atinge dată cu minimul pătratului ei, fac posibilă tratarea acestei probleme de minim ca minimul unui trinom de gradul al doilea.

2. Fie punctele distincte $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ și dreapta

$$M_2M_3 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $M_1(x_1, y_1)$ este un alt punct din plan și dacă notăm

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

atunci

$$d(M_1;\ M_2M_3) = \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

și în consecință aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este dată de formula

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2}|\Delta|.$$

PROBLEME

1. Într-un reper cartezian xOy se dau punctele $A(1, -1)$, $B(3, 2)$ și se cere:

1) Să se scrie ecuația carteziană implicită a dreptei AB și să se găsească distanța de la origine la dreapta AB.

2) Să se determine distanța de la punctul $C(-1, 3)$ la dreapta AB și să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul C și este echidistantă de punctele A și B.

Soluție parțială. 1) Ecuația sub formă de rapoarte a dreptei AB ia forma echivalentă $3x - 2y - 5 = 0$. Rezultă

$$d(O,\ AB) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

Ecuația fasciculului de drepte de vîrf C se scrie $r(y - 3) + s(x + 1) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. După ordonare, în raport cu x și y, ecuația devine $sx + ry + s - 3r = 0$. Se calculează distanțele de la A respectiv B la dreapta dată de ecuația precedentă și după egalare se determină r și s.

2. Să se calculeze lungimile înălțimilor triunghiului de vîrfuri $A(2, 1)$, $B(6, -1)$, $C(4, 4)$.

3. Se consideră dreptele $d_1 : 3x + 4y - 6 = 0$ și $d_2 : 3x + 4y + 5 = 0$. Să se arate că sînt paralele și să se calculeze distanța dintre ele. Generalizarea pentru drepte paralele oarecare.

Indicație. $m_1 = m_2 = -\frac{3}{4}$, deci $d_1 \parallel d_2$, apoi se calculează distanța de la un punct al unei drepte la cealaltă dreaptă. Pentru cazul general se procedează analog.

4. Se dau punctul $M(3, 3)$ și triunghiul ABC determinat de dreptele $AB : x + 2y - 4 = 0$, $BC : 3x + y - 2 = 0$, $CA : x - 3y - 4 = 0$.

1) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

2) Fie P, Q, R proiecțiile punctului M respectiv pe OA, OB și AB. Să se demonstreze că punctele P, Q, R sînt coliniare.

3) Să se scrie ecuația fasciculului de drepte determinat de dreptele AB și PQ. Să se găsească ecuația dreptei din fascicul, care trece prin punctul $N(0, 5)$.

Soluție. (fig. I.29). 1) $\{A\} = AB \cap CA \Rightarrow A(4, 0)$, $\{B\} = AB \cap BC \Rightarrow B(0, 2)$, $\{C\} = BC \cap CA \Rightarrow C(1, -1)$. Ținînd seama de formulă găsim $\sigma[ABC] = \frac{1}{2}|\Delta| = 5$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

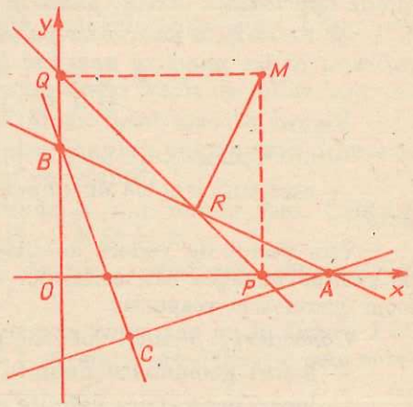


Fig. I.29

2) Dreapta MR are ecuația carteziană explicită $y - 3 = 2(x - 3)$. De aceea $\{R\} = AB \cap MR \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0 \Rightarrow R(2, 1)$. Ținînd seama că $P(3, 0)$, $Q(0, 3)$, se verifică condiția de coliniaritate,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Ecuația fasciculului determinat de dreptele AB și $PQ : x + y - 3 = 0$ este $r(x + 2y - 4) + s(x + y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Dreapta din fascicul care trece prin $N(0, 5)$ corespunde valorilor r și s care verifică condiția $3r + s = 0$, $s \neq 0$. Ecuația acestei drepte este $2x + y - 5 = 0$.

5. Să se găsească un punct M în interiorul triunghiului ABC astfel încît triunghiurile MAB, MBC, MCA, să aibă arii egale.

Indicaţie. Dacă notăm $M(a, b)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ se obţine $a = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $b = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, adică centrul de greutate al triunghiului.

6. Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$ avînd vîrfurile $A(-2, 2)$, $B(-3, -1)$, $C(-2, -3)$, $D(2, 0)$.

§ 12. Locuri geometrice

O mulţime de puncte din plan, definită prin specificarea unor proprietăţi geometrice ale elementelor sale, se numeşte *loc geometric.*

În esenţă, problemele de loc geometric sînt probleme de găsire a unor proprietăţi echivalente celor prin care este dată o anumită mulţime, sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulţimi. Dar rezolvarea unei probleme de tipul (1) *„punctele unei mulţimi au proprietatea P dacă şi numai dacă au proprietatea Q"* nu este totuna cu rezolvarea unei probleme de tipul (2) *„să se găsească locul geometric al punctelor care au proprietatea P"*. În general, în problema (2) proprietatea P este dată astfel încît nu este evident cu ce figură geometrică avem de-a face (ipoteză!), iar proprietatea Q nu este specificată. Ea poate fi aleasă de rezolvitor din mulţimea proprietăţilor echivalente cu P de aşa manieră încît să poată spune cu ce figură geometrică este echivalentă mulţimea dată iniţial.

Rezolvarea efectivă a unei probleme de loc geometric constă în următoarele:

1) *Verificarea existenţei unui punct care posedă proprietatea dată, adică stabilirea faptului că mulţimea dată este vidă sau nu.*

2) *Se consideră un punct (variabil) care posedă proprietatea dată şi se stabileşte apartenenţa acestui punct la o figură geometrică $\mathcal{F}$.*

3) *Se verifică dacă orice punct al lui $\mathcal{F}$ convine, adică se analizează dacă este suficient ca un punct să aparţină lui $\mathcal{F}$ pentru a avea proprietatea specificată. De cele mai multe ori reiese că nu putem accepta decît o parte $\mathcal{F}'$ a lui $\mathcal{F}$.*

Figura $\mathcal{F}'$ este locul căutat deoarece:

— orice punct care posedă proprietatea dată aparţine necesar lui $\mathcal{F}'$;

— este suficient ca un punct să aparţină lui $\mathcal{F}'$ pentru a avea proprietatea dată.

Din punct de vedere analitic determinarea unui loc geometric se bazează pe găsirea ecuaţiei sau ecuaţiilor care precizează mulţimea din care face parte locul geometric respectiv.

Comentariu. Printre locurile geometrice se disting două tipuri importante:

— locuri geometrice definite printr-o relaţie metrică,

— locuri geometrice definite ca intersecţie a două familii de curbe ce depind de acelaşi parametru.

Pentru primul tip de loc geometric este suficient ca într-un reper cartezian convenabil ales, să se transforme relaţia metrică într-una analitică. Se găseşte astfel relaţia ce trebuie să existe între coordonatele x, y ale unui punct curent M şi se recunoaşte curba loc geometric.

În cel de al doilea caz, de regulă punctul curent $M(x, y)$, care descrie locul geometric, apare dintr-un sistem de tipul $f(x, y, t) = 0$, $g(x, y, t) = 0$, unde t este un parametru real. Prin eliminarea parametrului t, se obţine ecuaţia carteziană a locului geometric. Uneori este mai simplu să se determine ecuaţiile parametrice ale locului geometric $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ urmînd, dacă este cazul, să se elimine t şi să se obţină ecuaţia carteziană implicită sau explicită.

PROBLEME

1. Fie $A(1, 3)$, $B(3, 7)$. Se cer locurile geometrice ale punctelor M ce satisfac respectiv condiţiile:

1) $MA^2 - MB^2 = 1$; 2) $MA^2 - MB^2 \leqslant 1$; 3) $MA \perp MB$.

Soluţie. Fie $M(x, y)$. Atunci $MA^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$, $MB^2 = (x-3)^2 + (y-7)^2$, $m_{MA} = \frac{y-3}{x-1}$, $m_{MB} = \frac{y-7}{x-3}$.

1) Condiţia dată este echivalentă cu $(x-1)^2 + (y-3)^2 - (x-3)^2 - (y-7)^2 = 1$, adică $4x + 8y - 49 = 0$. Locul este o dreaptă d perpendiculară pe AB în punctul $\left(\frac{41}{20}, \frac{51}{10}\right)$.

2) Locul este semiplanul determinat de $d: 4x + 8y - 49 = 0$ şi de origine, adică $4x + 8y - 49 \leqslant 0$.

3) Utilizînd condiţia $m_1 m_2 = -1$ găsim ecuaţia locului geometric, $(y-3)(y-7) + (x-1)(x-3) = 0$ sau $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 24 = 0$ sau $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 5$.

2. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este *reuniunea bisectoarelor unghiurilor acestor drepte.* Să se determine ecuaţiile celor două bisectoare.

Soluţie. Fie dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (condiţia de concurenţă) şi $M(x, y)$ un punct egal depărtat de d_1 şi d_2. Relaţia metrică $d(M, d_1) = d(M, d_2)$ este echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ţinînd seama de proprietăţile modulelor rezultă ecuaţiile celor două bisectoare

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

3. Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă.

Soluţie. Fie A şi B două puncte fixe distincte şi k un număr real. Căutăm locul geometric al punctelor M pentru care $MA^2 - MB^2 = k$.

Fie $k = 0$; atunci $MA = MB$ şi deci M descrie mediatoarea segmentului $[AB]$.

Fie $k \neq 0$ şi O mijlocul lui $[AB]$. Fixînd reperul cartezian ca în figura I.30 rezultă $O(0, 0)$, $M(x, y)$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $a > 0$ şi relaţia de definiţie este echivalentă cu $[(x+a)^2 + y^2)] - [(x-a)^2 + y^2] = k$, adică $x = \frac{k}{4a}$. Astfel M aparţine dreptei $d: x = \frac{k}{4a}$, perpendiculară pe AB, care taie pe AB în punctul $C\left(\frac{k}{4a}, 0\right)$. Reciproc orice punct $M \in d$ satisface condiţia iniţială şi deci locul geometric căutat este dreapta d.

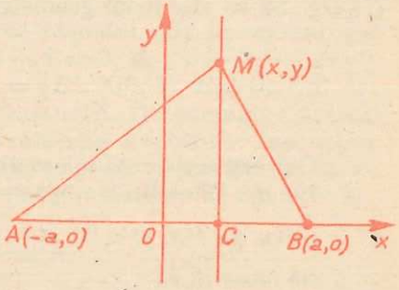


Fig. I.30

4. Să se găsească locul geometric al punctelor situate la aceeaşi distanţă de o dreaptă dată.

5. Fie un fascicul de drepte paralele astfel încît linia de reper să fie diferită de axele de coordonate. O dreaptă arbitrară din fascicul taie axele de coordonate în puncte distincte A și B. Dacă C și D sînt vîrfurile opuse originii în pătrate de laturi $[OA]$, respectiv $[OB]$, să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AD și BC.

Soluție. Ecuația fasciculului de drepte paralele cu linia de reper $y = mx$, $m \neq 0$ este $d_t : y = mx + t$, $m \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. $d_t \cap Ox = \{A\}$ și se găsește $A\left(-\frac{t}{m}, 0\right)$, $d_t \cap Oy = \{B\}$, de unde avem $B(0, t)$. Scriem imediat coordonatele lui C și D și anume $C\left(-\frac{t}{m}, \frac{t}{m}\right)$ și $D(t, t)$. Acestea sînt puncte distincte în ipoteza $t \neq 0$. Obținem:

$$AD : mx + (m-1)y + t = 0, \quad BC : (1-m)x + y - t = 0.$$

Fiind un loc geometric rezultat din intersecții, este suficient să eliminăm parametrul t între cele două ecuații ale dreptelor. Aceasta se rezolvă prin adunarea ecuațiilor. Deci, locul geometric are ecuația $x + my = 0$, adică este o dreaptă ce trece prin origine, perpendiculară pe linia de reper.

6. Se consideră un triunghi isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$ și punctele variabile $P \in [AB]$, $Q \in [AC]$ astfel ca $[BP] \equiv [AQ]$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[PQ]$.

Indicație. Prin BC se fixează axa Ox și prin mediatoarea segmentului $[BC]$ se fixează Oy. În acest sistem cartezian de coordonate, vom avea $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(-b, 0)$. Se obține locul geometric $y = \frac{a}{2}$, $x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$, adică linia mijlocie corespunzătoare triunghiului.

7. Se dau dreptele fixe $d : y = 1$, $d' : y = 2$ și dreapta variabilă $d_\alpha : y = \frac{x}{\sin\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Fie $\{A_\alpha\} = d \cap d_\alpha$, $\{B_\alpha\} = d' \cap d_\alpha$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $[A_\alpha B_\alpha]$.

8. Fie dreptele $d_\lambda : x - (1-\lambda)y = 0$, $d'_\lambda : (\lambda - 1)x - y - \lambda + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Se notează $\{A_\lambda\} = d_\lambda \cap Ox$, $\{B_\lambda\} = d'_\lambda \cap Oy$. Să se determine locul geometric al centrului de greutatate al triunghiului determinat de dreptele d_λ, d'_λ și $A_\lambda B_\lambda$.

9. Se dau punctele A, B, C, D astfel încît $AB \cap CD = \{P\}$. Să se afle locul geometric al punctelor M astfel ca $\sigma[ABM] = \sigma[CDM]$.

10. Se dă un paralelogram $ABCD$. O paralelă la AB taie laturile AD și BC, respectiv în M și N, iar o paralelă la AD taie laturile AB și CD, respectiv în P și Q. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor PN și MQ.

11. Un unghi drept ABC se rotește în jurul vîrfului său B menținînd $A \in Ox$, $C \in Oy$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[AC]$.

§ 13. Semiplane

O dreaptă d din plan are proprietatea că separă planul $\mathcal{P}$ în două submulțimi. Fie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$. Definim mulțimile

$$\mathcal{P}^- = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}, \quad d = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}, \quad \mathcal{P}^+ = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}.$$

Se observă că

$$\mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+ = \emptyset, \quad \mathcal{P}^- \cup d \cup \mathcal{P}^+ = \mathcal{P}.$$

Teoremă (fig. I.31). 1) *Mulțimile* $\mathcal{P}^-$, $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^- \cup d$, $\mathcal{P}^+ \cup d$ *sînt convexe.*

2) $\forall M_1 \in \mathcal{P}^-$, $\forall M_2 \in \mathcal{P}^+$, *segmentul care unește* M_1 *cu* M_2 *intersectează pe* d.

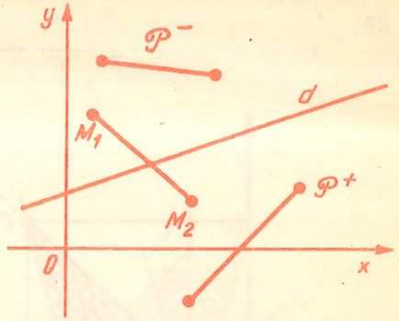


Fig. I.31

Demonstrație. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Segmentul $[M_1M_2]$, care unește pe M_1 cu M_2, are ecuațiile parametrice $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$.

1) Presupunem $M_i(x_i, y_i) \in \mathcal{P}^-$, $i = 1, 2$, adică $f(x_i, y_i) = ax_i + by_i + c < 0$, $i = 1, 2$. Deoarece $f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) < 0$ $\forall t \in [0, 1]$, rezultă $[M_1M_2] \subset \mathcal{P}^-$. Astfel $\mathcal{P}^-$ este convexă. Pentru celelalte mulțimi se procedează analog.

2) Presupunem $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P}^-$, adică $f(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c < 0$, $M_2(x_2, y_2) \in \mathcal{P}^+$, adică $f(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c > 0$. Rezultă $\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) = (1-t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2)$, $t \in [0, 1]$.

Deoarece $\varphi([0, 1])$ este segmentul din $\mathbf{R}$ care unește pe $\varphi(0) = f(x_1, y_2) < 0$ cu $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$, există o valoare $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît

$$0 = \varphi(t_0) = a((1-t_0)x_1 + t_0x_2) + b((1-t_0)y_1 + t_0y_2) + c.$$

Deci $d \cap [M_1M_2] = \{((1-t_0)x_1 + t_0x_2, (1-t_0)y_1 + t_0y_2)\}$.

În această demonstrație am admis că un punct separă mulțimea $\mathbf{R}$ în două submulțimi. Mulțimile $\mathcal{P}^-$ și $\mathcal{P}^+$ se numesc *semiplane deschise*, iar mulțimile $\mathcal{P}^- \cup d$, $\mathcal{P}^+ \cup d$ se numesc *semiplane închise*. Dreapta d se numește *frontiera semiplanelor*.

Avînd în vedere că f păstrează semn constant pentru punctele unui semiplan, pentru aflarea acestui semn se recurge la metoda sondajului: se alege un punct particular (x_0, y_0) (de obicei, dacă este posibil, $(0, 0)$) și se vede ce semn are numărul $f(x_0, y_0)$. În semiplanul opus f are semn contrar. Deoarece semiplanele sînt mulțimi convexe, orice intersecție de semiplane este o mulțime convexă.

Comentariu. Soluțiile inecuațiilor de gradul întîi în două necunoscute x și y, sau soluțiile sistemelor de inecuații de acest tip, se concretizează ca regiuni din planul cartezian xOy folosind separarea planului în semiplane prin drepte.

PROBLEME

1. Să se rezolve următorul sistem de inecuații

$$4x - y < 8, \quad x - y + 1 > 0, \quad x + 2y - 2 > 0.$$

Soluție. Pentru rezolvare se va folosi separarea planului xOy în regiuni. Se trasează dreptele $d_1 : 4x - y - 8 = 0$, $d_2 : x - y + 1 = 0$, $d_3 : x + 2y - 2 = 0$ și se determină $d_1 \cap d_2 = \{C\}$, $d_2 \cap d_3 = \{A\}$, $d_3 \cap d_1 = \{B\}$, $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $C(3, 4)$. Se hașurează semiplanele corespunzătoare fiecărei inecuații. De exemplu: notînd $f(x, y) = 4x - y - 8$ avem $f(0, 0) = -8 < 0$ și ca mulțime a soluțiilor inecuației $4x - y - 8 < 0$ corespunde semiplanul în care se află originea sistemului de coordonate. Procedînd analog se găsește că mulțimea soluțiilor sistemului dat este interiorul triunghiului ABC (fig. I.32).

2. Să se rezolve următoarele sisteme de inecuații:

$$1) \begin{cases} x + y - 1 > 0, \\ |2x - y + 1| + |x - y| = 0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0, \\ x + 2y \leqslant 0. \end{cases}$$

3. Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 1)$, $D(-1, 2)$. Să se găsească inegalitățile care descriu suprafața patrulateră convexă $[ABCD]$.

4. Să se arate că locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor $d_\alpha: x + y = \alpha$, $d'_\alpha: x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ este semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geqslant 1$.

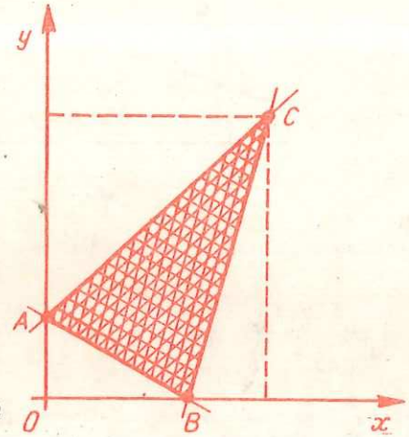


Fig. I.32

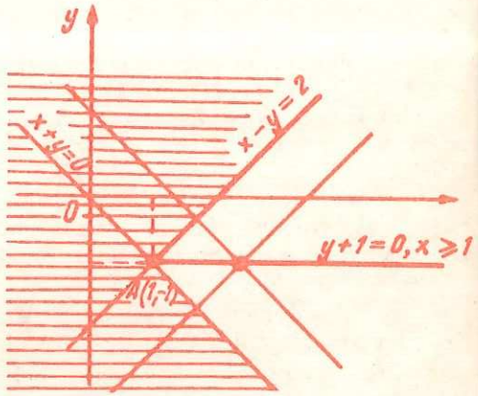


Fig. I.33

Soluție. Dreptele d_α sînt situate în semiplanul închis $x + y \geqslant 0$, iar dreptele d'_α sînt situate în semiplanul închis $x - y \geqslant 2$. De aceea locul geometric se va afla în zona nehașurată din figura I.33.

Eliminînd parametrul α din $x + y = \alpha$, $x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ rezultă semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geqslant 1$.

5. Fie ecuația

$$\text{(E)}\quad x^2(\operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2xy \operatorname{tg} \varphi + y^2 \sin^2 \varphi = 0,$$

$$\text{unde}\quad \varphi \neq k\pi;\ (2l + 1)\frac{\pi}{2},\quad k, l \in \mathbf{Z}.$$

1) Se consideră ecuația (E) ca avînd necunoscutele x și y și parametrul φ; se notează cu α și β unghiurile pe care le fac cu axa Ox dreptele definite prin (E). Să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$. Apoi, presupunînd $\varphi = \frac{\pi}{4}$, să se scrie ecuația comună a bisectoarelor unghiurilor formate din cele două drepte.

2) Considerînd ecuația (E) ca avînd necunoscuta φ și parametrii x și y să se determine regiunea din planul xOy pentru care ea admite soluții.

Soluție. 1). Se observă că $x = 0$ implică $y = 0$ și reciproc. Apoi, pentru $x \neq 0$, ecuația (E) se transcrie

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0.$$

Rezultă

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi - \cos^4 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm 1.$$

Astfel $\operatorname{tg} \alpha$ și $\operatorname{tg} \beta$ pot avea valorile $\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm 1$. De aceea $|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta| = 2$.

Pentru $\varphi = \frac{\pi}{4}$ găsim dreptele $y = 3x$ și $y = x$. Bisectoarele unghiurilor determinate de ele sînt $\frac{y - 3x}{\sqrt{10}} = \pm \frac{y - x}{\sqrt{2}}$. Ecuația comună este

$$\left(\frac{y - 3x}{\sqrt{10}} - \frac{y - x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y - 3x}{\sqrt{10}} + \frac{y - x}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \text{sau} \quad x^2 + xy - y^2 = 0.$$

2) Pentru $x \neq 0$ se observă că ecuația (E) este echivalentă cu $\frac{y}{x} = \frac{2}{\sin 2\varphi} \pm 1$ sau cu $\sin 2\varphi = \frac{2x}{y \pm x}$. Aceasta are soluții numai dacă $\left|\frac{2x}{y \pm x}\right| \leqslant 1$. Explicitînd modulele găsim că punctul (x, y) trebuie să se afle în intersecția regiunilor: $x > 0$, $y + x < 0$; $x > 0$; $y - 3x \geqslant 0$; $x < 0$, $y + x > 0$; $x < 0$, $y - 3x \leqslant 0$; $x > 0$, $y - x > 0$; $x > 0$, $y + 3x \leqslant 0$; $x < 0$, $y + 3x \geqslant 0$; $x < 0$, $y - x < 0$, adică în porțiunea dublu hașurată din figura I.34.

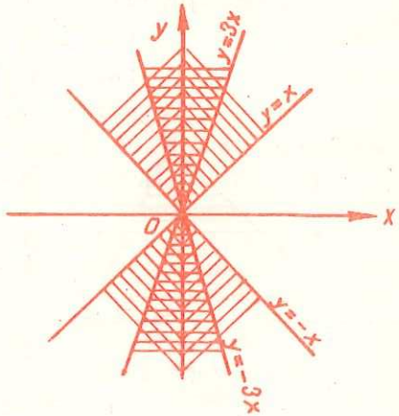


Fig. I.34

6. Se consideră un romb $ABCD$ cu $AB = \sqrt{5}$, $AC = 2$ și se fixează un reper cartezian convenabil. Să se determine ecuațiile și inecuațiile care caracterizează laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ și suprafața $[ABCD]$ în raport cu reperul fixat.

Indicație. Prin diagonalele AC și BD se fixează axele Ox respectiv Oy. Vîrfurile rombului vor avea următoarele coordonate $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -2)$. Se scriu ecuațiile care caracterizează suporturile laturilor și inegalitățile care descriu suprafața $[ABCD]$.

7. Să se determine semnul coeficientului unghiular al dreptei date prin ecuația $(a + b + 1)x + (2a - b)y - 2a - 5 = 0$, ai cărei coeficienți depind de coordonatele unui punct $P(a, b)$, raportat la reperul cartezian aOb.

8. Știind că a și b sînt doi parametri reali, să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$x^2 - 2ax + (b + 2)^2 = 0.$$

Indicație. Discuția se organizează după regiunile corespunzătoare din planul aOb.

9. Să se determine ariile următoarelor suprafețe poligonale convexe

$$1)\ \begin{cases} -x + 2y \leqslant 2, \\ 3x - 2y \leqslant 6, \\ x + y \leqslant 3, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x + y \leqslant 10, \\ x + 2y \leqslant 8, \\ 4x - y \geqslant 5, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} \frac{x}{60} + \frac{y}{40} \geqslant 1, \\ x + y \leqslant 70, \\ x \geqslant 25,\ y \geqslant 14. \end{cases}$$

10. Se dau punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Să se arate că mulțimea $\{M(rx_1 + sx_2, ry_1 + sy_2) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ este un paralelogram (suprafață), precizînd laturile și vîrfurile. Să se calculeze aria acestui paralelogram.

§ 14. Probleme de programare liniară în două variabile

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$.

Teoremă. *Dacă funcţia f se anulează în trei puncte distincte necoliniare, atunci ea este nulă peste tot.*

Demonstraţie. Fie $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Ipotezele

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

implică $a = b = c = 0$ şi deci $f(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Consecinţă. Dacă f ia valori egale în trei puncte distincte necoliniare, atunci f este o funcţie constantă.

Teoremă. *Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o suprafaţă poligonală convexă (privită ca intersecţie de semiplane), iar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$ este neconstantă, atunci fiecare dintre numerele $\min\limits_{(x,y)\in S} f(x, y)$ sau $\max\limits_{(x,y)\in S} f(x, y)$ este atins cel puţin într-un vîrf al lui S şi cel mult pe o latură a lui S.*

Demonstraţie. Ecuaţia $ax + by + c - f = 0$ reprezintă un fascicul de drepte paralele cu linia de reper $\Delta_c : ax + by = 0$. Se observă că distanţa de la $O(0, 0)$ la dreapta $\Delta_f : ax + by + c - f = 0$ este

$$d = \frac{|f - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

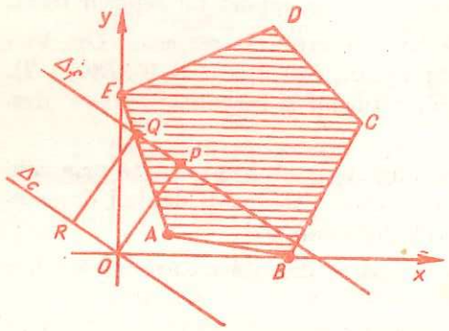


Fig. I.35

Această relaţie arată că extremele funcţiei $f - c$ sînt proporţionale cu extremele lui d. Ducînd $OP \perp \Delta_f$, $RQ \perp \Delta_f$ (fig. I. 35) avem $RQ = d$ şi deci extremele lui d vor fi atinse cel puţin în unele vîrfuri ale lui S şi cel mult pe o latură a lui S.

Generalizare. Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o intersecţie de semiplane care posedă cel puţin un vîrf, atunci unul dintre numerele $\min\limits_{(x,y)\in S} f(x, y)$ sau $\max\limits_{(x,y)\in S} f(x, y)$, acel care există, este atins cel puţin într-un vîrf al lui S.

Problemele de programare liniară în două variabile sînt probleme de următorul tip: *să se determine minimul sau maximul funcţiei* $(x, y) \to f(x, y) = ax + by + c$ cu restricţiile $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $a_i x + b_i y \geqslant c_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Aceste probleme sînt frecvente în următoarele sectoare de activitate: planificarea optimă a producţiei, determinarea compoziţiei optime a amestecurilor furajere, determinarea meniului optim, repartizarea optimă a pieselor pe maşini-unelte, repartizarea optimă a culturilor agricole, repartizarea optimă a transporturilor etc.

Avînd în vedere teorema precedentă, rezolvarea unui program liniar în două variabile se poate face în felul următor. Se trasează dreptele de ecuaţii $x = 0$, $y = 0$, $a_i x + b_i y = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, şi ţinînd seama de teorema referitoare la separarea planului în regiuni se pune în evidenţă mulţimea convexă S. Se determină vîrfurile lui S şi apoi se compară valorile lui f în aceste puncte. Evident această metodă nu este eficientă decît dacă numărul de restricţii este relativ mic.

PROBLEME

1. Să se rezolve probleme de programare liniară cu următoarele date:

1) $f(x, y) = x + y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x - y \geqslant 2$, $x - 2y \leqslant 2$, $x + y \geqslant 5$.

2) $f(x, y) = 2x + 3y$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 12$.

3) $f(x, y) = 1{,}2x + 1{,}6y$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\dfrac{x}{25} + \dfrac{y}{30} \leqslant 1$,

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{35} \leqslant 1, \quad \frac{x}{35} + \frac{y}{25} \leqslant 1.$$

Soluţie. 1) Fie dreptele $d_1 : 2x - y - 2 = 0$, $d_2 : x - 2y - 2 = 0$, $d_3 : x + y - 5 = 0$. Condiţiile $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ arată că mulţimea convexă S este situată în primul cadran al reperului xOy. Punctele de pe laturile şi din interiorul patrulaterului $ABCD$ din figura I.36 satisfac restricţiile problemei, unde $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(4, 1)$, $D\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$. Avem $f(A) = 1$, $f(B) = 2$, $f(C) = 5$, $f(D) = 5$ şi deci $\min f(x, y) = 1$ şi se realizează în A, iar $\max f(x, y) = 5$ şi se atinge în orice punct al laturii $[CD]$.

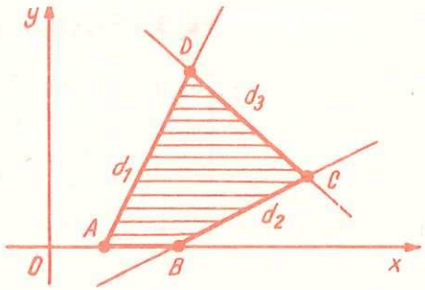


Fig. I.36

2. Un atelier produce două tipuri de piese A şi B. Tipul A este calitativ superior tipului B. Beneficiul net este de 2 lei pentru tipul A şi de 1,5 lei pentru tipul B. Timpul de fabricaţie pentru tipul A este de două ori mai mare decît timpul de fabricaţie pentru B. Dacă toate piesele ar fi de tipul B, atelierul ar putea produce 1 000 piese pe zi. Aprovizionarea cu materiale ajunge pentru 800 piese (tipul A şi B), iar capacitatea atelierului este cel mult 400 piese de tipul A şi 700 piese de tipul B.

Cîte piese de tipul A şi cîte de tipul B trebuie fabricate într-o zi pentru ca beneficiul total al atelierului să fie maxim?

Soluţie. Fie x şi y numărul de piese de tipul A respectiv B. Restricţiile sînt

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 400, \ 0 \leqslant y \leqslant 700 \\ x + y \leqslant 800 \\ 2x + y \leqslant 1\,000, \end{cases}$$

iar funcţia de optimizat este definită prin $f(x, y) = 2x + \dfrac{3}{2} y$. Construim dreptele de ecuaţii $x = 400$, $y = 700$, $x + y = 800$, $2x + y = 1\,000$ şi astfel obţinem hexagonul $OABCDE$ unde $O(0, 0)$, $A(0, 700)$, $B(100, 700)$, $C(200, 600)$, $D(400, 200)$, $E(400, 0)$ (fig. I. 37). Punctele din interiorul şi de pe laturile acestui hexagon satisfac restricţiile problemei.

Deoarece $f(0, 0) = 0$, $f(0, 700) = 1050$, $f(100, 700) = 1\,250$, $f(200, 600) = 1\,300$, $f(400, 200) = 1\,100$, $f(400, 0) = 800$ rezultă că punctul de maxim este $C(200, 600)$, iar $\max f(x, y) = 1\,300$.

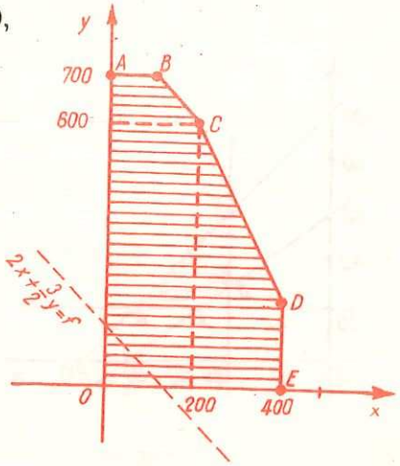


Fig. I.37

3. O secție a unei fabrici produce două tipuri de aparate. Pentru aceasta are nevoie de piese furnizate de o altă întreprindere, fiind însă obligată să comande zilnic cel puțin o cantitate de piese din care s-ar putea face 80 de aparate de primul tip sau 60 de aparate de al doilea tip. Capacitatea de montaj este de cel mult 100 de aparate pe zi din ambele tipuri. Zilnic sînt solicitate la vînzare cel puțin 40 de aparate de primul tip și cel puțin 30 de aparate de al doilea tip. Pentru realizarea unui aparat de primul tip se cheltuiesc 2 000 lei, iar pentru realizarea unui aparat de al doilea tip se cheltuiesc 4 000 lei. Să se stabilească planul de producție zilnic care se realizează cu minimum de cheltuieli.

Soluție. Notînd cu x și y numărul de aparate sîntem conduși la următoarele restricții

$$\begin{cases} \dfrac{ax}{80} + \dfrac{ay}{60} \geqslant a, \\ x + y \leqslant 100, \\ x \geqslant 40,\ y \geqslant 20, \\ x, y = \text{numere întregi, iar } a \text{ este cantitatea} \\ \qquad \text{minimă de piese impusă de furnizori.} \end{cases}$$

Funcția obiectiv reprezintă cheltuielile, adică $f(x, y) = 2\,000x + 4\,000y$. Lăsînd deoparte condiția $x, y =$ întregi, patrulaterul restricțiilor $ABCD$ are vîrfurile $A\left(\frac{160}{3}, 20\right)$, $B(80, 20)$, $C(40, 60)$, $D(40, 30)$. Găsim $f(A) = \frac{560\,000}{3}$, $f(B) = 240\,000$, $f(C) = 320\,000$, $f(D) = 200\,000$, adică $A\left(\frac{160}{3}, 20\right)$ este punctul de minim pentru problema modificată (fig. I. 38).

Se impune să cercetăm punctul $M_0(54, 20)$. Se constată că $f(M_0) \leqslant f(x, y)$, $\forall(x, y)$ din patrulaterul $ABCD$, $x, y =$ întregi. De aceea $x = 54$, $y = 20$ și $\min f(x, y) = 188\,000$ este soluția problemei.

4. Să se găsească maximul funcției $z = 4(1 + \lambda)x + 2y$ pe mulțimea $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 6$, $3x + 2y \leqslant 10$, știind că λ este un parametru real.

Soluție. Se observă că punctele din interiorul și de pe laturile triunghiului din figura I. 39 satisfac restricțiile problemei. Apoi ținem seama că pentru a rezolva un program liniar este suficient să examinăm numai vîrfurile. De aceea calculăm

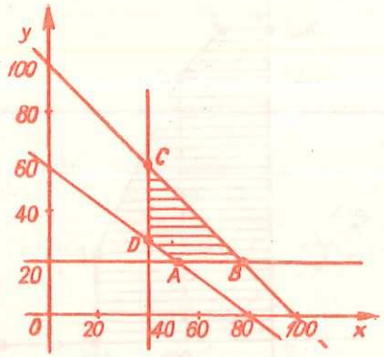


Fig. I.38

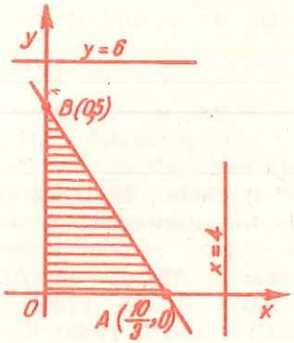


Fig. I.39

$z_0 = 0$, $z_A = \frac{40}{3}(1 + \lambda)$ și $z_B = 10$. Comparînd aceste trei numere ajungem la concluzia că pentru $\lambda \leqslant -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_B = 10$ și B este punctul de maxim, iar pentru $\lambda > -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_A = \frac{40}{3}(1 + \lambda)$ și A este punctul de maxim.

§ 15. Probleme recapitulative

1. Pe o mașină de găurit în coordonate avem de prelucrat piesa din figura I.40. Să se determine coordonatele carteziene, și coordonatele polare ale punctelor A, B, C, D în care urmează a se realiza găurirea.

2. În planul $\mathcal{Z}$ se consideră reperul cartezian xOy. Să se arate că nu există nici un triunghi echilateral cu toate vîrfurile de coordonate numere întregi.

Indicație. Se presupune că $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(c, d)$ sînt vîrfurile a, b, c, d fiind întregi. Notînd cu r pătratul lungimii laturilor și folosind identitatea $(ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2$ rezultă contradicția $\frac{2(ad - bc)}{r} = \sqrt{3}$, partea din stînga fiind un număr rațional

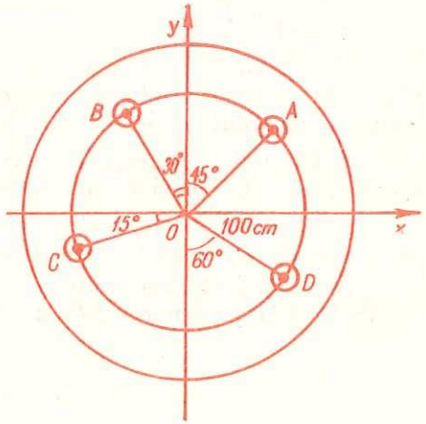


Fig. I.40

3. Să se găsească mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan, ale căror coordonate verifică relația:

1) $\sin 3y = -\cos 2x$,

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + y\right) = 0$,

3) $|x| + |y| = 4$.

Indicație. 1) $\frac{\pi}{2} - 3y = \pm(\pi - 2x) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{x}{3} + y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Să se găsească ecuațiile laturilor și coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului ABC ale cărui vîrfuri sînt punctele $A(5, 0)$, $B(1, 2)$, $C(-3, -2)$.

5. Latura $[AB]$ a unui triunghi ABC este situată pe dreapta $d: 3x + 2y - 16 = 0$.

Să se determine coordonatele vîrfurilor triunghiului, știind că abscisele vîrfurilor A și B sînt egale cu 2, respectiv 6, iar centrul de greutate G al triunghiului are coordonatele $(-1, 0)$.

R. $A(2, 5)$, $B(6, 2)$, $C(-11, -7)$.

6. Se dau punctele distincte $M_1(\cos \alpha t, \sin \alpha t)$ și $M_2(\cos \beta t, \sin \beta t)$.

1) Să se calculeze distanța de la M_1 la M_2.

2) Să se determine coordonatele mijlocului M al segmentului $[M_1M_2]$ și să se calculeze OM.

3) Notînd cu M_1' proiecția lui M_1 pe Ox, să se determine α și β astfel încît dreptele $M_1'M$ să fie perpendiculare pe OM_1 pentru orice t.

R. 1) $M_1M_2 = 2\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}t\right|$, 2) $OM = \left|\cos\frac{\beta-\alpha}{2}t\right|$,

3) $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}t - \cos\alpha t = 0,\ \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow \beta = 3\alpha.$

7. Să se scrie ecuația dreptei ce conține punctul $A(4, -2)$ și este paralelă cu dreapta $d: 3x + y - 1$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de dreapta d și ecuația simetricei dreptei d față de punctul A.

8. Să se determine $t \in \mathbf{R}$ astfel încît dreapta determinată de punctele $O(0, 0)$, $A(3^t + 4^t, 5^t)$ să fie perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = -x + 1$.

Indicație. Panta dreptei OA este $m_1 = \frac{5^t}{3^t + 4^t}$, iar a dreptei date $m_2 = -1$.

Din condiția de perpendicularitate se deduce $\frac{5^t}{3^t + 4^t} = 1$, adică $3^t + 4^t = 5^t$ și se găsește soluția unică $t = 2$.

9. Să se traseze graficele funcțiilor $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ în următoarele cazuri:

1) $f(x) = \sqrt{4x^2}$, 2) $f(x) = 2\sqrt{(x-1)^2}$,

3) $f(x) = \sqrt{x + |x|}$, 4) $f(x) = 2 - |x - 2| - x$.

10. Vîrfurile consecutive ale unui patrulater sînt $A(-3, 5)$, $B(-1, -4)$ $C(7, -1)$ și $D(2, 9)$. Să se precizeze dacă este convex. Dar patrulaterul avînd vîrfurile consecutive $M(-1, 6)$, $N(1, -3)$, $P(4, 10)$ și $Q(9, 0)$?

Indicație. Se determină punctul de intersecție a diagonalelor și se cercetează dacă este interior patrulaterului. Se găsește că doar $ABCD$ este convex.

11. Se consideră *crenelul* din figura I.41. Fixînd un reper cartezian adecvat, să se stabilească ecuația carteziană explicită a acestui crenel.

Aceleași probleme pentru *dinții de ferăstrău* din figura I.42, pentru *scara* din figura I.43 și pentru *cremaliera* din figura I.44.

Fig. I.41

Fig I.42

12. Se dau punctele $A(3, 2)$, $B(-5, 4)$, $C(-3, -4)$, $D(2, -3)$. Fie $\{L\} = BA \cap CD$ și $\{M\} = AD \cap BC$.

1) Să se arate că dreapta LM este paralelă cu AC.

2) Să se arate că dreapta BD trece prin mijlocul lui $|LM|$.

Indicație. 1) $L\left(\frac{41}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{44}{3}\right)$.

2) $BD: x + y + 1 = 0.$

13. Să se scrie ecuațiile mediatoarelor și ecuațiile înălțimilor triunghiului ale cărui vîrfuri sînt $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$, $C(2, -4)$.

Să se calculeze: 1) coordonatele centrului și raza cercului circumscris triunghiului ABC, 2) coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

14. Suporturile laturilor $[AB]$ și $[AC]$ ale unui triunghi ABC au respectiv ecuațiile $4x + y - 8 = 0$, $4x + 5y - 24 = 0$ iar vîrfurile B și C sînt situate pe axa Ox.

Să se scrie ecuația medianei corespunzătoare vîrfului A.

R. $4x + 3y - 16 = 0.$

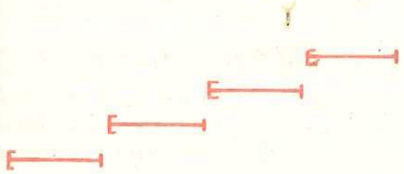


Fig. I.43

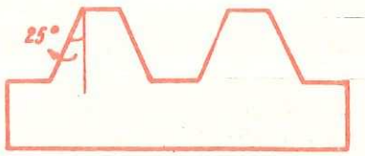


Fig. I.44

15. Să se determine parametrul $m \in \mathbf{R}$ astfel încît punctul de intersecție al dreptelor $d_1: y = 2x + 5$, $d_2: y = mx - 3$ să fie situat pe bisectoarea a doua a unghiurilor formate de axele de coordonate.

R. $m = -\frac{14}{5}$.

16. Știind că m, α, β sînt parametri reali, să se discute poziția dreptelor

1) $d_1: mx + 2y = 8$, $d_2: x + (m-1)y = 4$;

2) $d_1: x - 3y = -2$, $d_2: x + 2y = 3$, $d_3: 3x - y = \alpha$, $d_4: 2x + y = \beta$.

17. Să se demonstreze că dreapta variabilă $d_m: (m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$ trece printr-un punct fix, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

Indicație. Se ordonează după puterile lui m și se identifică cu zero. Rezultă $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

18. O rază de lumină care trece prin punctul de coordonate $(3, 1)$ se reflectă pe dreapta $d: x - y + 2 = 0$ și apoi trece prin punctul $A(1, 1)$. Să se găsească ecuațiile parametrice ale razei incidente și ale celei reflectate.

19. Vîrfurile unui patrulater $ABCD$ sînt $A(4, 3)$, $B(5, -4)$, $C(-1, -3)$, $D(-3, -1)$.

1) Să se calculeze coordonatele punctelor E și F, unde $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = BC \cap AD$.

2) Figura $ABCDEF$ se numește *patrulater complet*.

Să se scrie ecuațiile diagonalelor AC, BD, EF și să se verifice că mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$ sînt trei puncte coliniare.

20. Să se determine ecuațiile dreptelor ce trec prin punctul $A(1, 1)$ și sînt echidistante față de punctele $B(-1, 0)$ și $C(-1, -1)$.

Indicație. Ecuația fasciculului cu vîrful $A(1, 1)$ este $r(x-1) + s(y-1) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Se caută dreptele din acest fascicul care sînt echidistante față de B și C.

21. Raportăm planul $\mathcal{P}$ la un reper cartezian și considerăm punctul $M(x, y)$ ale cărui coordonate satisfac relația

$$\frac{4x + 2y + 8}{3x - y + 1} = \frac{5}{2}.$$

1) Să se arate că punctul M aparține unei drepte fixe d.

2) Să se afle minimul expresiei $x^2 + y^2$ cînd $M \in d - \{M_0(-1, -2)\}$.

R. 1) $d : 7x - 9y - 11 = 0$; 2) $\frac{121}{130}$.

22. În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră un punct M. Fie N simetricul lui M față de A, P simetricul lui N față de B și Q simetricul lui P față de C.

1) Să se arate că dreapta MQ trece prin punctul D și că D este mijlocul lui $[MQ]$.

2) Unde trebuie să se afle punctul M pentru ca $MNQP$ să fie trapez?

R. 2) $M \in AC'$, unde C' este simetricul lui C față de B.

23. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $M(4, 3)$ și care intersectează semidreptele pozitive Ox, Oy, în două puncte A, B astfel încît triunghiul dreptunghic AOB să aibă aria egală cu 27.

Indicație. Se folosește ecuația fasciculului cu vîrful $M(4, 3)$, adică $r(x - 4) + s(y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$.

24. Să se expliciteze soluțiile în $\mathbf{R}^2$ pentru:

$$1)\ |x| + |y| - 2 > 0,\quad 2)\ 2 < |x - 1| + |y - 2| - 3 < 4$$

$$3)\ (x - y + 4)(2x - 3y + 6) > 0.$$

Indicație. Se consideră că (x, y) sînt coordonatele unui punct din plan și se utilizează împărțirea planului în regiuni.

25. Să se determine locul geometric al punctelor din plan care au raportul distanțelor la două drepte perpendiculare constant.

26. Pe axa Ox se consideră punctele fixe A, B, C. Prin C se duce o dreaptă variabilă care întîlnește prima bisectoare a axelor în M și axa Oy în N. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AM și NB.

R. O dreaptă ce trece prin origine.

27. Se consideră reperul cartezian xOy, un punct fix $A(a, 0)$ pe Ox și un punct fix $B(0, a)$ pe Oy astfel încît $a > 0$. Un punct P se mișcă pe segmentul $[OB]$, iar un punct P' se mișcă pe semidreapta By astfel încît $\mu(\widehat{OAP}) = \mu(\widehat{OP'A}) = \theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APP'.

28. Aria unui triunghi este $\sigma[ABC] = 3$, două dintre vîrfurile sale sînt punctele $A(3, 1)$ și $B(1, -3)$. Să se afle coordonatele vîrfului C în fiecare dintre următoarele cazuri:

1) vîrful C este situat pe axa Oy;

2) centrul de greutate al triunghiului se află pe axa Ox.

Indicație. Folosind formula ariei unui triunghi, se găsesc cîte două soluții: 1) $(0, -8)$ sau $(0, -2)$; 2) $(5, 2)$ sau $(2, 2)$.

29. Să se determine aria suprafeței poligonale caracterizată prin $0 \leqslant x \leqslant 400$, $0 \leqslant y \leqslant 700$, $x + y \leqslant 800$, $2x + y \leqslant 1\,000$.

30. Aria unui paralelogram este $\sigma = 17$ unități de suprafață; două dintre vîrfuri coincid cu punctele $A(2, 1)$ și $B(5, -3)$. Să se afle celelalte două vîrfuri dacă se știe că punctul de intersecție a diagonalelor sale se află pe axa ordonatelor.

R. Dacă C și D sînt celelalte vîrfuri, se găsesc soluțiile $(-2, 12)$ și $(-5, 16)$ sau $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ și $\left(-5, \frac{14}{3}\right)$.

31. În cadrul unei C.A.P. sînt destinate 8 ha teren pentru a se cultiva două feluri de plante A și B. Investițiile necesare pe hectar sînt 2 000 lei respectiv 5 000 lei, iar cîștigul net pe hectar este 3 000 lei respectiv 6 000 lei. C.A.P.-ul dispune de o sumă de 25 000 lei.

Pe cîte hectare trebuie cultivate fiecare din aceste feluri de plante ca să se obțină un cîștig maxim?

R. $x = 5$ ha, $y = 3$ ha, $\max f(x, y) = 33\,000$ lei.

32. O întreprindere de construcții trebuie să realizeze un complex de locuințe însumînd cel puțin 900 garsoniere, 2 100 apartamente cu două camere și 1 400 apartamente cu trei camere. Se preconizează două tipuri de blocuri: primul tip cuprinde 40 de apartamente cu trei camere, 30 de apartamente cu două camere și 10 garsoniere și costă 4 milioane lei, iar al doilea tip este format din 20 de apartamente cu trei camere, 50 de apartamente de două camere și 30 de garsoniere, avînd costul de 5 milioane lei. Să se stabilească cîte blocuri de fiecare fel trebuie construite astfel încît cheltuielile de construcție să fie minime.

R. 20 de blocuri de primul tip și 30 de blocuri de al doilea tip.

33. Să se rezolve probleme de programare liniară cu următoarele date:

1) $f(x, y) = x - 2y$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y - 1 \leqslant 0$, $x + 2y - 2 \leqslant 0$.

2) $f(x, y) = 5x + 3y$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leqslant 1$, $\frac{x}{1} + \frac{y}{7} \leqslant 1$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{1} \leqslant 1$.

Capitolul II

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

§ 1. Generalităţi

Fie $\mathcal{P}$ un plan. O funcţie $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ sau o restricţie a unei asemenea funcţii se numeşte *transformare geometrică*. Transformarea geometrică $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ataşează fiecărui punct $M \in \mathcal{P}$ un alt punct $M' \in \mathcal{P}$ pe care îl notăm cu $\mathcal{F}(M)$ (fig. II.1). Mulţimea tuturor punctelor $\mathcal{F}(M)$, $M \in \mathcal{P}$, se numeşte *imaginea lui* $\mathcal{F}$ şi se notează cu $\mathcal{F}(\mathcal{P})$. Evident $\mathcal{F}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$. Un punct M_0 cu proprietatea $F(M_0) = M_0$ se numeşte *punct fix* al funcţiei $\mathcal{F}$.

Transformările geometrice sînt funcţii de un tip mai special. Lor li se aplică noţiunile învăţate în clasa a IX-a relativ la funcţii oarecare.

Transformarea geometrică $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ se numeşte:

1) *injectivă*, dacă $M_1, M_2 \in \mathcal{P}$, $\mathcal{F}(M_1) = \mathcal{F}(M_2) \in \mathcal{P}$ implică $M_1 = M_2$ (echivalent $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{P}$, $M_1 \neq M_2 \Rightarrow \mathcal{F}(M_1) \neq \mathcal{F}(M_2)$);

2) *surjectivă*, dacă $\forall M' \in \mathcal{P}$, $\exists M \in \mathcal{P}$ astfel încît $\mathcal{F}(M) = M'$ (echivalent $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$);

3) *bijectivă*, dacă este injectivă şi surjectivă. Aceasta înseamnă că fiind dat un punct $M' \in \mathcal{P}$ există un punct unic $M \in \mathcal{P}$ astfel încît $\mathcal{F}(M) = M'$. Existenţa este asigurată de faptul că $\mathcal{F}$ este surjectivă şi unicitatea decurge din faptul că $\mathcal{F}$ este injectivă.

Dacă $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ şi $\mathcal{G} : \mathcal{F}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$ sînt două transformări geometrice atunci prin $M \to (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(M) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(M))$, $\forall M \in \mathcal{P}$, definim *transformarea produs* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ (fig. II.2). Produsul transformărilor este o operaţie asociativă, adică $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{H} = \mathcal{G} \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{H})$.

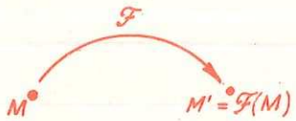


Fig. II.1

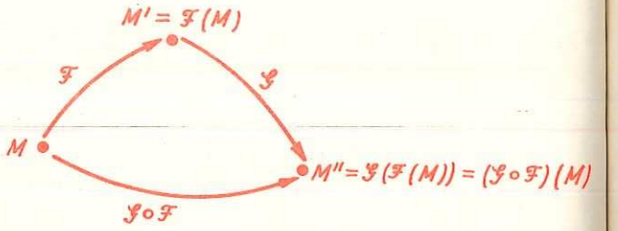


Fig. II.2

Unei transformări geometrice bijective $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ i se poate ataşa transformarea geometrică (unică!) $\mathcal{G} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ astfel încît $\mathcal{G}(M') = M \in \mathcal{P}$ cu proprietatea $\mathcal{F}(M) = M'$. Transformările geometrice $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ satisfac relaţiile $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(M) = M, \forall M \in \mathcal{P}$, $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(M') = M'$, $\forall M' \in \mathcal{P}$. Pe scurt, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathcal{P}}$, unde $1_{\mathcal{P}}$ este *identitatea* pe $\mathcal{P}$, adică transformarea geometrică caracterizată prin $1_{\mathcal{P}}(M) = M$, $\forall M \in \mathcal{P}$. Invers, dacă unei transformări geometrice $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ i se poate ataşa o transformare geometrică, $\mathcal{G} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, care să satisfacă relaţiile $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathcal{P}}$, atunci $\mathcal{F}$ este în mod necesar o bijecţie. Transformarea geometrică $\mathcal{G}$ se numeşte *inversa* lui $\mathcal{F}$ şi deseori se notează cu $\mathcal{F}^{-1}$ (fig. II.3).

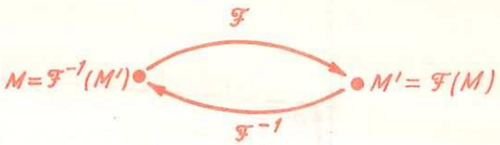


Fig. II.3

Dacă $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ şi $\mathcal{G} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ sînt transformări geometrice bijective, atunci $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ este tot bijectivă şi $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{G}^{-1}$. De asemenea, pentru orice bijecţie $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ se satisface $1_{\mathcal{P}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ 1_{\mathcal{P}} = \mathcal{F}$.

§ 2. Translaţii

Fie un plan $\mathcal{P}$. Identitatea $1_{\mathcal{P}}$ va fi numită translaţia care duce punctul $A \in \mathcal{P}$ în punctul $A \in \mathcal{P}$.

Definiţie. Fie A şi A' două puncte distincte din $\mathcal{P}$. Transformarea geometrică $\mathcal{T} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\mathcal{T}(M) = M'$, unde M' este determinat de M prin condiţiile

(1) $MM' = AA'$,

(2) **dreptele MM' şi AA' coincid sau sînt paralele,**

(3) **sensul de la M la M' coincide cu sensul de la A la A',**

se numeşte translaţia care duce punctul A în punctul A' (fig. II.4).

Definiţia este corectă deoarece fiecărui punct $M \in \mathcal{P}$ i se asociază un punct şi numai unul singur $M' \in \mathcal{P}$ determinat de faptul că segmentul $[MM']$ trebuie să facă parte din mulţimea segmentelor care au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime cu segmentul $[AA']$. Echivalent, dacă A, B, C sînt puncte necoliniare, atunci translaţia care duce pe A în B coincide cu translaţia care duce pe C în D dacă şi numai dacă $ABCD$ este un paralelogram.

Fig. II.4

Numim punctele A, A', M, M' respectiv prin coordonatele lor (a, b), (a', b'), (x, y), (x', y') în raport cu reperul cartezian xOy (fig. II.5).

Teoremă. *Translaţia care duce pe A în A' este caracterizată prin ecuaţiile*

$$\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad h = a' - a, \quad k = b' - b. \end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă $a' = a$, $b' = b$, atunci $x' = x$, $y' = y$ (identitatea!). În caz contrar, proprietatea „aceeaşi direcţie" impune ca perechile ordonate

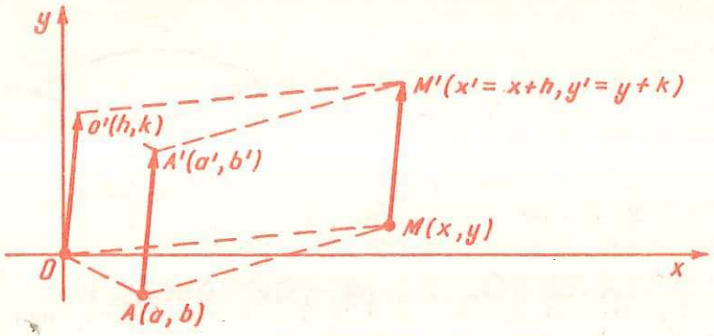


Fig. II.5

$(x' - x,\ y' - y)$, $(a' - a,\ b' - b)$ să fie proporționale, iar proprietățile „aceeași lungime și același sens" impun egalitatea acestor perechi.

Teoremă. 1) *Dacă $\mathcal{T}_1$ este translația care duce pe A în B și $\mathcal{T}_2$ este translația care duce pe B în C, atunci produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația care duce pe A în C.*

2) *Dacă $\mathcal{T}$ este translația care duce pe A în B, atunci $\mathcal{T}^{-1}$ există și este translația care duce pe B în A.*

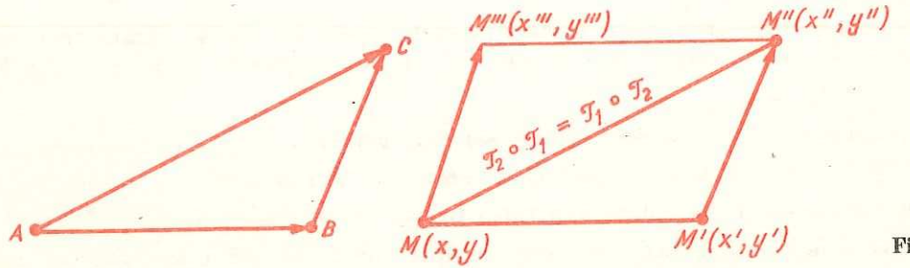


Fig. II.6

Demonstrație. 1) (fig. II.6, cazul punctelor necoliniare). Fie $A(a, b)$, $B(c, d)$ și $C(e, f)$. Translația $\mathcal{T}_1$ care duce pe A în B este caracterizată prin ecuațiile $x' = x + (c - a)$, $y' = y + (d - b)$, iar translația $\mathcal{T}_2$ care duce pe B în C este caracterizată prin $x'' = x' + (e - c)$, $y'' = y' + (f - d)$. Produsul $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația de ecuații $x'' = x + (e - a)$, $y'' = y + (f - b)$. Se dovedește că aceste ecuații reprezintă analitic și translația $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$.

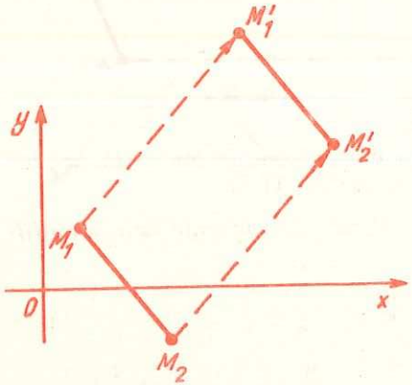


Fig. II.7

În final ne propunem să demonstrăm că translația păstrează distanța dintre puncte (fig. II.7). Într-adevăr, dacă prin translația de ecuații $x' = x + h$, $y' = y + k$, punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, au imaginile $M_i'(x_i', y_i')$, $x_i' = x_i + h$, $y_i' = y_i + k$, $i = 1, 2$, atunci

$$M_1'M_2' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = M_1M_2.$$

Problemă. Să se demonstreze că imaginea unei drepte d printr-o translație $\mathcal{T}$ este o dreaptă paralelă sau egală cu d.

PROBLEME

1. Fie segmentul $[AB]$ și cercul C de centru O și rază r. Fiecărui punct M de pe cercul C i se atașează punctul M' astfel încît $ABMM'$ să fie un paralelogram. Să se găsească mulțimea punctelor M'.

Soluție. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $MM' = BA$, $MM' \parallel BA$ și sensul de la M la M' este sensul de la B la A (fig. II.8). Punctul M' este transformatul lui M prin translația care duce punctul B în punctul A. De aceea, atunci cînd M descrie pe C, punctul M' descrie un cerc cu centrul $O' = \mathcal{T}(O)$, de rază r.

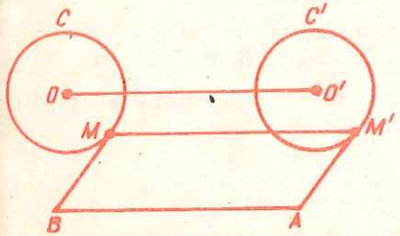


Fig. II.8

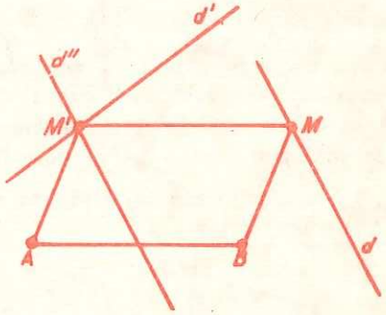


Fig. II.9

2. Fie segmentul $[AB]$ și două drepte concurente d și d'. Să se determine punctul M pe d și punctul M' pe d' astfel încît $ABMM'$ să fie un paralelogram.

Soluție. Fie d'' imaginea lui d prin translația $\mathcal{T}$ care duce pe B în A și $\{M'\} = d' \cap d''$. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $MM' = BA$, $MM' \parallel BA$ și sensul de la M la M' coincide cu sensul de la B la A, adică M este imaginea lui M' prin translația $\mathcal{T}$ (fig. II.9).

3. Se dă triunghiul de vîrfuri $A(3, 2)$, $B(1, 5)$, $C(-2, -1)$ și translația $\mathcal{T}$ determinată de punctele $O(0, 0)$ și $O'(1, 2)$. Să se găsească $A' = \mathcal{T}(A)$, $B' = \mathcal{T}(B)$, $C' = \mathcal{T}(C)$. $\mathcal{T}(AB)$, $\mathcal{T}(AC)$, $\mathcal{T}(BC)$ și să se verifice că $\mathcal{T}(AB) = A'B'$, $\mathcal{T}(AC) = A'C'$, $\mathcal{T}(BC) = B'C'$.

Soluție. (fig. II.10). Translația $\mathcal{T}$ este determinată de punctele O și O'. Astfel ea are ecuațiile $x' = x + 1$, $y' = y + 2$.

Punînd $x = 3$, $y = 2$ găsim $x' = 4$, $y' = 4$ și deci $A'(4, 4)$. Analog $B'(2, 7)$, $C'(-1, 1)$.

Se observă că $AB : \dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y - 2}{3}$ și $A'B' : \dfrac{x - 4}{-2} = \dfrac{y - 4}{3}$. Pe de altă parte $\mathcal{T}(AB) : \dfrac{(x' - 1) - 3}{-2} = \dfrac{(y' - 2) - 2}{3}$ și deci $\mathcal{T}(AB) = A'B'$. Analog se verifică și celelalte relații.

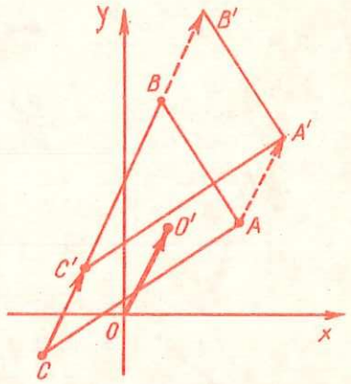


Fig. II.10

4. Se dau punctele $A(1, -2)$, $B(3, 2)$, $C(5, -3)$ și se consideră translația $\mathcal{T}$ care duce punctul $O(0, 0)$ în centrul de greutate al triunghiului ABC.

1) Să se scrie inecuațiile imaginii $\mathcal{T}([ABC])$.

2) Să se determine aria suprafeței $[ABC] \cup \mathcal{T}([ABC])$.

5. Se dau dreptele $d_1 : 2x + y + 1 = 0$, $d_2 : x - 7y - 1 = 0$. Să se determine translațiile $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ astfel încît $\mathcal{T}_1(d_1)$ și $\mathcal{T}_2(d_2)$ să treacă prin origine. Apoi să se găsească aria paralelogramului determinat de dreptele d_1, d_2, $\mathcal{T}_1(d_1)$ și $\mathcal{T}_2(d_2)$.

§ 3. Rotații

Fie planul $\mathcal{P}$ raportat la reperul cartezian xOy, plan orientat prin fixarea sensului de rotație trigonometric drept sens pozitiv. Sensul mișcării acelor de ceasornic este sensul negativ. Admitem cunoscute noțiunile de unghi orientat și de măsură algebrică a unui asemenea unghi.

D e f i n i ț i e. Fie θ un număr real fixat. Transformarea geometrică $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definită prin $\mathcal{R}(O) = O$ și pentru $M \neq O$, $\mathcal{R}(M) = M'$ astfel încît $OM = OM'$ și măsura algebrică a unghiului orientat $\widehat{MOM'}$ să fie θ, se numește rotație de centru O și unghi θ (fig. II.11).

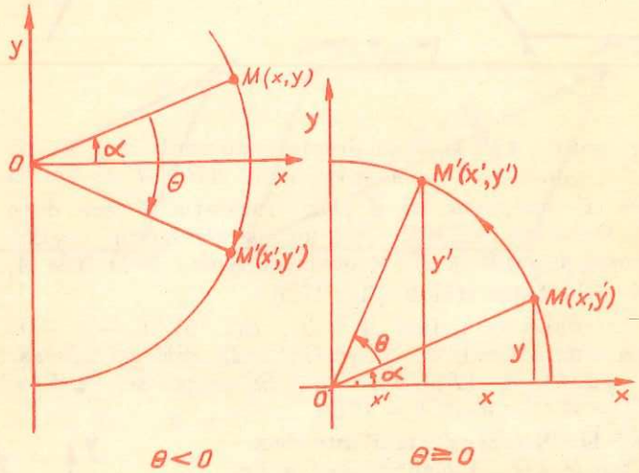


Fig. II.11

Rotația este bine definită, deoarece fiecărui punct $M \in \mathcal{P}$ i se atașează un punct și numai unul $M' \in \mathcal{P}$ determinat de condițiile date în definiție. Originea reperului cartezian este singurul punct cu proprietatea $\mathcal{R}(O) = O$, adică este singurul *punct fix*.

Presupunem că M are coordonatele (x, y) și M' are coordonatele (x', y').

T e o r e m ă. *Rotația $\mathcal{R}$ de centru $O(0, 0)$ și unghi θ este caracterizată prin ecuațiile*

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ \theta \in \mathbf{R}, \ \theta = \text{fixat}. \end{cases}$$

Demonstrație. Urmărind figura II.11, cazul $\theta \geqslant 0$, avem $x' = \cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$. Dar $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$. Deci $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$. Analog, $y' = \sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta$, adică $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$.

T e o r e m ă. 1) *Dacă $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ sînt rotații de centru O și unghiuri θ_1 respectiv θ_2, atunci $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ este rotația de centru O și unghi $\theta_1 + \theta_2$.*

2) *Dacă $\mathcal{R}$ este rotația de centru O și unghi θ, atunci $\mathcal{R}^{-1}$ există și este rotația de centru O și unghi $-\theta$.*

Demonstrație. 2) Rotația $\mathcal{R}$ de centru $O(0, 0)$ și unghi θ este caracterizată prin sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta, \ (x,y) \in \mathbf{R}^2, \ \theta \in \mathbf{R}, \ \theta = \text{fixat}. \end{cases}$$

Presupunînd $M'(x', y')$ dat și rezolvînd sistemul precedent în raport cu (x, y) găsim soluția unică

$$\begin{cases} x = x'\cos(-\theta) - y'\sin(-\theta), \\ y = x'\sin(-\theta) + y'\cos(-\theta). \end{cases}$$

Aceste ecuații caracterizează o rotație $\mathcal{S}$ de centru $O(0, 0)$ și unghi $-\theta$ cu proprietatea $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = 1_{\mathcal{P}}$. De aceea $\mathcal{R}$ este bijectivă și $\mathcal{S} = \mathcal{R}^{-1}$.

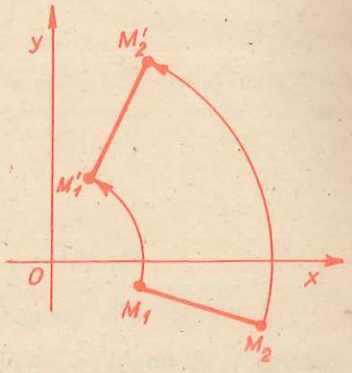


Fig. II.12

Să arătăm că rotațiile au proprietatea de a păstra distanța dintre puncte (fig. II.12). Într-adevăr, dacă prin rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi θ punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, au imaginile $M_i'(x_i', y_i')$, $x_i' = x_i\cos\theta - y_i\sin\theta$, $y_i' = x_i\sin\theta + y_i\cos\theta$, $i = 1, 2$, atunci

$$M_1'M_2' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} =$$

$$= \sqrt{[(x_2 - x_1)\cos\theta - (y_2 - y_1)\sin\theta]^2 + [(x_2 - x_1)\cos\theta + (y_2 - y_1)\sin\theta]^2} =$$

$$= \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = M_1M_2.$$

Problemă. Să se demonstreze că imaginea unei drepte d printr-o rotație $\mathcal{R}$ este tot o dreaptă.

Complemente. Se pune în mod firesc întrebarea: care sînt transformările geometrice ale unui plan $\mathcal{P}$ care păstrează distanțele dintre puncte (și mulțimea dreptelor)? Răspunsul este următorul: acestea sînt translațiile, rotațiile și simetria față de o axă sau produse de asemenea transformări, cu denumirea generică de *izometrii*.

Două mulțimi, X, Y de puncte din plan, se numesc *congruente* dacă există o izometrie $\mathcal{J} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ astfel încît $\mathcal{J}(X) = Y$ (fig. II.13; a — translație, b — rotație, c — simetrie).

Congruența este o relație de echivalență pe mulțimea submulțimilor (figurilor) planului $\mathcal{P}$. Submulțimile (figurile) din aceeași clasă de echivalență poartă aceeași denumire.

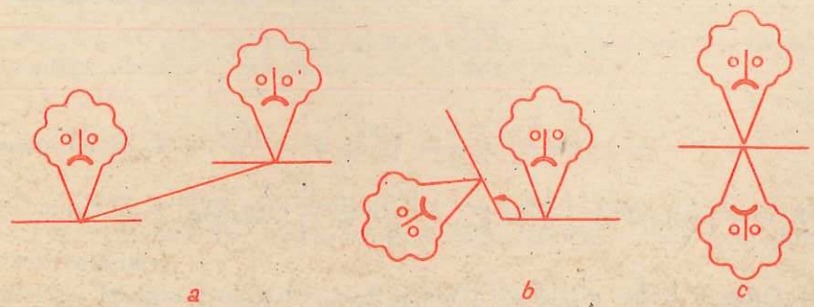


Fig. II.13

1. Fie segmentele congruente, neparalele, $[AB]$, $[A'B']$. Să se determine centrul și unghiul rotației care duce pe A în A' și B în B'. Discuție:

Soluție. Dacă $AA' \parallel BB'$, atunci centrul de rotație O este dat de $\{O\} = AB \cap A'B'$, iar $\widehat{BOB'}$ este unghiul de rotație (fig. II.14, *a*).

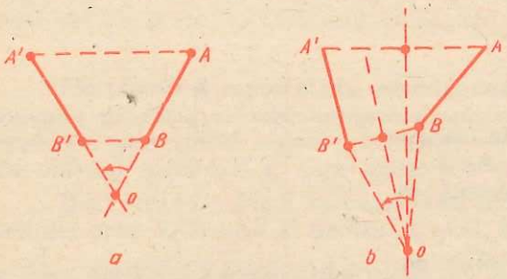


Fig. II.14

Dacă dreapta AA' nu este paralelă cu BB', atunci centrul de rotație O este punctul de intersecție al mediatoarelor segmentelor $[AA']$ și $[BB']$, iar $\widehat{BOB'}$ este unghiul de rotație. Într-adevăr, din congruența triunghiurilor OAB și $OA'B'$ rezultă $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'}$ (fig. II.14, *b*).

2. Să se găsească ecuațiile rotațiilor din problema precedentă în raport cu un reper cartezian xOy fixat convenabil.

3. Să se afle imaginea dreptei $d: x + y - 1 = 0$ prin rotația $\mathcal{R}$ de centru A și unghi $\frac{\pi}{2}$, unde

$$\{A\} = d \cap Oy.$$

4. 1) Se dă triunghiul echilateral de vîrfuri $A(1, 2)$, $B(3, -1)$,

$$C\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Să se determine imaginea sa prin rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi $\frac{\pi}{3}$.

2) Se dă pătratul de vîrfuri $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$. Să se determine imaginea sa prin rotația $\mathcal{R}$ de centru A și unghi $-\frac{\pi}{4}$.

Soluție. 1) Rotația de centru O și unghi $\pi/3$ este caracterizată prin

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Punînd $x = 1$, $y = 2$, găsim $x' = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. Astfel imaginea lui A prin $\mathcal{R}$ este punctul $A'\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$. Analog,

$$B'\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right), \quad C'\left((\sqrt{3} - 1)/2, (5 + 3\sqrt{3})/2\right).$$

2) (fig. II.15). Rotația $\mathcal{R}$ de centru $A(-1, 0)$ și unghi $-\pi/4$ este caracterizată prin (de ce?)

$$\begin{cases} x' + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

Evident lui $A(-1, 0)$ îi corespunde punctul $A'(-1, 0)$. Punctului $B(1, 0)$ îi corespunde

$$B'(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2}).$$

Analog,

$$C'(2\sqrt{2} - 1, 0), \qquad D'(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}).$$

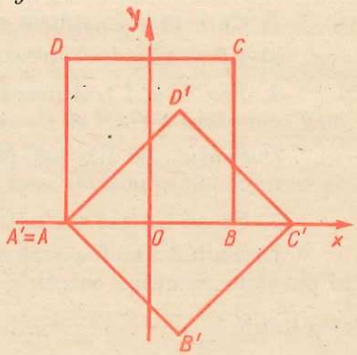


Fig. II.15

5. Fie segmentele congruente $[AB]$ și $[A'B']$. Să se arate că $[A'B']$ este imaginea lui $[AB]$ printr-o translație de direcție AB urmată de două rotații în jurul capetelor imaginilor intermediare ale segmentelor.

6. Să se verifice că triunghiurile MNL și $M'N'L'$ de vîrfuri $M(7, 1)$, $N(7, 4)$, $L(3, 1)$, $M'(-2/5, 16/5)$, $N'(2, 5)$, $L'(2, 0)$ sînt congruente și să se determine izometria $\mathcal{J}$ cu proprietatea $\mathcal{J}(MNL) = M'N'L'$.

Soluție (fig. II.16). Triunghiurile dreptunghice MNL și $M'N'L'$ sînt congruente deoarece au laturile congruente (de lungimi respectiv egale). Urmărind orientarea indicată de săgeți deducem că $M'N'L'$ se obține din MNL printr-o izometrie de tipul $\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + h, \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + k, \end{cases}$ coeficienții $\cos\theta$, $\sin\theta$, h și k sînt determinați de sistemul

$$\begin{cases} -\frac{2}{5} = 7\cos\theta + \sin\theta + h, \\ \frac{16}{5} = 7\sin\theta - \cos\theta + k, \\ 2 = 7\cos\theta + 4\sin\theta + h, \\ 5 = 7\sin\theta - 4\cos\theta + k, \\ 2 = 3\cos\theta + \sin\theta + h, \\ 0 = 3\sin\theta - \cos\theta + k. \end{cases}$$

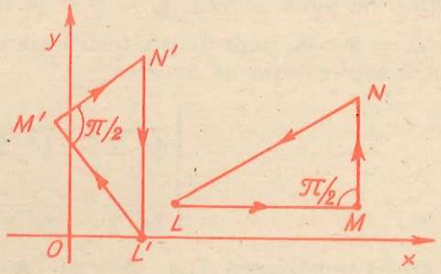


Fig. II.16

Rezultă $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $h = 3$, $k = -3$.

7. Fie $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 5)$ și $E(3, 2)$, $F(-1, 5)$, $G(6, 6)$. Să se determine izometria care duce triunghiul ABC în triunghiul EFG.

§ 4. Probleme recapitulative

1. Triunghiul $A'B'C'$ este obținut din triunghiul ABC printr-o translație. Să se arate că medianele din puncte corespondente ale celor două triunghiuri sînt paralele sau coliniare.

Indicație. Imaginea unei drepte d printr-o translație este o dreaptă paralelă sau egală cu d.

2. Fie cercurile C_1, C_2 și segmentul $[AB]$. Să se construiască un segment paralel și congruent cu $[AB]$ ale cărui extremități să fie respectiv pe cercurile C_1 și C_2. Discuție.

Indicație. Se utilizează translația $\mathcal{T}$ care duce punctul O în punctul A.

3. În planul raportat la reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1, 2)$.

1) Să se determine ecuațiile translației $\mathcal{T}$ care duce punctul O în punctul A.

2) Care este imaginea dreptei $d : x + y + 1 = 0$ prin $\mathcal{T}$?

3) Să se găsească dreapta h cu proprietatea $\mathcal{T}(h) : 2x' - 3y' + 1 = 0$.

4. Fie h, k, l trei drepte paralele. Să se construiască un triunghi echilateral ABC ale cărui vîrfuri să fie situate pe cele trei drepte.

Indicație. Se fixează punctul A pe una din drepte și se utilizează rotația de centru A și unghi $60°$ sau $-60°$. Rezultă două soluții.

5. Să se înscrie un pătrat într-un paralelogram.

Indicație. Dacă există un pătrat înscris într-un paralelogram, atunci centrul O al paralelogramului coincide cu centrul pătratului. Se utilizează rotația de centru O și unghi $\frac{\pi}{2}$.

6. Se consideră rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi $\frac{\pi}{3}$.

1) Care este imaginea dreptei $d : x - y + 1 = 0$ prin $\mathcal{R}$?

2) Să se determine o dreaptă h cu proprietatea $\mathcal{R}(h) : x - 4y + 1 = 0$.

7. Să se determine punctele fixe ale izometriei de ecuații

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + 1, \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta - 1. \end{cases}$$

Indicație. Se pune $x' = x$, $y' = y$ și se rezolvă sistemul liniar, obținut.

8. Fie $\mathcal{J} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, unde $\mathcal{T}$ este translația care duce punctul $(0, 0)$ în punctul $(1, -1)$, iar $\mathcal{R}$ este rotația de matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Se dă $A(3, 2)$. Să se găsească $\mathcal{J}(A)$, $\mathcal{J}^{-1}(A)$, $(\mathcal{R} \circ \mathcal{T})(A)$.

Indicație. $\mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ are ecuațiile: $x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1$, $y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 1$,

iar $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}$ are ecuațiile: $x'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{y-1}{\sqrt{2}}$, $y'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}}$.

9. Axele de coordonate Ox și Oy se rotesc cu unghiul $\frac{\pi}{3}$ și noul reper $x'Oy'$ se consideră invers orientat față de xOy. Știind că un punct A are coordonatele $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ în reperul $x'Oy'$, să se găsească coordonatele lui A față de reperul xOy.

Indicație. Rotația de unghi θ, a reperului cartezian xOy, este caracterizată prin $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$, unde $M\begin{pmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{pmatrix}$. Problema

impune rotația reperului urmată de o simetrie în raport cu Oy' sau în raport cu Ox'. Obținem

$$\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) \text{ sau } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3, \sqrt{3} + \frac{3}{2}\right).$$

10. Să se arate că simetria față de dreapta $d : ax + by + c = 0$, este caracterizată prin ecuațiile:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c), \\ y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c). \end{cases}$$

Capitolul III

CONICE

§ 1. Cercul

Fie xOy reperul cartezian în plan și $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ două puncte. Reamintim expresia distanței

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat și r un număr real strict pozitiv fixat. *Cercul C de centru M_0 și rază r* este mulțimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $M_0M = r$ (fig. III.1).

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține cercului C de centru $M_0(x_0, y_0)$ și rază r dacă și numai dacă*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Demonstrație. $M \in C \Leftrightarrow M_0M = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Astfel $C = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ sau mai scurt $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Ecuația $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită a cercului C de centru (x_0, y_0) și rază r*. Această ecuație este echivalentă cu două *ecuații parametrice* în $\mathbb{R}^2$ (fig. III.2),

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad t = \text{parametru}, \end{cases}$$

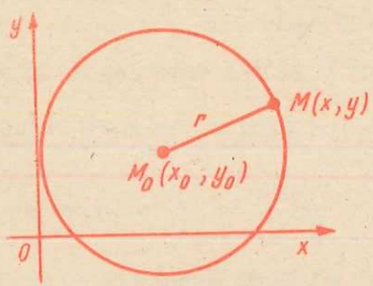


Fig. III.1

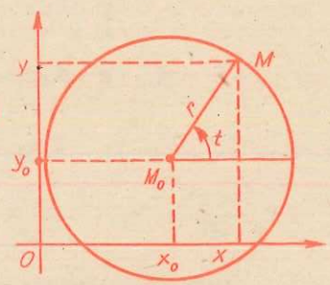


Fig. III.2

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x și y, termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulțimea

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Deoarece ecuația lui Γ se transcrie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

rezultă:

1) dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $x_0 = -a$, $y_0 = -b$ și de rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$;

2) dacă $a^2 + b^2 - c = 0$, atunci $\Gamma = \{(-a, -b)\}$;

3) dacă $a^2 + b^2 - c < 0$, atunci $\Gamma = \emptyset$.

Ecuația

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,\ a^2 + b^2 - c > 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

se numește *ecuația carteziană generală a cercului*. Evident această ecuație este echivalentă cu

$$d(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,\ d \neq 0,\ a_1^2 + b_1^2 - dc_1 > 0.$$

Un cerc $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ separă planul $\mathcal{P}$ în două submulțimi disjuncte: *interiorul* lui C notat $\operatorname{int}(C)$ și *exteriorul* lui C notat $\operatorname{ext}(C)$. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$, atunci (fig. III.3) $\operatorname{int}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $C = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\operatorname{ext}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$. Evident $\operatorname{int}(C) \cap \operatorname{ext}(C) = \emptyset$, $\operatorname{int}(C) \cup C \cup \operatorname{ext}(C) = \mathcal{P}$.

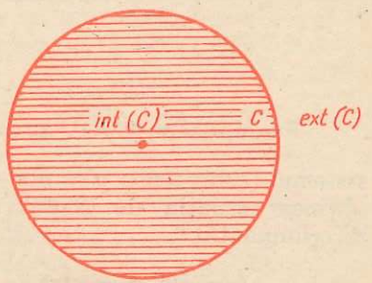


Fig. III.3

Teoremă. 1) *Mulțimile* $\operatorname{int}(C)$ și $\operatorname{int}(C) \cup C$ *sînt convexe.*

2) $\forall M_1 \in \operatorname{int}(C)$, $\forall M_2 \in \operatorname{ext}(C)$, *segmentul* $[M_1M_2]$ *taie pe* C.

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea putem presupune $x_0 = y_0 = 0$. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, două puncte din plan. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuațiile parametrice $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$.

1) Dacă $M_1, M_2 \in \operatorname{int}(C)$, adică $f(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2 - r^2 < 0$, $i = 1, 2$, atunci $f(x, y) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty^2)^2 - r^2 = (1 - t)^2x_1^2 + 2(1 - t)tx_1x_2 + t^2x_2^2 + (1 - t)^2y_1^2 + 2(1 - t)ty_1y_2 + t^2y_2^2 - r^2 \leqslant {}^*(1 - t)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) + t(x_2^2 + y_2^2 - r^2) = (1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2) < 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Cu alte cuvinte $[M_1M_2] \subset \operatorname{int}(C)$.

2) Fie $M_1 \in \operatorname{int}(C)$, adică $f(x_1, y_1) < 0$ și $M_2 \in \operatorname{ext}(C)$, adică $f(x_2, y_2) > 0$. Rezultă funcția continuă $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty_2)^2 - r^2$, cu proprietățile $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ și $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$. De aceea există o valoare $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $0 = \varphi(t_0) = ((1 - t_0)x_1 + t_0x_2)^2 + ((1 - t_0)y_1 + t_0y_2)^2 - r^2$ și deci $M_0((1 - t_0)x_1 + t_0x_2, (1 - t_0)y_1 + t_0y_2) \in C$.

Intersecția dintre o dreaptă și un cerc. (fig. III.4) Fie dreapta $h : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ și cercul $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, de centru $M_0(x_0, y_0)$ și rază r. Poziția dreptei h față de cercul C se poate stabili calculînd distanța

$$d(M_0;\ h) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

și comparînd această distanță cu r. Dacă $d(M_0;\ h) < r$, atunci dreapta h și cercul C au exact două puncte comune (h este *secantă*); dacă $d(M_0;\ h) = r$, atunci dreapta h și cercul C au exact un punct comun (h este *tangentă la cercul C*); dacă $d(M_0;\ h) > r$, atunci dreapta h și cercul C nu au puncte comune (h este *exterioară* cercului C).

---

* Se ordonează după t, apoi t^2 se majorează cu t, coeficientul său fiind pozitiv.

Intersecția $h \cap C$ este caracterizată de soluțiile în $\mathbf{R}^2$ ale sistemului

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \end{cases}$$

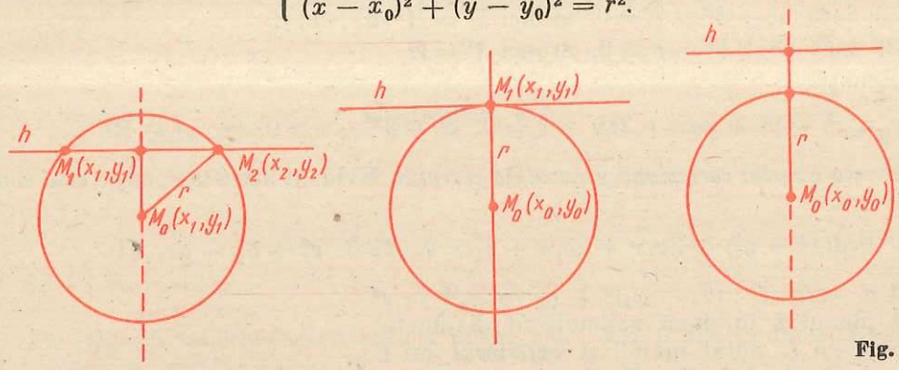


Fig. III.4

Presupunem $\beta \neq 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ și notăm $m = -\frac{\alpha}{\beta}$, $n = -\frac{\gamma}{\beta}$. Rezultă sistemul (echivalent) $y = mx + n$, $x^2 + y^2 = r^2$. Înlocuind pe y în a doua ecuație obținem ecuația de gradul al doilea $(1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$, cu discriminantul

$$\Delta = 4(1 + m^2)\left(r^2 - \left(\frac{|n|}{\sqrt{1 + m^2}}\right)^2\right) = 4(1 + m^2)(r^2 - d^2(0;\ h)).$$

Dacă $\Delta > 0$, adică $r > d(0;\ h)$, atunci ecuația în x are soluțiile x_1, x_2 care sînt abscisele punctelor de intersecție M_1, M_2. Ordonatele acestor puncte sînt $y_i = mx_i + n$, $i = 1, 2$ și $h \cap C = \{M_1, M_2\}$.

Dacă $\Delta = 0$, adică $r = d(0;\ h)$, atunci $x_1 = x_2$ și dreapta h este tangentă cercului în punctul $M_1(x_1, mx_1 + n)$, adică $h \cap C = \{M_1\}$.

Dacă $\Delta < 0$, adică $r < d(0;\ h)$, atunci ecuația de gradul al doilea în x nu are rădăcini reale și deci $d \cap C = \emptyset$.

Situația $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ se discută analog, iar cazul $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ se reduce la precedentul prin translația $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$.

Prin dedublări înțelegem substituirile $x^2 \to xx_1$, $y^2 \to yy_1$, $xy \to \frac{1}{2}(xy_1 + x_1y)$, $x \to \frac{1}{2}(x + x_1)$, $y \to \frac{1}{2}(y + y_1)$. Prin dedublata ecuației de gradul al doilea $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ în punctul $M_1(x_1, y_1)$ înțelegem ecuația $a_{11}x_1x + a_2(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{10}(x + x_1) + a_{20}(y + y_1) + a_{00} = 0$ care are cel mult gradul întîi.

Fie cercul $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, cu centrul $M_0(x_0, y_0)$ și raza r, iar $M_1(x_1, y_1)$ un punct fixat pe cercul C. Dedublata ecuației cercului C în punctul $M_1(x_1, y_1)$, adică ecuația de gradul întîi

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

reprezintă *tangenta la cercul C în punctul M_1*. Dreapta

$$M_0M_1 : \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0}$$

se numește *normală* la cercul C în punctul M_1 întrucît este perpendiculară pe tangenta în M_1 (fig. III.4).

Observații: 1) Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $y = f(x)$ ecuația carteziană explicită a graficului său. Tangenta la grafic în punctul $M_0(x_0, y_0 = f(x_0))$, $x_0 \in I$, are ecuația $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Dreapta care trece prin M_0 și este perpendiculară pe tangentă se numește *normala* la grafic în punctul M_0.

Coordonate polare (fig. III.5) Fie xOy reperul cartezian în planul $\mathcal{P}$. Fiecărui punct $M(x, y) \neq O(0, 0)$ îi punem în corespondență o pereche ordonată (r, θ) de numere reale $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ determinată prin $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ sau echivalent $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Numerele r și θ se numesc *coordonatele polare* ale punctului M și se scrie $M(r, \theta)$.

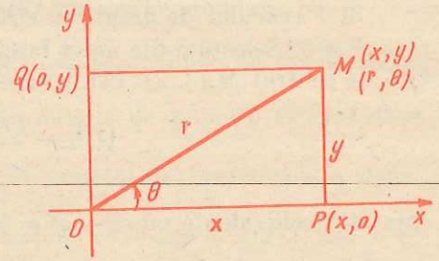


Fig. III.5

Rezultă o bijecție între $\mathcal{P} - \{O\}$ și $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$ numită *sistem de coordonate polare* determinat de reperul cartezian xOy.

PROBLEME

1. Să se găsească ecuațiile cercurilor fixate respectiv prin:

1) centrul cercului $M_0(2, -3)$, raza cercului $r = 7$;

2) centrul cercului $M_0(1, 1)$, o tangentă la cerc $d : 3x + 4y + 8 = 0$;

3) extremitățile unui diametru $A(3, 2)$, $B(-1, 6)$;

4) punctele $A(3, 1)$ și $B(-1, 3)$, o dreaptă care conține centrul $d : 3x - y - 2 = 0$;

5) punctele $M_1(-1, 5)$, $M_2(-2, -2)$ și $M_3(5, 5)$.

Soluție parțială. 2) Raza r a acestui cerc este distanța de la M_0 la dreapta d. Deci,

$$r = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3.$$

Astfel

$$C : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3^2.$$

Ecuația carteziană este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 + 3\cos t$, $y = 1 + 3\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

5) Se folosește ecuația carteziană generală $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ și se pune condiția ca fiecare punct să fie situat pe cerc.

Se găsește sistemul liniar

$$\begin{cases} -2a + 10b + c = -26, \\ -4a - 4b + c = -8, \\ 100a + 10b + c = -50 \end{cases}$$

cu soluția $a = -2$, $b = -1$, $c = -20$. De aceea cercul căutat are ecuația $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

2. 1) Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ reprezintă un cerc C, punîndu-se în evidență centrul $M_0(x_0, y_0)$ și raza r.

2) Să se scrie ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$.

3) Să se găsească ecuațiile carteziene ale tangentelor duse prin $D(8, 7)$ la cercul C.

Soluție. 1) Ecuația dată se transcrie $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ și deci ea reprezintă un cerc cu centrul în $M_0(3, 2)$ și de rază $r=\sqrt{5}$.

2) Punctul A aparține lui C, adică coordonatele sale verifică ecuația lui C. Ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$ se poate obține utilizînd dedublata ecuației lui C, $(x_1-3)(x-3)+(y_1-2)(y-2)=5$. Rezultă $-(x-3)-2(y-2)=5$ sau $x+2y-2=0$.

3) Fasciculul de drepte cu vîrful $D(8, 7)$ are ecuația $r(x-8)+s(y-7)=0$, $r^2+s^2\neq 0$. Selectăm din acest fascicul dreptele care se găsesc la distanța $r=\sqrt{5}$ față de centrul $M_0(3, 2)$. Pentru aceasta se impune condiția

$$\sqrt{5}=\frac{|r(3-8)+s(2-7)|}{\sqrt{r^2+s^2}},$$

care este echivalentă cu $r^2+s^2=5(r+s)^2$. Rezultă $r=-\frac{1}{2}s$, $r=-2s$ și deci $x-2y+6=0$ respectiv $2x-y-9=0$ sînt ecuațiile căutate.

3. Punctul $M_0(3, -1)$ este centrul unui cerc ce determină pe dreapta $2x-5y+18=0$ o coardă de lungime 6. Să se scrie ecuația cercului.

4. Să se arate că cercul $C: x^2+y^2=1$ nu este graficul nici unei funcții, dar este reuniunea graficelor a două funcții.

Soluție. Se știe că graficul unei funcții este intersectat de o dreaptă paralelă cu Oy cel mult într-un punct. Se observă însă că axa Oy intersectează cercul C în două puncte de coordonate $(0, -1)$, $(0, +1)$. De aceea C nu este graficul nici unei funcții.

Semicercul superior $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$ este graficul funcției $f:[-1, 1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, iar semicercul inferior $x^2+y^2=1$, $y<0$ este graficul funcției $g:(-1, 1)\to\mathbf{R}$, $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$. Cercul C este reuniunea acestor două grafice.

5. Pe un cerc C de diametru dat $[AB]$, de lungime $4a$, $a>0$ și centru O, se consideră un punct mobil M.

1) Să se scrie ecuațiile cercurilor circumscrise triunghiurilor AOM și BOM

2) Să se arate că produsul distanțelor de la centrele P și Q ale acestor cercuri la dreapta AB este constant și că dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

3) Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AP și BQ.

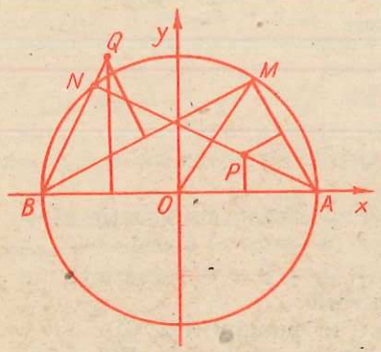


Fig. III.6

1) *Soluție.* 1) Fixăm mai întîi reperul cartezian ca în figura III.6 considerînd dreapta AB ca Ox și mediatoarea segmentului AB ca Oy. Rezultă $A(2a, 0)$, $B(-2a, 0)$ și $C: x^2+y^2-4a^2=0$. Fie $M(\alpha, \beta)$; $M\in C\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-4a^2=0$ (1). Cercul circumscris triunghiului AOM are centrul P situat pe mediatoarea segmentului $[OA]$. Fie $P(a, \lambda)$, $\lambda\in\mathbf{R}$; atunci raza este $r=\sqrt{a^2+\lambda^2}$, iar ecuația este $x^2+y^2-2ax-2\lambda y=0$ cu condiția $\alpha^2+\beta^2-2a\alpha-2\lambda\beta=0$ (2).

Analog găsim ecuația cercului circumscris triunghiului BOM, cu centrul $Q(-a, \mu)$ $\mu\in\mathbf{R}$ și anume $x^2+y^2+2ax-2\mu y=0$ cu condiția $\alpha^2+\beta^2+2a\alpha-2\mu\beta=0$ (3).

2) Din relațiile (1), (2), (3) deducem

$$PP'=\left|\frac{a(2a-\alpha)}{\beta}\right|,\ QQ'=\left|\frac{a(2a+\alpha)}{\beta}\right|,\ \beta\neq 0,\ PP'\cdot QQ'=\frac{a^2\beta^2}{\beta^2}=a^2=\text{const.}$$

Panta dreptei AP este $m_1=-\frac{\lambda}{a}$, iar a dreptei BQ este $m_2=\frac{\mu}{a}$. Deoarece $m_1m_2=-\frac{\lambda\mu}{a^2}=-\frac{a^2}{a^2}=-1$, dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

O b s e r v a ț i e. Produsul $\lambda\mu$ este pozitiv, oricare ar fi poziția punctului M pe cercul C.

3) Fie $\{L\}=AP\cap BQ$. Locul geometric descris de punctul L este chiar cercul $C: x^2+y^2-4a^2=0$.

6. Să se găsească locul geometric descris de punctul de intersecție a dreptelor $d: x\cos\alpha+y=1$, $d': x-y\cos\alpha=1$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

7. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $x^2+2(a+b)x+2ab=0$, dacă a și b sînt doi parametri reali.

Indicație. Calculînd discriminantul se găsește $\Delta=a^2+b^2-4$. Pentru discuție se folosește separarea planului aOb în regiuni.

§ 2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încît $F'F=2c$ (fig. III.7).

D e f i n i ț i e. Fie $a>c$. Mulțimea E a punctelor M cu proprietatea

$$MF'+MF=2a$$

se numește elipsă.

Dacă $c=0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a. Punctele F' și F se numesc *focarele elipsei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $F'F=2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *razele focale* ale punctului M.

Elipsa nu este o mulțime vidă, deoarece cercul cu centrul în F și de rază a taie mediatoarea segmentului $[F'F]$ în două puncte B' și B care aparțin lui E. Elipsa poate fi trasată ca în figura III.7; firul inextensibil de lungime $2a$ are capetele fixate în focare, iar vîrful creionului se mișcă întinzînd acest fir.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea $B'B$ a segmentului $[F'F]$ sînt *axe de simetrie* pentru E. Fie $F'F\cap B'B=\{O\}$. Punctul O este *centru de simetrie*. Aceste elemente fixează reperul cartezian din figura III.8. Rezultă $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$, $B'(0, -\sqrt{a^2-c^2})$, $B(0, \sqrt{a^2-c^2})$.

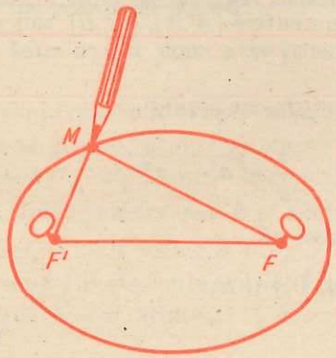


Fig. III.7

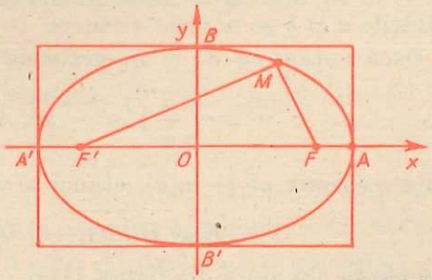


Fig. III.8

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține elipsei E dacă și numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstrație. $M \in E \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Transferînd al doilea termen din partea stîngă în partea dreaptă și ridicînd la pătrat, obținem $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Calcule similare conduc la $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Notînd $b^2 = a^2 - c^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel $E = \left\{ M(x, y) \,\middle|\, (x, y) \in \mathbf{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ sau mai scurt

$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a elipsei. Ea este echivalentă cu ecuațiile parametrice în $\mathbf{R}^2$,

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \; t \in [0, 2\pi), \; t = \text{parametru} \end{cases}$$

(pentru semnificația lui t, vezi soluția problemei 27, Cap. IV)

Considerăm elipsa E de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{sau} \qquad\qquad ,x \in [-a, a]. \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

Ecuația $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \leqslant 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziene explicite*.

Axele de coordonate taie elipsa în punctele $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ care se numesc *vîrfurile elipsei*. Segmentele $[A'A]$, $[B'B]$ sau distanțele $d(A', A) = 2a$, $d(B' B) = 2b$ se numesc respectiv *axa mare* și *axa mică* a elipsei. Jumătățile a și b se numesc *semiaxe*.

Dacă notăm cu E_1 și E_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \; x \to -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

definite respectiv pe $(-a, a)$, atunci se observă că

$$E = E_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup E_2$$

și deci elipsa are alura din figura III.8.

O elipsă are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte (fig. III.9): interiorul lui E notat $\text{int}(E)$ și exteriorul lui E notat $\text{ext}(E)$. Utilizînd funcția

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \; f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ avem}$$

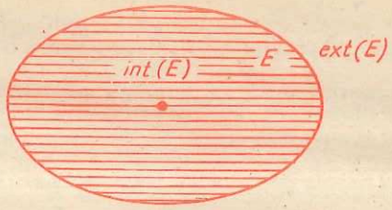


Fig. III.9

$$\text{int}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\},$$
$$E = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\},$$

$\text{ext}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\text{int}(E) \cap \text{ext}(E) = \emptyset$, $\text{int}(E) \cup E \cup \text{ext}(E) = \mathfrak{P}$. Mai mult, mulțimile $\text{int}(E)$ și $\text{int}(E) \cup E$ sînt convexe și conțin centrul O și focarele F', F.

Intersecția dintre dreapta $h: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ și *elipsa* $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este descrisă de soluțiile în $\mathbf{R}^2$ ale sistemului

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

De aceea $h \cap E$ conține cel mult două puncte (fig. III.10).

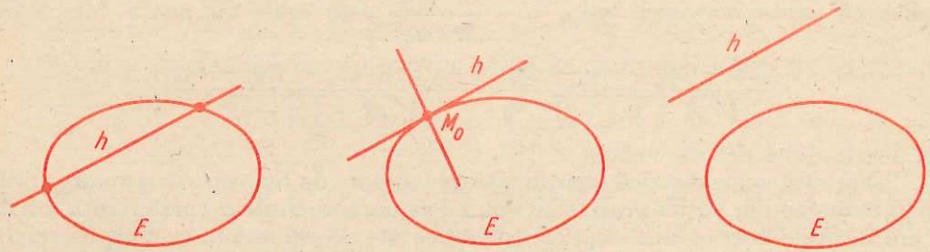


Fig. III.10

Presupunem $\beta \neq 0$ și notăm $m = -\frac{\alpha}{\beta}$, $n = -\frac{\gamma}{\beta}$. Rezultă sistemul (echivalent) $y = mx + n$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Înlocuind pe y în a doua ecuație obținem ecuația de gradul al doilea

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

cu discriminantul $\Delta = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci sistemul are soluțiile distincte (x_1, y_1), (x_2, y_2) și deci $h \cap E = \{M_1, M_2\}$, unde $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$.

În acest caz dreapta h se numește *secanta elipsei*.

Dacă $\Delta = 0$, adică $n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$, dreapta h taie elipsa într-un singur punct (două puncte confundate). În acest caz dreapta h se numește *tangentă* elipsei.

Dacă $\Delta < 0$, atunci $h \cap E = \emptyset$. În acest caz dreapta h se numește *exterioară* elipsei.

Fie elipsa E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ și $M_0(x_0, y_0)\in E$. *Dedublata ecuației elipsei* E în punctul $M_0(x_0, y_0)$, adică ecuația de gradul întîi

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

reprezintă *tangenta la elipsa* E în punctul M_0. Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 se numește *normala elipsei* E *în punctul* M_0 (fig. III.10).

Teoremă. *Tangenta și normala la elipsă în punctul* M_0 *sînt bisectoarele unghiurilor determinate de suporturile razelor focale ale lui* M_0.

Demonstrație. Fie elipsa E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $b^2=a^2-c^2$ și $M_0(x_0, y_0)\in E$, adică $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$. Fie $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$ focarele lui E. Suporturile razelor vectoare $[M_0F']$ și $[M_0F]$ sînt dreptele (fig. III.11) M_0F' : $y_0x-(x_0+c)y-cy_0=0$, respectiv FM_0 : $-y_0x+(x_0-c)y-cy_0=0$.

Dacă $x_0=0$, atunci triunghiul $F'M_0F$ este isoscel, tangenta M_0T este orizontală, iar normala M_0N este verticală (coincide cu Oy). Presupunem $x_0\neq 0$ și ținem seama de identitățile

$$\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}=\frac{a^2+cx_0}{a},\ \sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}=\frac{a^2-cx_0}{a}.$$

Rezultă că panta normalei, $m_{M_0N}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}$, este egală cu panta bisectoarei

$$\frac{y_0x-(x_0+c)y-cy_0}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\frac{-y_0x+(x_0-c)y-cy_0}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}.$$

Deci aceste două drepte coincid.

Proprietatea geometrică menționată în teorema de mai sus corespunde următorului fenomen din optică: razele de lumină ce pornesc dintr-o sursă fixată într-unul din focarele unei oglinzi eliptice sînt reflectate de oglindă în celălalt focar. De aceea teorema este cunoscută sub numele de *proprietatea optică a elipsei*.

Construcția elipsei prin puncte (fig. III.12). Presupunem că se dau axa mare $[A'A]$ de lungime $2a$ și axa mică $[B'B]$ de lungime $2b$.

1) Fixăm un punct O al planului drept mijlocul segmentelor perpendiculare $[A'A]$ și $[B'B]$.

2) Se ia în compas distanța a și cu centrul în B se descrie un arc de cerc care taie pe $[A'A]$ în focarele F' și F.

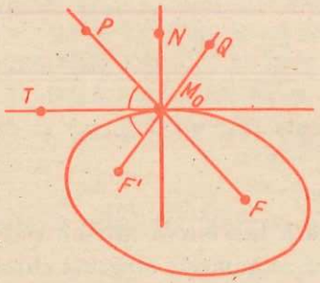


Fig. III.11

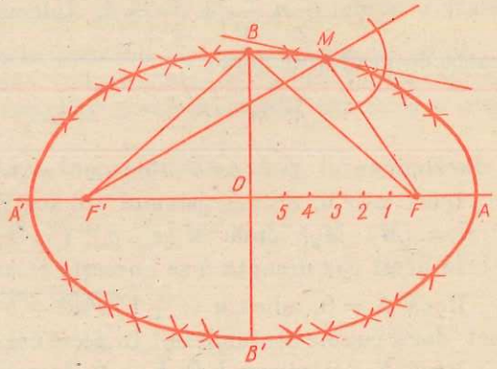


Fig. III.12

3) Se consideră un număr de puncte 1, 2, 3, ... pe axa mare.

4) Se ia în compas distanța de la A' la 1, apoi cu centrul în F' se trasează arce de cerc deasupra și dedesubtul axei mari.

5) Se ia în compas distanța de la A la 1; apoi cu centrul în F se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 4). Astfel se obțin două puncte ale elipsei de pe jumătatea din dreapta.

6) Se repetă pașii 4), și 5) schimbînd pe F' cu F și astfel se obțin două puncte ale elipsei situate pe jumătatea din stînga.

7) Se repetă pașii 4) 5), 6) folosind distanțele de la A' la 2, de la A la 2,... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a construi elipsa.

Punctul M a fost construit folosind distanțele de la A' la 4 și de la A la 4.

Desigur, trebuie să ținem seama de faptul că elipsa nu este „ascuțită" în vecinătatea vîrfurilor iar tangenta în punctul M al elipsei este bisectoarea „exterioară" a unghiurilor dreptelor MF' și MF.

PROBLEME

1. Se consideră elipsele date prin:
1) focarele $F'(-1, 0)$, $F(1, 0)$, axa mare $a=5$;
2) focarul $F(1, 1)$, centrul $C(1, 3)$, axa mare $a=10$;
3) centrul $C(2, 1)$, vîrfurile $A(2, 6)$, $B(1, 1)$.
Să se deseneze aceste elipse și să se găsească ecuațiile lor.

2. Se dau elipsele E_1: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, E_2 : $3x^2+2y^2=12$. Pentru fiecare să se determine vîrfurile, axele și focarele.

3. Să se calculeze aria unui pătrat avînd două vîrfuri ce coincid cu focarele

$$\text{elipsei } E\text{: } \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1=0.$$

Indicație. Avem $a^2=25$, $b^2=16$ de unde $c^2=25-16=9$ și focarele vor fi $F(3, 0)$ și $F'(-3, 0)$. Segmentul $[FF']$ poate coincide cu latura pătratului sau cu diagonala și se calculează aria pentru fiecare caz.

4. Dacă M este un punct al elipsei E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, iar F și F' focarele sale, să se arate că se verifică relația

$$MF\cdot MF'+MO^2=a^2+b^2.$$

Indicație. Se face un calcul similar cu cel de la deducerea ecuației elipsei, dar se ține seama de formula medianei în triunghiul MFF'.

5. Se consideră punctele $A(7, -6)$, $B(-1, 4)$, $C(3, 5)$ și se cere să se precizeze care este situat pe elipsa E: $25x^2+9y^2=450$. În acest punct să se scrie ecuația tangentei la elipsă.

Indicație. Se găsește că C aparține elipsei. Ecuația tangentei se scrie prin dedublare.

6. Se consideră punctele variabile $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, astfel încît $AB=6$.

Să se găsească locul geometric al punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $\frac{1}{2}$, punîndu-se în evidență ecuația carteziană implicită, ecuațiile parametrice.

Soluție (fig. III.13). Fie $M(x, y)$. Rezultă $x=\frac{2\alpha}{3}$, $y=\frac{\beta}{3}$ și $\alpha^2+\beta^2=36$.

Eliminînd parametrii α, β între aceste trei relații, obținem elipsa

$$E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \text{ de semiaxe } a = 4,\ b = 2.$$

Ecuațiile parametrice ale lui E sînt $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

7. Se consideră triunghiurile de tipul $M_1M_2M_3$ înscrise în elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încît centrele lor de greutate să coincidă cu centrul elipsei.

Să se demonstreze că normalele la elipsă, duse prin vîrfurile fiecărui triunghi, sînt concurente.

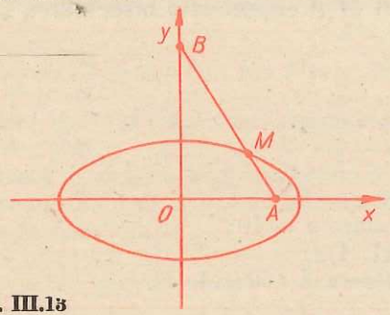


Fig. III.13

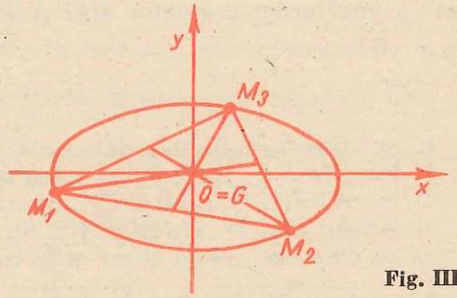


Fig. III.14

Soluție (fig. III.14). Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$; $M_i \in E \Leftrightarrow \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - 1 = 0$.

Relația $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{y_i}{b}\right)^2 = 3$, conduce la $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.

Centrul de greutate $G(x_G, y_G)$ are coordonatele $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, iar $G = O$, implică $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Ecuațiile tangentelor la elipsa E, în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt $\frac{x_ix}{a^2} + \frac{y_iy}{b^2} - 1 = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Ecuațiile normalelor în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt

$$a^2y_1x - b^2x_1y + (b^2 - a^2)x_1y_1 = 0.$$
$$a^2y_2x - b^2x_2y + (b^2 - a^2)x_2y_2 = 0.$$
$$a^2y_3x - b^2x_3y + (b^2 - a^2)x_3y_3 = 0.$$

Aceste trei ecuații formează un sistem cu două necunoscute x, y, care este compatibil determinat deoarece avem

$$\begin{vmatrix} a^2y_1 & -b^2x_1 \\ a^2y_2 & -b^2x_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a^2y_1 & -b^2x_1 & (b^2 - a^2)x_1y_1 \\ a^2y_2 & -b^2x_2 & (b^2 - a^2)x_2y_2 \\ a^2y_3 & -b^2x_3 & (b^2 - a^2)x_3y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2b^2(b^2 - a^2)\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că cele trei normale sînt concurente.

8. Să se arate că:

1) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și perimetrul date, triunghiul isoscel are aria maximă;

2) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și aria date, triunghiul isoscel are cel mai mic perimetru.

Soluție (fig. III.15). 1) Considerăm punctele fixe A, B și un sistem cartezian de axe ca în figură. Triunghiul ABM are perimetrul constant dacă și numai dacă M aparține elipsei de focare A și B. Este evident că triunghiul cu cea mai mare înălțime are cea mai mare arie; aceasta are loc pentru $M = C$, adică în cazul cînd ABC este un triunghi isoscel.

2) Se fixează baza $[AB]$ și lungimea înălțimii OC, unde $O(0, 0)$, $C(0, v)$, $C'(0, -v)$. Orice punct $N(x, y)$ din plan cu proprietățile $|y| = v$: $N \neq C$, $N \neq C'$ aparține exteriorului elipsei de focare A, B și deci perimetrul triunghiului ABN este mai mare decît perimetrul triunghiului ABC.

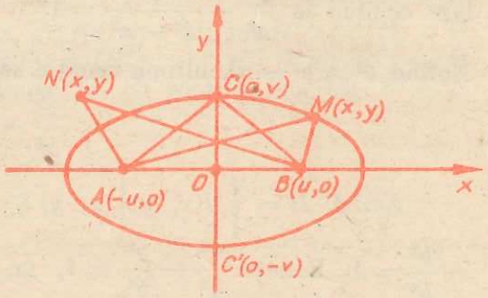


Fig. III.15

§ 3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încît $F'F = 2c$.

Definiție. Fie $a \in (0, c)$. Mulțimea H a punctelor M cu proprietatea

$$|MF' - MF| = 2a$$

se numește hiperbolă.

Punctele F' și F se numesc *focarele hiperbolei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $F'F = 2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *razele focale* ale punctului M.

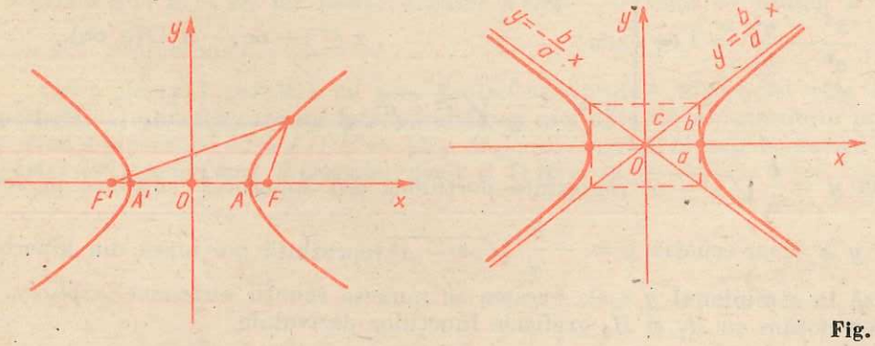


Fig. III.16

Problemă. Să se arate că hiperbola nu este mulțimea vidă.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea segmentului $F'F$ sînt *axe de simetrie* pentru H. Punctul lor comun O este *centru de simetrie*. Acestea fixează reperul cartezian din figura III.16. Rezultă $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$.

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține hiperbolei H dacă și numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b^2 = c^2 - a^2.$$

Demonstrație. $M \in H \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$. Transferînd al doilea termen din partea stîngă în partea dreaptă și ridicînd la pătrat, obținem $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$. Calcule similare conduc la $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

Notînd $b^2 = c^2 - a^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel, $H = \left\{ M(x, y) \,\middle|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ sau mai scurt $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a hiperbolei. Axa Ox taie hiperbola H în punctele $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$ numite *vîrfurile hiperbolei*. De aceea axa Ox se numește *axa transversă* a hiperbolei. Axa Oy nu intersectează pe H (axă netransversă). Folosind funcția *cosinus hiperbolic*, $\mathrm{ch}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ și funcția *sinus hiperbolic*, $\mathrm{sh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, care satisfac identitatea $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$, ajungem la următoarele concluzii: ramura $H': \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \leqslant -a$, are *ecuațiile parametrice* $x = -a\,\mathrm{ch}\, t$, $y = b\,\mathrm{sh}\, t$, $t \in \mathbb{R}$ ramura $H'': \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant a$ are *ecuațiile parametrice* $x = a\,\mathrm{ch}\, t$, $y = b\,\mathrm{sh}\, t$, $t \in \mathbb{R}$.

Fie hiperbola H de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}, \; x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty).$$

Ecuația $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \leqslant 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziene explicite*.

Dacă notăm cu H_1 și H_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \; x \to -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

definite respectiv pe $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, atunci se observă că (fig. III.16)

$$H = H_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup H_2.$$

Dreptele care trec prin origine și au pantele $\pm\frac{b}{a}$ se numesc *asimptotele hiperbolei* H. Ecuația reuniunii asimptotelor este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

O hiperbolă are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte (fig. III.17): *interiorul* lui H notat $\mathrm{int}(H)$ și *exteriorul* lui H notat $\mathrm{ext}(H)$. Utilizînd funcția $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ avem $\mathrm{int}(H) = \{M(x, y) \mid f(x\, y) > 0\}$, $H = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\mathrm{ext}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $\mathrm{int}(H) \cap \mathrm{ext}(H) = \emptyset$, $\mathrm{int}(H) \cup H \cup \mathrm{ext}(H) = \mathfrak{P}$, $\mathrm{int}(H) = \mathrm{int}(H') \cup \mathrm{int}(H'')$, $\mathrm{int}(H') \cap \mathrm{int}(H'') = \emptyset$. Mulțimea $\mathrm{ext}(H)$ conține centrul O. Mulțimea $\mathrm{int}(H)$ conține focarele F' și F.

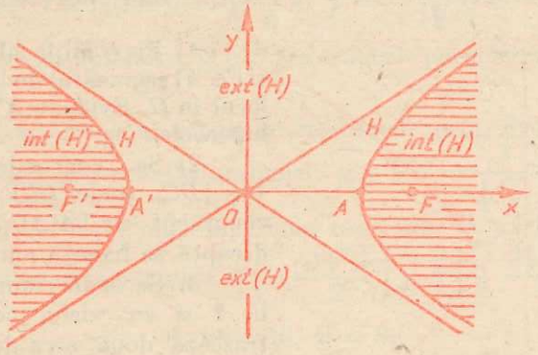


Fig. III.17

Intersecția dintre dreapta $h: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ *și hiperbola* $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ este caracterizată de sistemul:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

De aceea $h \cap H$ conține cel mult două puncte (fig. III.18).

Dacă $h \cap H = \emptyset$, iar panta dreptei h este $-\frac{b}{a}$ sau $\frac{b}{a}$ atunci h este o *asimptotă* a hiperbolei.

Orice dreaptă paralelă cu una dintre asimptotele hiperbolei este *secantă* hiperbolei. O dreaptă care nu este paralelă cu nici una dintre asimptote poate fi: (1) *secantă* hiperbolei dacă $d \cap H = \{M_1, M_2\}$; (2) *tangentă* hiperbolei dacă $d \cap H = \{M_0\}$; (3) *exterioara* hiperbolei dacă $d \cap H = \emptyset$.

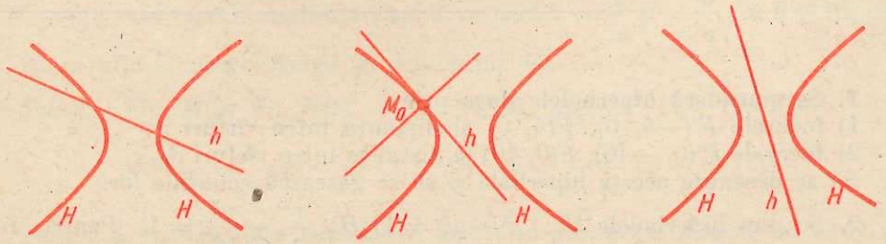


Fig. III.18

Fie hiperbola H: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și $M_0(x_0, y_0) \in H$. *Dedublata ecuației hiperbolei* H în punctul $M_0(x_0, y_0)$, adică ecuația de gradul întîi

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

reprezintă *tangenta la hiperbola* H în punctul M_0. Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 se numește *normala* hiperbolei H în punctul M_0 (fig. III.18).

Proprietatea optică a hiperbolei. Tangenta și normala la hiperbolă în punctul M_0 sînt bisectoarele unghiurilor determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

Construcția hiperbolei prin puncte (fig. III.19). Presupunem că se dau focarele F', F și numărul $2a = |MF' - MF|$ cuprins între zero și distanța focală $F'F = 2c$.

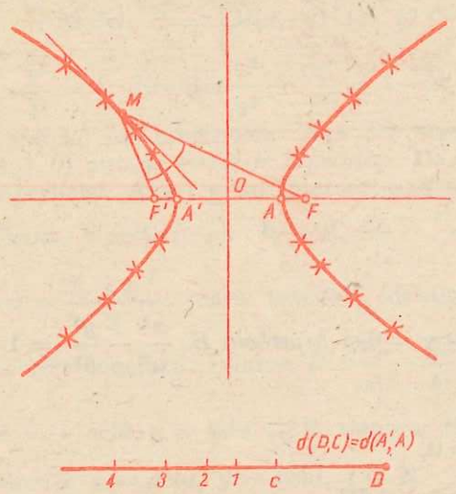


Fig. III.19

1) Fie O mijlocul segmentului $[F'F]$ și $[A'A]$ segmentul de lungime $2a$ cu mijlocul în O. Evident A', A sînt puncte ale hiperbolei.

2) Se construiește o semidreaptă $[DC$, unde $[DC]$ este un segment congruent cu $[A'A]$. Pe această semidreaptă se fixează punctele 1, 2, 3,... .

3) Se ia în compas distanța de la D la 1 și cu vîrful compasului în F se trasează două arce de cerc deasupra și dedesubtul axei focale.

4) Se ia în compas distanța de la C la 1 și cu vîrful compasului în F' se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 3). Intersecțiile acestor arce dau două puncte ale hiperbolei pe ramura din stînga.

5) Se repetă pașii 3) și 4) schimbînd F cu F' și astfel se obțin două puncte ale hiperbolei pe ramura din dreapta.

6) Se repetă pașii 3), 4), 5) folosind distanțele de la D la 2, de la C la 2,... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a putea trasa hiperbola.

Pentru desenarea efectivă se poate ține seama și de faptul că hiperbola nu este „ascuțită" în vecinătatea vîrfurilor, iar tangenta în punctul M al hiperbolei este bisectoarea „interioară" a unghiurilor dreptelor MF' și MF.

PROBLEME

1. Se consideră hiperbolele date prin:
1) focarele $F'(-4, 0)$, $F(4, 0)$ și distanța între vîrfuri 5;
2) focarele $F'(0, -10)$, $F(0, 10)$ și distanța între vîrfuri 8.
Să se deseneze aceste hiperbole și să se găsească ecuațiile lor.

2. Se dau hiperbolele H_1: $x^2 - y^2 = 1$, H_2: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Pentru fiecare să se determine vîrfurile, focarele și asimptotele.

3. Se dă hiperbola H: $2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$.
1) Să se determine vîrfurile și asimptotele hiperbolei H.
2) Să se scrie ecuațiile parametrice ale ramurilor hiperbolei H.
3) Să se găsească ecuația tangentei și ecuația normalei în punctul de coordonate $(\sqrt{10}, \sqrt{2})$.

Soluție. 1) Scriem ecuația lui H sub forma $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$. Rezultă $a^2 = 5$, $b^2 = 2$ și deci $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$. Vîrfurile lui H sînt $A'(-\sqrt{5}, 0)$, $A(\sqrt{5}, 0)$. Relația $c^2 = a^2 + b^2$ dă $c^2 = 7$ și deci focarele sînt $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $F(\sqrt{7}, 0)$.

Reuniunea asimptotelor lui H are ecuația $2x^2 - 5y^2 = 0$. Explicit cele două asimptote au respectiv ecuațiile $y = \sqrt{\frac{2}{5}}\,x$, $y = -\sqrt{\frac{2}{5}}\,x$.

2) Ramura din semiplanul $x \geqslant \sqrt{5}$ are ecuațiile parametrice $x = \sqrt{5}\,\mathrm{ch}\,t$, $y = \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbf{R}$.

3) Ecuația carteziană a tangentei se obține prin dedublare: $2\sqrt{10}x - 5\sqrt{2}y - 10 = 0$. Rezultă ecuația normalei: $y - \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}(x - \sqrt{10})$.

4. Să se scrie ecuația unei hiperbole raportate la axele sale de simetrie știind că hiperbola conține punctele $M\left(5, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ și $N\left(4, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

R. $a^2 = 10$, $b^2 = 3$.

5. Dacă se consideră hiperbola H: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avînd focarele F și F', iar M este un punct arbitrar de pe hiperbolă, să se verifice relația

$$OM^2 - MF \cdot MF' = a^2 - b^2.$$

6. Să se calculeze aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ și dreapta $9x + 2y - 24 = 0$.

7. Să se scrie tangentele la hiperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ în punctele de pe hiperbolă avînd abscisa egală cu 3.

Indicație. Cele două puncte de pe hiperbolă sînt $(3, -\sqrt{2})$, $(3, \sqrt{2})$ și ecuațiile tangentelor se scriu prin dedublare.

8. Pe axa Ox a reperului cartezian xOy se iau punctele M și N astfel încît produsul absciselor lor să fie constanta a^2. Prin M și N se duc două drepte MP și NP, avînd coeficienții unghiulari egali respectiv cu $\frac{b}{a}$ și $-\frac{b}{a}$, $a, b \in (0, +\infty)$.

Să se afle locul geometric al punctului P.

Soluție. Fie $M(\alpha, 0)$, $N(\beta, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha\beta = a^2$ (1). Rezultă

$$MP: y = \frac{b}{a}(x - \alpha) \ (2); \quad NP: y = -\frac{b}{a}(x - \beta) \ (3).$$

Pentru a scrie ecuația carteziană a locului geometric descris de punctul P, vom elimina parametrii α și β, între relațiile (1), (2), (3).

Ecuațiile (2) și (3) se mai pot scrie astfel $y - \frac{b}{a}x = -\frac{b}{a}\alpha$, $y + \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\beta$.

Înmulțind aceste două ecuații membru cu membru și ținînd cont de relația (1), obținem ecuația unei hiperbole

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 4 = 0.$$

9. Se consideră dreptele d_m: $(m^2 + 1)x + 2my + 1 - m^2 = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

1) Există trei drepte distincte d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3} care trec printr-un punct dat al planului?

2) Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului?

Soluție. 1) Fie

$$\begin{cases} (m_1^2 + 1)x + 2m_1y + 1 - m_1^2 = 0, \\ (m_2^2 + 1)x + 2m_2y + 1 - m_2^2 = 0, \\ (m_3^2 + 1)x + 2m_3y + 1 - m_3^2 = 0 \end{cases}$$

sistemul format cu ecuațiile celor trei drepte distincte d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3}.

Deoarece

$$\begin{vmatrix} m_1^2 + 1 & 2m_1 & 1 - m_1^2 \\ m_2^2 + 1 & 2m_2 & 1 - m_2^2 \\ m_3^2 + 1 & 2m_3 & 1 - m_3^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_3^2 & m_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0$$

(determinant Vandermonde), nu există trei drepte distincte concurente.

2) Se observă că $d_m: m^2(x - 1) + 2my + x + 1 = 0$. Fie $x = 1$; atunci ecuația în m este de gradul unu, $my + 1 = 0$. De aceea prin fiecare punct de coordonate $(1, y)$, $y \neq 0$ trece o singură dreaptă d_m, iar prin punctul de coordonate $(1, 0)$ nu trece nici o dreaptă d_m.

Fie $x \neq 1$. Ecuația de gradul doi în m are soluții reale numai dacă $x^2 - y^2 - 1 \leqslant 0$. Dar ecuația $x^2 - y^2 - 1 = 0$ reprezintă o hiperbolă H. Astfel prin fiecare punct al lui H diferit de punctul de coordonate $(1, 0)$ trece o singură dreaptă d_m, prin fiecare punct al regiunii $\mathrm{ext}(H) - \{(1, y),\ y \neq 0\}$ trec două drepte distincte, iar prin fiecare punct al regiunii $\mathrm{int}(H)$ nu trece nici o dreaptă.

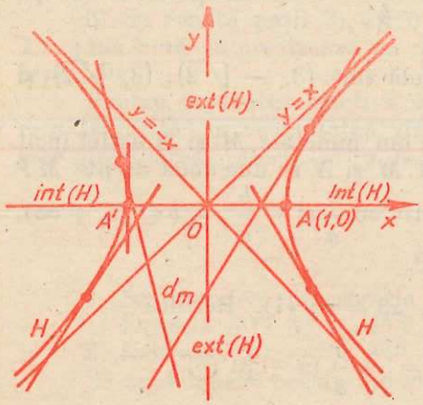


Fig. III.20

Evident a doua întrebare o conține pe prima.

Comentariu (fig. III.20). 1) Dreptele d_m, $m = \pm 1$, sînt asimptotele hiperbolei H.

2) Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$, adică $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$ și $xx_0 - yy_0 - 1 = 0$ ecuația tangentei la H în punctul M_0. Deoarece $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$ dacă și numai dacă $\frac{x_0}{m^2 + 1} = \frac{-y_0}{2m} = \frac{-1}{1 - m^2}$, $\forall m \neq \pm 1$ rezultă că toate dreptele d_m, $m \neq \pm 1$ sînt tangente la H.

§ 4. Parabola

Fie h o dreaptă din plan și F un punct care nu aparține lui h.

Definiție. Mulțimea P a punctelor M cu proprietatea

$$d(M; h) = MF$$

se numește parabolă.

Punctul F se numește *focarul parabolei*, dreapta h se numește *directoarea parabolei*, iar segmentul $[M_0F]$ se numește *raza focală* a punctului M_0. Parabola nu este vidă: fie $B \in h$, un punct fixat, fie k perpendiculara în B pe h și l mediatoarea segmentului $[BF]$; notînd $\{M\} = k \cap l$ rezultă $M \in P$.

Fie A proiecția lui F pe h. Dreapta AF este *axă de simetrie* pentru parabola P. Numărul $p = AF > 0$ se numește *parametrul parabolei*. Notînd cu O mijlocul segmentului $[AF]$ și alegînd reperul cartezian xOy ca în figura III.21 avem

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad h: x = -\frac{p}{2}, \quad A\left(-\frac{p}{2}, 0\right).$$

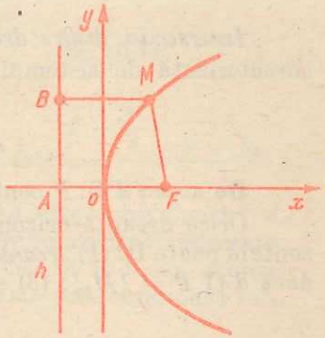


Fig. III.21

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține parabolei P dacă și numai dacă*

$$y^2 = 2px.$$

Demonstrație. $M \in P \Leftrightarrow \mathrm{d}(M; h) = MF \Leftrightarrow \mathrm{d}^2(M; h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$

Deci $P = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y^2 = 2px\}$ sau P: $y^2 = 2px$. Ecuația $y^2 = 2px$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită a parabolei*. Aceasta este echivalentă cu *ecuațiile parametrice*

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, \\ y = t, \ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Axa Ox taie parabola în punctul $O(0, 0)$ numit *vîrful parabolei*. De aceea Ox se numește *axă transversă*. Axa Oy este *netransversă*.

Fie parabola P de ecuație

$$y^2 = 2px, \quad x \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2px} \\ \text{sau} \\ y = -\sqrt{2px} \end{cases}, \quad x \geqslant 0.$$

Ecuația $y = \sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în primul cadran, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în cadranul patru, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Acestea se numesc *ecuații carteziene explicite*.

Dacă notăm cu P_1 și P_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \sqrt{2px}, \quad x \to -\sqrt{2px}$$

definite respectiv pe $(0, \infty)$, atunci se observă că

$$P = P_1 \cup \{(0, 0)\} \cup P_2$$

și deci parabola are alura din figura III.21.

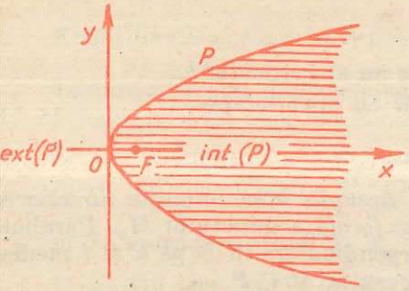


Fig. III.22

Parabola P împarte planul în două submulțimi disjuncte (fig. III.22): interiorul lui P notat int(P) și exteriorul lui P notat ext(P). Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcției $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = y^2 - 2px$. Anume $\text{int}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $P = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\text{int}(P) \cap \text{ext}(P) = \emptyset$, $\text{int}(P) \cup P \cup \text{ext}(P) = \mathcal{P}$.

Mulțimile int(P) și int(P) $\cup$ P sînt convexe și conțin focarul F. Directoarea parabolei este conținută în ext(P).

Intersecția dintre dreapta d: $ax + by + c = 0$ *și parabola* P: $y^2 = 2px$ este caracterizată de sistemul:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y^2 = 2px, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

De aceea $d \cap P$ conține cel mult două puncte (fig. III.23).

Orice dreaptă orizontală este *secantă* parabolei. O dreaptă care nu este orizontală poate fi: (1) *secantă* parabolei dacă $d \cap \mathcal{P} = \{M_1, M_2\}$; (2) *tangentă* parabolei dacă $d \cap P = \{M_0\}$; (3) *exterioară* parabolei dacă $d \cap P = \emptyset$.

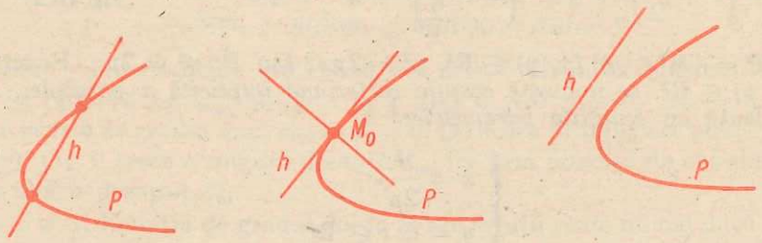


Fig. III.23

Fie parabola $P: y^2 = 2px$ și $M_0(x_0, y_0) \in P$. *Tangenta la parabola* P în punctul M_0 are ecuația

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

(*dedublata ecuației parabolei în punctul* $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin M_0 și este perpendiculară pe tangentă se numește *normala parabolei* în punctul M_0 (fig. III.23).

Teoremă. *Tangenta și normala la parabolă în punctul* M_0 *sînt bisectoarele unghiurilor determinate de suportul razei focale a lui* M_0 *și de paralela prin* M_0 *la axa parabolei.*

Demonstrație. Fie parabola P: $y^2 = 2px$, cu directoarea h: $x = -\frac{p}{2}$ și focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$, adică $y_0^2 = 2px_0$ și $B\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ proiecția lui M_0 pe h. Mai întîi observăm că proprietatea enunțată este echivalentă cu oricare dintre proprietățile (fig. III.24):

1) Tangenta la P în M_0 este mediatoarea segmentului $[BF]$.

2) Simetricul focarului în raport cu tangenta în M_0 aparține directoarei.

3) Proiecția ortogonală a focarului pe tangenta în M_0 aparține tangentei în vîrf.

Astfel este suficient să arătăm că tangenta în M_0, de ecuație $yy_0 = p(x + x_0)$ trece prin mijlocul lui $[BF]$ și este perpendiculară pe dreapta BF. Dar aceste fapte devin evidente din moment ce mijlocul lui $[BF]$ are coordonatele $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$, ecuația tangentei se retranscrie $\frac{x + x_0}{y_0} = \frac{y}{p}$, iar ecuația dreptei BF este $\frac{x - \frac{p}{2}}{p} = \frac{y - y_0}{-y_0}$.

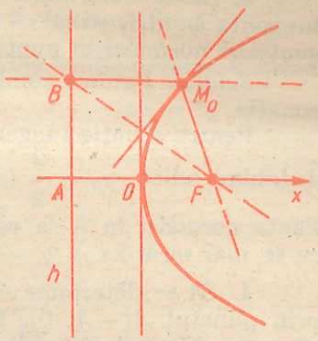


Fig. III.24

Din punctul de vedere al opticii, teorema precedentă este echivalentă cu faptul că razele de lumină paralele cu axa unei oglinzi parabolice sînt reflectate în focar sau invers, cu faptul că dacă o sursă de lumină se așează în focar, atunci razele reflectate sînt paralele cu axa oglinzii. De aceea teorema este cunoscută sub numele de *proprietatea optică a parabolei.*

Construcția parabolei prin puncte (fig. III.25). Presupunem că se dau focarul F și directoarea h.

1) Se localizează focarul F și directoarea h.

2) Se desenează dreptele 1, 2, 3,... paralele cu directoarea.

3) Se ia în compas distanța de la directoarea h la dreapta 1. Cu vîrful compasului în focar, se trasează două arce de cerc care intersectează dreapta 1. Astfel se obțin două puncte ale parabolei.

4) Se repetă pasul 3) pentru dreptele 2, 3...

5) După determinarea unui număr suficient de puncte, se desenează parabola ținîndu-se seamă că vîrful O este la jumătatea distanței dintre h și F, iar tangenta în fiecare punct M de pe parabolă este bisectoarea unghiului $\widehat{FMB}$.

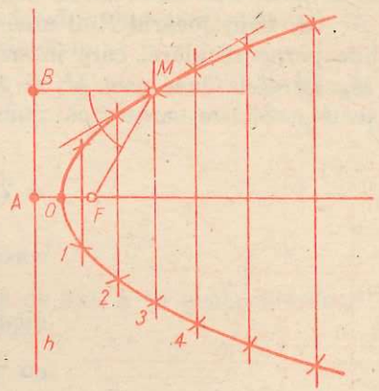


Fig. III.25

PROBLEME

1. Se consideră parabolele fixate respectiv prin:

1) vîrful $O(0, 0)$ și focarul $F(2, 0)$;

2) focarul $F(1, 1)$ și directoarea $x = 2$;

3) vîrful $A(2, 0)$ și directoarea $2x - y = 0$.

Să se deseneze aceste parabole și să se găsească ecuațiile lor.

2. Se dau parabolele P_1: $y^2 = 2x$, P_2: $x^2 = -5y$. Pentru fiecare să se găsească vîrful, focarul, axa și directoarea.

3. Să se determine ecuația unei parabole raportată la axa de simetrie și tangenta în vîrf, știind că trece prin punctul $A(3, 3)$. Să se scrie apoi ecuația tangentei și normalei în punctul A.

Soluție. Punînd condiția ca punctul A să se afle pe parabolă, se găsește ecuația $y^2 = 3x$.

Pentru ecuația tangentei în A la parabolă, se folosește ecuația obținută prin dedublare adică $yy_0 = \frac{3}{2}(x + x_0)$ și se obține $3y = \frac{3}{2}(x+3)$, adică $x - 2y + 3 = 0$. Panta normalei în A la parabolă este $m = -2$; găsim $y - 3 = -2(x-3)$ ceea ce se mai scrie $2x + y - 9 = 0$.

4. Să se determine ecuațiile tangentelor la parabola $P : y^2 = 2x$ care trec prin punctul $A(-1, 0)$. Prin ce punct trec normalele corespunzătoare? Să se găsească aria patrulaterului determinat de aceste tangente și normale.

5. Să se determine un punct M situat pe parabola $y^2 = 64x$, cît mai aproape posibil de dreapta $4x + 3y + 37 = 0$ și să se calculeze distanța de la punctul M la această dreaptă.

Soluție. Dacă se notează $M(a, b)$, din condiția ca să fie situat pe parabolă, rezultă $b^2 = 64a$. Calculăm distanța de la punctul M la dreapta dată. Se găsește $d = \frac{|4a + 3b + 37|}{5}$ și cum $a = \frac{b^2}{64}$, distanța devine $d(b) = \frac{|b^2 + 48b + 592|}{80} = \frac{1}{80}(b^2 + 48b + 592)$. Se observă că $d(b)$ admite un minim pentru $b = -24$. De aceea $M(9, -24)$, iar $d = \frac{1}{5}$.

6. Prin focarul F al unei parabole $P : y^2 = 2px$ se duc două drepte variabile perpendiculare, care intersectează directoarea parabolei în punctele M_1 și M_2. Paralele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei taie curba P în punctele N_1 și N_2. Să se arate că punctele N_1, N_2 și F sînt coliniare.

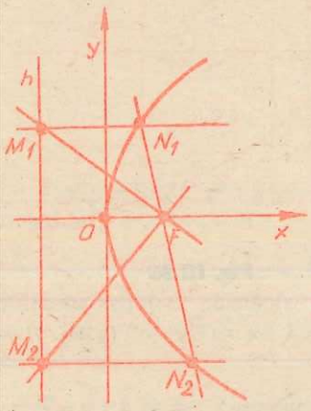


Fig. III.26

Soluție (fig. III.26). Focarul parabolei $P : y^2 = 2px$ este punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, iar directoarei h îi corespunde ecuația $x = -\frac{p}{2}$. Fie dreptele perpendiculare $d : y = m\left(x - \frac{p}{2}\right)$, $d' : y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, cu $m \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\{M_1\} = d \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1\left(-\frac{p}{2}, -pm\right).$$

$$\{M_2\} = d' \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{m}\right).$$

Paralelele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei au respectiv ecuațiile $y = -pm$ și $y = \frac{p}{m}$. Coordonatele punctelor N_1 și N_2 sînt soluțiile următoarelor sisteme de ecuații

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = -pm \end{cases} \text{ și } \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{p}{m}. \end{cases}$$

Rezolvînd aceste sisteme, obținem

$$N_1\left(\frac{pm^2}{2}, -mp\right), \quad N_2\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right).$$

Coordonatele punctelor N_1, N_2 și F verifică condiția de coliniaritate a trei puncte adică

$$\begin{vmatrix} \frac{pm^2}{2} & -mp & 1 \\ \frac{p}{2m^2} & \frac{p}{m} & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2}\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \cdot 0 = 0.$$

7. Pe o parabolă se consideră un punct variabil M și simetricul său, M', față de axa de simetrie. Să se găsească locul geometric al intersecției tangentei în M la parabolă cu paralela dusă prin M' la axa de simetrie.

8. Să se arate că orice parabolă cu axa paralelă cu Oy are o ecuație de forma $y = ax^2 + bx + c$. Să se găsească vîrful, focarul și directoarea pentru o asemenea parabolă.

§ 5. Conice

Curbele de intersecție dintre un con de rotație de axă k și generatoarea g cu un plan $\mathcal{P}$ sînt de următoarele tipuri (fig. III.27):

1) cerc sau punct, dacă $\mathcal{P} \perp h$;

2) elipsă sau punct, dacă $(\widehat{\mathcal{P}, h}) > (\widehat{g, h})$;

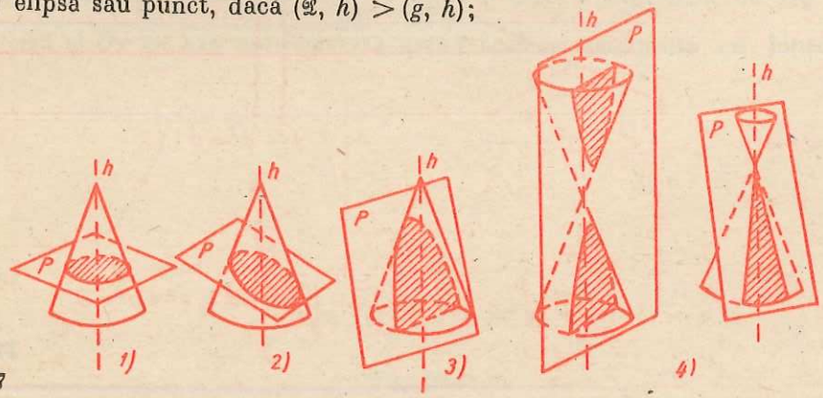


Fig. III.27

3) parabolă sau pereche de drepte confundate, dacă $(\widehat{\mathcal{R}, h}) = (\widehat{g, h})$;

4) hiperbolă sau pereche de drepte, dacă $0° \leqslant (\widehat{\mathcal{R}, h}) < (\widehat{g, h})$.

Toate aceste curbe poartă numele de *conice* și sînt caracterizate prin ecuații de gradul doi în x și y, unde $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. De aceea apare natural să se pună problema generală a cercetării mulțimilor de puncte, din plan, ale căror coordonate constituie soluțiile unei ecuații de gradul doi în $\mathbf{R}^2$.

Fie funcția polinomială

$$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}.$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Definiție. Mulțimea

$$\Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ g(x, y) = 0\}$$

se numește curbă algebrică de ordinul al doilea sau conică. Pe scurt se notează $\Gamma : g(x, y) = 0$.

Teoremă. *Mulțimea* Γ *este congruentă cu una dintre mulțimile din figura III.28.*

Demonstrație. Subliniem că enunțul teoremei este echivalent cu fiecare dintre afirmațiile următoare:

1) Γ este fie un cerc (fig. III.28.1), o elipsă (fig. III.28.2), o hiperbolă (fig. III.28.3), o parabolă (fig. III.28.4), o reuniune de drepte (fig. III.28.5, 6, 7), o mulțime care conține un singur punct (fig. III.28.8), fie mulțimea vidă (fig. III.28.9).

2) orice ecuație de tipul $g(x, y) = 0$ poate fi redusă la una dintre *ecuațiile canonice* scrise în figura III.28.

Cazul cînd Γ reprezintă un cerc ($a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$) este cunoscut din §1. De altfel cercul poate fi privit ca o elipsă particulară. De aceea acest caz este lăsat deoparte.

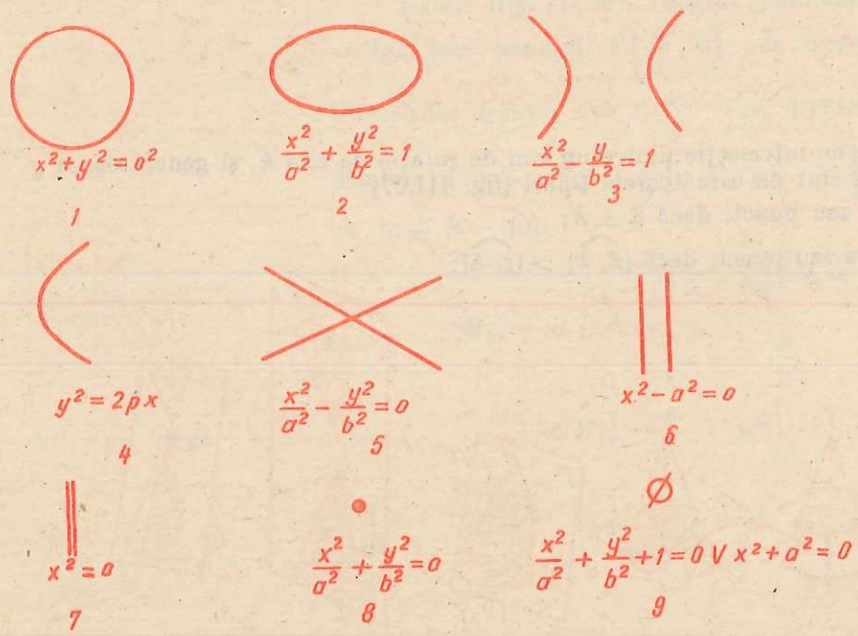


Fig. III.28

Notăm

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

a) Presupunem $a_{12} = 0$. Dacă $\delta \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{10}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{20}}{a_{22}}\right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

și translația

$$\mathcal{T} : x' = x + \frac{a_{10}}{a_{11}},\ y' = y + \frac{a_{20}}{a_{22}}$$

justifică teorema. Dacă $\delta = 0$, de exemplu $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{22}\left(y + \frac{2a_{20}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{10}x + a_{00} - \frac{4a^2_{20}}{a_{22}} = 0$$

și teorema devine evidentă.

b) Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, determină o rotație în plan

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y = y' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

astfel încît în ecuația $g'(x', y') = (g \circ \mathcal{R})(x', y') = 0$ coeficientul produsului $x'y'$ se anulează. Într-adevăr, coeficientul respectiv este $2a_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta$. Astfel cazul $a_{12} \neq 0$ se reduce la cazul $a_{12} = 0$.

Cazuri particulare

1) Fie trinomul de gradul al doilea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Graficul $G(f)$ are ecuația carteziană explicită $y = ax^2 + bx + c$. Acest grafic este o parabolă (fig. III.29, $a > 0$) cu axa transversă paralelă cu Oy și cu vîrful

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

2) Mulțimea de ecuație $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este o hiperbolă cu Oy ca axă transversă și Ox ca axă netransversă avînd aceleași asimptote cu hiperbola de

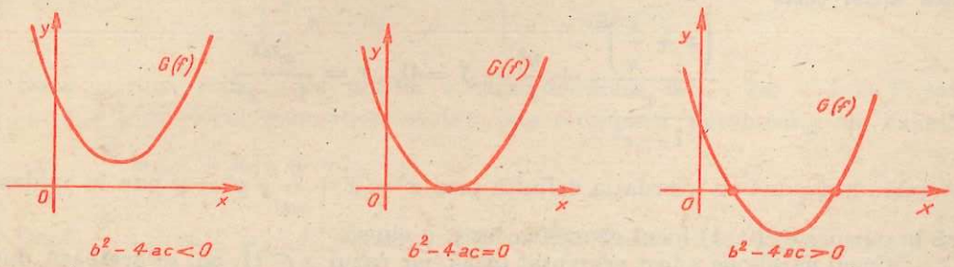


Fig. III.29

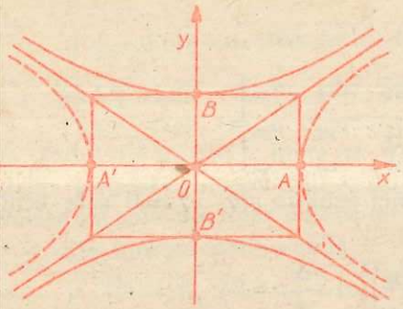


Fig. III.30

ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aceste două hiperbole se numesc *conjugate* una alteia (fig. III.30).

3) Hiperbola de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ se numește *hiperbolă echilateră*. Asimptotele acestei hiperbole sînt bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate,

$$y = -x \text{ și } y = x.$$

Fie conica $\Gamma : xy = m^2$. Rotația $\mathcal{R} : x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ pune în evidență că Γ este o hiperbolă echilateră de ecuație canonică $x'^2 - y'^2 = 2m^2$. Asimptotele lui Γ sînt axele de coordonate Ox și Oy, iar axele de simetrie sînt bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate (fig. III.31).

Definiția comună a elipsei, hiperbolei și parabolei. Fie F un punct fix numit *focar*, h o dreaptă fixă care nu trece prin F, numită *directoare*, și $e \in (0, \infty)$ un număr numit *excentricitate*. Locul geometric al punctelor M cu proprietatea

$$\frac{d(M, F)}{d(M, h)} = e$$

este o elipsă în cazul $e \in (0, 1)$, o parabolă pentru $e = 1$ sau o hiperbolă în cazul $e \in (1, \infty)$.

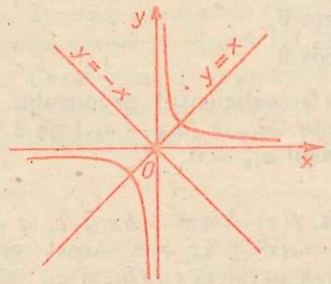


Fig. III.31

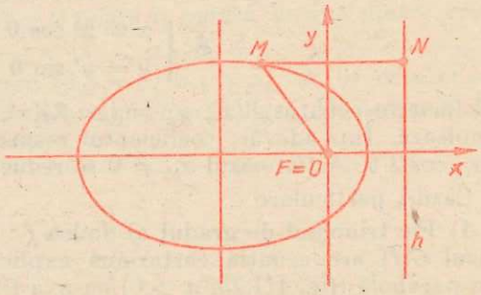


Fig. III.32

Să explicităm cazul $e \in (0, 1)$. Pentru simplificarea calculelor fixăm reperul cartezian, astfel încît Ox să fie perpendiculară pe h și $F = O$ (fig. III.32). Deci $F(0, 0)$, $h : x = \alpha > 0$. Dacă M are coordonatele (x, y), atunci relația precedentă este echivalentă cu ecuația

$$x^2 + y^2 = e^2(x - \alpha)^2,$$

sau altfel scris

$$\frac{\left(x + \frac{r}{\alpha}\right)^2}{\frac{r}{1 - e^2}} + \frac{y^2}{r} - 1 = 0, \quad r = \frac{\alpha^2 e^2}{1 - e^2}.$$

Aceasta împreună cu translația definită prin $x' = x + \frac{r}{\alpha}$, $y' = y$ pun în evidență că în cazul $e \in (0, 1)$ locul geometric este o elipsă.

Cazul parabolei a fost prezentat în §4, iar cazul $e \in (1, \infty)$ se tratează după modelul precedent.

Intersecția a două conice. Fie conicele $\Gamma_1 : g(x, y) = 0$ și $\Gamma_2 : h(x, y) = 0$. Intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este caracterizată prin sistemul

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ h(x, y) = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Deoarece fiecare dintre ecuațiile acestui sistem are gradul doi, intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține cel mult patru puncte.

Presupunem că Γ_1 este cercul de ecuație (1) $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$, iar Γ_2 este cercul de ecuație (2) $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$. Coordonatele punctelor comune trebuie să verifice ambele ecuații, deci și ecuația obținută prin scăderea lor,

$$(3) \qquad 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0.$$

Această ecuație reprezintă o dreaptă perpendiculară pe dreapta care unește centrele celor două cercuri și se numește *axa radicală* a celor două cercuri. Sistemul format din ecuațiile (1) și (2) este echivalent cu sistemul format de ecuațiile (1) și (3) sau cu cel format de ecuațiile (2) și (3).

PROBLEME

1. Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție a parabolelor de ecuații:

$$y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m, \ y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p,$$

dacă $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1$.

Soluție. Pentru găsirea ecuației carteziene a locului geometric trebuie să eliminăm parametrii m și p între următoarele ecuații

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m, \\ y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1. \end{cases}$$

Scăzînd primele două egalități, obținem

$$\left(\frac{3}{2}x - m - p - 1\right)(p - m) = 0.$$

Dacă $p = m$, atunci din ultima ecuație deducem $m^2 - 2m - 1 = 0$ sau $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; locul geometric căutat este reuniunea parabolelor de ecuații $y = x^2 - \frac{3}{2}m_{1,2}x + m_{1,2}^2 + m_{1,2}$.

Dacă $\frac{3}{2}x = m + p + 1$, atunci $y = x^2 - mp$. Transcriind ultima ecuație în forma $m + p + 1 = mp$ și eliminînd pe $m + p + 1$ și mp, găsim ecuația

$\frac{3}{2}x = x^2 - y$, care reprezintă o parabolă cu axa $x = \frac{3}{4}$, și tangenta în vîrf $y = -\frac{9}{16}$.

2. Să se traseze graficele următoarelor funcții:

1) $f_1 : D_1 \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x+1}$,

2) $f_2 : D_2 \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)}$,

3) $f_3 : D_3 \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

Indicație. 1) $D_1 = [-1, +\infty)$, $y = f_1(x)$ este ecuația graficului. Echivalența

$$y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y^2 = x + 1,\ x \in [-1, +\infty),\ y \in [0, +\infty),$$

arată că graficul lui f_1 este un arc de parabolă.

2) $D_2 = [-1, 5]$, $y = f_2(x)$ ecuația graficului. Echivalenta

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)} \Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{9}[9 - (x-2)^2],\ x \in [-1, 5],$$

$$y \in [0, 2] \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$x \in [-1, 5]$, $y \in [0, 2]$ arată că graficul lui f_2 este un arc de elipsă.

3) $D_3 = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, $y = f_3(x)$ ecuația graficului. Echivalența

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3} \Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{16}[(x-1)^2 - 4],\ x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty),$$

$$y \in [0, +\infty) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1,\ x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty),$$

$y \in [0, \infty)$ pune în evidență că graficul lui f_3 este o parte dintr-o hiperbolă.

3. Se dau hiperbolele $\Gamma_1 : x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $\Gamma_2 : -x^2 + 2xy + y^2 = 1$. Să se determine $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Soluție. Problema se reduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 1, \\ -x^2 + 2xy + y^2 = 1, \end{cases}$$

în $\mathbf{R}^2$. Scăzînd cele două ecuații rezultă $x^2 - y^2 = 0$. Astfel sistemul inițial este echivalent cu

$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Din $x = y$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ deducem soluțiile $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, iar $x + y = 0$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ nu au soluții comune. În concluzie, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține punctele de coordonate $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Se cer punctele comune ale cercurilor $C_1 : x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ și $C_2 : x^2 + y^2 + y - 2 = 0$.

Soluție. Sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ 3x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $A(0, -2)$, $B\left(-\frac{9}{10}, -\frac{7}{10}\right)$.

§ 6. Inegalități pătratice

Fie $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ un polinom de gradul doi. O inegalitate de forma $g(x, y) \geqslant 0$ se numește *inegalitate pătratică*. Pentru a rezolva o asemenea inegalitate este suficient să trasăm conica de ecuație $g(x, y) = 0$ și apoi să stabilim submulțimea din plan pe care g are semnul plus sau submulțimea pe care are semnul minus. Deoarece g păstrează semn constant pe o asemenea submulțime, pentru stabilirea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_0, y_0) și să vedem ce semn are numărul $g(x_0, y_0)$.

A determina minimul (sau maximul) unei funcții $f(x, y) = ax + by + c$ cu restricția $g(x, y) \geqslant 0$ revine la a determina valoarea minimă (resp. maximă) a lui λ astfel încît familia de drepte paralele $ax + by + c = \lambda$ să intersecteze mulțimea $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) \geqslant 0\}$.

PROBLEME

1. Se dă dreapta $d : x - y - 3 = 0$ și mulțimea $M : y \geqslant x^2 - x,\ x \geqslant y^2 - y$. Să se determine punctul din mulțimea M care este cel mai apropiat de dreapta d.

Soluție. Fie parabolele $P_1 : y = x^2 - x$, $P_2 : x = y^2 - y$ cu punctele comune $O(0, 0)$, $A(2, 2)$. Mulțimea $M = (\mathrm{int}P_1 \cup P_1) \cap (\mathrm{int}P_2 \cup P_2)$ este reprezentată în figura III.33.

Punctul din M situat cel mai aproape de d este punctul din P_1 prin care trece tangenta la P_1 paralelă cu d. Sistemul $y = x + \lambda$, $y = x^2 - x$ conduce la ecuația $x^2 - 2x - \lambda = 0$, iar aceasta are soluție dublă numai dacă $\lambda = -1$. Rezultă $x = 1$, $y = 0$.

2. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 \geqslant 1, \\ -x^2 + 2xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

Indicație. Soluțiile în $\mathbf{R}^2$ ale sistemului $x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $-x^2 + 2xy + y^2 = 1$ sînt $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

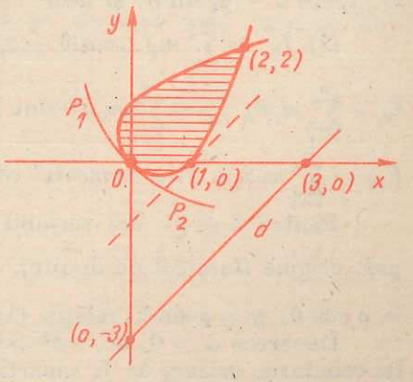


Fig. III.33

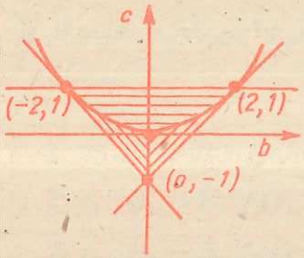


Fig. III.34

3. Să se determine perechile de numere reale b, c astfel încît rădăcinile ecuației $z^2 + bz + c = 0$ să se afle în interiorul cercului unitate, $\{z \mid |z| < 1\}$, din planul complex.

Soluție. Rădăcinile ecuației date sînt complexe dacă $b^2 - 4c < 0$. Pentru ca ele să fie în interiorul cercului $|z| = 1$, se impune și $0 \leqslant c < 1$. Astfel dacă punctul (b, c) aparține interiorului parabolei $b^2 - 4c = 0$ și benzii $0 \leqslant c < 1$ (fig. III.34), atunci rădăcinile complexe aparțin interiorului cercului unitate cu centrul în origine, din planul xOy.

Rădăcinile ecuației date sînt reale dacă $b^2 - 4c \geqslant 0$ (parabola și exteriorul ei!). Pentru ca ele să fie cuprinse în cercul unitate este necesar să aparțină intervalului $(-1, 1)$. Pentru aceasta se impun condițiile

$$f(-1)f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant 0, f(1)f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant 0, \quad \left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right| < 1.$$

Deoarece $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{4c - b^2}{4} \leqslant 0$, aceste condiții se reduc la

$$f(-1) = 1 - b + c > 0, \; f(1) = 1 + b + c > 0.$$

De aceea, dacă punctul (b, c) aparține regiunii hașurate oblic în figura III.34, atunci rădăcinile reale aparțin mulțimii $\{z \mid |z| < 1\}$.

În concluzie, punctul (b, c) trebuie să aparțină interiorului triunghiului de vîrfuri $(0, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$.

§ 7. Aplicații în fizică și tehnică

Elipsa de inerție. Fie un plan raportat la reperul cartezian xOy și sistemul de puncte materiale $M_1(x_1, y_1), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ avînd respectiv masele $m_1, \ldots, m_n$. *Momentul de inerție* al sistemului de puncte față de o axă de rotație h se definește prin expresia $I_h = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$, unde d_i este distanța de la punctul M_i, la axa h. Fără să afectăm generalitatea problemei putem presupune că axa de rotație este $h_\theta : x \cos\theta + y \sin\theta = 0$, unde θ este fixat. Rezultă $d_i = d(M_i; h_\theta) = |x_i \cos\theta + y_i \sin\theta|$ și deci

$$(1) \quad I_{h_\theta} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \cos\theta + y_i \sin\theta)^2 = I_y \cos^2\theta + I_{xy} \sin 2\theta + I_x \sin^2\theta, \text{ unde}$$

$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$, $I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$ sînt respectiv momentele față de axele Oy, Ox, iar $I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$ este *momentul centrifugal.*

Pentru $\theta \in [0, 2\pi)$ variabil se obțin toate axele de rotație posibile ce trec prin origine (fascicul de drepte). Notînd $\rho = \frac{1}{\sqrt{I_{h_\theta}}}$, $a = I_y$, $b = I_{xy}$, $c = I_x$, $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, relația (1) se transcrie $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$.

Deoarece $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ (de ce?), această ecuație reprezintă o elipsă E. În concluzie, oricare ar fi repartiția maselor $m_1, \ldots, m_n$, momentele de inerție ale sistemului de puncte $\{M_1, \ldots, M_n\}$ în raport cu axele de rotație ce trec prin origine sînt caracterizate de elipsa E, numită *elipsa de inerție a sistemului de puncte* $\{M_1, \ldots, M_n\}$ *față de punctul* O (fig. III.35). Elipsa de inerție joacă un rol important în mecanică și în rezistența materialelor.

Legea Boyle-Mariotte. Experiențe din fizică au dovedit că *într-un regim izoterm produsul dintre presiunea* p *și volumul* V, *ale aceleiași mase de gaz, rămîne constant.*

Dacă (p, V) sînt interpretate ca fiind coordonatele unui punct dintr-un plan raportat la reperul cartezian pOV, atunci ecuația $pV = \text{const}$, $p > 0$, $V > 0$ reprezintă o ramură a unei hiperbole echilatere (fig. III.36). În fizică această ramură se numește *izotermă.*

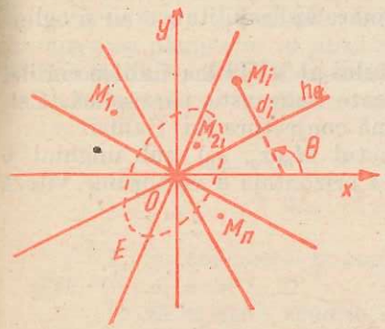


Fig. III.35

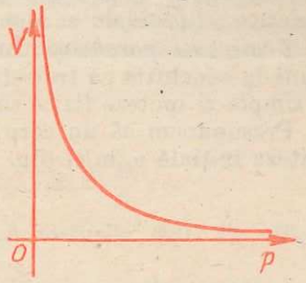


Fig. III.36

Energia potențială. Cîmpul gravitațional newtonian (cîmp de atracție) și cîmpul electrostatic coulombian (cîmp de atracție sau de respingere) au proprietatea că energia potențială U a unui punct material (de masă m în cazul cîmpului gravitațional sau de sarcină electrică q în cazul cîmpului coulombian) aflat în astfel de cîmpuri este invers proporțională cu distanța r de la origine la punctul material. Considerînd că (r, U) sînt coordonatele unui punct dintr-un plan raportat la reperul cartezian rOU, ecuația $rU = \text{const}$ reprezintă o ramură a unei hiperbole echilatere situată în cadranul I dacă $U > 0$ sau în cadranul IV dacă $U < 0$, pentru cîmpul electrostatic sau numai în cadranul IV pentru cîmpul gravitațional.

Oglinzi parabolice. Fie parabola P cu directoarea h și focarul F. Tangenta la P într-un punct $M \in P$ este bisectoarea unghiului FMB, unde B este proiecția lui M pe directoarea h (fig. III.37). Pe această proprietate a parabolei se bazează construcția și funcționarea telescopului reflector, captatorului de radiație solară, proiectorului, farului etc. Mai precis, toate acestea folosesc oglinzi parabolice, adică oglinzi a căror suprafață este un paraboloid de rotație (suprafață obținută prin rotirea unei parabole în jurul axei de simetrie).

În cazul telescopului reflector (fig. III.38) razele de lumină ce pornesc de la un punct oarecare al unui corp ceresc, situat pe direcția axei oglinzii, sînt

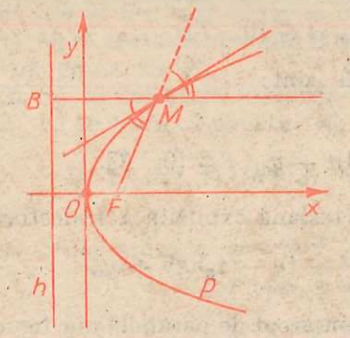


Fig. III.37

Fig. III.38

concentrate de oglindă în focarul acesteia, iar razele ce nu sînt paralele cu axa oglinzii dar nici prea înclinate față de axă, se concentrează în puncte din apropierea focarului. Astfel, în planul focal al oglinzii, apare imaginea răsturnată a corpului ceresc. Situația este similară în cazul instalațiilor energetice solare care folosesc efectul termic al radiațiilor solare concentrate în „puncte" cu ajutorul unor oglinzi parabolice.

În cazul proiectorului (fig. III.39), sursa de lumină puternică se așază în focarul oglinzii parabolice. Fasciculul de raze cu vîrful în focar este reflectat de oglindă și transformat într-un fascicul de raze paralele cu axa oglinzii. Cazul farurilor este analog.

Menționăm că pe lîngă oglinzile parabolice o mare aplicabilitate o au și oglinzile sferice, elipsoidale și hiperbolice.

Traiectorii parabolice. În prima parte a secolului al XVII-lea Galileo Galilei a ajuns la concluzia că traiectoria corpurilor aruncate oblic este parabolică. Calcule simple și ipoteze fizice simplificatoare confirmă conjectura lui Galilei.

Presupunem că un corp se aruncă din punctul $M_0(x_0, y_0)$ sub unghiul θ cu viteza inițială v_0(m/s) (fig. III.40). Componenta orizontală a vectorului viteză

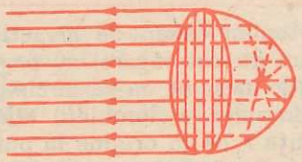


Fig. III.39

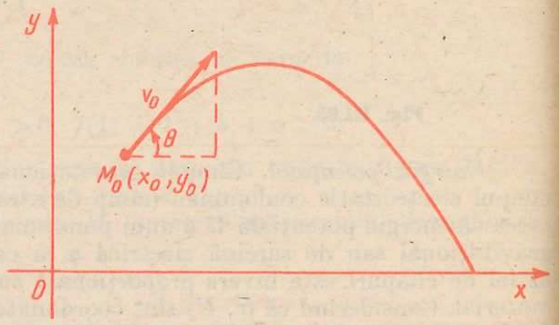


Fig. III.40

este $v_0 \cos\theta$, iar componenta verticală este $v_0 \sin\theta$. Neglijăm rezistența aerului și curbura Pămîntului. În aceste ipoteze, accelerația în direcția axei Ox este nulă, $x''(t) = 0$, iar accelerația în direcția Oy se datorează numai gravitației, $y''(t) = -g$, unde $g = 9{,}8$ m/s².

Din $x''(t) = 0$ deducem $x'(t) = c_1$ iar condiția $x'(0) = v_0 \cos\theta$ impune $x'(t) = v_0 \cos\theta$; apoi $x(t) = (v_0 \cos\theta)t + c_2$ și condiția $x(0) = x_0$ impune $c_2 = x_0$. Deci $x(t) = (v_0 \cos\theta)t + x_0$, $t \in [0, T]$.

Din $y''(t) = -g$ obținem $y'(t) = -gt + c_3$ și condiția $y'(0) = v_0 \sin\theta$ determină $c_3 = v_0 \sin\theta$; apoi $y' = -gt + v_0 \sin\theta$ conduce la $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + c_4$ și condiția $y(0) = y_0$ determină $c_4 = y_0$.

Deci $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + y_0$, $t \in [0, T]$.

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\theta)t + x_0, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + y_0, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Eliminînd parametrul t, obținem ecuația carteziană explicită a traiectoriei

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}(x - x_0)^2 + (y - x_0)tg\theta + y_0.$$

Adăugînd restricțiile $x \geq x_0$, $y \geq 0$, recunoaștem arcul de parabolă din figura III.40.

Traiectorii într-un cîmp central. În cîmpul gravitațional newtonian, ca și în cîmpul electrostatic coulombian, traiectoria descrisă de un punct material este o conică cu focarul în origine. În coordonatele polare (r, θ) ecuația acestei conice este

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

unde p este un parametru, iar e este excentricitatea conicei.

Dacă $e \in (0, 1)$ atunci punctul material se mișcă pe o elipsă și deci mișcarea este finită. Pentru $e = 1$, traiectoria este o parabolă, iar pentru $e \in (1, \infty)$ traiectoria este o hiperbolă. Această teorie fizică este legată de probleme concrete: mișcarea planetelor în jurul Soarelui și legile lui Kepler, lansarea de pe suprafața Pămîntului a sateliților artificiali și a rachetelor, mișcarea electronilor în cîmpul electrostatic al nucleelor etc.

§ 8. Probleme recapitulative

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu vîrfurile $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(b, 0)$, $a, b > 0$.

1) Să se scrie ecuația cercului Γ circumscris triunghiului AOB.

2) Să se arate că tangenta în origine la cercul Γ este perpendiculară pe AC.

3) Notînd cu M un punct mobil pe cercul Γ, se cere locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABM.

R. 1) $x^2 + y^2 + bx - ay = 0$. 2) Ecuația tangentei în origine la cercul Γ este $bx - ay = 0$, iar a dreptei AC este $ax + by - ab = 0$. 3) $x^2 + y^2 + bx - ay + \frac{2}{9}(a^2 + b^2) = 0$.

2. Se consideră dreapta $d: 3x - 4y + 4 = 0$.

1) Să se scrie ecuația bisectoarei b a unghiului ascuțit format de dreapta d cu axa Oy.

2) Să se scrie ecuația cercului C, ce trece prin origine, tangent în origine dreptei $y = mx$, $m \in \mathbf{R} - \{0\}$ și care mai trece prin punctul de intersecție dintre bisectoarea b cu axa Ox.

3) Presupunînd m variabil, să se găsească locul geometric descris de centrul cercului C.

R. 1) $b: 2x - y + 1 = 0$; 2) $C: x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2m}y = 0$, $m \neq 0$; 3) $x = -\frac{1}{4}$.

3. Într-un reper cartezian se dau dreptele

$d: 2tx - (t + 1)y = 3t - 1$,

$d': (3t + 1)x + (t - 1)y = 6t - 2$, $t \in \mathbf{R}$.

1) Să se arate că dreapta d trece printr-un punct fix A și că dreapta d' trece printr-un punct fix B.

2) Să se calculeze măsurile unghiurilor determinate de d și d'.

3) Să se arate că punctul M, comun dreptelor d și d', aparține unui cerc fix.

R. 1) $A(2, 1)$, $B(1, 3)$. 2) $\mu(\widehat{d, d'}) = \frac{\pi}{4}$. 3) $C: x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.

4. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + x + y - m = 0, \\ x - y + m = 0, \end{cases}$$

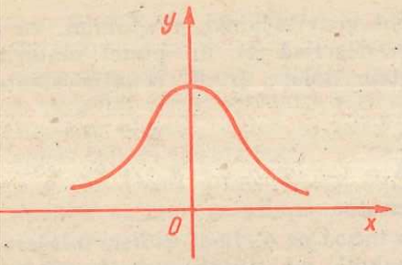


Fig. III.41

admite soluții reale oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă $a = 0$.

5. Graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ se numește *clopot Gauss* (fig. III.41). Să se găsească intersecția dintre clopotul Gauss și cercul cu centrul în origine și de rază unu. Să se arate că cele două curbe au aceeași tangentă în punctul de contact de pe axa Oy.

Indicație. Se rezolvă sistemul $y = e^{-x^2}$, $x^2 + y^2 = 1$. Tangenta la graficul unei funcții derivabile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, în punctul $(x_0, f(x_0))$, are ecuația $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

6. Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MFF', unde M este un punct mobil pe elipsă, iar F și F' cele două focare.

R. $E_1: \frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} - 1 = 0.$

7. Se dă un cerc C, cu diametrul $[AB]$, de lungime $2r$, $r \in (0, \infty)$, Fie Γ un cerc cu centrul variabil $M \in C$ și tangent în N la $[AB]$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție dintre dreapta MN cu coarda comună a cercurilor C și Γ.

R. $E: \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} - 1 = 0.$

8. Se dă elipsa $E: x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

1) Să se scrie ecuația tangentei la E în punctul $T\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa E, paralele cu normala la E ce trece prin T.

3) Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din $P(3, -1)$ la elipsa E.

Indicație. 1) Prin dedublare. 2) Se utilizează ecuația fasciculului de drepte paralele. 3) Se folosește sistemul

$$\begin{cases} r(x-3) + s(y+1) = 0, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases} \quad r^2 + s^2 \neq 0.$$

9. Se dă elipsa $E: \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ și dreapta $d_n: y = x + n$, $n \in \mathbf{R}$, care intersectează elipsa în punctele P și Q.

1) Să se scrie ecuația cercului C de diametru $[PQ]$.

2) Fie $\{S, T\} \subset C \cap E$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor PQ și ST cînd n este variabil.

Indicație. 1) $C: \left(x + \frac{n}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4n}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}(5 - n^2)$, $n \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

2) $ST: y + x - \frac{5n}{3} = 0$, $n \in \left[-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right]$ și deci locul geometric este segmentul $y = 4x$, $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$.

10. Se dă hiperbola

$$H: x^2 - 2y^2 - 2 = 0.$$

1) Să se găsească ecuația tangentei la H în punctul $M_0(2, 1)$.

2) Există tangente la H paralele cu normala la H în M_0?

3) Să se scrie ecuațiile tangentelor la H duse din $A(0, 1)$.

11. Se consideră hiperbola H și un punct P în planul acesteia. Prin P se duc paralele la asimptotele hiperbolei H. Fie M, N punctele de intersecție a acestor paralele cu hiperbola.

1) Care este locul geometric al punctelor P care au proprietatea că dreapta MN trece prin centrul O al hiperbolei H?

2) Care este locul geometric al punctelor P pentru care dreapta MN este paralelă cu una din axele hiperbolei?

R. 1) hiperbola conjugată lui H, 2) axa Ox, respectiv axa Oy.

12. Fie hiperbola echilateră H: $x^2 - y^2 = a^2$ cu vîrfurile A, B și o dreaptă variabilă paralelă cu axa Ox care taie pe H în C și D. Notăm $\{M\} = CB \cap AD$. Să se determine locul geometric al punctului M.

R. Segmentul $x = 0$, $y \in (-a, a)$.

13. Fie x și y coordonatele unui punct M în raport cu un reper cartezian. Să se expliciteze și să se reprezinte mulțimea

$$\Gamma; \frac{x|x|}{4} + \frac{y|y|}{9} = 1.$$

14. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^2}{4} - 1\right|}$.

15. În planul raportat la un reper cartezian se consideră parabola $P: 2y = x^2$. Fie M un punct pe parabolă. Să se determine, în funcție de abscisa m a lui M:

1) coordonatele punctului T unde tangenta în M la P taie axa Ox, aria triunghiului OTM și coordonatele centrului de greutate G al aceluiași triunghi;

2) locul geometric al punctului G cînd M descrie parabola dată.

Să se arate că înălțimea triunghiului OTM corespunzătoare vîrfului T trece printr-un punct fix.

R. 1) $T\left(\frac{m}{2}, 0\right)$, $\sigma[OTM] = \frac{m^3}{8}$, $G\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{6}\right)$. 2) Parabola: $x = \frac{m}{2}$, $y = \frac{m^2}{6}$, $m \in \mathbf{R}$. Punctul fix $A(0, 1)$.

16. Să se determine regiunile din planul xOy, unde trebuie să se găsească punctul $M(x, y)$, astfel ca ecuația $16t^2 + 4(x-5)t + y - 3x + 5 = 0$ în $t \in \mathbf{R}$, să aibă:

1) O rădăcină cuprinsă între 0 și 1.

2) Ambele rădăcini cuprinse între 0 și 1.

Indicație. Ecuația are rădăcini reale dacă $x^2 + 2x - 4y + 5 \geqslant 0$. Apartenența la $[0, 1]$ adaugă: 1) $(y - 3x + 5)(x + y + 1) \leqslant 0$, respectiv

2) $y - 3x + 5 \geqslant 0$, $x + y + 1 \geqslant 0$, $0 \leqslant \frac{5 - x}{8} \leqslant 1$.

17. Să se figureze mulțimea punctelor M ale căror coordonate satisfac temul $x^2 + y^2 = 1$, $2y^2 + x - 1 > 0$.

18. Pentru a pili vîrful unui corp ascuțit prins într-o menghină (fig. III.42) apasă pila la cele două capete cu forțele $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$ care fac cu direcția pilei ghiuri de 30° și respectiv 60°. Cunoscînd lungimea pilei $l = 25$ cm, $\|\vec{f}_1\| = 80$ N și neglijînd greutatea proprie a pilei; să se determine felul în care trebuie varieze mărimea forței $\vec{f}_2$ astfel încît pila să-și păstreze orizontalitatea în mpul lucrului.

Indicație. Se impune egalitatea momentelor forțelor $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$ față de punctul contact al pilei cu corpul de pilit. Rezultă

$$\|\vec{f}_2\| = 46{,}24\frac{x}{25 - x}, x \in [a, b] \subset (0, l).$$

Graficul este un arc de hiperbolă.

19. Fie elipsa (hiperbola sau parabola) Γ, fie punctul $M \in \Gamma$ și o dreaptă d re nu trece prin M. Fie MN (fig. III.43) o dreaptă care taie pe d în L (dacă $M =$, dreapta MN este tangenta la Γ în punctul M). Să se arate că există un punct $\in \Gamma$ cu proprietatea că funcția $f : \Gamma - \{A\} \to d$, $f(N) = L$ este bijectivă njectivă).

Indicație. A este punctul pentru care $MA \parallel d$.

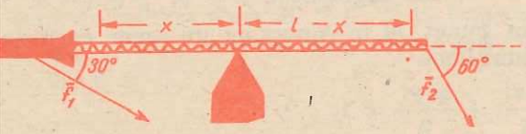


Fig. III.42

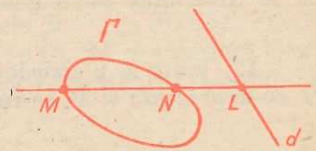


Fig. III.43

20. Să se discute poziția cercurilor

$$C_1: x^2 + y^2 = 1 - \alpha^2,$$
$$C_2: (x - 2)^2 + y^2 = 1 - \alpha^2, \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Indicație. Se vor considera cazurile: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha \in (-1, 1)$;) $\alpha \in \{-1, +1\}$; 4) $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

21. Se dă egalitatea $(y - x)t^2 - 2yt + x + y + 1 = 0$, unde $t \in \mathbf{R}$, iar $x, y)$ sînt coordonatele unui punct din plan. Considerînd pe t drept necunoscută, ă se determine semnul rădăcinilor acestei ecuații.

22. Printre perechile (x, y) de numere reale care satisfac inegalitățile $-x \leqslant 1$, $y + x \leqslant 1$, $y \geqslant x^2 - 1$ să se determine acelea pentru care y este naxim sau minim.

R. (0, 1), (0, −1).

23. Să se figureze mulțimile descrise de următoarele sisteme:

$$1)\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 2x + 3; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases} \quad 3)\begin{cases} 1 \leqslant xy \leqslant 2, \\ \dfrac{x}{4} \leqslant y^2 \leqslant x; \end{cases} \quad 4)\begin{cases} x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant y, \\ x^2 - y^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

24. Să se determine maximul funcției

$$f(x, y) = 4x + 6y$$

cu restricțiile

$$x \geqslant 0, \ 0 \leqslant y \leqslant 4 - 0{,}3x - 0{,}1x^2.$$

Capitolul IV

PROBLEME DE SINTEZĂ

1. Pentru fiecare λ real, se consideră tripletul de drepte

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by + c = 0, \\ bx + (c - \lambda)y + a = 0, \\ cx + ay + b - \lambda = 0, \end{cases}$$

unde a, b, c sînt numere reale pozitive fixate.

1) În ce caz cele trei drepte sînt paralele?

2) Dacă a, b, c sînt astfel încît nu putem avea cazul 1) pentru nici un λ, să se arate că există 3 triplete distincte formate fiecare din 3 drepte concurente.

3) Să se arate că în cazul 2) cele trei puncte de concurență obținute sînt distincte.

2. Se consideră un sistem cartezian xOy, punctul A (0, −1) și dreptele $d_1 : x - y + 1 = 0$, $d_2 : 2x - y = 0$. Să se determine punctele $B \in d_1$, $C \in d_2$ astfel încît dreptele d_1 și d_2 să fie mediane în triunghiul ABC.

3. Fie A și B punctele în care dreapta de ecuație $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0$ taie axele de coordonate.

1) Să se scrie ecuația dreptei d_1 ce trece prin A și este paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

2) Să se scrie ecuația dreptei d_2 care trece prin B și este perpendiculară pe d_1.

3) Să se determine a, astfel încît, punctul de intersecție dintre d_1 și d_2 să fie pe dreapta de ecuație $x + 5y = 1$.

4. Fie $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale nenule. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ considerăm dreptele $h_n : a_n x + a_{n-1} y + 1 = 0$.

1) Să se determine șirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ pentru care dreptele h_n și h_{n+1} sînt ortogonale oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și să se arate că aceste șiruri sînt divergente.

2) Să se determine șirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ pentru care h_n și h_{n+1} sînt paralele oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și să se precizeze dacă aceste șiruri sînt convergente sau nu.

3) Se consideră punctul $M_0(1, 1)$. Dacă șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este astfel încît distanța de la M_0 la h este 1 pentru orice $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, să se precizeze cîte drepte distincte există printre dreptele h_n, $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

5. În plan se fixează reperul cartezian xOy și se dă mulțimea

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = \frac{(1 + t)^2}{4t - t^2}, \ y = \frac{1 + 6t}{4t - t^2}, \ t \in \mathbf{R} - \{0, 4\}\}.$$

1) Să se arate că E este reuniunea a două semidrepte.

2) O semidreaptă h din E are originea A pe axa Oy. Să se determine ecuațiile

semidreptelor cu originea în A, laturi ale unui unghi cu măsura 60°, pentru care h este bisectoare.

6. Fie $d_m : x + (m-2)y - m + 5 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. Să se calculeze maximul distanței de la originea axelor la d_m cînd $m \in \mathbf{R}$.

7. Fie triunghiul ABC. Pe laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ considerăm respectiv punctele X, Y, Z astfel încît $BX \leqslant XC$, $CY \leqslant YA$, $AZ \leqslant ZB$. Să se arate că

$$\sigma[XYZ] \geqslant \frac{1}{4}\sigma[ABC].$$

8. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se afle locul geometric al punctelor M din interiorul lui $ABCD$ astfel încît $\sigma[ABM] + \sigma[CDM] = k$, unde k este o constantă. Discuție după k.

9. Pe segmentul fix $|AB|$ se ia punctul mobil M și se construiesc de aceeași parte a segmentului triunghiurile echilaterale AMC și MDB.

1) Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului DMC.

2) Să se găsească poziția lui M astfel încît aria triunghiului DMC să fie maximă.

10. Să se afle locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi ascuțit pentru care suma distanțelor la laturile unghiului este constantă.

11. Se consideră dreapta variabilă

$d_m : (m^2 + 2m + 1)x + (m^2 + 2m - 1)y + m^2 + 2m - 1 = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

1) Să se arate că $\{d_m \mid m \in \mathbf{R}\}$ nu este un fascicul de drepte.

2) Fie $D = \bigcup\limits_{m \in \mathbf{R}} d_m$. Să se determine infimamul expresiei $(x-2)^2 + (y+2)^2$ cînd punctul $M(x, y)$ aparține mulțimii D.

12. Fie ABC un triunghi echilateral fixat și d o dreaptă variabilă în planul triunghiului. Fie A_1, B_1, C_1, proiecțiile vîrfurilor A, B, C pe dreapta d. Să se determine minimul sumei $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2$ în funcție de lungimea laturii triunghiului și să se precizeze mulțimea dreptelor din planul triunghiului care realizează acest minim.

13. 1) Să se demonstreze analitic *teorema lui Menelaus*.

2) Să se demonstreze analitic *teorema lui Ceva*.

14. În ce caz simetricele unui punct M, în raport cu laturile triunghiului ABC, sînt trei puncte coliniare?

15. Se dă un punct fix P, două drepte paralele d_1 și d_2 și o dreaptă d neparalelă cu d_1. Să se găsească dreapta care trece prin P și care intersectează d_1, d_2, d în A, B, C, respectiv, astfel încît $AB = PC$.

16. Fie ABC un triunghi echilateral, care se rotește succesiv împrejurul lui A, B, C, în același sens, cu 60°. Să se găsească centrul rotației care duce figura inițială în figura finală.

17. Un pătrat $ABCD$ se rotește în jurul punctului A. Fie $AB'C'D'$ noua poziție, iar α unghiul de rotație.

1) Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor BB', DD' cînd α este variabil.

2) Să se arate că dreptele BB', CC' și DD' sînt concurente.

18. M fiind punctul de contact al unei tangente variabile la un cerc de diametru AB, fie C și D punctele unde această tangentă taie tangentele fixe în A și B. Să se arate că $AC \cdot BD = \text{const.}$ și $CO \perp OD$.

19. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor BOC, COA, AOB. Să se demonstreze că dreptele AO_1, BO_2, CO_3 sînt concurente.

20. Vîrfurile A și B ale triunghiului ABM sînt fixe, iar M este un punct variabil. Să se afle locul geometric al punctului M, știind că mediana AA' a triunghiului ABM are o lungime dată l.

21. Se dau punctele distincte A, B și dreapta d perpendiculară pe AB. M fiind un punct variabil pe d, să se afle locul geometric al punctului diametral opus lui M în cercul care trece prin A, B și M.

22. Două cercuri se intersectează în A și B. O secantă variabilă trecînd prin A taie cercurile a doua oară în M, N. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN.

23. Fie (AB) un diametru fix al unui cerc $C(0, r)$, iar M un punct variabil pe cerc. Se ia pe raza (OM) un punct P astfel ca OP să fie egală cu distanța de la M la dreapta AB. Să se afle locul geometric al punctului P.

24. Triunghiul MAB înscris în cercul dat $C(0, r)$ are vîrfurile A și B fixe, iar vîrful M variabil pe cerc. Să se afle locurile geometrice descrise de: a) ortocentru; b) centrul cercului înscris; c) centrul de greutate al triunghiului MAB.

25. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi drept, M și N puncte variabile respectiv pe $(OA$ și $(OB$, iar $MNPQ$ un pătrat astfel ca MN să separe punctele O și P. Să se afle locul geometric al centrului pătratului.

26. Se consideră familiile de cercuri:

$$C_\lambda : (x-\lambda)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{2} \quad \text{și} \quad D_\lambda : x^2 + y^2 = \lambda^2,\ \lambda \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

1) Cîte cercuri C_λ trec printr-un punct dat al planului? Discuție.

2) Să se delimiteze în plan regiunea acoperită de tangentele comune la cercurile C_λ și D_λ pentru $\lambda \in [-1, 1] - \{0\}$.

27. Se consideră două cercuri concentrice cu centrul în origine și de raze a respectiv $b (a > b)$. Prin centru se duce o secantă variabilă, care taie cercul exterior în P, iar pe cel interior în Q. Prin P se duce o paralelă la Oy, iar prin Q, o paralelă la Ox, care se taie în M. Să se arate că, atunci cînd secanta variază, locul lui M este o elipsă avînd semiaxele a și b.

Cercul de rază a se numește *cercul principal al elipsei*.

28. Fie A un punct al elipsei $E_1 : a^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 + b^2)^2$.

Din A se duc tangentele AB și AC la elipsa

$$E_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Să se arate că ortocentrul triunghiului ABC este pe elipsa E_2.

29. Se consideră elipsa $E : x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ și mulțimile

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1\}, \quad A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists\ (a, b) \in E, \text{ astfel încît } (x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Să se determine distanța $d(A_1, A_2)$ dintre mulțimile A_1 și A_2, dacă se definește $d(A_1, A_2) = \inf\limits_{\substack{x \in A_1 \\ y \in A_2}} d(x, y)$.

30. O elipsă și o hiperbolă au aceleași focare. Să se arate că tangentele în punctele comune sînt perpendiculare.

31. Tangenta într-un punct la o hiperbolă întîlnește asimptotele în două puncte simetrice în raport cu punctul de contact.

32. Dacă un triunghi este înscris într-o hiperbolă echilaterală, atunci ortocentrul său este situat pe hiperbolă.

33. Dintr-un punct P se duc tangentele PM și PM' la parabola cu focarul F. Să se demonstreze relația

$$\frac{FM}{FM'} = \left(\frac{PM}{PM'}\right)^2.$$

34. Distanța de la punctul de întîlnire al tangentelor în două puncte M_1 și M_2 ale unei parabole la axă este media aritmetică a distanțelor punctelor M_1 și M_2 la axă.

35. Fie parabola $y^2 = 2px$ și trei tangente la această parabolă. Să se arate că:

1) Aria triunghiului determinat de aceste tangente este jumătate din aria triunghiului format de punctele de contact.

2) Dreapta care unește centrele de greutate ale acestor triunghiuri este paralela cu axa parabolei.

3) Cercul circumscris triunghiului determinat de cele trei tangente trece prin focarul parabolei.

36. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la : 1) elipsă, 2) hiperbolă, 3) parabolă.

37. Fie cercul $C : x^2 + y^2 = 1$. Să se determine șirurile reale (a_n) cu proprietatea că șirurile de puncte $M_n(a_n, a_{n-1})$ fac parte din C. Să se cerceteze monotonia șirurilor găsite.

38. Se dau

1) funcția $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x - \lambda y$ și restricțiile $x + y \geqslant 0$, $x - y \leqslant 1$, $3x + y \leqslant 2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, λ parametru real.

2) funcția $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x + 2y$ și restricțiile $x^2 + y^2 \geqslant 1$, $y^2 \leqslant 2x$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

3) funcția $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ și restricțiile $x - y \geqslant 1$, $2x + y \geqslant 2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

În fiecare caz, să se cerceteze extremele lui f cu restricțiile specificate.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI (cap. IV)

1. 1) $a = c$ și $\lambda = a - b$. 2) Determinantul matricii extinse a sistemului se egalează cu zero. Rezultă o ecuație în λ care are trei rădăcini reale distincte. 3) Ecuația a treia reprezintă un fascicul de drepte paralele; cele trei puncte sînt situate pe trei drepte paralele distincte din acest fascicul.

2. $B(0, 1)$, $C(3, 6)$.

4. 1) $a_{n+1} + a_{n-1} = 0$ și deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ se desparte în patru sub șiruri constante diferite. 2) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, progresie geometrică cu rația $r = a_2 a_1^{-1}$; convergente pentru $r \in (-1, 1)$, divergente pentru $r \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. 3) $a_n = a_1, \forall n \in 2N + 1$ și $a_n = a_2, \forall n \in 2N$; cel mult două drepte distincte.

5. 1) $x - y + 1 = 0$, $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$, $y \in (-\infty, 1] \cup \left[\frac{9}{4}, \infty\right)$.

2) $[AB : y - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} x$, $x \leqslant 0$; $[AC : y - 1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} x$, $x < 0$.

6. Se analizează extremele funcției $d^2(O; d_m) = \frac{(5 - m)^2}{1 + (m - 2)^2}$.

7. Dacă $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_3, b_3)$ și $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$, $Z(x_3, y_3)$, atunci

$$x_1 = (1 - r)\, a_2 + r a_3,\ y_1 = (1 - r)\, b_2 + r b_3,\ r \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$x_2 = (1 - s)\, a_3 + s a_1,\ y_2 = (1 - s) b_3 + s b_1,\ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$x_3 = (1 - t) a_1 + t a_2,\ y_3 = (1 - t) b_1 + t b_2,\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

Se folosește formula

$$\sigma[XYZ] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Axa Ox se fixează prin $[AB]$, iar axa Oy prin mediatoarea lui $[AB]$.

9. 1) Segment de dreaptă paralel cu AB. 2) M trebuie să fie mijlocul lui $|AB|$.

10. Un segment.

11. 1) Ecuația în (x, y) admite o singură soluție $x = 0$, $y = -1$ independentă de m și deci ar putea reprezenta un fascicul cu vîrful $(0, -1)$. Dar pentru ecuația echivalentă $(m^2 + 2m + 1)(x - 0) + (m^2 + 2m - 1)(y + 1) = 0$ observăm că $m^2 + 2m + 1 \geqslant 0$ și $m^2 + 2m - 1 \geqslant -2$. De aceea ecuația dată reprezintă doar o parte dintr-un fascicul.

Variantă. Ecuația de gradul doi $m^2(x+y+1)+2m(x+y+1)+x-$ $-1=0$ nu are rădăcini reale pentru orice x și y. Deci există puncte în plan care nu trece nici o dreaptă d_m.

2) Se desenează D, fixîndu-i frontiera; infimumul este $\frac{1}{2}$ (distanța de la -2) la una din dreptele frontieră).

12. Fie $A(-a,\ 0)$, $B(a,0)$, $C(0,\ a\sqrt{3})$. Minimul este $2a^2$ și se realizează ulțimea dreptelor care trec prin centrul de greutate $G\left(0,\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

14. M este situat pe cercul ABC (teorema Simson), iar dreapta ce conține tricele trece prin ortocentrul triunghiului ABC.

16. Punctul B.

17. 1) Cercul circumscris lui $ABCD$.

20. Fixînd Ox prin AB și Oy prin mediatoarea segmentului $[AB]$ avem $a,0)$, $B(a,\ 0)$. Locul geometric este cercul $C:(x+3a)^2+y^2=4\,l^2$.

21. Fixînd Ox prin AB și Oy prin mediatoarea segmentului $[AB]$ avem $=a$. Locul geometric este dreapta $d':x=-a$.

22. Fixăm pe Ox prin dreapta centrelor O_1O_2 și pe Oy prin dreapta BA. Locul netric este cercul cu centrul în mijlocul C al segmentului $[O_1O_2]$ și de rază CA.

23. Reperul xOy se fixează prin $[AB]$ și prin mediatoarea acestui segment. i $A(-a,\ 0)$, $B(a,\ 0)$. Locul geometric este reuniunea cercurilor $C_1:x^2+$ $y-\frac{a}{2}\Big)^2=\frac{a^2}{4}$, $C_2:x^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$.

24. În reperul xOy fixat prin mediatoarea segmentului $[AB]$, cu 0 deasupra AB, avem $C:x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ t\in\mathbb{R}$, iar punctele A, B, M corespund $\pi+t_A$, $-t_A$, t_M. Locul geometric este cercul de ecuație

$$x^2+\left(y+\frac{2r}{3}\sin t_A\right)^2=\frac{r^2}{9}.$$

25. Locul geometric este bisectoarea unghiului AOB.

26. 1) Se discută ecuația $\lambda^2-4\lambda x+2(x^2+y^2)=0$ în funcție de para- etrul $M(x,y)$.

29. Distanța căutată este lungimea unui segment de pe normala comună or două cercuri și elipsei. Scriind că $M_0(a,\ b)\in E$ și că normala la elipsă prin M_0 ece prin $C(2,\ 4)$ obținem sistemul $b-4=\frac{4b}{a}(a-2)$, $\frac{a^2}{4}+b^2=1$ cu soluția

$$a=\frac{\sqrt{17}-1}{3},\quad b=\frac{\sqrt{17}+1}{3}.$$

eci $d(A_1,\ A_2)=M_0C-\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{810-102\sqrt{17}}}{6}-\frac{3}{2}$.

35. Triunghiul determinat de cele trei tangente are vîrfurile

$$A\left(\frac{y_1y_2}{2p},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),\ B\left(\frac{y_2y_3}{2p},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right),\ C\left(\frac{y_3y_1}{2p},\ \frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

Directoarea parabolei are ecuația $x=-\frac{p}{2}$, iar focarul are coordonatele $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$

37. $a_n^2+a_{n-1}^2=1,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\Rightarrow a_n=\cos\varphi_n,\ a_{n-1}=\sin\varphi_n\Rightarrow\cos\varphi_n=\sin\varphi_{n+1}$.

Cuprins

Com. nr. 37 302/10 057

REGIA AUTONOMĂ A IMPRIMERIILOR
Imprimeria „Coresi"
București — ROMÂNIA