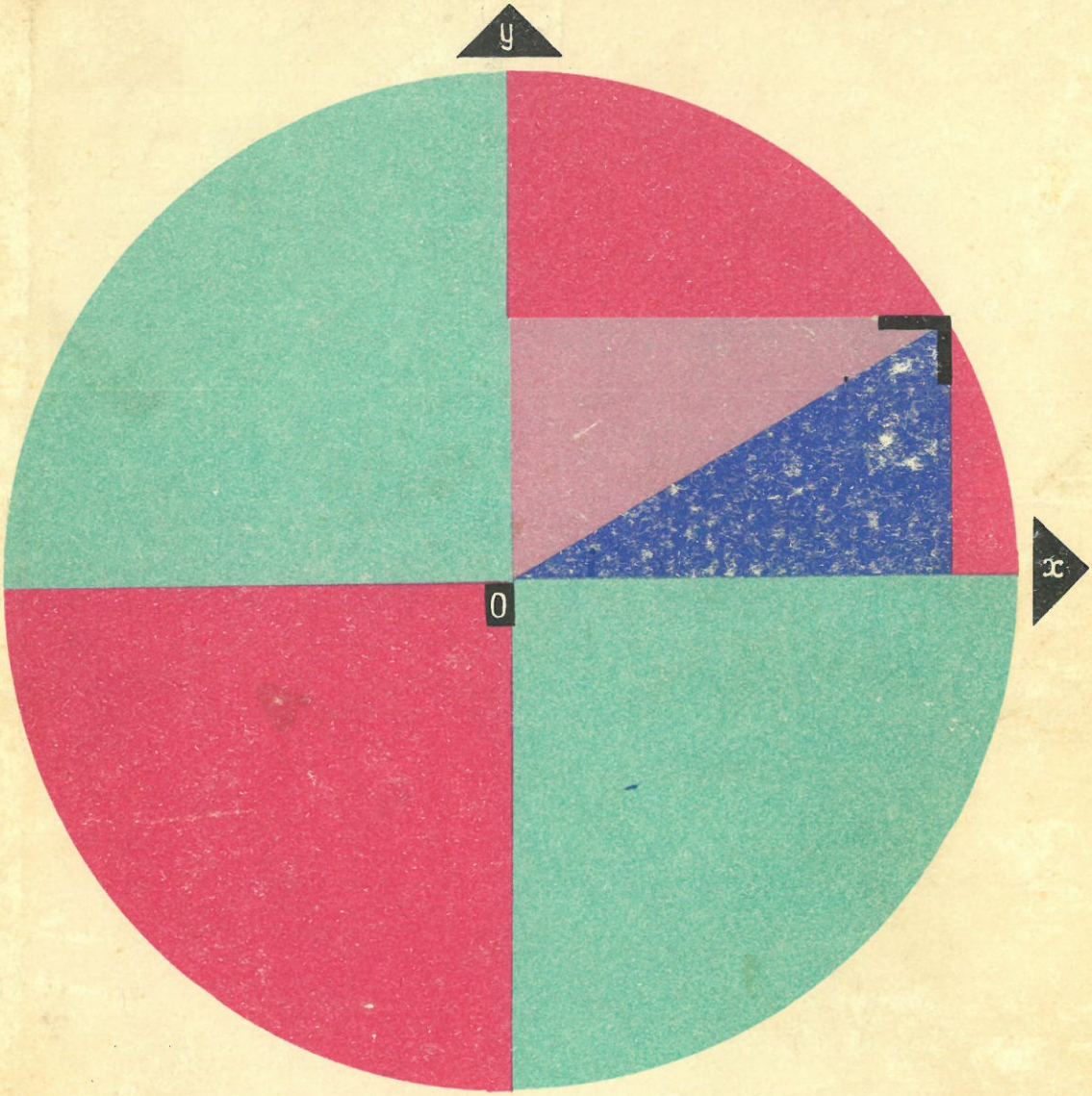


Marius Stoka Eugen Mărgăritescu

Trigonometrie

Manual pentru anul II licee

Editura didactică şi pedagogică-Bucureşti, 1976

Dr. Marius Stoka

Eugen Mărgăritescu

Trigonometrie

Manual pentru anul II licee

Editura didactică și pedagogică — București

Redactor: prof. *Pantelimon Eugenia*
Tehnoredactor: *Mirea Ion*

Capitolul I

Unghiuri și arce

§ 1. Sisteme de măsură pentru unghiuri și arce

1. **Măsura unghiurilor.** A măsura un unghi înseamnă a-l compara cu alt unghi, ales ca unitate.

Fiecărui arc îi corespunde un unghi la centru unic determinat. *Măsura arcului de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător.*

În trigonometrie se întrebuințează trei unități de unghiuri diferite, cărora le corespund trei sisteme de măsură:

a. **Măsura în grade sexagesimale.** În acest sistem unitatea de unghi este *gradul sexagesimal* (1°) definit ca a 90-a parte din unghiul drept. Subunitățile sale sînt *minutul sexagesimal* (1′), egal cu a 60-a parte din gradul sexagesimal, și *secunda sexagesimală* (1″), egală cu a 60-a parte din minutul sexagesimal.

Pentru a nota, de exemplu, unghiul de 15 grade sexagesimale 8 minute sexagesimale 28 secunde sexagesimale, scriem:

$$15°8'28''.$$

Din definițiile precedente rezultă relațiile:

$$1° = 60'; \; 1' = 60''.$$

Acest sistem se folosește în aplicațiile practice ale trigonometriei, în astronomie ș.a.

b. **Măsura în grade centesimale.** Unitatea de unghi în acest sistem este *gradul centesimal* (1^g) definit ca a 100-a parte din unghiul drept.

Subunitățile sale sînt *minutul centesimal* (1^c) egal cu a 100-a parte din gradul centesimal și *secunda centesimală* (1^{cc}), egală cu 100-a parte din minutul centesimal.

Pentru a nota, de exemplu, unghiul de 25 grade centesimale 76 minute centesimale 60 secunde centesimale, scriem:

$$25^g\ 76^c\ 60^{cc}$$

Relațiile:

$$1^g = 100^c;\ 1^c = 100^{cc}$$

sînt consecințe imediate ale definițiilor precedente.

Sistemul centesimal este folosit în topografie, astronomie ș.a.

O b s e r v a ț i e. În sistemul centesimal se simplifică atît notația unghiurilor cît mai ales transformările. De pildă, $82^g\ 4^c\ 18^{cc} = 82{,}0418^g = 8204{,}18^c = 820\ 418^{cc}$.

Exemplu. Unghiul la centru, corespunzător unui semicerc este egal cu 200^g.

c. **Măsura în radiani.** Măsura în radiani a unghiurilor, folosită în mecanică, în analiza matematică ș.a., se definește pe baza următoarei teoreme: raportul dintre lungimea arcului de cerc, corespunzător unui unghi la centru, și lungimea razei cercului nu depinde de rază, ci depinde numai de acest unghi. Prin urmare, dacă într-un cerc lungimea arcului este l și lungimea razei r, pentru fiecare unghi raportul $\frac{l}{r}$ este un număr real unic determinat. Însemnînd acest raport cu a, obținem:

$$\frac{l}{r} = a \qquad (1)$$

Definiție. *Numărul a, egal cu raportul dintre lungimea arcului de cerc, corespunzător unui unghi la centru, și lungimea razei cercului se numește măsura în radiani a unghiului respectiv.*

Dacă în relația (1) facem $a=1$, obținem $l=r$. Prin urmare, *unitatea de unghi în acest sistem, numită radian, este unghiul la centru corespunzător arcului de cerc de lungime egală cu lungimea razei cercului* (fig. 1).

Exemple. 1) *Dacă lungimea arcului l este egală cu două raze, unghiul la centru este egal cu 2 radiani; dacă $l = \frac{3}{4}r$, unghiul la centru este egal cu $\frac{3}{4}$ radiani.*

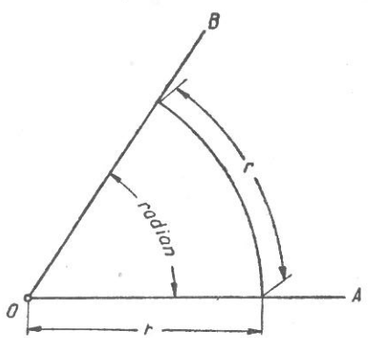


Fig 1.

2) *Măsura în radiani a unghiului la centru, corespunzător unui semicerc este π.* Într-adevăr lungimea semicercului este $l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r$, de unde obținem $\frac{l}{r} = \pi$.

2. **Trecerea de la o măsură la alta.** Folosirea celor trei sisteme de unități de măsură în diferite domenii științifice necesită transformarea măsurii unghiurilor dintr-un sistem într-altul.

Să considerăm un unghi a cărui măsură este α în grade sexagesimale, α' în grade centesimale și a în radiani. Unghiul la centru, corespunzător unui semicerc, are măsurile $180°$, 200^g, π radiani.[1]

Rapoartele corespunzătoare ale măsurilor acestor unghiuri sînt:

$$\frac{\alpha}{180},\ \frac{\alpha'}{200},\ \frac{a}{\pi}.$$

Fiindcă raportul a două mărimi, măsurate cu aceeași unitate, nu depinde de unitatea aleasă, rezultă că aceste rapoarte sînt egale:

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\alpha'}{200} = \frac{a}{\pi}. \qquad (2)$$

Cu ajutorul acestor formule se trece de la o măsură la alta.

O b s e r v a ț i e. În relațiile de transformare (2) intervin numerele iraționale $\pi, \frac{1}{\pi}$. Pentru o mai bună aproximație este necesară cunoașterea valorilor aproximative $\pi = 3{,}1416$, $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$.

Aplicații

1° *Să se exprime în grade centesimale unghiul egal cu $18°20'7''$.*

Soluție. Din proporția formată cu primele două rapoarte ale relațiilor (2) obținem:

$$\alpha' = \frac{200}{180}\alpha = \frac{10}{9}\alpha.$$

Înlocuind în această relație pe α cu $18 + \frac{20}{60} + \frac{7}{60 \cdot 60}$, găsim:

$\alpha' \approx 20{,}3725$. Prin urmare,

$$18°20'7'' \approx 20^g 37^c 25^{cc}$$

2° *Două din unghiurile unui triunghi sînt de $15°$ și $60°$. Să se exprime în radiani al treilea unghi al triunghiului.*

Soluție. Unghiul al treilea al triunghiului este egal cu $180° - (15° + 60°) = 105°$. Pentru a transforma măsura sa din grade sexagesimale în radiani, considerăm proporția formată cu primul și ultimul raport din relațiile (2):

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{a}{\pi},$$

[1] De aici înainte, cuvîntul radian se va subînțelege. De exemplu, vom scrie $a=2{,}5$ în loc de $a=2{,}5$ radiani.

adică

$$a = \frac{105}{180}\pi = \frac{7}{12}\pi.$$

3° *Să se exprime în grade sexagesimale unghiul de* 1 radian.

Soluție. Din relațiile (2), ținînd seama că $a=1$, obținem:

$$a = \frac{180}{\pi}$$

sau:

$$a \approx \frac{180}{3{,}1416} \approx 57{,}2958.$$

Deci:

$$1 \text{ radian} \approx 57°17'44'',8.$$

4° În capitolele următoare vom măsura unghiurile în grade sexagesimale și în radiani. De asemenea, măsurile unor anumite unghiuri sînt frecvent întîlnite în aplicații. De aceea este necesară memorarea tabelului de mai jos, întocmit cu ajutorul relației $a = \frac{\alpha}{180}\pi$:

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

5° Din relația (1) obținem:

$$l = ar.$$

Prin urmare, lungimea arcului de cerc este egală cu produsul dintre măsura în radiani a unghiului la centru corespunzător și lungimea razei cercului.

O b s e r v a ț i e. Pentru $r=1$, relația precedentă devine $l=a$: lungimea arcului de cerc de rază 1 este egală cu măsura în radiani a unghiului la centru corespunzător. Simplitatea acestei relații face ca măsura în radiani a unghiurilor să fie preferată celorlalte, în special în cercetările cu caracter teoretic.

§ 2. Generalizarea noțiunii de unghi și de arc

3. **Unghiuri orientate.** Pînă acum am considerat unghiul definit în geometrie: figura formată de două semidrepte care au aceeași origine. Unghiul astfel definit se dovedește însă necorespunzător studiului unor mișcări,

ca: strîngerea piuliței, rotația cheii, rotația elicei ș.a., unde trebuie să se țină seama și de sensul rotațiilor, și de numărul lor.

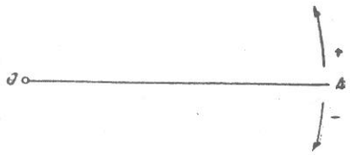


Fig. 2.

În cele ce urmează vom da o nouă definiție unghiului care o va generaliza pe cea dată în geometrie.

Într-un plan se disting două sensuri pentru rotația unei semidrepte: sensul invers rotației acelor ceasornicului, numit *pozitiv*, și sensul de rotație a acelor ceasornicului, numit *negativ*[1]. Sensul de rotație pozitiv (negativ) se însemnă cu săgeată (fig. 2).

Planul în care s-a stabilit sensul pozitiv pentru rotații se numește orientat.

Considerăm că *unghiul orientat AOB este generat (descris) de o semidreaptă din planul orientat care se rotește în jurul originii sale, din poziția OA pînă în poziția OB.*

Semidreapta OA se numește *latura inițială* a unghiului AOB, iar semidreapta OB *latura finală.*

4. **Unghiuri pozitive și negative.** Convenim să numim unghiul AOB[2] *pozitiv* sau *negativ*, după cum sensul rotației semidreptei care îl generează este pozitiv sau negativ.

Presupunem, deocamdată, că rotația semidreptei nu depășește o rotație completă. *Dacă măsura unghiului geometric* $\widehat{AOB}$ *este* α, *spunem că mărimea*

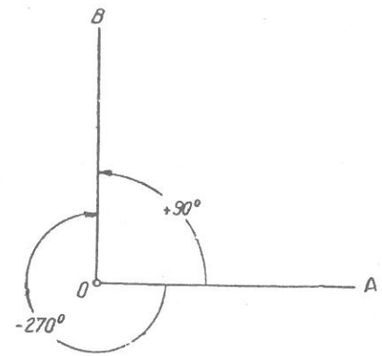


Fig. 3.

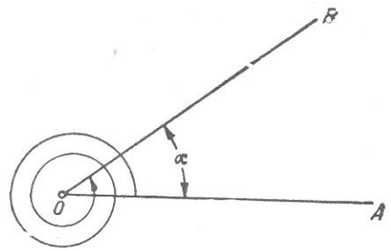


Fig. 4.

[1] Sensul de rotație pozitiv se mai numește direct sau trigonometric, iar sensul negativ, — retrograd.

[2] În cele ce urmează, unde nu există posibilitatea de confuzie, nu se mai specifică că unghiul este orientat.

unghiului AOB este egală cu α sau $-\alpha$, după cum rotația este pozitivă sau negativă și scriem respectiv $AOB=\alpha$ sau $AOB=-\alpha$.[1]

Exemplu. În figura 3 sînt reprezentate două unghiuri cu latura inițială OA și latura finală OB. Mărimea unghiului pozitiv AOB este egală cu $+90°$, iar mărimea unghiului negativ AOB este egală cu $-270°$.

5. **Unghiuri mai mari în valoare absolută decît 360°. Egalitatea și suma unghiurilor.** Fie unghiul $AOB=\alpha$ $(-360° \leqslant \alpha \leqslant 360°)$. Să presupunem că semidreapta care îl generează, după ce descrie unghiul α, efectuează n rotații complete (în figura 4, $\alpha>0$, $n=2$). Evident, semidreapta s-a rotit din poziția OA pînă în poziția OB.

Spunem că *semidreapta a descris unghiul AOB de mărime egală cu $\alpha+n\cdot 360°$ dacă rotațiile sînt pozitive și unghiul AOB de mărime egală cu $\alpha-n\cdot 360°$ dacă rotațiile sînt negative.*[2]

Prin urmare *există o mulțime infinită de unghiuri β cu latura inițială OA și latura finală OB.* Ele se exprimă prin formula:

$$\beta=\alpha\pm n\cdot 360° \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

sau

$$\beta=\alpha+k\cdot 360° \qquad (3)$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Evident, pentru k ales convenabil, $\beta>360°$ sau $\beta<-360°$. De aici rezultă că, în mulțimea unghiurilor cu latura inițială OA și latura finală OB, există o mulțime infinită de unghiuri mai mari în valoarea absolută decît 360°.

O b s e r v a ț i i. 1° În formula (3) unghiul α poate fi oricare dintre unghiurile cu latura inițială OA și latura finală OB. În particular putem considera că $0° \leqslant \alpha < 360°$.

2° Folosind măsura în radiani, formula (3) se scrie:

$$\beta=\alpha+k\cdot 2\pi \qquad (k\in Z), \qquad (3')$$

unde prin Z s-a notat mulțimea numerelor întregi $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$.

Exemplu. Dacă semidreapta se rotește în sensul pozitiv cu un unghi de 120°, în raport cu latura inițială OA, fiecărei poziții finale a semidreptei îi corespunde unul din unghiurile:

1) pozitive: 120°, 480°, 840°, . . .

2) negative: —240°, —600°, —960°, . . .

---

[1] Măsura unui unghi este un număr pozitiv, mărimea lui putînd fi pozitivă sau negativă.

[2] În cele ce urmează, în loc de „unghiul de mărime egală cu . . .", spunem „unghiul egal cu . . ."

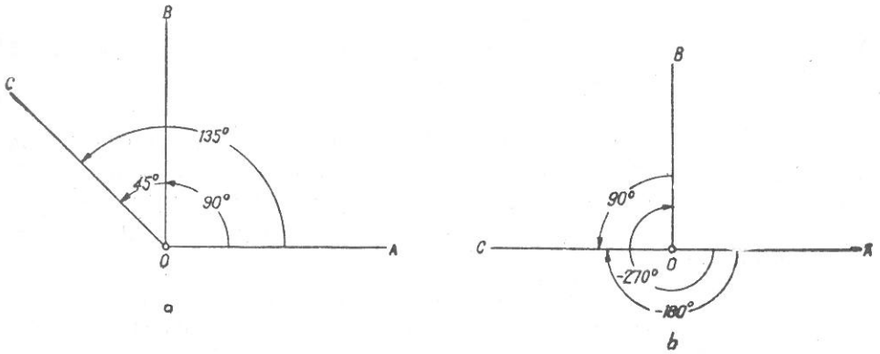


Fig. 5.

Toate aceste unghiuri sînt cuprinse în formula: $\beta=120°+k\cdot 360°$ $(k\in Z)$ (pentru $k=0, 1, 2, \ldots$ se obțin unghiurile pozitive, pentru $k=-1, -2, -3, \ldots$, unghiurile negative) sau în formulele $\beta=480°+k\cdot 360°$ $(k\in Z)$; $\beta=-240°+k\cdot 360°$ $(k\in Z)$ etc.

Definiție. *Două unghiuri care au aceeași mărime se numesc egale.*

Consecință. Mărimea unui unghi fiind independentă față de poziția laturii inițiale, rezultă că orice semidreaptă din planul orientat poate fi considerată ca latură inițială a unui unghi.

Definiție. *Suma a două unghiuri se numește unghiul a cărui mărime este egală cu suma mărimilor celor două unghiuri.*

Exemple

1) *În figura 5, a suma unghiurilor $AOB=90°$ și $BOC=45°$ este unghiul $AOC=90°+45°=135°$.*

2) *În figura 5, b suma unghiurilor $AOB=-270°$ și $BOC=90°$ este unghiul $AOC=-270°+90°=-180°$.*

6. **Corespondența biunivocă între mulțimea numerelor reale și mulțimea unghiurilor orientate.** Fie r_0 un număr real arbitrar. Numerele

$$\ldots, -3\cdot 2\pi, -2\cdot 2\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 2\cdot 2\pi, 3\cdot 2\pi, \ldots$$

determină pe axa reală mulțimea de intervale disjuncte

$$\ldots, [-3\cdot 2\pi, -2\cdot 2\pi), [-2\cdot 2\pi, -2\pi), [-2\pi, 0), [0, 2\pi), [2\pi, 2\cdot 2\pi), [2\cdot 2\pi, 3\cdot 2\pi), \ldots$$

a căror reuniune este egală cu mulțimea numerelor reale. Rezultă că în această mulțime există un interval, și numai unul, care conține numărul r_0; fie $[k_0\cdot 2\pi, (k_0+1)\cdot 2\pi]$ acest interval. Atunci

$$k_0\cdot 2\pi \leqslant r_0 < (k_0+1)\cdot 2\pi$$

sau

$$0 \leqslant r_0 - k_0 \cdot 2\pi < 2\pi,$$

adică

$$r_0 - k_0 \cdot 2\pi = \alpha_0,$$

unde $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$ este un număr determinat. Cu alte cuvinte, oricare ar fi numărul real r_0, există numărul întreg k_0 și $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$, unic determinate, astfel încît

$$r_0 = k_0 \cdot 2\pi + \alpha_0.$$

Însă numărul $k_0 \cdot 2\pi + \alpha_0$ este egal cu unghiul descris de o semidreaptă care, după ce descrie unghiul α_0, efectuează k_0 rotații complete (pozitive sau negative, după cum $k_0 > 0$ sau $k_0 < 0$). Prin urmare fiecărui număr real putem face să-i corespundă un unghi orientat, și numai unul, anume unghiul egal cu acest număr. În această corespondență fiecare unghi orientat este corespunzător numărului real, unic determinat, egal cu unghiul respectiv. Corespondența stabilită se numește *biunivocă*. În acest fel *între mulțimea numerelor reale și mulțimea unghiurilor orientate există o corespondență biunivocă.*

O b s e r v a ț i e. În această corespondență sumei a două numere reale îi corespunde suma unghiurilor respective. Se poate arăta că, în acest caz, orice proprietate a sumei numerelor reale este valabilă și pentru suma unghiurilor. Unele precizări vor fi făcute în § 26, cu ocazia introducerii operației de adunare a numerelor complexe.

7. **Corespondența între mulțimea numerelor reale și poziția laturii finale a unui unghi din planul orientat.** Vom arăta că fiecărui număr real putem face să-i corespundă, printr-un anumit procedeu, poziția laturii finale a unui unghi unic determinat. Pentru aceasta considerăm mulțimea unghiurilor din planul orientat a căror latură inițială este semidreapta OA. Fie $r = k \cdot 2\pi + \alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ un număr real. El este egal cu unghiul pentru care OA este latura inițială și a cărui latură finală coincide cu latura finală a unghiului α. De aici rezultă că fiecărui număr real $r = k \cdot 2\pi + \alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ putem face să-i corespundă, în mod unic, poziția laturii finale a unghiului α.

O b s e r v a ț i e. Corespondența stabilită nu este biunivocă. Într-adevăr, dacă OB este poziția laturii finale a unui unghi, există o mulțime infinită de unghiuri cu latura inițială OA și latura finală OB, ale căror mărimi sînt numere reale distincte. Așadar, fiecare poziție a laturii finale a unui unghi este corespunzătoare unei mulțimi infinite de numere reale distincte.

8. **Generalizarea noțiunii de arc.** Să considerăm o semidreaptă din planul orientat care se rotește în jurul originii sale, din poziția OA pînă în poziția OB. Un punct al semidreptei, diferit de origine, descrie un drum numit *arc*. Poziția punctului OA se numește *originea arcului*, iar poziția sa pe OB *extremitatea arcului*.

Arcul cu originea și extremitatea, respectiv, în punctele M și N se notează $\overset{\frown}{MN}$. Convenim să numim arcul *pozitiv* sau *negativ*, după cum rotația semidreptei este pozitivă sau negativă. În acest fel, arcului i se atribuie sensul rotației și se înseamnă cu săgeată (fig. 6).

Fiecărui arc $\overset{\frown}{MN}$ îi corespunde un unghi unic determinat: unghiul cu latura inițială OM și latura finală ON.

Prin mărimea arcului MN înțelegem mărimea unghiului corespunzător. Așadar, fiecărui arc de mărime α îi corespunde unghiul de mărime α și reciproc. De aici rezultă că tot ce s-a spus despre mărimea unghiului este valabil și pentru mărimea arcului. De aceea putem spune arc în loc de unghi și invers.

Aplicație. Fie $B_1, B_2 \ldots, B_n$ $(n \geqslant 3)$ vîrfurile unui poligon regulat și A un punct arbitrar aparținînd cercului circumscris poligonului (în figura 7, $n = 4$). Evident, există o mulțime infinită de arce cu originea în punctul A și extremitățile în vîrfurile poligonului dat. Dacă β și α sînt două din aceste arce, diferența lor este un multiplu de $\frac{360^\circ}{n}$:

$$\beta - \alpha = k \cdot \frac{360^\circ}{n},$$

de unde:

$$\beta = \alpha + k \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

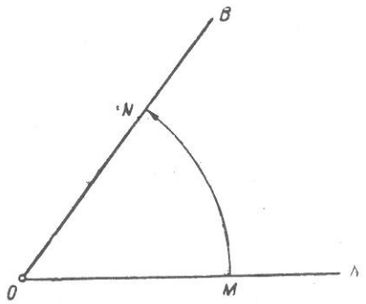


Fig. 6

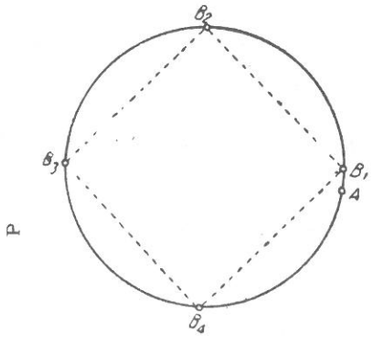


Fig. 7.

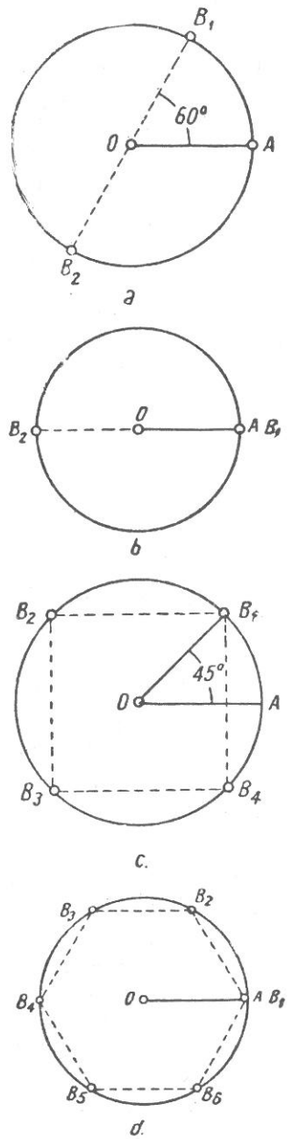


Fig. 8.

Presupunînd arcul α fixat, rezultă că *mulțimea arcelor cu originea în A și extremitățile în vîrfurile poligonului considerat se exprimă prin formula:*

$$\beta=\alpha+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\ (k\in Z) \qquad (4)$$

O b s e r v a ț i e. Se constată ușor că formula este valabilă și pentru arcele ale căror extremități sînt simetrice față de centrul cercului corespunzător (în acest caz $n=2$).

Exemple 1) *Mulțimea arcelor cu originea în A și extremitatea în* B_1 *sau* B_2 (fig. 8, *a*) *este* $\beta=60^\circ+k\cdot\frac{360^\circ}{2}=60^\circ+k\cdot180^\circ$ $(k\in Z)$.

2) *Mulțimea arcelor cu originea în A și extremitatea în* $B_1(B_1\equiv A)$ *sau* B_2 (fig. 8, *b*) *este* $\beta=0^\circ+k\cdot\frac{360^\circ}{2}=k\cdot180^\circ$ $(k\in Z)$.

3) *Mulțimea arcelor cu originea în A și extremitatea într-unul din punctele* B_1, B_2, B_3, B_4 (fig. 8, *c*) *este* $\beta=45^\circ+k\cdot\frac{360^\circ}{4}=45^\circ+k\cdot90^\circ(k\in Z)$.

4) *În figura 8, d,* $\beta=0^\circ+k\cdot\frac{360^\circ}{6}=k\cdot60^\circ$ $(k\in Z)$.

Exerciții

1. Să se exprime în grade centesimale și în radian unghiurile următoare:

a) 18°; *b)* 72°; *c)* 140°24′.

2. Să se măsoare în radiani arcul de cerc egal cu: *a)* 4 cm; *b)* 1,2 cm; *c)* 0,6 cm; *d)* 2,4 dm; *e)* 0,66 m dacă raza cercului este egală cu 12 cm.

3. Să se calculeze în radiani unghiul decagonului regulat convex.

4. Măsurile unghiurilor unui triunghi sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5. Să se exprime în radiani măsurile acestor unghiuri.

5. Să se calculeze și să construiască unghiul

$$\beta=\alpha+k\cdot360^\circ$$

pentru următoarele valori ale lui α și k:

a) $\alpha=30^\circ$, $k=2$; *b)* $\alpha=210^\circ$, $k=1$;
c) $\alpha=-30^\circ$, $k=3$;
d) $\alpha=-45^\circ$, $k=2$.

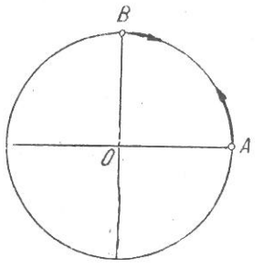


Fig. 9.

6. Să se măsoare în grade sexagesimale și în radiani unghiul rotației unui volant, dacă execută:

a) 2 rotații complete; *b)* 2,3 rotații complete; *c)* $\frac{5}{8}$ rotații complete.[1]

7. Să se exprime în grade sexagesimale unghiul egal cu:

$$a)\ \frac{\pi}{5};\quad b)\ -5\frac{\pi}{4};\quad c)\ \frac{13\pi}{6}.$$

8. Să se exprime în grade sexagesimale unghiul egal cu:

a) 0,6; *b)* 1,7; *c)* −4; *d)* −2,6.

9. Să se afle lungimea arcului de cerc, cu raza de 3,2 m, dacă arcul este egal cu 117°.

10. Lungimea arcului de cerc, a cărui rază este egală cu 2,4 m, este de 4 m. Să se exprime în grade sexagesimale acest arc.

11. O roată dințată are 90 de dinți. Să se exprime în radiani unghiul de rotație al roții, dacă ea se rotește cu:
a) 30 de dinți; *b)* 25 de dinți; *c)* 40 de dinți; *d)* 200 de dinți.

12. Un disc execută într-un minut 300 de rotații complete. Să se calculeze viteza sa unghiulară în radiani pe secundă.

13. Viteza unghiulară a unui valț este de 42,3 rad/s. Să se calculeze numărul rotațiilor efectuate într-un minut.

14. O roată de transmisie se rotește cu viteza unghiulară $\omega=\frac{2\pi}{9}$ rad/s. În cît timp execută o rotație completă?

15. Două mobile *A* și *B*, începînd din același moment se deplasează în același sens pe un cerc. În momentul inițial pozițiile lor sînt diametral opuse. Mobilul *A* descrie în fiecare minut un arc de 30°, iar mobilul *B* un arc de 45°. După cît timp de la începutul mișcării se produce prima, a patra și a *n*-a întîlnire a mobilelor?

16. Două mobile *A* și *B*, situate în extremitățile a doi diametri perpendiculari (fig. 9), se deplasează pe cerc, începînd din același moment. Mobilul *A* descrie în fiecare minut un arc de 20°; mobilul *B* descrie în fiecare minut un arc de −10°. După cîte minute se produce prima, a treia, a *n*-a întîlnire a mobilelor?

---

[1] În exercițiile 6, 11, 12 sensul rotației se consideră pozitiv.

Funcţii trigonometrice

§ 3. Funcţiile trigonometrice ale unghiului ascuţit

9. **Definiţia funcţiilor trigonometrice.** Fie α un unghi ascuţit al unui triunghi dreptunghic şi a lungimea ipotenuzei, b lungimea catetei alăturate unghiului α, c lungimea catetei opuse unghiului α (fig. 10).

Reamintim că funcţiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă ale unghiului α se definesc ca rapoarte între laturile triunghiului, şi anume:[1]

$$\sin \alpha = \frac{c}{a},$$

adică *sinusul unghiului ascuţit se numeşte raportul dintre cateta opusă unghiului şi ipotenuză;*

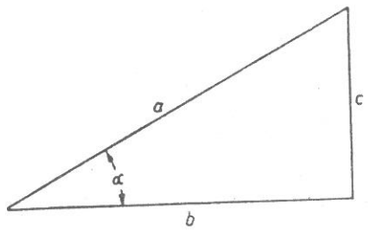


Fig 10.

$$\cos \alpha = \frac{b}{a},$$

adică cosinusul unghiului ascuţit se numeşte raportul dintre cateta alăturată unghiului şi ipotenuză;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b},$$

[1]Pentru prescurtare, în loc de *lungimea laturii*, spunem *latura*.

adică *tangenta unghiului ascuţit se numeşte raportul dintre cateta opusă unghiului şi cateta alăturată;*

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{c},$$

adică *cotangenta unghiului ascuţit se numeşte raportul dintre cateta alăturată unghiului şi cateta opusă.*

10. **Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45°, 60°.**

Unghiul de 30°. Să considerăm triunghiul dreptunghic cu un unghi de 30° şi ipotenuza egală cu a (fig. 11). În acest caz, cateta opusă unghiului de 30° este egală cu jumătatea ipotenuzei: $c = \frac{a}{2}$. Mai departe, din teorema lui Pitagora ($b^2 = a^2 - c^2$) găsim că $b = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare:

$$\sin 30° = \frac{c}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30° = \frac{b}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{c}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \operatorname{ctg} 30° = \frac{b}{c} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

Unghiul de 60°. Observăm că:

$$\sin 60° = \frac{b}{a} = \cos 30°; \quad \cos 60° = \frac{c}{a} = \sin 30°;$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{b}{c} = \operatorname{ctg} 30°; \quad \operatorname{ctg} 60° = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} 30°$$

şi folosim rezultatele precedente.

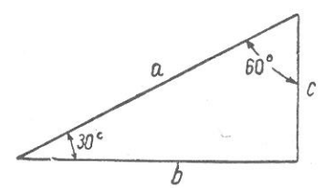


Fig. 11.

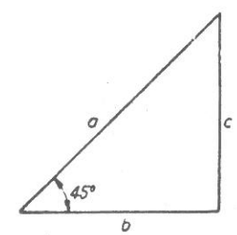


Fig. 12.

Unghiul de 45°. Dacă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este de 45°, triunghiul este și isoscel (fig. 12). Din teorema lui Pitagora rezultă că $b=c=a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare:

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg} 45^\circ=\operatorname{ctg} 45^\circ=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\frac{\sqrt{2}}{2}}=1.$$

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile $\alpha=30^\circ$, 45°, 60° se pot memora din tabelul următor:

α	30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

90° 0°
1 0
0 1
/ 0
0 /

11. Relațiile dintre funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite complementare.

Dacă unghiul α este ascuțit, unghiul $90^\circ-\alpha$ este, de asemenea, ascuțit; unghiurile α și $90^\circ-\alpha$ se numesc *complementare*.

Între funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare există relațiile:

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha;\ \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Într-adevăr, notînd cu α un unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic (fig. 10), celălalt unghi ascuțit al său este $90^\circ-\alpha$. Cateta b, opusă unghiului

$90^\circ-\alpha$, este alăturată unghiului α; cateta c, alăturată unghiului $90^\circ-\alpha$, este opusă unghiului α.

Deci:

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{b}{a}=\cos\alpha;\quad \cos(90^\circ-\alpha)=\frac{c}{a}=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\frac{b}{c}=\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\frac{c}{b}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Exemple

$$\sin 20^\circ=\cos 70^\circ;\qquad \cos 45^\circ=\sin 45^\circ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6};\qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}.$$

§ 4. Elemente de algebră vectorială

12. **Scalari și vectori.** Mărimile care se întîlnesc în mecanică, fizică și în alte științe aplicate sînt de două feluri. Pe de o parte, mărimi ca timpul, temperatura, masa, densitatea, lungimea, aria, volumul ș.a. care sînt caracterizate printr-o anumită valoare numerică. Pe de altă parte, mărimi ca forța, viteza, accelerația ș.a. care sînt determinate numai atunci cînd li se cunosc valoarea numerică și sensul. Mărimile de primul fel se numesc *scalare* sau, pe scurt, *scalari* și se reprezintă prin numere reale. Mărimile de al doilea fel se numesc *vectoriale*. Orice mărime vectorială poate fi reprezentată printr-un segment de lungime și sens determinate. Anume, lungimea segmentului se ia egală cu valoarea numerică a mărimii vectoriale, iar sensul segmentului coincizînd cu sensul ei. Pentru a caracteriza sensul unui segment unul din cele două puncte care îl mărginesc se ia ca origine a segmentului, iar celălalt ca extremitate; sensul segmentului se consideră sensul de la origine la extremitate. Segmentul căruia i s-a precizat sensul (adică s-a spus care dintre cele două extremități se consideră origine și care extremitate) se numește *vector*. În acest fel vectorul servește la reprezentarea geometrică a mărimilor vectoriale. De obicei, vectorul se însemnă prin două litere cu săgeată deasupra, plasînd, pe primul loc litera care indică originea segmentului. De exemplu, vectorul pentru care punctul A este origine și B extremitate îl însemnăm $\overrightarrow{AB}$. În desen, vectorul se reprezintă printr-un segment de lungime egală cu modulul vectorului și al cărui sens se indică prin săgeată (fig. 13).

Fig. 13

Vectorul a cărui origine coincide cu extremitatea sa se numește *vectorul nul* și se notează cu simbolul $\vec{0}$. Sensul vectorului nul se consideră nedeterminat.

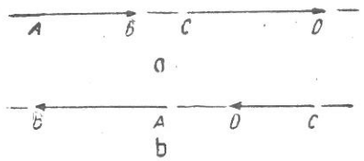


Fig. 14.

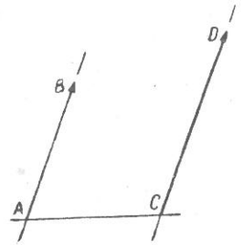


Fig. 15.

Modulul sau măsura vectorului $\overrightarrow{AB}$ se numește lungimea segmentului AB și se notează $|\overrightarrow{AB}|$.

Vectorul al cărui modul este egal cu unitatea de măsură se numește *vector unitar*.

13. **Egalitatea vectorilor.** Pe o dreaptă se pot defini două sensuri. Convențional, unul dintre ele se numește *pozitiv*, iar celălalt *negativ*. Dreapta pe care s-a ales sensul pozitiv se numește *axă*. Sensul pozitiv pe o axă se însemnă prin săgeată.

Se consideră că *doi vectori au același sens dacă sînt situați:*

1) *ori pe aceeași dreaptă și sensurile lor coincid cu unul dintre cele două sensuri ale dreptei* (fig. 14);

2) *ori pe drepte paralele și de aceeași parte a dreptei care unește originile lor* (fig. 15).

Dacă doi vectori sînt situați pe aceeași dreaptă, sau pe drepte paralele, și nu au același sens, se spune că au *sensuri opuse* (fig. 16).

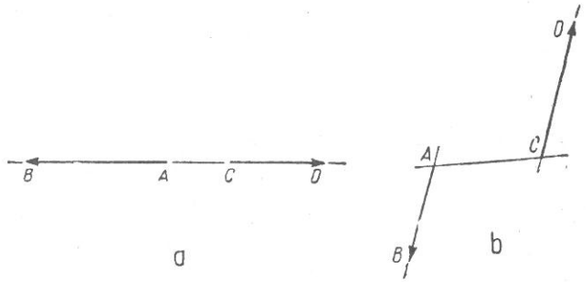


Fig. 16.

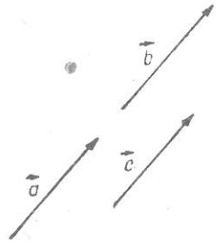


Fig. 17.

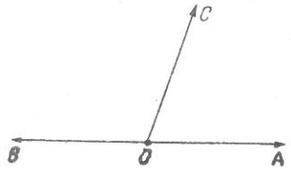


Fig. 18.

Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ care au același sens și modulele egale se numesc egali și scriem $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Se verifică imediat că egalitatea vectorilor astfel definită este *reflexivă, simetrică* și *tranzitivă*, adică satisface axiomele unei relații de echivalență.

Din definiția egalității vectorilor rezultă că un vector se poate deplasa paralel cu el însuși. Nefiind legat de originea sa, vectorul poate fi notat și printr-o singură literă cu săgeată deasupra. În afară de aceasta, orice punct O poate fi ales ca origine a unui vector. Fixînd punctul O, mulțimea vectorilor egali cu un vector $\vec{a}$ (clasa de echivalență a vectorului a) este reprezentată printr-un vector unic cu originea în O.

Exemple

1) Vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (fig. 17) sînt egali.

2) Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ (fig. 18) au modulele egale, dar nu au același sens; prin urmare nu sînt, doi cîte doi, egali.

14. **Adunarea vectorilor.** Fie dați vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 19). Alegem un punct arbitrar O și construim vectorii $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ (originea celui de-al doilea vector coincide cu extremitatea primului). Prin definiție, vectorul $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$ se numește *suma* vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ și se notează $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. În particular, dacă cei doi vectori au același sens, suma lor este vectorul avînd sensul vectorilor dați și modulul egal cu suma modulelor lor. Dacă însă vectorii au sensuri opuse, suma acestora este vectorul avînd sensul vectorului cu modulul mai mare și modulul egal cu diferența dintre modulul primului vector și modulul celui de-al doilea.

În cazul egalității modulelor celor doi vectori care au sensuri opuse, suma lor este vectorul nul.

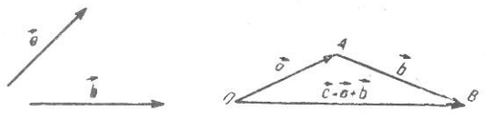


Fig. 19.

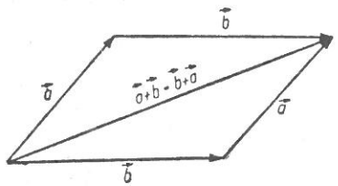


Fig. 20.

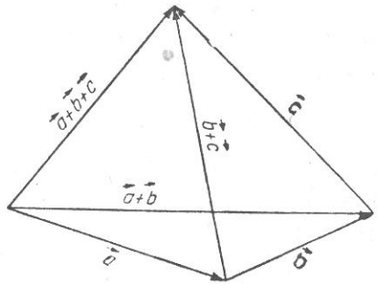


Fig. 21.

O b s e r v a ţ i e. Definiţia sumei a doi vectori are drept suport regula paralelogramului folosită în mecanică pentru determinarea rezultantei a două forţe concurente. Ea poartă denumirea de *regula triunghiului*.

Adunarea vectorilor, definită mai sus, se bucură de două proprietăţi importante, întîlnite şi la adunarea numerelor:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}: \text{ comutativitatea} \tag{1}$$

şi

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}: \text{ asociativitatea} \tag{2}$$

Demonstraţiile acestor proprietăţi se fac cu uşurinţă urmărind figura 20 şi figura 21, respectiv. De aici rezultă următoarea regulă de adunare a vectorilor, numită *regula poligonului:*

Pentru a construi suma oricărui număr de vectori se construiesc vectori egali cu cei daţi, astfel încît originea unuia să coincidă cu extremitatea celui precedent din sumă. Vectorul a cărui origine coincide cu originea primului termen, iar extremitatea cu a ultimului, reprezintă suma vectorilor consideraţi.

Exemplu

În figura 22 este reprezentat vectorul $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

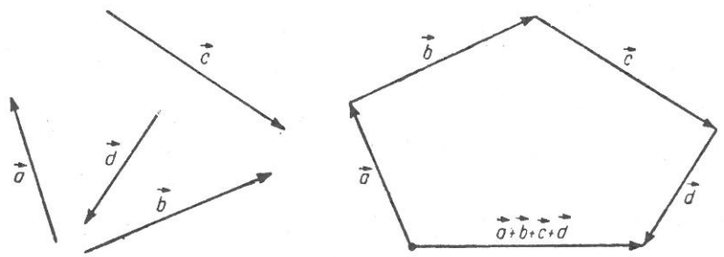


Fig. 22.

15. **Scăderea vectorilor.** Pentru orice vector $\vec{a}$ se poate defini în mod unic vectorul care are sensul opus şi modulul egal cu modulul vectorului $\vec{a}$. Vectorul astfel definit se numeşte *opusul* vectorului $\vec{a}$ şi se notează $-\vec{a}$.

Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori arbitrari. Prin *diferenţa* dintre vectorul $\vec{a}$ şi vectorul $\vec{b}$, notată $\vec{a}-\vec{b}$, se înţelege suma dintre vectorul $\vec{a}$ şi opusul vectorului $\vec{b}$, adică $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. În particular, diferenţa a doi vectori egali este vectorul nul.

16. **Înmulţirea vectorului cu un număr.** *Prin produsul dintre un vector $\vec{a}$ şi un număr real λ se înţelege vectorul care are modulul egal cu produsul dintre modulul numărului λ şi modulul vectorului $\vec{a}$ şi sensul lui $\vec{a}$ sau $-\vec{a}$, după cum $\lambda>0$ sau $\lambda<0$* (pentru $\lambda=0$ produsul respectiv este vectorul nul). Produsul dintre $\vec{a}$ şi λ se notează $\lambda\vec{a}$. Numărul λ se mai numeşte şi *scalar*. În particular, $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ şi $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Produsul astfel definit este *distributiv în raport cu adunarea vectorilor:*

$$\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}. \tag{3}$$

Ne convingem uşor de justeţea acestei egalităţi dacă observăm că vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $a+b$ formează laturile unui triunghi şi deci, după înmulţirea fiecăruia dintre ei cu λ, obţinem din nou un triunghi (asemenea cu primul).

Observăm, de asemenea, că produsul dintre un vector şi un număr este *distributiv în raport cu adunarea scalarilor:*

$$(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a} \tag{4}$$

şi asociativ în raport cu înmulţirea scalarilor

$$\lambda_1(\lambda_2\vec{a})=\lambda_2(\lambda_1\vec{a})=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}.$$

Aplicaţie. Să demonstrăm cu ajutorul algebrei vectoriale următoarea teoremă, cunoscută din geometrie:

Medianele unui triunghi se intersectează într-un punct şi sînt împărţite de acest punct în raportul 2: 1.

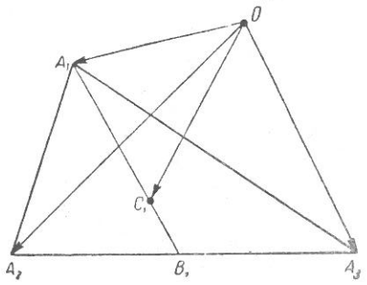


Fig. 23.

Demonstrație. Fie A_1B_1 mediana corespunzătoare laturii A_2A_3 în triunghiul $A_1A_2A_3$ (fig. 23). Notăm cu C_1 punctul care împarte această mediană în raportul $A_1C_1 : C_1B_1 = 2 : 1$. Alegem un punct arbitrar O (poate să nu aparțină planului triunghiului) și introducem notațiile:

$$\overrightarrow{OA_1} = \vec{r}_1, \quad \overrightarrow{OA_2} = \vec{r}_2, \quad \overrightarrow{OA_3} = \vec{r}_3.$$

Adunînd, membru cu membru, egalitățile evidente

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_1}, \quad \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3B_1}$$

și ținînd seama că $\overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{A_3B_1} = \overrightarrow{A_2B_1} - \overrightarrow{B_1A_3} = \vec{0}$, obținem:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}\right). \tag{5}$$

Dar

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_2} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

și

$$\overrightarrow{A_1A_3} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_3.$$

În acest fel (5) devine:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = -\vec{r}_1 + \frac{1}{2}\left(\vec{r}_2 + \vec{r}_3\right)$$

și deci

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{2}{3}\vec{r}_1 + \frac{1}{3}\left(\vec{r}_2 + \vec{r}_3\right). \tag{6}$$

În sfîrșit

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$$

sau, ținînd seama de (6):

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3\right).$$

Simetria acestei relații ne arată că vectorii cu originea în O și extremitățile în punctele C_2, C_3, care împart celelalte două mediane A_2B_2, A_3B_3 în raportul $2 : 1$, au aceeași expresie. De aici rezultă că punctele C_1, C_2 și C_3 coincid.

17. Proiecția vectorului pe o axă. Pentru vectorul situat pe o axă introducem o noțiune importantă, care îl caracterizează: mărimea vectorului. *Prin mărimea unui vector situat pe o axă se înțelege modulul vectorului luat cu semnul plus, sau cu semnul minus, după cum sensul vectorului coincide, sau nu, cu sensul pozitiv al axei.* Mărimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ se notează AB.

Fig. 24.

Fig. 25.

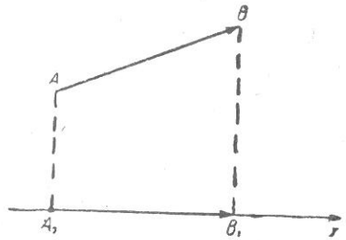


Fig. 26.

Exemplu

În figura 24, $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2$; $CD = -|\overrightarrow{CD}| = -3$.

Fie acum vectorul $\vec{a}$ situat pe o axă x (fig. 25). Se numește *versor* al axei x vectorul unitar $\vec{i}$ care are același sens cu axa. Ținînd seama de cele spuse mai sus, rezultă relația $\vec{a} = a\vec{i}$ adică *un vector situat pe o axă este egal cu produsul dintre mărimea sa și versorul axei.*

Reamintim că proiecția unui punct pe o dreaptă se numește piciorul perpendicularei construite din acel punct pe dreapta dată.

Fie un vector $\overrightarrow{AB}$ și o axă x (fig. 26). Să notăm cu $\overrightarrow{A_1B_1}$ vectorul ale cărui origine și extremitate sînt, respectiv, proiecția originii și extremității vectorului $\overrightarrow{AB}$ pe axa x. *Proiecția vectorului $\overrightarrow{AB}$ pe axa x se numește mărimea vectorului $\overrightarrow{A_1B_1}$ și se notează* $\mathrm{pr}_x\overrightarrow{AB}$. În acest fel $\mathrm{pr}_x\overrightarrow{AB} = A_1B_1$. Evident, dacă vectorul este situat pe axa de proiecție, atunci mărimea și proiecția sa pe axă coincid.

Exemplu

Proiecțiile vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{EF}$ pe axa x (fig. 27) sînt egale, respectiv, cu $A_1B_1 = 2$, $C_1D_1 = -3$, și $E_1F_1 = 0$.

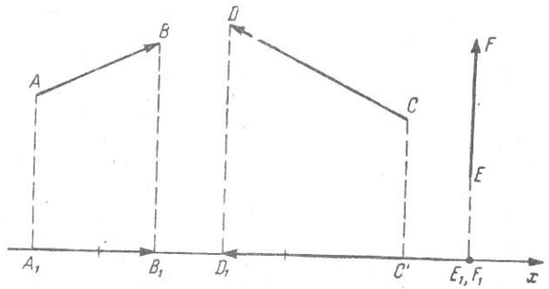


Fig. 27.

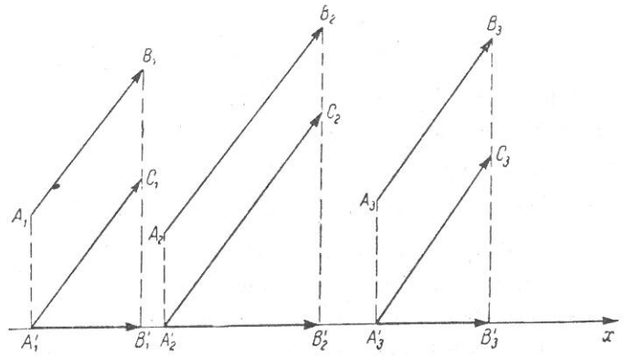


Fig. 28.

Să considerăm vectorii $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, . . . ,$\overrightarrow{A_nB_n}$ $(n>1)$ care au același sens și $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$, . . . ,$A'_nB'_n$— proiecțiile lor pe o axă x (în figura 28 sînt reprezentați trei vectori).

Teorema I

Proiecțiile unor vectori care au același sens, pe aceeași axă, sînt proporționale cu modulele lor.

Demonstrație. Paralele la dreptele (A_1B_1), (A_2B_2) . . . . , (A_nB_n), duse prin punctele $A'_1A'_2$, ... A'_n, intersectează dreptele (B'_1B_1), (B'_2B_2). . . . , . . . , (B'_nB_n) în punctele C_1, C_2, . . . , C_n respectiv. Conform definiției egalității vectorilor, avem:

$$\overrightarrow{A'_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1},\quad \overrightarrow{A'_2C_2}=\overrightarrow{A_2B_2}\ \ldots,\overrightarrow{A'_nC_n}=\overrightarrow{A_nB_n}. \tag{7}$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $A'_1B'_1C_1$, $A'_2B'_2C_2$, . . . $A'_nB'_nC_n$ rezultă egalitățile:

$$\frac{|\overrightarrow{A'_1B'_1}|}{|\overrightarrow{A'_1C_1}|}=\frac{|\overrightarrow{A'_2B'_2}|}{|\overrightarrow{A'_2C_2}|}=\ldots=\frac{|\overrightarrow{A'_nB'_n}|}{|\overrightarrow{A'_nC_n}|}. \tag{8}$$

Ținînd seama de (7), deducem că numitorii rapoartelor din relațiile (8) pot fi înlocuiți prin $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, $|\overrightarrow{A_2B_2}|$, . . . , $|\overrightarrow{A_nB_n}|$ respectiv. Pe de altă parte, proiecțiile vectorilor dați pe axa x au același semn și deci numărătorii aceloraşi rapoarte pot fi înlocuiți respectiv prin $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$, ... $A'_nB'_n$. În acest fel șirul de rapoarte egale (8) capătă forma:

$$\frac{A'_1B'_1}{|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{A'_2B'_2}{|\overrightarrow{A_2B_2}|}=\ldots=\frac{A'_nB'_n}{|\overrightarrow{A_nB_n}|},$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

Consecință. Proiecțiile unor vectori egali, pe aceeași axă, sînt egale.

O altă teoremă importantă, relativă la proiecțiile vectorilor pe o axă, va fi dată la punctul 19.

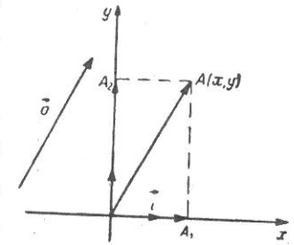


Fig. 29.

18. **Descompunerea vectorilor din plan.** Considerăm sistemul ortogonal de axe de coordonate xOy și un vector arbitrar $\vec{a}$ situat în planul xOy (fig. 29). Există un vector unic, cu originea în O, egal cu $\vec{a}$ (v. pct. 13); fie $A(x, y)$ extremitatea sa. Numind *rază vectoare* a punctului A vectorul cu originea în originea axelor de coordonate și cu extremitatea în punctul A, putem spune că *coordonatele x și y ale punctului A sînt proiecțiile razei vectoare $\overrightarrow{OA}$ (sau ale vectorului $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$) pe axele de coordonate.*

Să notăm cu A_1 și A_2 proiecțiile extremității vectorului $\overrightarrow{OA}$ pe axele de coordonate. Evident, are loc egalitatea

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}, \tag{9}$$

care arată că orice vector se poate descompune în doi termeni situați pe axele de coordonate. Vectorii termeni $\overrightarrow{OA_1}$ și $\overrightarrow{OA_2}$ se numesc *componentele* vectorului $\vec{a}$ față de sistemul de coordonate xOy.

Dacă $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt versorii axelor Ox și Oy respectiv, atunci $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$ (v. pct. 17) și deci egalitatea (9) capătă forma:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$

Această egalitate dă descompunerea vectorului după versorii axelor prin proiecțiile sale pe axe[1]. Astfel se stabilește legătura între teoria geometrică a vectorilor și cea algebrică.

19. **Operații cu vectori dați prin proiecțiile lor.** Fie vectorii

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\qquad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}.$$

Să calculăm mai întîi suma lor. Ținînd seama că operația de adunare a vectorilor este comutativă și asociativă (formulele (1) și (2), pct. 14), avem:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1\vec{i}+x_2\vec{i})+(y_1\vec{j}+y_2\vec{j}).$$

[1] Proiecțiile x, y ale vectorului $\vec{a}$ pe axele de coordinate se mai numesc și *coordonatele vectorului* dat față de sistemul xOy.

sau încă, deoarece produsul dintre un vector și un număr este distributiv față de adunarea scalarilor (formula (4), pct. 16):

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}.$$

Această egalitate arată că *proiecțiile vectorului sumă pe axele de coordonate sînt egale cu sumele proiecțiilor de același nume ale vectorilor termeni.* Observăm că proprietatea stabilită este adevărată independent de axa de proiecție. Pentru aceasta este suficient să se aleagă un sistem ortogonal de axe de coordonate a cărui axă a absciselor să coincidă cu axa considerată și să se repete raționamentul făcut mai sus. De asemenea, ea se poate extinde ușor la un număr oarecare de vectori. În acest fel este valabilă

Teorema II

Proiecția vectorului sumă pe o axă este egală cu suma proiecțiilor vectorilor termeni pe aceeași axă.

Exemplu

În figura 30 sînt reprezentați vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, și $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4$; $pr_x\vec{a}_1+pr_x\vec{a}_2+pr_x\vec{a}_3+pr_x\vec{a}_1=2+6+(-2)+(-3)=3=pr_x\vec{a}$.

Pentru a calcula diferența $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ este suficient să observăm că $-\vec{b}=-x_2\vec{i}-y_2\vec{j}$ și deci

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j},$$

adică *proiecțiile vectorului diferență sînt egale cu diferențele corespunzătoare ale proiecțiilor vectorilor termeni.*

Regula de înmulțire a unui vector cu un număr se obține prin înmulțirea ambilor membri ai egalității $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ cu λ. Folosind proprietățile de distributivitate în raport cu adunarea vectorilor și de asociativitate în raport cu înmulțirea scalarilor, obținem:

$$\lambda\vec{a}=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}.$$

În acest fel *proiecțiile produsului dintre un vector și un număr sînt egale cu produsul dintre numărul dat și proiecțiile respective ale vectorului.*

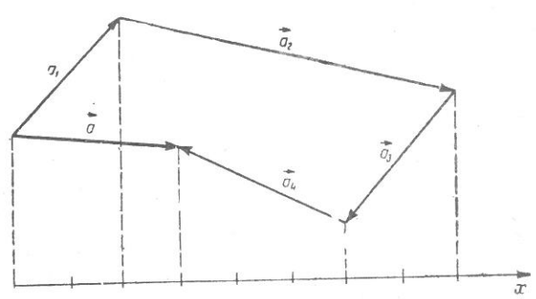


Fig. 30.

§ 5. Funcțiile trigonometrice ale unghiului orientat

20. **Unghiul format de doi vectori și de un vector cu o axă.** Dîndu-se vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dintr-un punct arbitrar O se construiesc vectorii $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (fig. 31). Prin definiție, *oricare dintre unghiurile cu latura inițială OA și latura finală OB se numește unghiul format de vectorul $\vec{b}$ cu vectorul $\vec{a}$ și se notează $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.* Prin urmare, trebuie să se facă distincție între unghiul $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ și $\widehat{(\vec{b}, \vec{a})}$. Dacă dreptele (OA) și (OB) sînt perpendiculare, atunci vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se numesc *perpendiculari* sau *ortogonali*, notîndu-se $\vec{a}\perp\vec{b}$ (sau $\vec{b}\perp\vec{a}$).

Unghiul format de un vector $\vec{a}$ cu o axă x se definește ca unghiul format de vector cu versorul axei și se notează $\widehat{(x, \vec{a})}$.

21. **Definiția funcțiilor trigonometrice.** Fie xOy un sistem ortogonal de axe de coordonate în planul orientat și α un unghi situat în acest plan. Fără să restrîngem generalitatea, putem presupune că latura inițială a unghiului α este semidreapta Ox (v. consecința de la pct. 5). Să notăm cu OM latura sa finală. În acest fel se poate considera că α este unghiul format de raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox (fig. 32). Dacă a și b reprezintă proiecțiile razei vectoare pe axa absciselor și axa ordonatelor respectiv, iar r modulul său, atunci este valabilă următoarea

Teoremă. *Rapoartele:*

$$\frac{b}{r},\ \frac{a}{r},\ \frac{b}{a},\ \frac{a}{b},$$

dacă există, nu depind de modulul razei vectoare, ci depind numai de unghiul α.

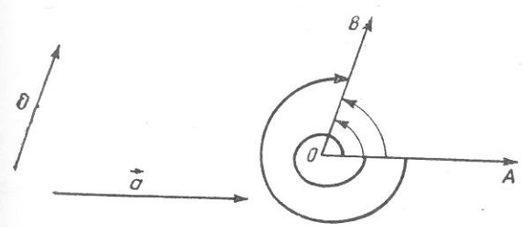


Fig. 31.

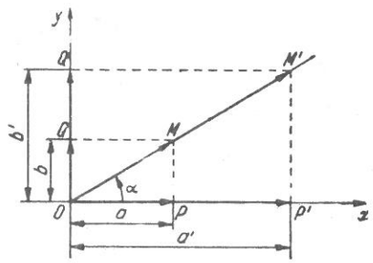


Fig. 32.

Demonstrație. Fiindcă $r \neq 0$, rapoartele $\frac{b}{r}, \frac{a}{r}$ există pentru orice unghi α. În schimb, dacă raza vectoare este situată pe una din axele de coordonate, ori $a=0$, ori $b=0$, și prin urmare, unul din rapoartele $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ nu există.

Presupunem, deocamdată, că toate cele patru rapoarte există. Fie $\overrightarrow{OM'}$ o altă rază vectoare care formează unghiul α cu axa absciselor și a', b' proiecțiile sale, respectiv, pe axa absciselor și axa ordonatelor[1], iar r' modulul său. Deoarece razele vectoare $\overrightarrow{OM'}$ și $\overrightarrow{OM}$ au același sens, proiecțiile b', b sînt proporționale cu modulele r', r (teorema I, pct. 17):

$$\frac{b'}{r'} = \frac{b}{r}.$$

Analog:

$$\frac{a'}{r'} = \frac{a}{r}.$$

Împărțind membru cu membru aceste egalități, obținem, de asemenea, proporțiile:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}; \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b},$$

ceea ce demonstrează teorema.

Dacă raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ este situată pe una din axele de coordonate, de exemplu pe axa absciselor, fiindcă $b=0$, există numai rapoartele:

$$\frac{b}{r}, \frac{a}{r}, \frac{b}{a}; \frac{b'}{r'}, \frac{a'}{r'}, \frac{b'}{a'}.$$

Repetînd raționamentul anterior, obținem:

$$\frac{b'}{r'} = \frac{b}{r}; \frac{a'}{r'} = \frac{a}{r}; \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

O b s e r v a ț i e. Dacă unghiul α este ascuțit, rapoartele $\frac{b}{r}, \frac{a}{r}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ sînt, respectiv, sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiului α.

Această observație ne dă posibilitatea să definim funcțiile trigonometrice ale unui unghi orientat. Fie α unghiul format de o rază vectoare cu axa absciselor.

Definiție.

1) *Sinusul unghiului α se numește raportul dintre proiecția razei vectoare pe axa ordonatelor și modulul său:*

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} \tag{1}$$

[1] De aici înainte vom nota cu Ox axa absciselor și cu Oy axa ordonatelor.

2) *Cosinusul unghiului α se numește raportul dintre proiecția razei vectoare pe axa absciselor și modulul său:*

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}. \tag{2}$$

3) *Tangenta unghiului α se numește raportul dintre proiecția razei vectoare pe axa ordonatelor și proiecția sa pe axa absciselor:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

4) *Cotangenta unghiului α se numește raportul dintre proiecția razei vectoare pe axa absciselor și proiecția sa pe axa ordonatelor:*

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}. \tag{4}$$

O b s e r v a ț i i

1° În mod analog se definesc încă două funcții trigonometrice, mai puțin folosite:

secanta unghiului α: $\sec \alpha = \frac{r}{a}$

și

cosecanta unghiului α: $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{b}$.

2° a și b sînt coordonatele extremității razei vectoare $\overrightarrow{OM}$ față de sistemul de axe considerat. De aceea, în loc de *proiecția razei vectoare pe axa absciselor* și *proiecția razei vectoare pe axa ordonatelor* putem spune, respectiv, *abscisa extremității razei vectoare* și *ordonata extremității razei vectoare.*

3° Fiindcă rapoartele $\frac{b}{r}, \frac{a}{r}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ nu depind de modulul razei vectoare, ci depind numai de unghiul α, notațiile $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, sînt justificate.

4° Pentru fiecare unghi α, rapoartele $\frac{b}{r}, \frac{a}{r}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}$, dacă există, sînt numere reale unic determinate. De aceea, *aceste rapoarte sînt funcții de unghiul* α. Se spune că $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ *sînt funcții trigonometrice ale unghiului* α. Unghiul α se numește *argumentul* funcției trigonometrice, iar valorile rapoartelor $\frac{b}{r}, \frac{a}{r}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ se numesc, respectiv, *valorile* funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unghiului α.

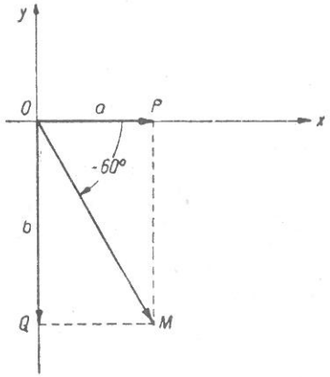


Fig. 33.

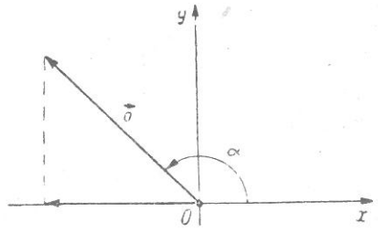


Fig. 34.

Exemplu. Să se calculeze valorile funcţiilor trigonometrice pentru $\alpha = -60°$.

Soluţie. În figura 33 unghiul dintre raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ şi axa absciselor este egal cu —60°. Proiectînd raza vectoare pe axele de coordonate, obţinem:

$$a = \frac{r}{2}, \qquad b = -r\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prin urmare:

$$\sin(-60°) = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos(-60°) = \frac{a}{r} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-60°) = \frac{b}{a} = -\sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg}(-60°) = \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicaţie. Să arătăm că *proiecţia unui vector pe o axă este egală cu produsul dintre modulul vectorului şi cosinusul unghiului format de vector cu axa.*

Fără să restrîngem generalitatea, putem considera drept axă de proiecţie axa Ox şi originea vectorului situată în originea axelor de coordonate. Dacă vectorul dat a formează cu axa Ox unghiul α (fig. 34) atunci, conform definiţiei cosinusului unui unghi, avem:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{pr}_{Ox}\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

de unde

$$\mathrm{pr}_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha,$$

ceea ce demonstrează propoziţia enunţată.

22. Semnele funcţiilor trigonometrice. Sistemul rectangular de axe de coordonate xOy împarte planul orientat în patru părţi, numite *cadrane* şi numerotate ca în figura 35. Se consideră că semiaxele de coordonate nu aparţin nici unui cadran. Despre unghiul cu latura finală, de exemplu, în cadranul II spunem că este unghi din cadranul II.

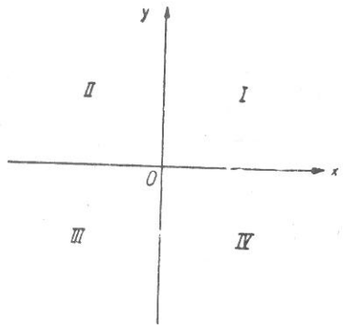


Fig. 35.

Exemplu. În figurile 36, *a*, *b*, *c*, *d*, unghiurile α sînt, respectiv, unghiuri din cadranele I, II, III, IV.

Prin semnul unei funcţii trigonometrice se înţelege semnul valorilor sale. În cele ce urmează vom arăta că, pentru unghiurile din acelaşi cadran, o funcţie trigonometrică nu-şi schimbă semnul şi, totodată, vom determina semnul respectiv.

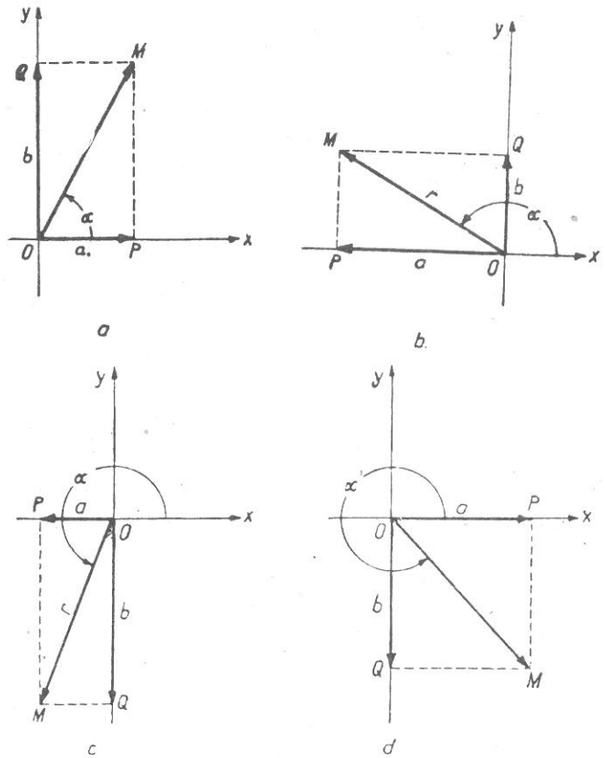


Fig. 36.

Din definiția funcțiilor trigonometrice rezultă că semnele lor depind de semnele proiecțiilor a și b, date de tabelul următor (v. fig. 36):

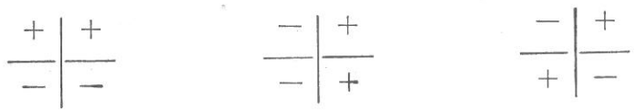
α	Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
a	+	—	—	+
b	+	+	—	—

Semnul funcției sinus. Conform definiției, $\sin\alpha=\frac{b}{r}$. Deoarece $r>0$ semnul raportului $\frac{b}{r}$ coincide cu semnul lui b. Deci, *funcția sinus este pozitivă în cadranele* I *și* II *și negativă în cadranele* III *și* IV.

Semnul funcției cosinus. Conform definiției, $\cos\alpha=\frac{a}{r}$. Semnul acestui raport coincide cu semnul lui a. Prin urmare, *funcția cosinus este pozitivă în cadranele* I *și* IV *și negativă în cadranele* II *și* III.

Semnele funcțiilor tangentă și cotangentă. Conform definiției $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}$. Ținînd seama de semnele proiecțiilor a și b și de faptul că rapoartele $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$ au același semn, rezultă că *funcțiile tangentă și cotangentă sînt pozitive în cadranele* I *și* III *și negative în cadranele* II *și* IV[1].

O b s e r v a ț i e. Semnele funcțiilor trigonometrice se rețin ușor din schema următoare:



sinus cosinus tangentă și cotangentă

23. Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unele unghiuri particulare. Vom calcula valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile a căror latură finală este una din semiaxele de coordonate (fig. 37).

[1] Pentru prescurtare, de exemplu, în loc de „funcția sinus este pozitivă pentru unghiurile din cadranele I și II" spunem „funcția sinus este pozitivă în cadranele I și II".

Unghiul de 0° (fig. 37, *a*). În acest caz, $a=r$, $b=0$. Deci, în $0°=\frac{0}{r}=0$; $\cos 0°=\frac{r}{r}=1$; $\operatorname{tg} 0°=\frac{0}{r}=0$; *ctg 0° nu există.*

Unghiul de 90° (fig. 37, *b*). În acest caz, $a=0$, $b=r$. Deci, *sin* $90°=\frac{r}{r}=1$; $\cos 90°=\frac{0}{r}=0$; $\operatorname{ctg} 90°=\frac{0}{r}=0$; *tg* 90° *nu există.*

Unghiul de 180° (fig. 37, *c*). În acest caz, $a=-r$, $b=0$. Deci, $\sin 180°=\frac{0}{r}=0$; $\cos 180°=\frac{-r}{r}=-1$; $\operatorname{tg} 180°=\frac{0}{-r}=0$; *ctg* 180° *nu există.*

Unghiul de 270° (fig. 37, *d*). În acest caz, $a=0$, $b=-r$. Deci, $\sin 270°=\frac{-r}{r}=-1$; $\cos 270°=\frac{0}{r}=0$; $\operatorname{ctg} 270°=\frac{0}{-r}=0$; *tg* 270° *nu există.*

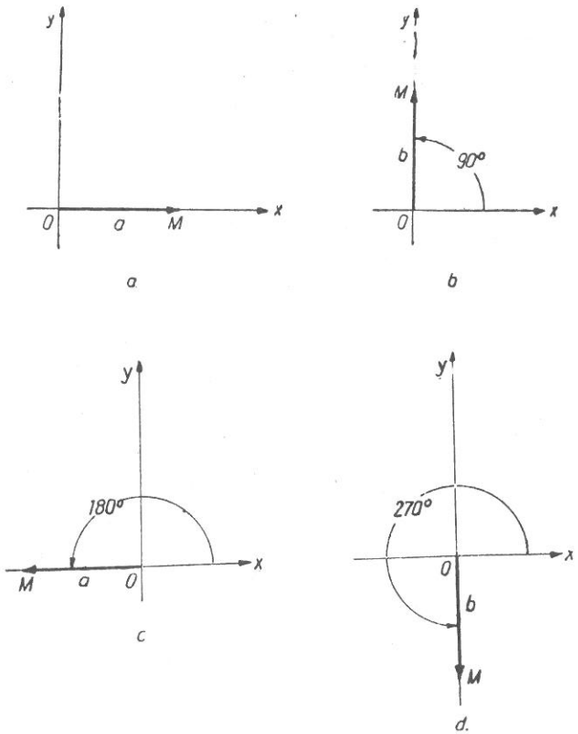


Fig. 37.

Ţinînd seama şi de valorile funcţiilor trigonometrice pentru 30°, 45°, 60° (v. tabelul de la pct. 10) alcătuim tabelul următor:

	0° (0)	30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	180° (π)	270° $\left(3\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	0	nu există
$\operatorname{ctg}\alpha$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nu există	0

24. **Construcţia valorilor funcţiilor trigonometrice.** Fie α unghiul format de raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ cu axa absciselor. Valorile funcţiilor trigonometrice ale acestui unghi nu depind de modulul razei vectoare (teorema de la pct. 21). În particular putem presupune că *raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ este un vector unitar* ($|OM|=1$). În acest caz extremitatea sa aparţine cercului cu centrul în originea axelor şi de rază egală cu unitatea — *cercul unitate* — şi formulele (1), (2), (3), (4) capătă o formă mai simplă.

Funcţia sinus. Dacă $|\overrightarrow{OM}|=1$, atunci $\sin\alpha=\frac{OQ}{1}=OQ$ (fig. 38):

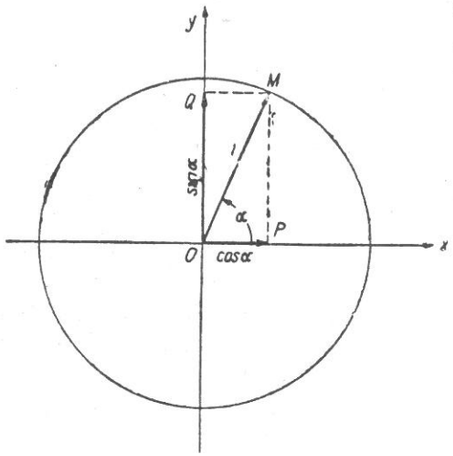


Fig. 38.

sinusul unui unghi este egal cu proiecţia razei vectoare unitară pe axa ordonatelor.

Funcţia cosinus, $\cos\alpha=\frac{OP}{1}=$ $=OP$ (fig. 38):

cosinusul unui unghi este egal cu proiecţia razei vectoare unitară pe axa absciselor.

Funcţia tangentă. Fie A punctul de intersecţie a semiaxei pozitive Ox cu cercul unitate (fig. 39). Axa AT, tangentă cercului unitate şi al cărei sens pozitiv este acelaşi cu sensul pozitiv al axei ordona-

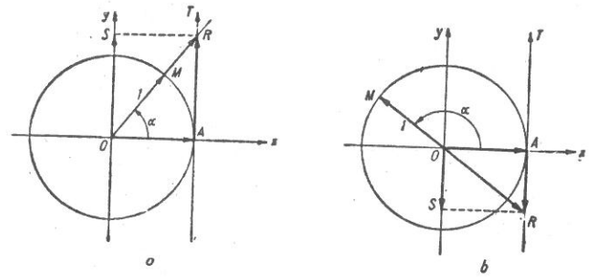


Fig. 39.

telor, se numeşte *axa tangentelor.* Să notăm cu R punctul de intersecţie a laturii finale a unghiului α (sau a prelungirii ei) cu axa tangentelor. Distingem următoarele cazuri:

a) Raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ aparţine semiplanului din dreapta (fig. 39, *a*). Ţinînd seama că vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{OR}$ au acelaşi sens, şi de definiţia tangentei unui unghi, deducem: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{OS}{OA}$. Însă $OS=AR$ şi $OA=1$.

Prin urmare,

$$\operatorname{tg}\alpha=AR.$$

b) Raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ aparţine semiplanului din stînga (fig. 39, *b*). În acest caz, vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{RO}$ au acelaşi sens. Conform definiţiei, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{SO}{AO}$. Însă $SO=-AR$ şi $AO=-OA=-1$.

Prin urmare,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-AR}{-1}=AR.$$

c) Dacă raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ este situată pe axa ordonatelor, ea este paralelă cu axa tangentelor, deci punctul R nu există. Cu alte cuvinte, în acest caz $\operatorname{tg}\alpha$ nu există.

În concluzie, *tangenta unui unghi, dacă există, este egală cu proiecţia razei vectoare $\overrightarrow{OR}$ pe axa tangentelor.*

Funcţia cotangentă. Fie B punctul de intersecţie a semiaxei pozitive Oy cu cercul unitate (fig. 40). Axa BC, tangentă cercului unitate şi al cărei sens pozitiv este acelaşi cu sensul pozitiv al axei absciselor, se numeşte *axa cotangentelor.* Dacă D este punctul de intersecţie a laturii finale a unghiului α (sau a prelungirii ei) cu axa cotangentelor, urmînd o cale analogă celei folosite la construcţia tangentei unghiurilor α, se obţin următoarele rezultate:

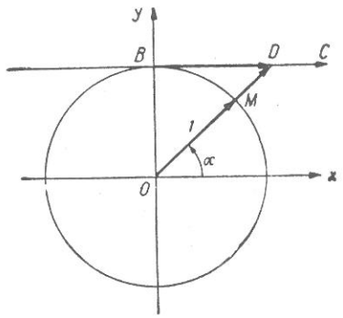


Fig. 40.

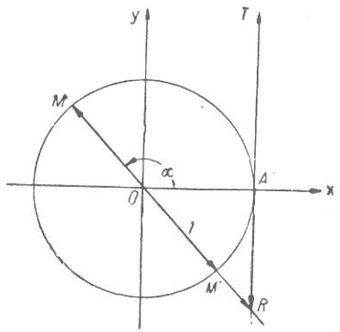


Fig. 41.

ctg $\alpha = BD$: *cotangenta unui unghi, dacă există, este egală cu proiecția razei vectoare* $\overrightarrow{OD}$ *pe axa cotangentelor;*

dacă raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ aparține axei absciselor, *ctg* α nu există.

Aplicații

1° Mulțimea unghiurilor β formate de raza vectoare unitară $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox (fig. 38) este dată de formula (v. relația (3) de la pct. 5):

$$\beta = \alpha + k \cdot 360° (k \in Z).$$

Pe de altă parte, aceste unghiuri au același sinus: OQ. Prin urmare,

$$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin \alpha \quad (k \in Z). \tag{5}$$

Analog (fig. 38):

$$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos \alpha \quad (k \in Z). \tag{6}$$

2° Fie razele vectoare unitare $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{OM'}$, ale căror extremități sînt simetrice față de originea axelor (fig. 41). Conform relației (4) de la pct. 8, mulțimea unghiurilor β, formate de aceste raze vectoare cu axa Ox, este dată de formula:

$$\beta = \alpha + k \cdot 180° (k \in Z).$$

Pe de altă parte, aceste unghiuri au aceeași tangentă: AR. Deci:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180°) = \operatorname{tg} \alpha \quad (k \in Z).$$

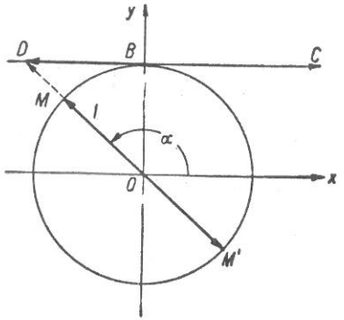


Fig. 42.

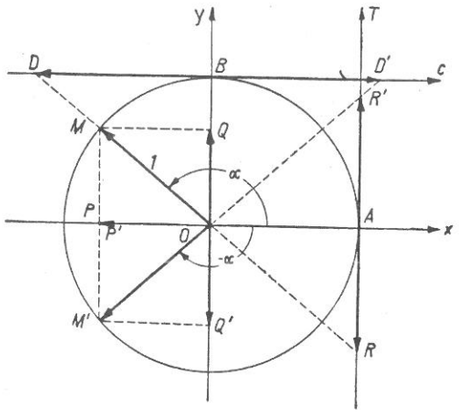


Fig. 43.

Analog (fig. 42):

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180°) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (k \in Z). \tag{8}$$

§ 6. Relații între funcțiile trigonometrice

25. **Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor care au mărimi opuse.** Fie unghiurile α și $-\alpha$ care au mărimi opuse (fig. 43).

Razele vectoare unitare $\overrightarrow{OM'}$ și $\overrightarrow{OM}$ formînd, respectiv, unghiurile $-\alpha$ și α cu axa absciselor sînt simetrice față de această axă. Deci, proiecțiile lor pe axa Ox sînt egale: $OP' = OP$. Ținînd seama că $OP' = \cos(-\alpha)$, $OP = \cos \alpha$, obținem:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha. \tag{1}$$

Analog:

$$OQ' = -OQ; \quad AR' = -AR; \quad BD' = -BD,$$

de unde:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha. \tag{2}$$

Exemple

$$\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin(-270°) = -\sin 270° = -(-1) = 1;$$

$$\operatorname{tg}(-180°) = -\operatorname{tg} 180° = 0.$$

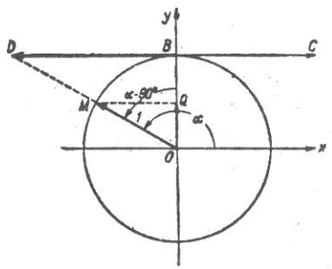


Fig. 44.

26. Funcţiile trigonometrice ale unghiurilor complementare. Unghiurile a căror sumă este egală cu 90° se numesc *complementare* (v. pct. 11). Aşadar, complementul unghiului α este unghiul $90°-\alpha$.

Dacă raza vectoare unitară $\overrightarrow{OM}$ formează cu axa absciselor unghiul α, cu axa ordonatelor ea formează unghiul $\alpha-90°$ (fig. 44). Conform definiţiilor funcţiilor sinus şi cosinus, proiecţia vectorului $\overrightarrow{OM}$ pe axa ordonatelor se poate exprima în două moduri:

$$OQ=\sin\alpha;\quad OQ=\cos(\alpha-90°).$$

De aici deducem:

$$\cos(\alpha-90°)=\sin\alpha;$$

Însă $\cos(\alpha-90°)=\cos(-\alpha+90°)$. Prin urmare, relaţia precedentă devine:

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha. \qquad (3)$$

Înlocuind în această relaţie unghiul α prin unghiul $90°-\alpha$, obţinem:

$$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha). \qquad (4)$$

Din definiţiile funcţiilor tangentă şi cotangentă, obţinem (fig. 44):

$$BD=\operatorname{ctg}\alpha;\quad -BD=\operatorname{tg}(\alpha-90°)$$

de unde:

$$-\operatorname{tg}(\alpha-90°)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Însă $-\operatorname{tg}(\alpha-90°)=\operatorname{tg}(-\alpha+90°)$ şi, prin urmare, relaţia precedentă devine:

$$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (5)$$

Înlocuind în această relaţie unghiul α prin unghiul $90°-\alpha$, obţinem:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}(90°-\alpha). \qquad (6)$$

O b s e r v a ţ i e. Dacă funcţia cosinus o numim cofuncţia funcţiei sinus, şi invers, iar funcţia cotangentă o numim cofuncţia funcţiei tangentă, şi invers, formulele (3), (4), (5), (6) se enunţă astfel: *funcţia trigonometrică a unui unghi este egală cu cofuncţia unghiului complementar.* Această proprietate justifică denumirile funcţiilor cosinus şi cotangentă.

Aplicaţie. *Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile de* 120°, 135°, 150°.

Unghiul de 120°. Observînd că unghiurile de 120° şi —30° sînt complementare, obţinem:

$$\sin 120°=\cos(-30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120°=\sin(-30°)=\sin 30°=-\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120°=\operatorname{ctg}(-30°)=-\operatorname{ctg} 30°=-\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 120°=\operatorname{tg}(-30°)=-\operatorname{tg} 30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Unghiul de 135°. Complementul său este unghiul de —45°. Procedînd ca şi în exemplul precedent, obţinem:

$$\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos 135°=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 135°=\operatorname{ctg} 135°=-1.$$

Unghiul de 150°. Complementul său este unghiul de —60°. Prin urmare:

$$\sin 150°=\frac{1}{2};\quad \cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3};\quad \operatorname{ctg} 150°=-\sqrt{3}.$$

§ 7. Funcţii trigonometrice de argument numeric

27. Definiţia funcţiilor trigonometrice de argument numeric. Dependenţa dintre diverse mărimi se studiază în matematică cu ajutorul funcţiilor de argument numeric. De exemplu, viteza în mişcarea uniform accelerată: $v=v_0+at$, spaţiul în mişcare uniformă: $s=s_0+vt$, lungimea unei bare metalice în dilatarea liniară: $l=l_0+l_0\alpha t°$, ale căror argumente sînt timpul sau temperatura, se studiază cu ajutorul funcţiei liniare $y=ax+b$, al cărei argument este numărul x.

Pînă acum am considerat că argumentul funcţiilor trigonometrice este unghi sau arc. În diverse domenii însă se folosesc funcţii trigonometrice al căror argument este timpul, temperatura, lungimea ş.a. De aici rezultă necesitatea definirii funcţiilor trigonometrice de argument numeric.

Am arătat că între mulţimea numerelor reale şi mulţimea unghiurilor din planul orientat există o corespondenţă biunivocă (pct. 6). În această corespondenţă, fiecărui număr real x îi corespunde unghiul egal cu x radiani.

Definiţie. *Funcţia trigonometrică de argument numeric x se numeşte funcţia trigonometrică de acelaşi nume a unghiului exprimat în x radiani.*

28. **Domeniile de definiţie ale funcţiilor trigonometrice**

Prin domeniul de definiţie[1] al unei funcţii trigonometrice se înţelege mulţimea valorilor argumentului pentru care această funcţie există (are sens).

Fie α unghiul format de raza vectoare unitară $\overrightarrow{OM}$ cu axa absciselor şi x mărimea sa în radiani.

sin x şi cos x. La punctul 24 s-a arătat că

$$\sin\alpha = OQ;\ \cos\alpha = OP,$$

OQ şi OP fiind, respectiv, proiecţiile vectorului $\overrightarrow{OM}$ pe axele Oy şi Ox. Evident, oricare ar fi unghiul α, aceste proiecţii există. Prin urmare, *domeniul de definiţie al funcţiilor sin x şi cos x este mulţimea numerelor reale (axa reală).*

tg x. Tangenta unui unghi nu există dacă raza vectoare este situată pe axa Oy, şi numai în acest caz (pct. 24), ceea ce revine la a spune că extremităţile razelor vectoare unitare $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{OM'}$ aparţin axei Oy şi sînt simetrice faţă de originea coordonatelor. Prin urmare (v. aplicaţia de la pct. 8), funcţia tangentă nu există pentru unghiurile $90° + k \cdot 180° (k \in Z)$ sau: *domeniul de definiţie al funcţiei tg x este axa reală, mai puţin punctele* $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$.

ctg x. Cotangenta unui unghi nu există dacă raza vectoare este situată pe axa Ox, şi numai în acest caz (pct. 24). Raţionînd ca mai sus, obţinem: *domeniul de definiţie al funcţiei ctg x este axa reală, mai puţin punctele* $k\pi (k \in Z)$.

O b s e r v a ţ i e. Dacă se notează cu R mulţimea numerelor reale, domeniile de definiţie ale funcţiilor tg x şi ctg x se pot scrie, respectiv, sub forma:

$$R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k \in Z};\quad R - \{k\pi\}_{k \in Z}.$$

Aplicaţie. *Să se determine domeniile de definiţie ale funcţiilor:*

a) $\sin\frac{x}{2}$; *b)* tg $3x$.

Soluţie. a) Oricare ar fi numărul real x, $\frac{x}{2}$ este, de asemenea, număr real. Deci, domeniul de definiţie al funcţiei $\sin\frac{x}{2}$ este R.

b) Funcţia tg $3x$ nu există pentru acele valori ale argumentului pentru care este îndeplinită egalitatea $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$. Deci, domeniul său de definiţie este $R - \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right\}_{k \in Z}$

[1] Este mai indicat să se spună mulţimea de definiţie. Totuşi, prin tradiţie, se foloseşte denumirea din text.

§ 8. Funcţii periodice

29. **Definiţia şi trasarea graficului funcţiei periodice**

Definiţie. *Funcţia f(x) se numeşte periodică dacă există un număr T, diferit de zero, astfel încît pentru orice x aparţinînd domeniului său de definiţie, valorile funcţiei în punctele x+T şi x să fie egale:*

$$f(x+T) = f(x).$$

Numărul T se cheamă *perioadă* a funcţiei $f(x)$.

Teoremă. *Dacă numărul T este perioadă a funcţiei f(x), atunci şi numerele kT (k=−1, ±2, ±3, . . .) sînt perioade ale funcţiei date.*

Într-adevăr, ţinînd seama de definiţia funcţiei periodice şi raţionînd din aproape în aproape, obţinem:

$$f(x+2T) = f[(x+T)+T] = f(x+T) = f(x);$$

$$f(x+3T) = f[x+2T)+T] = f(x+2T) = f(x) \text{ etc.}$$

şi $$f(x-T) = f[(x-T)+T] = f(x);\ f(x-2T) = f[(x-T)-T] =$$

$$= f(x-T) = f(x) \text{ etc.}$$

Teorema demonstrată arată că, odată cu perioada T, funcţia admite şi perioadele $-T$, $\pm 2T$, $\pm 3T, \ldots, \pm nT, \ldots$ Concentrat, putem scrie

$$f(x+kT) = f(x) \qquad (k \in Z).$$

Cea mai mică perioadă pozitivă a unei funcţii periodice se numeşte *perioada principală*[1].

Fie $f(x)$ o funcţie periodică, cu perioada T. În figura 45 este trasat graficul acestei funcţii în intervalul $[0, T]$, de lungime egală cu perioada sa.[2]

Ne propunem să construim graficul său în intervalul $[T, 2T]$, de asemenea, de lungime T. Observăm că intervalul $[T, 2T]$ se obţine prin deplasarea intervalului $[0, T]$ de-a lungul semiaxei pozitive Ox. În acest fel, punctul $x_0 \in [0, T]$ se deplasează în punctul $x_0 + T$, aparţinînd intervalului $[T, 2T]$. Deoarece $f(x_0+T) = f(x)$, deducem că punctul graficului de abscisă $x_0 + T$ este

$$M'(x_0+T,\ f(x_0)).$$

Prin urmare, punctul M' se obţine prin deplasarea punctului $M(x_0, f(x_0))$ pe un segment paralel cu axa absciselor. De aici rezultă că graficul funcţiei

[1] Adesea în loc de *perioada principală* se spune, pe scurt, *perioada.*

[2] Dacă funcţia nu are sens în extremităţile intervalului, se consideră intervalul deschis $(0,T)$.

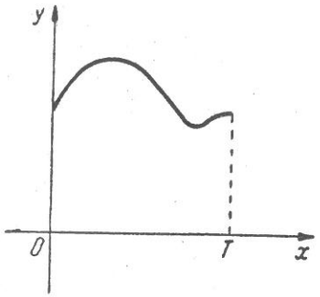


Fig. 45.

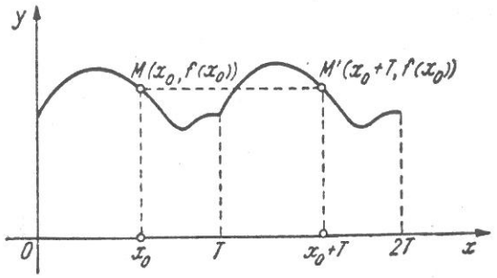


Fig. 46.

în intervalul $[T, 2T]$ se obține prin deplasarea graficului său din intervalul $[0, T]$, paralel cu axa absciselor (fig. 46).

Se spune că graficul funcției din intervalul $[0, T]$ se repetă în intervalul $[T, 2T]$.

Consecință. Pentru a construi graficul unei funcții periodice, este suficientă trasarea sa într-un interval de lungime egală cu perioada, de exemplu în intervalul $[0, T]$, după care se repetă graficul în intervalele $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, $[3T, 4T]\ldots$, $[-T, 0]$, $[-2T, -T]$, $[-3T, -2T]$, ... (fig. 47).

30. **Periodicitatea funcțiilor trigonometrice.** *Periodicitatea funcțiilor* $\sin x$ și $\cos x$. Relațiile (5) și (6) din § 5 dovedesc că funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ sînt periodice. În afară de *perioada principală* 2π, ele admit și perioadele -2π, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, ..., $\pm n \cdot 2\pi$, ...[1]

Periodicitatea funcțiilor $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$. Relațiile (7) și (8) din § 5 arată că funcțiile $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ sînt periodice. În afară de *perioada principală* π, ele admit și perioadele $-\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ..., $\pm n\pi$ ...[1]

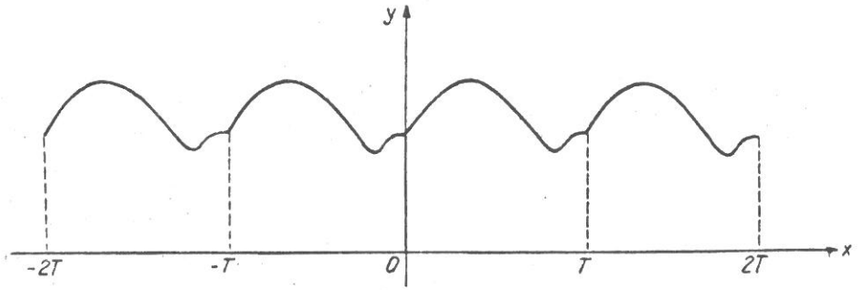


Fig. 47.

[1] Se poate arăta că funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ admit numai perioadele $k \cdot 2\pi$, iar funcțiile $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ admit numai perioadele $k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Exemple. 1) *Să se verifice că funcțiile* $f(x) = \sin x + \cos x$ *și* $g(x) = |\sin x|$ *admit perioada* 2π.

Într-adevăr:

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$$

și

$$g(x+2\pi) = |\sin(x+2\pi)| = |\sin x| = g(x).$$

2) *Funcția* $f(x) = a \operatorname{tg} 2x (a \neq 0)$ *admite perioada* $\frac{\pi}{2}$.

Într-adevăr:

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = a \operatorname{tg} 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = a \operatorname{tg}(2x+\pi) = a \operatorname{tg} 2x = f(x).$$

3) *Să se determine perioada principală a funcției* $f(x) = a \sin(\omega x + \varphi)$, *unde* a *și* ω *sînt constante nenule.*[1]

Soluție. Dacă numărul T este perioadă a funcției, atunci:

$$f(x+T) = f(x)$$

sau:

$$a \sin[\omega(x+T)+\varphi] = a \sin(\omega x + \varphi).$$

Notînd $\omega x + \varphi = x'$, relația precedentă devine:

$$\sin(x' + \omega T) = \sin x'.$$

Deoarece funcția $\sin x'$ admite *numai* perioadele $k \cdot 2\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), deducem:

$$\omega T = k \cdot 2\pi,$$

de unde:

$$T = k : \frac{2\pi}{\omega}.$$

Perioada principală se obține din ultima relație pentru $k = 1$ și este egală cu $\frac{2\pi}{\omega}$.

4) *Să se determine perioada principală a funcției* $\sin 20x + \cos 30x$.

Soluție. Perioadele funcțiilor $\sin 20x$ și $\cos 30x$ sînt, respectiv, numerele $k \cdot \frac{2\pi}{20}$ și $k' \frac{2\pi}{30}$, unde k și k' sînt numere întregi nenule.

[1] Această funcție definește mișcarea cunoscută în fizică sub numele de *oscilația armonică simplă*. Constantele $|a|$, ω și φ se numesc, respectiv, amplitudinea, pulsația și diferența de fază a oscilației.

Perioadele funcției date se află printre acele numere care satisfac egalitatea:

$$k \cdot \frac{2\pi}{20} = k' \cdot \frac{2\pi}{30},$$

de unde:

$$3k = 2k'.$$

Deci, pentru $k=2$ (sau $k'=3$) se obține perioada principală $T=\frac{\pi}{5}$.

§ 9. Funcții pare și impare

31. Definițiile și graficul funcției pare și impare

Definiții:

1) *Funcția $f(x)$ se numește pară dacă pentru fiecare x, aparținînd domeniului său de definiție, este satisfăcută egalitatea:*

$$f(-x)=f(x).$$

2) *Funcția $f(x)$ se numește impară dacă pentru fiecare x, aparținînd domeniului său de definiție, este satisfăcută egalitatea:*

$$f(-x)=-f(x).$$

Construcția graficelor funcțiilor pare și impare se simplifică dacă se ține seama de următoarea

Teoremă. *Graficul unei funcții pare este simetric față de axa ordonatelor; graficul unei funcții impare este simetric față de originea coordonatelor.*

Demonstrație. Dacă $f(x)$ este funcție pară, atunci $f(-x_0)=f(x_0)$. Prin urmare, odată cu punctul $M(x_0)$, $f(x_0)$, și punctul $M'(-x_0)$, $f(x_0)$ aparține graficului funcției (fig. 48). Însă punctele M și M' fiind simetrice față de axa Oy, înseamnă că punctele graficului aparținînd semiplanului din stînga sînt simetricele față de axa Oy ale punctelor corespunzătoare aparținînd semiplanului din dreapta.

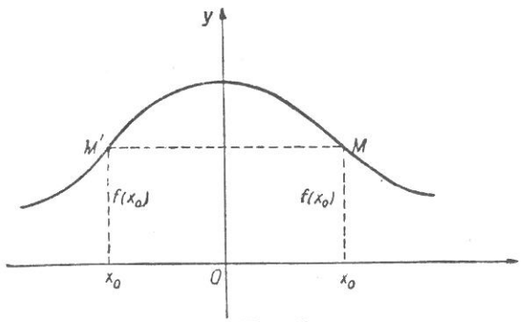


Fig. 48.

Dacă funcția este impară, odată cu punctul $M(x_0)$, $f(x_0)$, și punctul $M'(-x_0)$, $-f(x_0)$ aparține graficului său (fig. 49). Însă punctele M și M' fiind simetrice față de originea coordonatelor, rezultă că punctele graficului aparținînd semiplanului din stînga sînt simetricele față de originea coordonatelor ale punctelor corespunzătoare aparținînd semiplanului din dreapta.

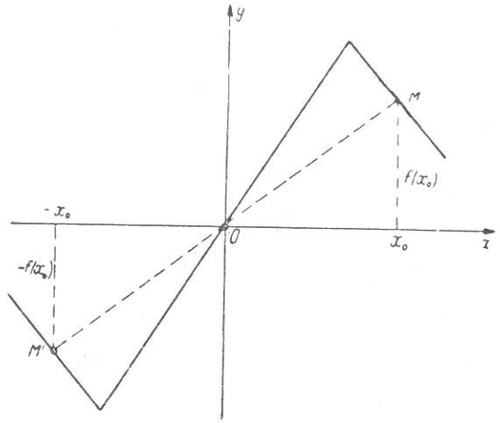


Fig. 49.

32. Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice

Teoremă. *Funcția cosinus este pară; funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sînt impare:*

$$\cos(-x)=\cos x;$$
$$\sin(-x)=-\sin x;$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x.$$

Demonstrația este imediată dacă se ține seama de relațiile (1), (2) din § 6 și de definiția funcției pare și impare.

Exemple

1) Funcția $f(x)=x^2+\cos x$ este pară.
Într-adevăr,

$$f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x).$$

2) Funcția $f(x)=-\sin x$ este impară.
Într-adevăr,

$$f(-x)=-\sin(-x)=-(-\sin x)=-f(x).$$

3) Funcția $f(x)=\cos x-\operatorname{tg} x$ nu este nici pară, nici impară.
Într-adevăr,

$$f(-x)=\cos(-x)-\operatorname{tg}(-x)=\cos x+\operatorname{tg} x$$

și

$$-f(x)=-\cos x+\operatorname{tg} x.$$

Prin urmare

$$f(-x) \neq f(x) \text{ (funcția nu este pară)}$$

și

$$f(-x) \neq -f(x) \text{ (funcția nu este impară).}$$

§ 10. Funcții strict monotone

33. **Definiția funcției strict monotonă.** Fie funcția $f(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ și x_1, x_2 două puncte arbitrare aparținînd acestui interval.

1) *Dacă $f(x_1) < f(x_2)$, oricare ar fi punctele $x_1 < x_2$, funcția se numește strict crescătoare pe intervalul $[a, b]$.*

2) *Dacă $f(x_1) > f(x_2)$, oricare ar fi punctele $x_1 < x_2$, funcția se numește strict descrescătoare pe intervalul $[a, b]$.*

Așadar, dacă x crește, valorile corespunzătoare ale funcției cresc sau descresc, după cum funcția este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe intervalul respectiv.

3) *O funcție strict crescătoare sau strict descrescătoare pe un interval se numește strict monotonă pe acel interval.*

Intervalele pe care o funcție este strict monotonă se cheamă *intervale de monotonie ale funcției.*

Exemple

1) *Funcția $f(x)$ (fig. 50) este strict crescătoare pe intervalul $[a, b]$, strict descrescătoare pe intervalul $[b, c]$, dar nu este strict monotonă pe intervalul $[a, c]$.*

2) *Funcția $f(x)$ (fig. 51) este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $[a, 0]$, $[0, b]$, dar nu este strict monotonă pe intervalul $[a, b]$.*

34. **Intervalele de monotonie ale funcțiilor trigonometrice.** Funcțiilor trigonometrice, ca funcții periodice, este suficient să li se studieze variația pe un interval de lungime egală cu perioada. Pentru alegere, funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ le studiem în intervalul $[0, 2\pi]$, iar funcțiile $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ în intervalul $[0, \pi]$.

Funcția $\sin x$. Cînd x crește de la zero la $\frac{\pi}{2}$ (fig. 52, *a*), OQ, proiecția razei vectoare unitară $\overrightarrow{OM}$ pe axa ordonatelor, crește (de la zero la $+1$): pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția x este strict crescătoare; cînd x crește de la $\frac{\pi}{2}$ la $\frac{3\pi}{2}$ (fig.52, *b*), OQ descrește (de la $+1$ la -1): pe intervalul

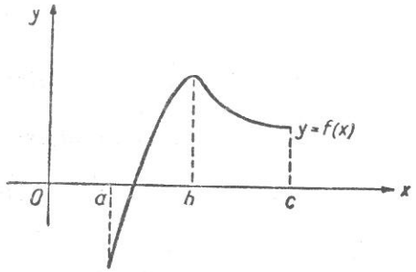


Fig. 50.

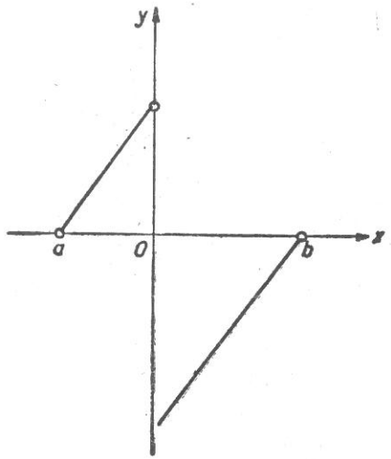


Fig. 51.

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ funcția $\sin x$ este strict descrescătoare; cînd x crește de la $\frac{3\pi}{2}$ la 2π (fig. 52, *c*), OQ crește (de la -1 la zero); pe intervalul $\left[\frac{3\pi}{2} \cdot 2\pi\right]$ funcția $\sin x$ este strict crescătoare.

Funcția $\cos x$. Cînd crește de la zero la π (fig. 53, *a*), OP, proiecția razei vectoare unitară $\overrightarrow{OM}$ pe axa absciselor, descrește (de la $+1$ la -1): pe intervalul $[0, \pi]$ funcția $\cos x$ este strict descrescătoare; cînd x crește de la π la 2π (fig. 53, *b*) OP crește de la -1 la $+1$: pe intervalul $[\pi, 2\pi]$ funcția $\cos x$ este strict crescătoare.

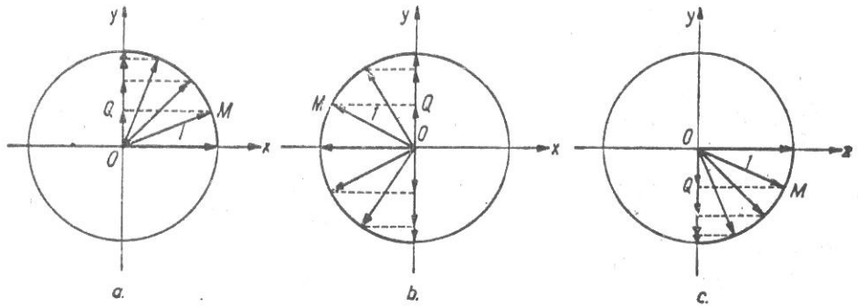


Fig. 52.

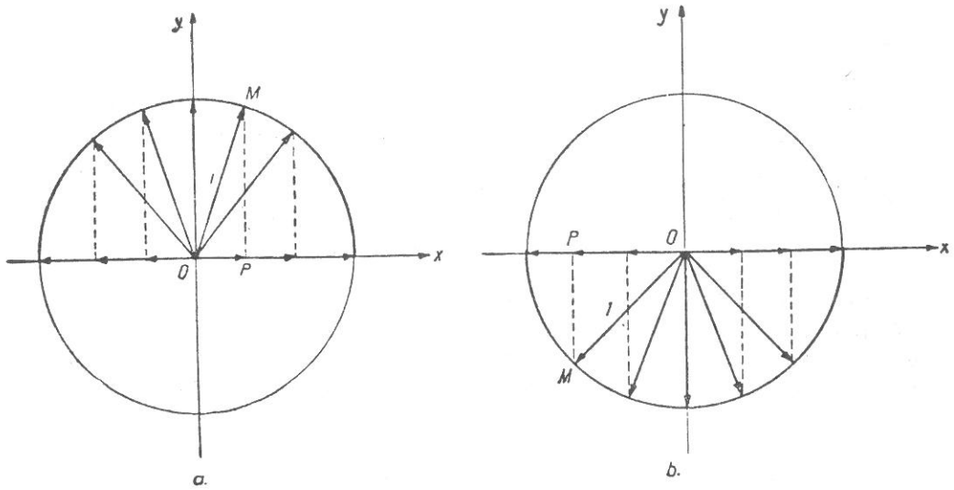


Fig. 53.

Funcția tg x. Cînd x crește în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 54, *a*), AR, proiecția razei vectoare $\overrightarrow{OR}$ pe axa tangentelor, crește: pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția tg x este strict crescătoare; cînd x crește în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (fig. 54, *b*), AR crește: pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ funcția tangentă este strict crescătoare.

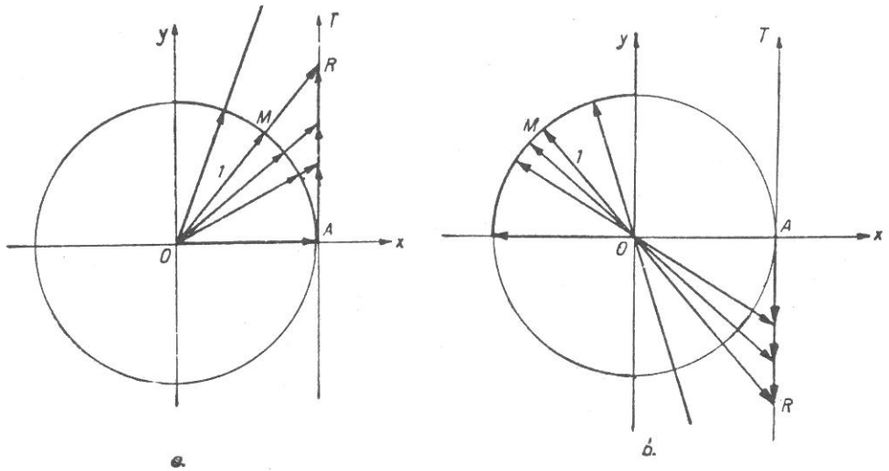


Fig. 54.

Funcția ctg x. Cînd x crește în intervalul $(0, \pi)$ (fig. 55), BD, proiecția razei vectoare $\overrightarrow{OD}$ pe axa cotangentelor, descreşte: pe intervalul $(0, \pi)$, funcția cotangentă este strict descrescătoare.

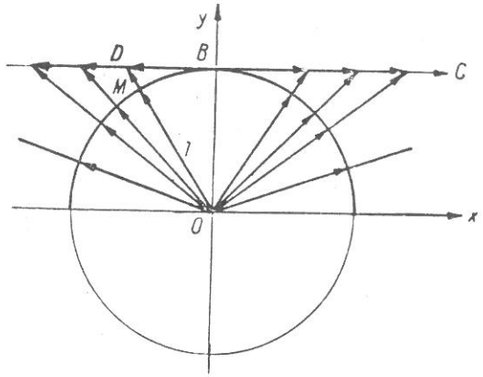


Fig. 55.

35. **Mulțimea valorilor funcțiilor trigonometrice.** *Funcția sinus.* Din variația funcției sin x a rezultat că valorile sale aparțin intervalului închis $[-1,1]$ $(-1 \leqslant \sin x \leqslant 1)$. Să arătăm acum, că funcția sin x ia orice valoare $b \in [-1,1]$. Într-adevăr numărul $b \in [-1,1]$ se reprezintă pe axa ordonatelor (fig. 56) printr-un punct Q situat între punctele O și B sau între O și B', după cum $b \geqslant 0$ sau $b \leqslant 0$. Paralela prin Q la axa absciselor intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul din dreapta, în punctul M. Dacă unul dintre unghiurile formate de raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox este egal cu x, atunci

$$b = OQ = \sin x.$$

Prin urmare, *mulțimea valorilor funcției sinus este intervalul închis* $[-1, 1]$.

Funcția cosinus. Din variația funcției cos x deducem că valorile sale aparțin intervalului închis $[-1,1]$ $(-1 \leqslant \cos x \leqslant 1)$. Să arătăm acum că func-

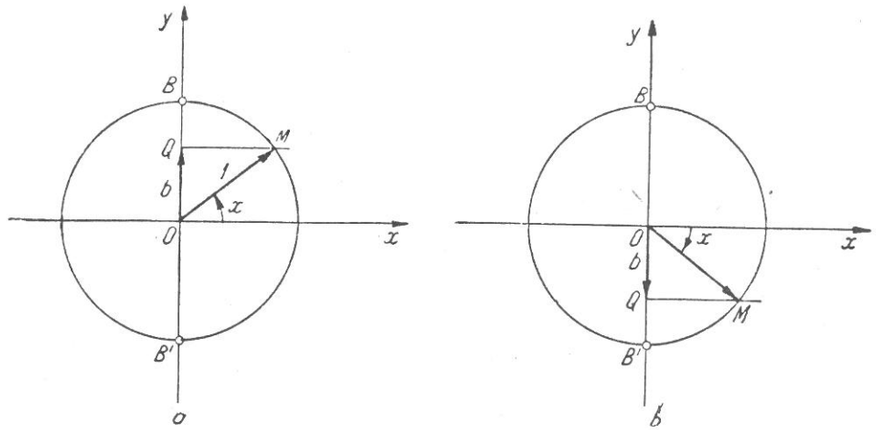


Fig. 56.

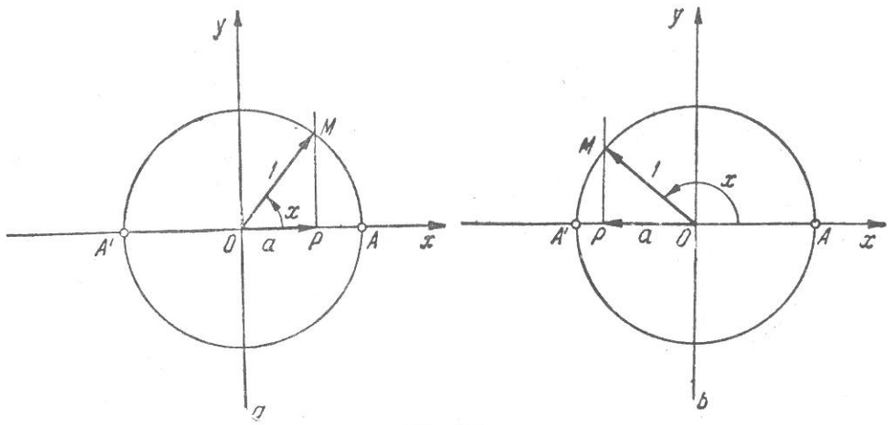


Fig. 57.

ția $\cos x$ ia orice valoare $a \in [-1,1]$. Într-adevăr, numărul $a \in [-1, +1]$ se reprezintă pe axa absciselor (fig. 57) printr-un punct P situat între punctele O și A sau între O și A' după cum $a \geqslant 0$ sau $a \leqslant 0$. Paralela prin P la axa ordonatelor intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul superior, în punctul M. Dacă unul dintre unghiurile formate de raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox este egal cu x, atunci

$$a = OP = \cos x.$$

Prin urmare, *mulțimea valorilor funcției cosinus este intervalul închis* $[-1,1]$.

Funcția tangentă. Să arătăm că functia $\operatorname{tg} x$ ia orice valoare r dată. Într-adevăr, numărului r îi corespunde pe axa tangentelor (fig. 58), punctul R. Raza vectoare $\overrightarrow{OR}$ intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul din dreapta, în punctul M. Dacă unul dintre unghiurile formate de raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox este egal cu x, atunci

$$r = AR = \operatorname{tg} x.$$

Prin urmare, mulțimea valorilor *funcției tangentă este axa reală.*

Observația 1

Funcția $\operatorname{tg} x$ este pozitivă și strict crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, negativă pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, iar mulțimea valorilor sale este axa reală. Deci, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, valorile funcției aparțin intervalului $[0, +\infty)$. În

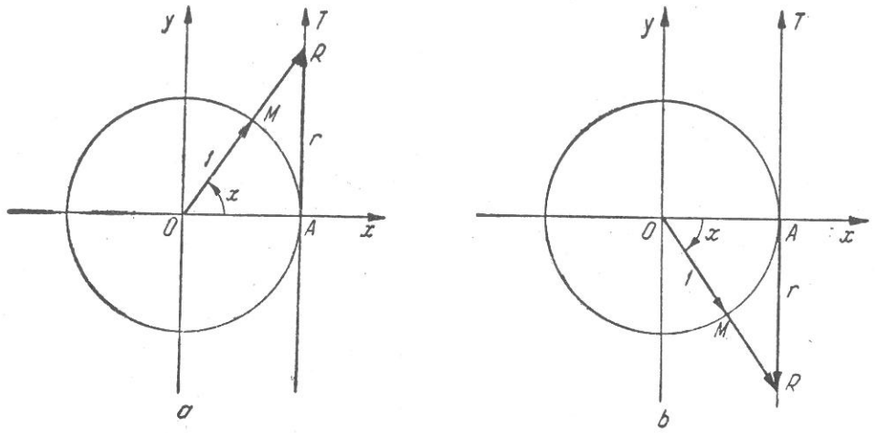


Fig. 58.

afară de aceasta, pentru x suficient de apropiat de $\frac{\pi}{2}$ și $x < \frac{\pi}{2}$, valorile sale sînt mai mari decît orice număr pozitiv dat (v. fig. 54, *a*). Se spune că funcția $\operatorname{tg} x$ tinde către $+\infty$ cînd x tinde prin valori crescătoare către $\frac{\pi}{2}$. Analog, dacă x este suficient de apropiat de $-\frac{\pi}{2}$ și $x > -\frac{\pi}{2}$, atunci valorile funcției $\operatorname{tg} x$ sînt mai mici decît orice număr negativ dat și vom spune că funcția $\operatorname{tg} x$ tinde către $-\infty$ cînd x tinde prin valori descrescătoare către $-\frac{\pi}{2}$.[1]

Funcția cotangentă. Funcția $\operatorname{ctg} x$ ia orice valoare r dată. Într-adevăr, numărului r îi corespunde pe axa cotangentelor (fig. 59) punctul D. Raza vectoare $\overrightarrow{OD}$ intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul superior, în punctul M. Dacă unul din unghiurile formate de raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox este egal cu x, atunci

$$r = BD = \operatorname{ctg} x.$$

Prin urmare, *mulțimea valorilor funcției cotangentă este axa reală.*

Observația 2

Funcția $\operatorname{ctg} x$ este pozitivă și strict descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, negativă pe intervalul $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, iar mulțimea valorilor sale este axa reală.

[1] Studiul complet al acestei chestiuni se face la analiza matematică, în cap. „Limite de funcții".

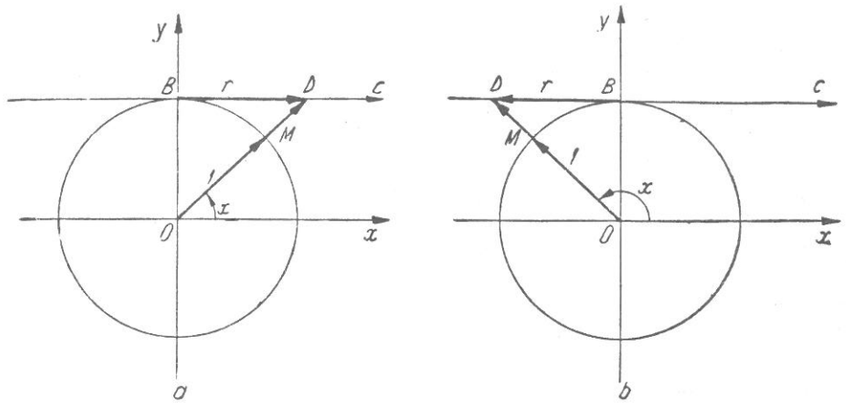


Fig. 59.

Deci, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, funcția ia valori în intervalul $[0, +\infty]$. În afara de aceasta, pentru x suficient de apropiat de zero și $x>0$, valorile sale sînt mai mari decît orice număr pozitiv dat (v. fig. 55). Se spune că funcția $\operatorname{ctg} x$ tinde către $+\infty$ cînd x tinde prin valori descrescătoare către zero.

Analog, dacă x este suficient de apropiat de π și $x<\pi$, atunci valorile funcției $\operatorname{ctg} x$ sînt mai mici decît orice număr negativ dat și vom spune că funcția $\operatorname{ctg} x$ tinde către $-\infty$ cînd x tinde prin valori crescătoare către π.

§ 11. Variația și graficul funcțiilor trigonometrice

36. **Variația funcțiilor trigonometrice.** La punctul 34 s-au determinat intervalele de monotonie ale funcțiilor trigonometrice. Variația funcțiilor trigonometrice pe aceste intervale se studiază cu ajutorul unor valori particulare dispuse într-un tabel, numit tabelul de valori al funcției respective[1].

[1] În tabelele următoare, săgețile ↗, ↘ indică, respectiv, că funcția este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe intervalul corespunzător. În punctele în dreptul cărora s-a tras bară verticală funcțiile nu au sens. Pentru alcătuirea tabelelor s-au folosit rezultatele de la punctele 23 și 26.

$y \backslash x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	$0\nearrow$	$\frac{1}{2}\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\nearrow$	$1\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\searrow$	$\frac{1}{2}\searrow$	$0\searrow$	$-1\nearrow$	0
$y=\cos x$	$1\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\searrow$	$\frac{1}{2}\searrow$	$0\searrow$	$-\frac{1}{2}\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\searrow$	$-1\nearrow$	$0\nearrow$	1

$y \backslash x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y=\operatorname{tg} x$	$0\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\nearrow$	$1\nearrow$	$\sqrt{3}\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow -\sqrt{3}\nearrow$	$-1\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow 0$
$y=\operatorname{ctg} x$	$+\infty \mid \searrow$	$\sqrt{3}\searrow$	$1\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow 0\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}\searrow$	$-1\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow -\infty \mid$

37. **Graficul funcțiilor trigonometrice.** Dacă tabelul de valori al unei funcții conține un număr suficient de puncte, judicios alese, se consideră că graficul său este curba care unește aceste puncte.

Graficul funcției $\sin x$. Tabelul de valori conține punctele $(0, 0)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)\ldots$; $(2\pi, 0)$ cu ajutorul cărora i se construiește graficul pe intervalul $[0, 2\pi)$ (fig. 60, *a*). Prin repetarea acestui grafic în intervalele $[2\pi, 4\pi]$; $[4\pi, 6\pi]$; ... și $[-2\pi, 0]$; $[-4\pi, -2\pi]$; ... se obține graficul funcției $\sin x$ pe domeniul său de definiție (fig. 60, *b*).

Graficul funcției $\cos x$. Folosind punctele ale căror coordonate sînt înscrise în tabelul de valori, se obține graficul său pe intervalul $[0, 2\pi]$ (fig. 61, *a*). Graficul funcției $\cos x$ pe domeniul de definiție se obține prin repetarea graficului precedent în intervalele $[2\pi, 4\pi]$; $[4\pi, 6\pi]$; ... și $[-2\pi, 0]$; $[-4\pi, -2\pi]$; ... (fig. 61, *b*).

Graficele funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$ pe R se numesc *sinusoide*.

Graficul funcției $\operatorname{tg} x$. Punctele din tabelul său de valori ne permit să-i construim graficul în intervalul $[0, \pi]$ (fig. 62, *a*). Graficul funcției $\operatorname{tg} x$ pe $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k \in \pi}$ se obține prin repetarea graficului precedent în intervalele $[\pi, 2\pi]$; $[2\pi, 3\pi]$; ... și $[-\pi, 0]$; $[-2\pi, -\pi]$; ... (fig. 62, *b*).

Graficul funcției $\operatorname{ctg} x$. Cu ajutorul punctelor din tabelul de valori se construiește graficul său în intervalul $(0, \pi)$ (fig. 63, *a*).

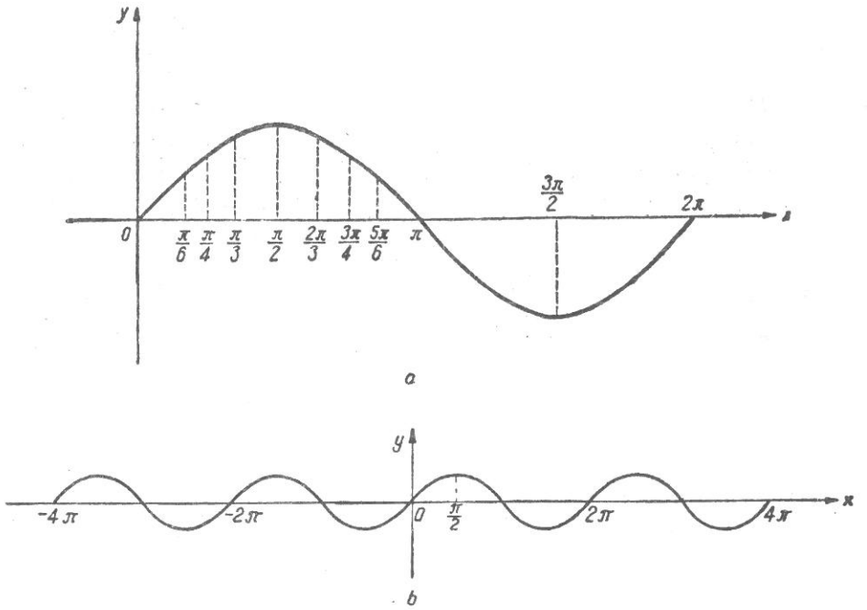


Fig. 60.

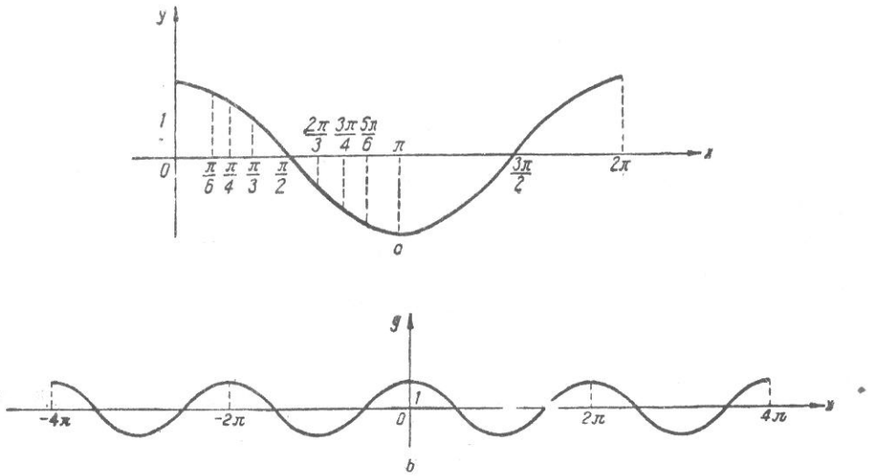


Fig. 61.

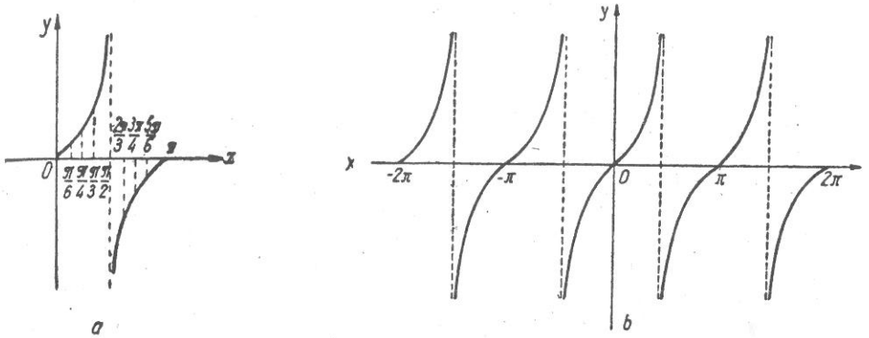


Fig. 62.

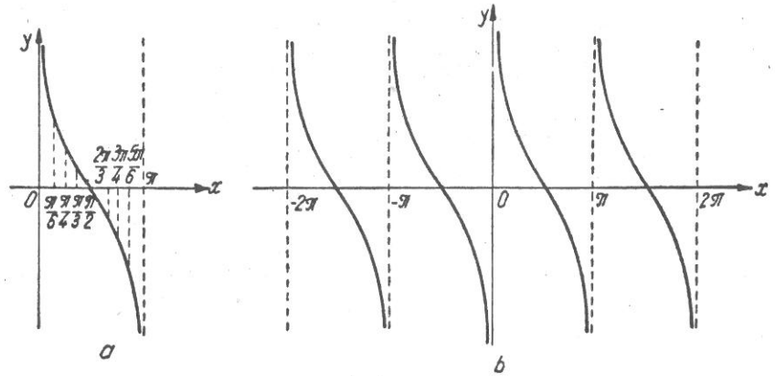


Fig. 63.

Graficul funcţiei ctg x pe $R-\{k\pi\}_{k\in Z}$ se obţine prin repetarea graficului precedent în intervalele $[\pi, 2\pi]$; $[2\pi, 3\pi]$; ... şi $[-\pi, 0]$; $[-2\pi, -\pi]$; ... ... (fig. 63, *b*).

§ 12. Funcţii trigonometrice inverse

38. **Noţiunea de funcţie inversă.** Fie funcţia strict crescătoare $f(x)=2x$, definită pe intervalul $[0,1]$. Dacă introducem notaţia $f(x)=y$, funcţia considerată poate fi scrisă astfel:

$$y=2x,\ x\in[0, 1].$$

Ţinînd seama de faptul că funcţia este strict crescătoare şi de valorile $f(0)=0$, $f(1)=2$, rezultă că mulţimea valorilor sale este intervalul $[0, 2]$.

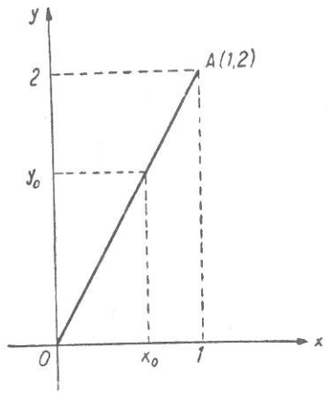


Fig. 64.

Conform definiției funcției, fiecărui punct $x_0 \in [0, 1]$ îi corespunde, în mod unic, punctul $y_0 = 2x_0$ aparținînd intervalului [0. 2] (fig. 64). Mai mult, aici fiecare punct $y_0 \in [0, 2]$ este corespunzător unui punct $x_0 \in [0, 1]$, și numai unuia, dat de relația $x_0 = \frac{y_0}{2}$ (corespondența realizată de funcția f între cele două intervale este biunivocă). În acest fel, o dată cu funcția strict monotonă $y = 2x$, $x \in [0, 1]$, se poate defini și funcția $x = \frac{y}{2}$, $y \in [0, 2]$. Pentru obținerea valorilor lor argumentul primei funcții se înmulțește cu 2, iar argumentul celei de-a doua se împarte cu 2. Deoarece înmulțirea și împărțirea cu același număr sînt operații inverse, se spune că funcția $x = \frac{y}{2}$, $y \in [0, 2]$ s-a obținut prin inversarea funcției $y = 2x$, $x \in [0, 1]$ și se numește *funcția inversă* acesteia.

Observații

1° Argumentul funcției inverse $x = \frac{y}{2}$, $y \in [0, 2]$ este y, iar valoarea corespunzătoare x. De obicei, argumentul unei funcții se notează cu x și valoarea sa cu y. De aceea, această funcție se scrie $y = \frac{x}{2}$, $x \in [0, 2]$.

2° În exemplul considerat s-a inversat o funcție strict crescătoare; mai general, după cum se constată ușor, *orice funcție strict monotonă pe un interval se poate inversa pe acel interval.* Dacă x și y sînt respectiv argumentul și valoarea unei funcții strict monotone, atunci argumentul și valoarea funcției inverse sînt respectiv y și x.

Așadar, *domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției inverse sînt respectiv mulțimea valorilor și domeniul de definiție ale funcției date.*

3° Conform definiției funcției strict crescătoare, dacă $x_1 < x_2$ (argumentul crește), atunci $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$ (valoarea funcției crește). Invers, dacă valoarea unei funcții strict crescătoare crește, se arată imediat că argumentul său crește. Un raționament analog se poate face și pentru funcția strict descrescătoare. De aici deducem: *dacă o funcție este strict crescătoare (strict descrescătoare), atunci și funcția inversă este strict crescătoare (strict descrescătoare).*

39. **Definiția funcțiilor trigonometrice inverse.** Pe anumite intervale funcțiile trigonometrice sînt strict monotone și deci, pe fiecare din aceste intervale, ele pot fi inversate.

Funcția arcsin. Funcția $\sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (v. fig. 60, *b*); așadar, se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, *funcția inversă funcției* $\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *se numește arcsinus și se notează arcsin.*

Din această definiție deducem:

Dacă valoarea funcției $\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *într-un punct* x_0 *este egală cu* y_0 ($y_0 = \sin x_0$), *atunci valoarea funcției arcsin în punctul* y_0 *este egală cu* x_0 ($x_0 = \arcsin y_0$).

Mulțimea valorilor funcției $\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este intervalul $[-1, 1]$. Prin urmare (v. obs. 2° de la pct. 38) *domeniul de definiție al funcției inverse* arcsin *este intervalul* $[-1, 1]$, *iar mulțimea valorilor este intervalul* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplu

Să se calculeze valorile funcției $\arcsin x$ *pentru* $x = \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -1{,}0$.

Soluție. $\arcsin \frac{1}{2}$ este egal cu numărul, aparținînd intervalului $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, al cărui sinus este egal cu $\frac{1}{2}$; așadar $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Analog:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin 0 = 0.$$

Funcția arccos. Funcția $\cos x$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \pi]$ (v. fig. 61, *b*); așadar se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, *funcția inversă funcției* $\cos x$, $x \in [0, \pi]$ *se numește arccosinus și se notează arccos.*

Din această definiție deducem:

Dacă valoarea funcției $\cos x$, $x \in [0, \pi]$ *într-un punct* x_0 *este egală cu* y_0 ($y_0 = \cos x_0$), *atunci valoarea funcției arccos în punctul* y_0 *este egală cu* x_0 ($x_0 = \arccos y_0$).

Mulțimea valorilor funcției $\cos x$, $x \in [0, \pi]$ este intervalul $[-1, 1]$. Prin urmare, *domeniul de definiție al funcției inverse arccos este intervalul* $[-1, 1]$, *iar mulțimea valorilor este intervalul* $[0, \pi]$.

Exemplu

Să se calculeze valorile funcției $\arccos x$ *pentru* $x = -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -1{,}1$.

Soluție. arccos $\left(-\frac{1}{2}\right)$ este egal cu numărul, aparținînd intervalului $[0, \pi]$, al cărui cosinus este egal cu $-\frac{1}{2}$, așadar $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=2\frac{\pi}{2}$. Analog:

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\quad \arccos 0=\frac{\pi}{2},\quad \arccos(-1)=\pi,\quad \arccos 1=0.$$

Funcția arctg. Funcția $\operatorname{tg} x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (v. fig. 62, *b*); așadar, se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, *funcția inversă funcției* $\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *se numește arctangentă și se notează arctg.*

Din această definiție deducem:

Dacă valoarea funcției $\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *într-un punct* x_0 *este egală cu* $y_0(y_0=\operatorname{tg} x_0)$, *atunci valoarea funcției* arctg *în punctul* y_0 *este egală cu* $x_0(x_0=\operatorname{arctg} y_0)$.

Mulțimea valorilor funcției $\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este axa reală. Prin urmare, *domeniul de definiție al funcției inverse* arctg *este axa reală, iar mulțimea valorilor este intervalul deschis* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplu

Să se calculeze valorile funcției arctg x *pentru* $x=1, -1, 0$.

Soluție. arctg 1 este egală cu numărul, aparținînd intervalului $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a cărui tangentă este egală cu 1; așadar $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{2}$. Analog:

$$\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{arctg} 0=0.$$

Funcția arcctg. Funcția $\operatorname{ctg} x$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \pi)$ (v. fig. 63, *b*); așadar se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, *funcția inversă funcției* $\operatorname{ctg} x$, $x\in(0, \pi)$ *se numește arccotangentă și se notează arcctg.*

Din această definiție deducem:

Dacă valoarea funcției $\operatorname{ctg} x$, $x\in(0, \pi)$ *într-un punct* x_0 *este egală cu* y_0 $(y_0=\operatorname{ctg} x_0)$, *atunci valoarea funcției arcctg în punctul* y_0 *este egală cu* x_0 $(x_0=\operatorname{arcctg} y_0)$.

Mulțimea valorilor funcției $\operatorname{ctg} x$, $x\in(0, \pi)$ este axa reală. Prin urmare, *domeniul de definiție al funcției arcctg este axa reală, iar mulțimea valorilor este intervalul deschis* $(0, \pi)$.

Exemplu

Să se calculeze valorile funcției arcctg x *pentru* $x=-1, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluție. arcctg (-1) este egală cu numărul, aparținînd intervalului $(0, \pi)$, a cărui cotangentă este egală cu -1; așadar $\operatorname{arcctg}(-1)=3\frac{\pi}{4}$.

Analog:

$$\operatorname{arcctg} 0=\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}.$$

40. Variația și graficul funcțiilor trigonometrice inverse

Funcția arcsin, ca funcție inversă unei funcții strict crescătoare (v. obs. 3° de la pct. 38) este, de asemenea, strict crescătoare pe mulțimea sa de definiție (intervalul $[-1, 1]$). Calculînd valorile sale în cîteva puncte particulare, alcătuim următorul tabel de valori:

x / y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$y=\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	$-\frac{\pi}{3}$ ↗	$-\frac{\pi}{4}$ ↗	$-\frac{\pi}{6}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{6}$ ↗	$\frac{\pi}{4}$ ↗	$\frac{\pi}{3}$ ↗	$\frac{\pi}{2}$

cu ajutorul căruia i se construiește graficul (fig. 65).

Funcția arccos, ca funcție inversă unei funcții strict descrescătoare este, de asemenea, strict descrescătoare pe mulțimea sa de definiție (intervalul $[-1, 1]$). Calculînd valorile sale în cîteva puncte particulare, alcătuim următorul tabel de valori:

x / y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$y=\arccos x$	π ↘	$5\frac{\pi}{6}$ ↘	$3\frac{\pi}{4}$ ↘	$2\frac{\pi}{3}$ ↘	$\frac{\pi}{2}$ ↘	$\frac{\pi}{3}$ ↘	$\frac{\pi}{4}$ ↘	$\frac{\pi}{6}$ ↘	0

cu ajutorul căruia i se construiește graficul (fig. 66).

Funcția arctg este strict crescătoare pe mulțimea sa de definiție (axa reală). Cu ajutorul următorului tabel de valori:

x / y	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$y=\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	$-\frac{\pi}{3}$ ↗	$-\frac{\pi}{4}$ ↗	$-\frac{\pi}{6}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{6}$ ↗	$\frac{\pi}{4}$ ↗	$\frac{\pi}{3}$ ↗	$\frac{\pi}{2}$

graficul său se trasează cu ușurință (fig. 67).

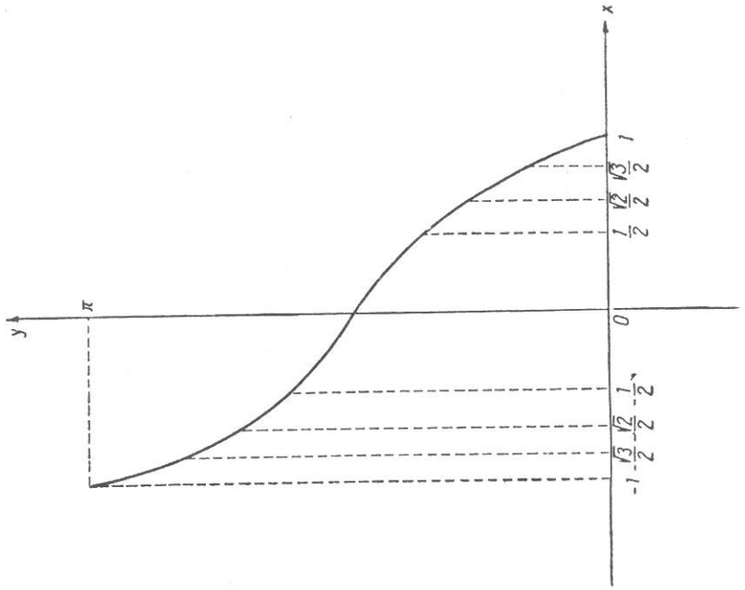


Fig. 66.

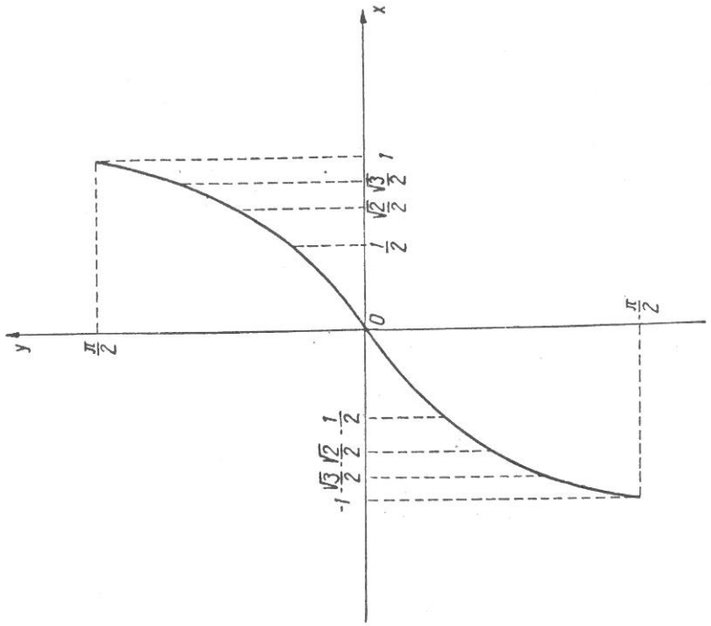


Fig.65.

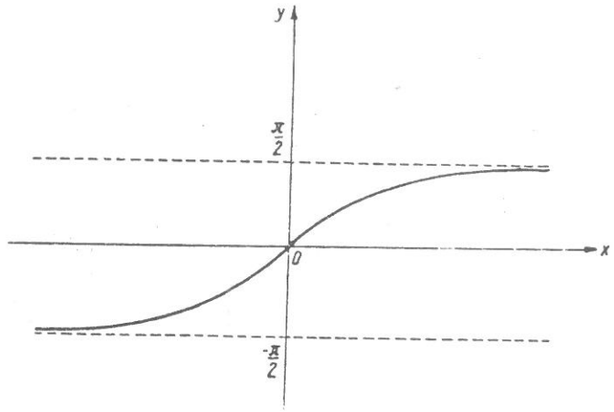


Fig. 67.

Funcția arcctg este strict descrescătoare pe mulțimea sa de definiție (axa reală). Cu ajutorul următorului tabel de valori:

y \ x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$y=\text{arcctg } x$	π ↘	$5\frac{\pi}{6}$ ↘	$3\frac{\pi}{4}$ ↘	$2\frac{\pi}{3}$ ↘	$\frac{\pi}{2}$ ↘	$\frac{\pi}{3}$ ↘	$\frac{\pi}{4}$ ↘	$\frac{\pi}{6}$ ↘	0

graficul său se trasează cu ușurință (fig. 68).

O b s e r v a ț i i

1° $\pm\infty$ nu sînt numere, deci nu are sens să vorbim de valoarea unei funcții pentru $\pm\infty$. Totuși, de exemplu, sub simbolul $+\infty$ din tabelul de valori al funcției arctg s-a trecut $\frac{\pi}{2}$. Prin această notație înțelegem că funcția

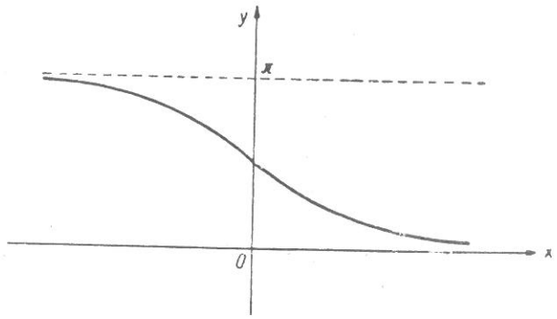


Fig. 68.

arctg tinde către $\frac{\pi}{2}$ cînd argumentul său tinde către $+\infty$ (v. obs. 1° de la pct. 35).

2° Se poate verifica ușor că graficele funcțiilor trigonometrice și graficele funcțiilor trigonometrice invers corespunzătoare sînt simetrice față de bisectoare întîi. Această proprietate se va demonstra (pentru funcții strict monotone) în anul III, la analiza matematică.

§ 13. Reducerea la un unghi ascuțit

În acest paragraf vom arăta că funcțiile trigonometrice ale oricărui unghi se pot exprima prin funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit, adică funcțiile trigonometrice se pot reduce la un unghi ascuțit.

Această proprietate a funcțiilor trigonometrice, după cum se va vedea mai departe, este deosebit de utilă pentru aducerea la o formă mai simplă a unor expresii trigonometrice, construcția tabelelor trigonometrice ș.a.

41. Reducerea la un unghi mai mic decît 360°. Să considerăm un unghi arbitrar $|\beta|>360°$. El poate fi reprezentat, în mod unic, sub forma (v. pct. 6)

$$\beta=k\cdot 360°+\alpha'(0°\leqslant\alpha'<360°).$$

unde k este un număr întreg determinat.

De aici, ținînd seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, obținem:

$$\sin\beta=\sin\alpha';\ \cos\beta=\cos\alpha';\ \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha';\ \operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha'.$$

În acest fel, funcțiile trigonometrice ale unghiului β s-au redus, deocamdată, la funcțiile trigonometrice ale unghiului $0°\leqslant\alpha'<360°$.

Observații

1° Dacă unghiul β este negativ, pentru comoditate, se folosește mai întîi proprietatea de paritate sau imparitate a funcțiilor trigonometrice după care se scrie unghiul $-\beta$ sub forma:

$$-\beta=k\cdot 360°+\alpha'(0°\leqslant\alpha'<360°),$$

k fiind un număr întreg.

2° Pentru funcțiile tangentă și cotangentă reducerea se poate face la un unghi mai mic decît 180°. Într-adevăr, este suficient să observăm că unghiul β poate fi scris sub forma:

$$\beta=k\cdot 180°+\alpha'(0°\leqslant\alpha'<180°),$$

k fiind un număr întreg, și să se țină seama de faptul că aceste funcții au perioada egală cu 180°.

Exemple

1) $\sin 1\,900°=\sin(5\cdot 360°+100°)=\sin 100°$.

2) $\cos(-940°)=\cos 940°=\cos(2\cdot 360°+220°)=\cos 220°$ (v. obs. 1°).

3) $\operatorname{tg}\frac{117\pi}{10}=\operatorname{tg}\left(5\cdot 2\pi+\frac{17\pi}{10}\right)=\operatorname{tg}\frac{17\pi}{10}$ sau (v. obs. 2°)

$$\operatorname{tg}\frac{117\pi}{10}=\operatorname{tg}\left(11\pi+\frac{7\pi}{10}\right)=\operatorname{tg}\frac{7\pi}{10}.$$

4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{22\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{22\pi}{3}=-\operatorname{ctg}\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(aici a fost posibil să se facă direct reducerea la un unghi ascuțit)

42. Reducerea la un unghi ascuțit. Fie unghiul $90°\leqslant\alpha'<360°$

Dacă $90°\leqslant\alpha'\leqslant 180°$ (fig. 69, *a*), putem scrie relațiile:

$$\alpha'=180°-\alpha_1,\ \alpha'=90°+\alpha_2;$$

dacă $180°\leqslant\alpha'\leqslant 270°$ (fig. 69, *b*), putem scrie:

$$\alpha'=180°+\alpha_1,\ \alpha'=270°-\alpha_2;$$

dacă $270°\leqslant\alpha'<360°$ (fig. 69, *c*), atunci

$$\alpha'=360°-\alpha_1,\ \alpha'=270°+\alpha_2,$$

unde $0°\leqslant\alpha_1,\ \alpha_2\leqslant 90°$.

În concluzie, orice unghi $90°\leqslant\alpha'<360°$ poate fi scris sub forma:

$$\alpha'=k\cdot 90°\pm\alpha\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

unde $0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$.

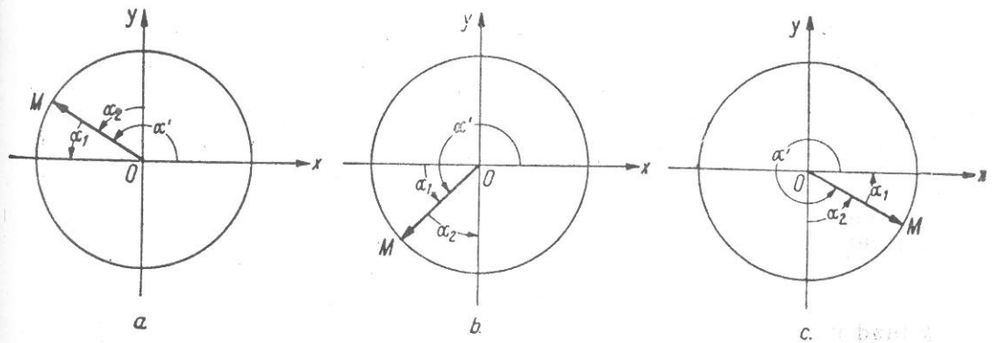


Fig. 69.

Funcțiile trigonometrice ale acestui unghi se exprimă prin funcțiile trigonometrice ale unghiului α cu ajutorul unor formule numite *formulele de reducere la un unghi ascuțit.*

Pentru a deduce aceste formule, observăm mai întîi că unghiurile considerate se pot scrie sub forma:

$$90^\circ+\alpha=90^\circ-(-\alpha);\quad 180^\circ-\alpha=90^\circ+(90^\circ-\alpha);$$

$$180^\circ+\alpha=90^\circ+(90^\circ+\alpha);$$

$$270^\circ-\alpha=180^\circ+(90^\circ-\alpha);\quad 270^\circ+\alpha=180^\circ+(90^\circ+\alpha).$$

$$360^\circ-\alpha=360^\circ+(-\alpha).$$

Unghiul $90^\circ-\alpha$. Formulele (3), (4), (5), (6) din § 6 rezolvă problema propusă.

Într-adevăr,

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha;\quad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Unghiul $90^\circ+\alpha$. Obținem:

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\sin[90^\circ-(-\alpha)]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ+\alpha)=\cos[90^\circ-(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}[90^\circ-(-\alpha)]=\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}[90^\circ-(-\alpha)]=\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Unghiul $180^\circ-\alpha$. Obținem:

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ+(90^\circ-\alpha)]=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\cos(180^\circ-\alpha)=\cos[90^\circ+(90^\circ-\alpha)]=-\sin(90^\circ-\alpha)=-\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}[90^\circ+(90^\circ-\alpha)]=-\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}[90^\circ+(90^\circ-\alpha)]=-\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Unghiul $180^\circ+\alpha$. Obținem:

$$\sin(180^\circ+\alpha)=\sin[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\cos(180^\circ+\alpha)=\cos[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\sin(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Unghiul $270^\circ-\alpha$. Obținem:

$$\sin(270^\circ-\alpha)=\sin[180^\circ+(90^\circ-\alpha)]=-\sin(90^\circ-\alpha)=-\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ-\alpha)=\cos[180^\circ+(90^\circ-\alpha)]=-\cos(90^\circ-\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}[180^\circ+(90^\circ-\alpha)]=\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}[180^\circ+(90^\circ-\alpha)]=\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Unghiul $270^\circ+\alpha$. Obținem:

$$\sin(270^\circ+\alpha)=\sin[180^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\sin(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ+\alpha)=\cos[180^\circ+(90^\circ+\alpha)]=-\cos(90^\circ+\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}[180^\circ+(90^\circ+\alpha)]=\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}[180^\circ+(90^\circ+\alpha)]=\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Unghiul $360^\circ-\alpha$. Obținem:

$$\sin(360^\circ-\alpha)=\sin[360^\circ+(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\cos(360^\circ-\alpha)=\cos[360^\circ+(-\alpha)]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}[360^\circ+(-\alpha)]=\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}[360^\circ+(-\alpha)]=\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha^{1}.$$

Exemple

1) $\sin 115^\circ=\sin(90^\circ+25^\circ)=\cos 25^\circ$

sau

$\sin 115^\circ=\sin(180^\circ-65^\circ)=\sin 65^\circ.$

2) $\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ\left(=-\frac{1}{2}\right)$

sau

$\cos 240^\circ=\cos(270^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ\left(=-\frac{1}{2}\right).$

3) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{10}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10}$

și

$\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{5}=\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}.$

O b s e r v a ț i e

Cercetarea atentă a formulelor de reducere la un unghi ascuțit, stabilite mai sus, ne permite să tragem următoarele concluzii:

a) Orice funcție trigonometrică a unghiului $\alpha'=k\cdot 90^\circ\pm\alpha$ ($k=1, 2, 3, 4$) se exprimă prin funcția trigonometrică de același nume a unghiului α pentru k număr par, și prin cofuncția corespunzătoare a unghiului α pentru k număr impar.

b) După reducere, semnul funcției trigonometrice a unghiului α coincide cu semnul funcției trigonometrice considerate a unghiului α'.

Prin urmare, *memorarea formulelor de reducere la unghi ascuțit nu este necesara,*

[1]Din modul în care au fost deduse, este evident că formulele precedente sînt adevărate pentru orice unghi α.

fiindcă se poate determina direct atît funcția trigonometrică a unghiului α cît și semnul ei.

Mai mult, ținînd seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, se arată imediat că aceste considerații rămîn valabile și în cazul în care unghiul α și numărul întreg k sînt arbitrare.

Exemple

1) *Să se reducă cos 310° la un unghi ascuțit.* Ținînd seama de observația de mai sus, putem raționa astfel:
unghiul 310° este egal cu $3 \cdot 90° + 40°$ (k este număr impar), deci în *membrul drept al formulei de reducere la un unghi ascuțit vom da lui sin 40° semnul plus, sau minus*; fiindcă unghiul 310° este din cadranul IV, și în acest cadran funcția cosinus este pozitivă, *sin 40° se ia cu semnul plus.* Deci $\cos 310° = +\sin 40°$.

2) *Regăsirea formulei* $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$. Unghiul $180° + \alpha$ este egal cu $2 \cdot 90° + \alpha$ ($k = 2$), deci membrul drept al formulei de reducere la un unghi ascuțit conține sau funcția $\sin\alpha$, sau funcția $-\sin\alpha$; presupunînd unghiul α ascuțit, atunci unghiul $180° + \alpha$ este din cadranul III, și în acest cadran funcția sinus este negativă. Deci $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$.

3) *Să se reducă sin 3080° la unghi ascuțit.* Fiindcă unghiul $3080° > 360°$, îl scriem sub forma $3080° = 8 \cdot 360° + 200°$, de unde folosind proprietatea de periodicitate a funcției sinus:

$$\sin 3080° = \sin 200°.$$

După aceea, raționînd ca în exemplele 1) și 2), obținem:

$$\sin 200° = \sin(3 \cdot 90° - 70°) = -\cos 70°,$$

adică $\sin 3080° = -\cos 70°$.

4) *Să se calculeze* $tg\left(-\frac{71\pi}{4}\right)$. Ținem seama mai întîi de proprietățile de imparitate și periodicitate ale funcției tangentă:

$$tg\left(-\frac{71\pi}{4}\right) = -\left[tg\frac{71\pi}{4} = -\left(17\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -tg\frac{3\pi}{4}\right.$$

Mai departe, $tg\frac{3\pi}{4} = tg\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$.

Deci $tg\left(-\frac{71\pi}{4}\right) = -(-1) = 1$.

Exerciții

1. Să se arate că numerele:

$$a)\ 17,\ 15,\ 8;\quad b)\ \sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1,\ \sqrt{6}$$

pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic și să afle valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului ascuțit mai mare.

2. Să se construiască unghiul ascuțit al cărui sinus este egal cu:

$$a)\ \frac{3}{5};\quad b)\ 0{,}8.$$

3. Să se construiască unghiul ascuțit al cărui cosinus este egal cu:

$$a)\ \frac{1}{4};\quad b)\ 0{,}3.$$

4. Să se construiască unghiul ascuțit a cărui tangentă este egală cu:

$$a)\ \frac{5}{2};\quad b)\ 0{,}5.$$

5. Să se construiască unghiul ascuțit a cărui cotangentă este egală cu:

$$a)\ \frac{2}{3};\quad b)\ 4.$$

6. Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, dacă laturile sale sînt proporționale cu numerele:

$$a)\ 21,\ 20,\ 29;\quad b)\ 125,\ 44,\ 117.$$

7. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu 50 cm. Cosinusul unuia din unghiurile ascuțite ale triunghiului este egal cu 0,28. Să se determine catetele sale.

8. Cotangenta unuia din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este egală cu $\frac{2}{5}$, iar cateta mai mare este egală cu 25 cm. Să se determine ipotenuza.

9. Să se calculeze suma sinusurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghi cu perimetrul egal cu 45 cm și ipotenuza egală cu 20 cm.

10. Suma catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu 17 cm, iar ipotenuza este egală cu 13 cm. Să se calculeze produsul cosinusurilor unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

11. Să se calculeze valorile numerice ale expresiilor:

a) $2\sin 30° + 3\cos 60° + tg\ 45°$;
b) $2\cos 30° - 4\cos 45° + tg\ 60°$;
c) $5\ tg\ 30° + 2\sin 60° - 2\cos 30°$;
d) $3\ tg\ 30° + ctg\ 45° - 2\ tg\ 45° + 2\cos 60°$;
e) $\frac{\cos 60°}{1 + \sin 60°} + \frac{1}{tg\ 30°}$.

12. Să se calculeze valoarea sumei

$$\sin\alpha + \cos\alpha \text{ pentru } \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}.$$

13. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\cos\alpha - \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{pentru } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

14. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{\sin(\alpha+15^\circ)-\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \quad \text{pentru } \alpha=30^\circ.$$

15. Pe axa $x'x$ (fig. 70) se dau vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$.
Să se calculeze modulul şi mărimea fiecăruia din aceşti vectori.

16. Să se determine suma mărimilor şi suma modulelor vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$ situaţi pe axa $x'x$, dacă $|\overrightarrow{AB}|=2$.

17. Patrulaterul $ABCD$ este un romb. Sînt egali vectorii:

$$a)\ \overrightarrow{AB} \text{ şi } \overrightarrow{BC};\ b)\ \overrightarrow{AB} \text{ şi } \overrightarrow{CD};\ c)\ \overrightarrow{BC} \text{ şi } \overrightarrow{AD}?$$

18. Să se calculeze suma proiecţiilor vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CD}$, trei laturi ale paralelogramului $ABCD$, pe axa $\overrightarrow{AD}$, dacă $|\overrightarrow{AD}|=d$.

19. Să se calculeze suma proiecţiilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CD}$, laturi ale rombului $ABCD$, pe axa $\overrightarrow{CA}$, dacă $|\overrightarrow{AC}|=d$.

20. Se consideră pătratul $ABCD$ şi axa x al cărei versor este $\overrightarrow{AC}$.
Să se verifice egalitatea:

$$pr_x\,(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=pr_x\,\overrightarrow{BA}+pr_x\,\overrightarrow{BC}.$$

Ind. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$; $pr_x\,\overrightarrow{BD}=0$, $pr_x\,\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|=-\frac{1}{2}$, $pr_x\,\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}$.

21. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare şi E, F mijloacele diagonalelor AC, BD respectiv.
Să se demonstreze relaţiile:

$$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$$

Ind. Se adună membru cu membru egalităţile evidente $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$ şi se ţine seama de relaţiile $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=0$, $2\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.

22. Într-un patrulater $ABCD$ se notează cu E şi F mijloacele laturilor AD şi BC respectiv.
Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}),$$

Fig. 70.

apoi să se enunţe pentru cazul particular cînd patrulaterul este un trapez cu bazele AB şi DC.

Ind. Se adună membru cu membru egalităţile $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$ şi se ţine seama că $\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{BF}$.
În cazul particular se obţin două proprietăţi constante ale liniei mijlocii din trapez.

23. Fie $ABCDEF$ un exagon, ale cărui vîrfuri pot să fie situate în acelaşi plan, M, N, P mijloacele laturilor AB, CD, EF şi Q, R, S mijloacele laturilor BC, DE, FA. Să se demonstreze că triunghiurile MNP, QRS au acelaşi centru de greutate.
Ind. Dacă G_1, G_2 sînt centrele de greutate ale triunghiurilor MNP, QRS respectiv, iar O un punct arbitrar, atunci (v. aplicaţia de la pct. 16):

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OQ}),\quad \overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}).$$

Mai departe, folosind relaţiile

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}),\quad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

şi cele analoge, se stabileşte imediat egalitatea $\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}$.

24. Să se stabilească cadranele în care sînt situate unghiurile

$$a)\ 730^\circ;\ b)\ -500;\ c)\ \frac{47\pi}{7};\ d)\ -\frac{42\pi}{5}.$$

apoi să se determine semnele funcţiilor trigonometrice ale acestor unghiuri.

25. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\cos\pi+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}}.$$

26. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{3\sin 2\alpha+2\cos\alpha}{2\sin\alpha-3\cos 2\alpha}$$

pentru $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, π.

27. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$$

pentru $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

28. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{\pi(\sin\alpha+\cos\alpha)-1}{\pi\operatorname{ctg}\alpha+1}$$

pentru $\alpha=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

29. Să se înlocuiască prin sinusul unghiului complementar:

a) $\cos 52°$; *b)* $\cos 14°$; *c)* $\cos(60°-\alpha)$; *d)* $\cos(\alpha-10°)$.

30. Să se înlocuiască prin cosinusul unghiului complementar:

a) $\sin 38°$; *b)* $\sin 1°$; *c)* $\sin(30°-2\alpha)$; *d)* $\sin\frac{\alpha-60°}{2}$.

31. Să se înlocuiască prin tangenta unghiului complementar:

a) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{11}$; *b)* $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; *c)* $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$.

32. Să se înlocuiască prin cotangenta unghiului complementar:

a) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{11}$; *b)* $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{10}\right)$; *c)* $\operatorname{tg}\frac{\pi-a}{2}$.

33. Să se dovedească egalitățile:

a) $\sin 45°30'=\cos 44°30'$; *b)* $\cos(60°+\alpha)=\sin(30°-\alpha)$;

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

34. Să se determine domeniile de definiție ale funcțiilor:

a) $f(x)=\sin x+\cos x$; *b)* $f(x)=1-\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$;

c) $f(x)=\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

35. Să se verifice că funcțiile:

a) $f(x)=\cos 2x$, *b)* $f(x)=a\operatorname{tg}x+b\operatorname{ctg}x$;

c) $f(x)=\sin x\cos x$

admit perioada π.

36. Să se arate că funcțiile:

a) $f(x)=x+\sin x$; *b)* $f(x)=x-\cos^2 x$

nu sînt periodice.

Ind. a) Dacă funcția dată ar admite perioada T, atunci $T+\sin(x+T)=\sin x$, de unde, pentru $x=0$ și $x=\pi$, ar rezulta că $T+\sin T=T-\sin T=0$, adică $T=0$.

37. Să se determine perioadele principale ale funcțiilor:

a) $f(x)=|\cos x|$; *b)* $f(x)=\sin 2x+\operatorname{tg}x$; *c)* $f(x)=\sin 6x-\sin 4x$.

38. Să se cerceteze paritatea și imparitatea funcțiilor:

a) $f(x)=|\sin x|$; *b)* $f(x)=\sin x+\operatorname{tg}x$;

c) $f(x)=\sin x-\cos x$;

d) $f(x)=\operatorname{ctg}(-x)$; *e)* $f(x)=x^2+\sin x$;

f) $f(x)=x\operatorname{tg}x$.

39. Să se cerceteze care dintre funcțiile:

a) $f(x)=x^2-\cos x$, $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $f(x)=\frac{1}{x}-\operatorname{tg}x$, $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $f(x)=x\sin x$, $x\in[0, \pi]$

sînt strict monotone pe intervalele considerate.

40. Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor:

a) $y=1+2\sin x$;

b) $y=4-3\cos x$;

c) $y=3-2|\sin x|$.

41. Pentru ce valori ale lui x au sens funcțiile:

a) $\arcsin\frac{x}{2}$; *b)* $\arccos 3x$; *c)* $\arcsin(2x-1)$; *d)* $\arccos\frac{1-x}{2}$; *e)* $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$?

Ind. a) Se determină mulțimea soluțiilor inegalității $\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$.

42. Să se calculeze valorile funcției $\arcsin x$ pentru $x=-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

43. Să se calculeze valorile funcției $\arccos x-\operatorname{arctg}2x$ pentru $x=0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

44. Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor:

a) $y=x\arcsin x$, $x\in\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

b) $y=\arccos x+x^2$, $x\in\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Ind. Funcțiile considerate sînt monotone (produs, respectiv sumă, de funcții strict monotone și de același sens).

45. Folosind graficele funcţiilor arcsin şi arccos, să se determine semnele numerelor:

a) $\arccos 0{,}7-\arccos 0{,}5$;

b) $\dfrac{\arcsin 0{,}85-\arcsin 0{,}8}{\arccos 0{,}8-\arccos 0{,}85}$;

c) $\dfrac{\pi-2\arcsin 0{,}9}{\pi-2\arccos(-0{,}1)}$.

46. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\frac{1}{3}\,1\operatorname{arctg}1+\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\arcsin\frac{1}{2}=2\operatorname{arctg}1+3\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

c) $\dfrac{\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)-\cos(\arcsin(-1))}{\operatorname{ctg}(\arccos 0)-\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-1))}=\frac{1}{2}$.

47. Folosind graficele funcţiilor trigonometrice, să se determine semnele numerelor:

a) $\sin\frac{2\pi}{3}$; *b)* $\sin 5$; *c)* $\cos 2$; *d)* $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

e) $\operatorname{tg}1{,}5$; *f)* $\operatorname{tg}(-3{,}1)$.

48. Să se indice semnele diferenţelor:

a) $\sin(-2)-\sin(-2{,}1)$; *b)* $\cos 5{,}1-\cos 5$;

c) $\operatorname{tg}\left(-\frac{10}{20}\right)-\operatorname{tg}\left(-\frac{11}{23}\right)$; *d)* $\operatorname{ctg}0{,}583-\operatorname{ctg}0{,}582$;

e) $\operatorname{tg}1{,}6-\operatorname{tg}1{,}5$; *f)* $\operatorname{ctg}6{,}3-\operatorname{ctg}6{,}2$.

49. Să se arate că dacă $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$, atunci $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$.

50. Pentru ce valori ale segmentului, din intervalul $[0, 2\pi]$, este satisfăcută inegalitatea $\cos x<\frac{1}{2}$?

51. Să se construiască graficul funcţiei $y=|\operatorname{tg}x|$ şi, folosind graficul, să se indice pentru care valori ale lui $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ este satisfăcută inegalitatea:

$$|\operatorname{tg}x|<1.$$

52. Să se construiască graficul funcţiei $y=|\sin x|$ şi, folosind graficul, să se determine valorile argumentului $x\in[0, 2\pi]$ pentru care este satisfăcută inegalitatea $|\sin x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

53. Pentru care valori ale argumentului $x\in(\pi, 2\pi)$ este îndeplinită inegalitatea $\operatorname{ctg}^2x>1$?

54. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$; *b)* $y=\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}$.

55. Să se calculeze valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiul egal cu:

a) 120; *b)* 225°; *c)* 330°; *d)* −210°.

56. Să se calculeze valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiul egal cu:

a) 450°; *b)* 855°; *c)* 600°; *d)* −1 230°; *e)* −585°.

57. Să se calculeze valorile expresiei:

$$\sin(\alpha+45°)+2\sin(\alpha-45°)+4\cos 2\alpha+2\cos(\alpha+135°)$$

pentru $\alpha=45°$, 135°.

58. Să se calculeze expresiile:

a) $\dfrac{\cos(-120°)}{\cos 300°}-\dfrac{\operatorname{tg}210°\sin 315°}{\cos 180°}$;

b) $2\sin^2\frac{17\pi}{4}+\operatorname{tg}^2\frac{33\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$;

c) $\dfrac{\operatorname{tg}(-150°)\cos(-210°)\cos(-60°)}{\operatorname{ctg}(-240°)\sin(-330°)}$;

d) $\dfrac{\sin^2(-212°)\cos 302°+\cos^3(-148°)}{\sin(-58°)\cos(-32°)+\sin 392°\sin(-148°)-\sin 58°\sin 148°}$.

59. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\dfrac{\sin(180°-\alpha)\sin(270°-\alpha)\cos(360°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\sin(360°-\alpha)\cos(180°+\alpha)\operatorname{tg}(270°+\alpha)}=1$;

b) $\sin(\alpha-\pi)+\operatorname{tg}(\alpha-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$.

60. Să se demonstreze că pentru orice n număr natural este îndeplinită egalitatea:

$$\cos\left(\frac{1}{n}\cdot 180°\right)+\cos\left(\frac{2}{n}\cdot 180°\right)+\ldots+\cos\left(\frac{n-1}{n}\cdot 180°\right)=0.$$

Ind. Se ţine seama că

$$\cos\left(\frac{n-k}{n}\cdot 180\right)=-\cos\frac{k\cdot 180°}{n}\quad(k=1, 2, \ldots, n-1)$$

şi se grupează, doi cîte doi, termenii din membrul stîng.

Formule fundamentale

§ 14. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi unghi

43. Relaţii de bază. Fie α unghi în planul orientat şi M un punct diferit de originea axelor de coordonate, astfel încît raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ să formeze cu axa Ox unghiul α. Dacă notăm cu a, b, r, respectiv, proiecţiile vectorului $\overrightarrow{OM}$ pe axele de coordonate şi modulul vectorului, atunci avem următoarea

Teoremă. *Oricare ar fi unghiul α avem:*

$$a^2+b^2=r^2. \tag{1}$$

Demonstraţie. Să notăm cu A proiecţia punctului M pe axa Ox. Atunci avem $OA=a$, $AM=b$ şi $OM=r$. Aplicînd, în triunghiul dreptunghic OAM, teorema lui Pitagora, rezultă:

$$a^2+b^2=r^2.$$

Ţinînd seama că $r\neq 0$ (pentru că $\overrightarrow{OM}\neq 0$), putem împărţi cu r^2 ambii membri ai egalităţii (1). Obţinem:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{b}{r}\right)^2=1.$$

Dar $\frac{a}{r}=\cos\alpha$ şi $\frac{b}{r}=\sin\alpha$, deci această relaţie devine:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{2}$$

În § 5 am definit funcţiile $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\alpha$ prin relaţiile

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a} \text{ şi } \operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}.$$

Avînd în vedere că $\sin\alpha=\frac{b}{r}$ şi $\cos\alpha=\frac{a}{r}$, rezultă formulele:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Relaţiile (2) şi (3) se numesc *relaţii de bază*.

44. Exprimarea funcţiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele. Vom determina acum, plecînd de la relaţiile de bază, o serie de formule prin care putem exprima funcţiile trigonometrice cu ajutorul uneia din ele.

Din formula (2) deducem:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \tag{4}$$

care înlocuită în (3) ne dă:

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}. \tag{4'}$$

Formulele (4) şi (4') ne dau funcţiile trigonometrice $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ în funcţie de $\sin\alpha$.

Analog avem:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}. \tag{5}$$

Ridicînd la pătrat prima relaţie (3), găsim:

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

de unde:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1$$

sau, ţinînd seama de relaţia (2):

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

care ne dă:

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{6}$$

Dar $\sin\alpha=\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$, deci:

$$\sin\alpha=\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{6'}$$

Din relaţiile (3) deducem:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{6''}$$

Formulele (6), (6') şi (6'') ne dau funcţiile trigonometrice $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$.

Analog găsim:

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \tag{7}$$

Formulele (4), (4'), (5), (6), (6'), (6'') și (7) se numesc *formule corelative.*

O b s e r v a ț i e. Pentru fiecare unghi α numărul $\cos\alpha$ este unic determinat. Așadar în formula $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ este valabil numai unul dintre semnele din fața radicalului, anume semnul numărului $\cos\alpha$. Alegerea semnului corespunzător nu prezintă nici o dificultate în cazul cînd se cunoaște cadranul în care este situat unghiul. Altminteri, pentru a se evita erorile posibile, este preferabil ca formula dată să fie folosită sub forma $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Considerații analoge se pot face și relativ la celelalte formule în care apare dublul semn $\pm$.

Aplicații

1° Fiind dat $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ și știind că α este un unghi din cadranul II, să se determine valorile celorlalte funcții trigonometrice.

Avînd în vedere că α este un unghi din cadranul *II*, rezultă că valorile funcțiilor $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ sînt negative, și din formulele (4) și (4') deducem:

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5},\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4},\quad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}.$$

2° Să se calculeze expresia:

$$E = \sin^2\alpha\,\cos^2\alpha\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\,(1+\cos^2\alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\,(1+\sin^2\alpha)}}\right].$$

Avem:

$$1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha) = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha = \cos^4\alpha,$$

$$1-\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha) = \sin^4\alpha.$$

Deci:

$$E = \sin^2\alpha\,\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = \sin^2\alpha\,\cos^2\alpha\,\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha} = 1$$

---

[1] $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ dacă } a \geqslant 0, \\ -a \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$

§ 15. Formule trigonometrice de calcul

45. **Produsul scalar a doi vectori.** În mecanică se studiază problema următoare: să se găsească lucrul mecanic al forței $\vec{F}$, dacă punctul asupra căruia acționează forța efectuează deplasarea $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Dacă punctul se deplasează în sensul forței atunci, prin definiție, lucrul mecanic al forței este egal cu produsul dintre mărimea forței și lungimea deplasării. Dacă însă punctul se deplasează sub un unghi α față de forță (fig. 71), atunci lucrează numai componenta forței situată pe dreapta OA deoarece componenta perpendiculară pe OA este echilibrată de rezistență. Proiectînd forța pe direcția deplasării, obținem:

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{F} = |\vec{F}|\cos\alpha.$$

Prin urmare, lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ are expresia:

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{F}\,|\vec{a}| = |\vec{F}|\cdot|\vec{a}|\cos\alpha.$$

În acest fel perechii ordonate de vectori $(\vec{F}, \vec{a})$ i se poate atașa scalarul $|\vec{F}|\,|\vec{a}|\cos\alpha$, numit produsul scalar al vectorilor $\vec{F}$ și $\vec{a}$. În general, *se numește produs scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ numărul egal cu produsul dintre modulele vectorilor și cosinusul unghiului format de vectorul $\vec{a}$ cu vectorul $\vec{b}$.* Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se înseamnă prin $\vec{a}\vec{b}$ sau $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Așadar

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}). \tag{1}$$

De aici se deduce ușor că *produsul scalar este egal cu zero în acel și numai în acel caz cînd cel puțin unul dintre vectori este nul, sau dacă vectorii sînt ortogonali.*

Într-adevăr membrul drept al relației (1) se anulează dacă și numai dacă măcar unul dintre numerele $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ sau $\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$ este nul. Însă

$$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0},\quad |\vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{0}$$

și

$$\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b},$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunțată.

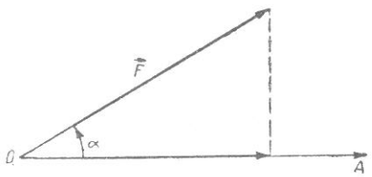


Fig. 71.

În particular, pentru $\vec{b}=\vec{a}$, produsul scalar devine $\vec{a}\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0=$ $=|\vec{a}|^2$, adică *produsul scalar a doi vectori egali este egal cu pătratul modulului unuia dintre ei.*

46. Proprietăţile fundamentale ale produsului scalar

1) *Comutativitatea*

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}.$$

Această proprietate rezultă nemijlocit din (1). Este suficient numai să observăm egalitatea $\cos(\widehat{\vec{b},\ \vec{a}})=\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$.

Dacă numim *proiecţie a vectorului* $\vec{a}$ *pe vectorul* $\vec{b}$ proiecţia vectorului $\vec{a}$ pe o axă care are acelaşi sens cu $\vec{b}$, atunci proprietatea de comutativitate conduce la formularea echivalentă: *produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unui vector şi proiecţia celuilalt pe el.*

2) *Distributivitatea faţă de adunarea vectorilor:*

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

Folosind definiţia echivalentă a produsului scalar de mai sus, avem:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=|\vec{c}|\,pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Aplicînd acum teorema II din § 4 relativă la proiecţia sumei, obţinem

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=|\vec{c}|(pr_{\vec{c}}\vec{a}+pr_{\vec{c}}\vec{b})=|\vec{c}|\ pr_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\ pr_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c},\ \text{c.c.t.d.}$$

3) *Asociativitatea faţă de înmulţirea cu un număr:*

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b}).$$

Fie $\lambda\geqslant 0$. Folosind relaţia (1), avem:

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\lambda\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a},\ \vec{b}}).$$

Însă

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\ |\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$$

şi

$$(\widehat{\lambda\vec{a},\ \vec{b}})=\lambda(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}).$$

Prin urmare

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\lambda(\vec{a}\vec{b}),$$

adică membrul drept al relaţiei date.

În mod analog se tratează şi cazul $\lambda<0$.

47. Produsul scalar al vectorilor daţi prin proiecţii. Fie vectorii

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\ \text{şi}\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}.$$

Ţinînd seama de proprietăţile fundamentale ale produsului scalar, avem:

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2\vec{i}\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\vec{j}+y_1x_2\vec{j}\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\vec{j},$$

însă versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ sînt vectori unitari ortogonali. De aici rezultă relaţiile:

$$\vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=1,\ \vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{i}=0$$

şi deci (1) devine:

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

Astfel *produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor proiecţiilor de acelaşi nume.*

Aplicaţie. *În paralelogramul ABCD se construiesc din vîrful B perpendicularele BE pe latura CD şi BF pe diagonala AC* (fig. 72).

Să se demonstreze relaţia:

$$CA\cdot CF=BC^2+CD\cdot CE.$$

Soluţie. Deoarece vectorii $\vec{CA}$ şi $\vec{CF}$ au acelaşi sens, putem scrie:

$$CA\cdot CF=\vec{CA}\cdot\vec{CF}$$

sau, ţinînd seama de relaţiile $\vec{CF}=\vec{CB}+\vec{BF}$, $\vec{CA}\cdot\vec{BF}=0$:

$$CA\cdot CF=\vec{CA}\cdot\vec{CB}$$

sau încă, deoarece $\vec{CA}=\vec{CB}+\vec{CD}$ şi $\vec{CB}\cdot\vec{CB}=CB^2$:

$$CA\cdot CF=CB^2+\vec{CD}\cdot\vec{CB}.$$

În sfîrşit, folosind în ultima egalitate relaţia $\vec{CB}=\vec{CE}+\vec{EB}$ şi observînd că $\vec{CD}\cdot\vec{CE}=CD\cdot CE$, $\vec{CD}\cdot\vec{EB}=0$, se obţine relaţia dată.

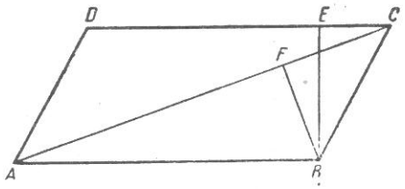


Fig. 72.

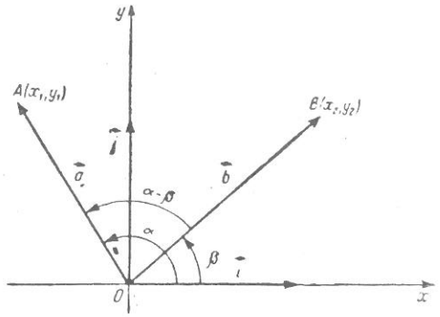


Fig. 73.

48. Funcțiile trigonometrice ale unei sume de unghiuri. În § 13 s-a arătat că funcțiile trigonometrice ale unghiurilor $k\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k\in Z)$ se exprimă prin funcțiile trigonometrice ale unghiului α. Acum vom arăta că, și în cazul general a două unghiuri arbitrare, funcțiile trigonometrice ale sumei se exprimă prin funcțiile trigonometrice ale termenilor.

Fie vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ care formează cu axa Ox unghiurile α și β respectiv (fig. 73). Observînd că $(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})=\alpha-\beta$, rezultă următoarea expresie pentru produsul scalar al celor doi vectori:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\ (\alpha-\beta). \qquad (2)$$

Pe de altă parte, dacă $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt versorii axelor Ox și Oy respectiv, atunci $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, unde x_1 și y_1 reprezintă proiecțiile vectorului $\vec{a}$ pe axele de coordonate (v. pct. 18). Mai departe, ținînd seama de definiția funcțiilor cosinus și sinus, avem:

$$\vec{a}=|\vec{a}|\left(\frac{x_1}{|\vec{a}|}\vec{i}+\frac{y_1}{|\vec{a}|}\vec{j}\right)=|\vec{a}|\ (\cos\alpha\cdot\vec{i}+\sin\alpha\cdot\vec{j}), \qquad (3)$$

În mod analog:

$$\vec{b}=|\vec{b}|\ \cos\beta\cdot\vec{i}+\sin\beta\cdot\vec{j}). \qquad (4)$$

Așadar, cu ajutorul relațiilor (3) și (4), produsul scalar poate fi exprimat și prin relația:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ (\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta). \qquad (5)$$

Comparînd egalitățile (2) și (5), după simplificarea factorului $|\vec{a}|\ |\vec{b}|$, rezultă formula:

$$\cos\ (\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta. \qquad (6)$$

Dacă în această formulă înlocuim pe β cu $-\beta$ și avem în vedere relațiile $\cos\ (-\beta)=\cos\beta$, $\sin\ (-\alpha)=-\sin\alpha$, obținem:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta. \qquad (6')$$

Să scriem acum formula (6) punînd în loc de α unghiul $\frac{\pi}{2}-\alpha$:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta.$$

Dar:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\sin\ (\alpha+\beta),\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

deci:

$$\sin\ (\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \cos\alpha. \qquad (7)$$

Înlocuind aici pe β cu $-\beta$ găsim:

$$\sin\ (\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\alpha. \qquad (7')$$

Să împărțim acum, membru cu membru, egalitățile (7) și (6'). Avem

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Avînd în vedere aici că $\sin\alpha=\cos\alpha\ \operatorname{tg}\alpha$, $\sin\beta=\cos\beta\ \operatorname{tg}\beta$ și simplificînd cu $\cos\alpha\ \cos\beta$, obținem:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (8)$$

Împărțind relația (7') la (6), găsim:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (8')$$

În mod analog obținem:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \qquad (9)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (9')$$

Formulele (6), (6'), (7), (7'), (8), (8'), (9), (9') se numesc *formulele de adunare a unghiurilor.*

Cu ajutorul acestor formule putem deduce expresiile funcțiilor trigonometrice ale unei sume de trei unghiuri.

Aplicații

1° $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\sin[(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3]=\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_3+\sin\alpha_3\cos(\alpha_1+\alpha_2)=$
$=(\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_1)\cos\alpha_3+\sin\alpha_3(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2)=$
$=\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2-$
$-\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3.$

Analog găsim:

2° $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3-$
$-\sin\alpha_1\sin\alpha_3\cos\alpha_2-\sin\alpha_3\sin\alpha_2\cos\alpha_1.$

3° $\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3}{1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_3-\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3},$

4° $\operatorname{ctg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3-\operatorname{ctg}\alpha_1-\operatorname{ctg}\alpha_2-\operatorname{ctg}\alpha_3}{\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2+\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_3+\operatorname{ctg}\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3-1}.$

Exemple

1) *Să se calculeze* $\cos(\alpha+\beta)$ *și* $\cos(\alpha-\beta)$, *știind că* $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ *și* $\cos\beta=\frac{24}{25}$, *unghiul* α *fiind în cadranul III, iar* β *în cadranul IV.*

Ținînd seama de cadranele în care se află unghiurile, deducem:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{8^2}{17^2}}=-\frac{15}{17},\quad \sin\beta=-\sqrt{1-\frac{24^2}{25^2}}=-\frac{7}{25},$$

deci:

$$\cos(\alpha+\beta)=\left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{24}{25}\right)-\left(-\frac{8}{17}\right)\left(-\frac{7}{25}\right)=-\frac{416}{425},$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{24}{25}\right)+\left(-\frac{8}{17}\right)\left(-\frac{7}{25}\right)=-\frac{304}{425}.$$

2) *Știind că* $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha_3=2-\sqrt{3}$, *să se calculeze* $\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ *și să se deducă de aici valoarea sumei* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

Din formula care ne dă tangenta unei sume de trei unghiuri deducem:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+2-\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{6}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{2-\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}.$$

Avînd în vedere că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, rezultă (v. pct. 58):

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{\pi}{3}+k\pi\quad(k\in Z).$$

3) *Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului de 15°.*

Avem:

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cos 45^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Analog:

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}15^\circ=2+\sqrt{3}.$$

49. Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi

Să scriem acum formula (7) pentru $\beta=\alpha$. Avem:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha,$$

adică:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{10}$$

Din formula (6') deducem:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \tag{11}$$

care se mai poate scrie, ținînd seama de (2) din § 14, sub una din formele:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \tag{11'}$$

sau

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha. \tag{11''}$$

Făcînd în formulele (8) și (9) $\beta=\alpha$, obținem respectiv

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \tag{12}$$

și

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \tag{13}$$

Formulele (10), (11), (11'), (11''), (12), (13) ne dau *funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu.*

În aplicațiile care urmează deducem formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului triplu.

Aplicații

1° $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha$, sau, avînd în vedere relațiile (10) și (11),

$$\sin 3\alpha=\sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

care se mai poate scrie:

$$\sin 3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha). \tag{14}$$

Analog obținem:

$$2^\circ \quad \cos 3\alpha = \cos\alpha\,(4\cos^2\alpha - 3), \tag{15}$$

$$3^\circ \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{16}$$

$$4^\circ \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}. \tag{17}$$

Formulele (14), (15), (16), (17) ne dau *funcțiile trigonometrice ale unghiului triplu.*

În capitolul VI vom da formule generale pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului $n\alpha$.

Exemple

Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului 2α *știind că* $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, α *fiind un unghi din cadranul* II.

Avem:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{7^2}{25^2}} = -\frac{24}{25},$$

deci:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{24}{7}.$$

Cu aceste valori, formulele (10)—(13) ne dau:

$$\sin 2\alpha = -\frac{336}{625}, \quad \cos 2\alpha = \frac{527}{625}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{336}{527}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{527}{336}.$$

Avînd în vedere că $\sin 2\alpha < 0$, $\cos 2\alpha > 0$, deducem că unghiul 2α este în cadranul IV.

2) *Să se determine funcțiile trigonometrice ale unghiului* 4α *știind că* $\operatorname{tg}\alpha = 2$, *unghiul fiind în cadranul* I.

Din formulele (6) și (6′) § 14 deducem:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Cu aceste valori, din (10) și (11) rezultă:

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$$

și deci unghiul 2α se află în cadranul II. Avem:

$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = -\frac{24}{25}$$

și

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -\frac{7}{25}.$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{24}{7}, \quad \operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{7}{24}.$$

50. **Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi.** Să deducem acum funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiului întreg.

Ținînd seama de formula (11″), putem scrie:

$$\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

de unde:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

adică:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}, \tag{18}$$

semnul radicalului fiind determinat în funcție de cadranul în care se află unghiul $\frac{\alpha}{2}$.

Din (11′) deducem:

$$\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,$$

deci:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2},$$

de unde rezultă:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}. \tag{19}$$

Împărțind membru cu membru relațiile (18) și (19), găsim:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \tag{20}$$

și

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}. \tag{21}$$

Pentru funcţiile $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ şi $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ putem da şi alte formule. Într-adevăr avem:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{20'}$$

şi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{20''}$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{21'}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{21''}$$

Formulele (18), (19), (20), (20'), (20''), (21), (21'), (21'') ne dau *funcţiile trigonometrice ale jumătăţii unghiului.*

Aplicaţii

1° *Să se calculeze funcţiile trigonometrice ale unghiului* 22°30'.
Avem:

$$\sin 22°30'=\sin\frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Analog găsim:

$$\cos 22°30'=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \operatorname{tg} 22°30'=\sqrt{2}-1,\quad \operatorname{ctg} 22°30'=\sqrt{2}+1.$$

2° *Ştiind că* $\cos\alpha=-\frac{527}{625}$ *şi că* $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, *să se calculeze funcţiile trigonometrice ale unghiului* $\frac{\alpha}{4}$.

Ţinînd seama de inegalitatea de definiţie a unghiului α, rezultă că $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$ şi $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{4}<\frac{3\pi}{8}$; deci unghiul $\frac{\alpha}{2}$ este în cadranul II, iar unghiul $\frac{\alpha}{4}$ în cadranul I. Avem:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{527}{625}}{2}}=-\sqrt{\frac{49}{625}}=-\frac{7}{25}.$$

De aici rezultă că:

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}.$$

Analog găsim:

$$\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{3}{5},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\frac{4}{3},\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}=\frac{3}{4}.$$

51. Exprimarea funcţiilor trigonometrice ale unghiului α cu ajutorul lui $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Avînd în vedere că $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$, din formula (12) deducem:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{22}$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{23}$$

Ţinînd seama de exprimarea de mai sus a unghiului α, putem scrie relaţia (10) sub forma:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

sau:

$$\sin\alpha=2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos^2\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dar:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

deci:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{24}$$

Din formula (11) rezultă:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

sau:

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

de unde, ținînd seama de expresia de mai sus a lui $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ deducem:

$$\cos\alpha = \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

deci:

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{25}$$

Formulele (22)—(25) ne dau funcțiile trigonometrice ale unghiului α cu ajutorul lui $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Aceste formule prezintă marele avantaj că ne dau exprimări *raționale* ale funcțiilor trigonometrice $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, cu ajutorul funcției $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Exemplu. Să se calculeze expresia $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}$, știind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Avem:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

deci:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{5}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

52. **Formule pentru transformarea unor sume de funcții trigonometrice în produse.** În multe cazuri ne apare necesitatea de a transforma anumite sume de funcții trigonometrice în produse. Vom deduce acum formule care să efectueze aceste transformări.

Să considerăm relațiile:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \tag{7}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha. \tag{7'}$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Notînd:

$$\alpha+\beta = p, \quad \alpha-\beta = q,$$

deducem:

$$\alpha = \frac{p+q}{2}, \quad \beta = \frac{p-q}{2}$$

și deci formula de mai sus se scrie:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}. \tag{26}$$

Scăzînd membru cu membru egalitățile (7) și (7'), găsim:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha,$$

de unde rezultă:

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}. \tag{26'}$$

Relațiile (26) și (26') reprezintă *formulele de transformare în produs a unei sume, respectiv diferențe, de două sinusuri.*

Fie acum relațiile:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{6'}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{6}$$

Adunîndu-le membru cu membru, obținem:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

adică:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}. \tag{27}$$

Scăzînd membru cu membru relațiile (6') și (6), găsim:

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}. \tag{27'}$$

formulă care se mai poate scrie, ţinînd seama că $\sin\frac{p-q}{2}=-\sin\frac{q-p}{2}$, sub forma:

$$\cos p-\cos q=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{q-p}{2}. \qquad (27'')$$

Formulele (27), (27'), şi (27'') sînt *formule de transformare în produs a unei sume, respectiv diferenţe, de cosinusuri.*

Vom determina acum formule pentru transformarea în produs şi cît a unei sume sau diferenţe de tangente şi cotangente.

Avem:

$$\operatorname{tg} p+\operatorname{tg} q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q},$$

de unde, avînd în vedere formula (7), rezultă

$$\operatorname{tg} p+\operatorname{tg} q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}. \qquad (28)$$

Analog găsim:

$$\operatorname{tg} p-\operatorname{tg} q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}. \qquad (28')$$

$$\operatorname{ctg} p+\operatorname{ctg} q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}, \qquad (29)$$

$$\operatorname{ctg} p-\operatorname{ctg} q=\frac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}. \qquad (29')$$

Formulele (28), (28'), (29), (29') sînt *formule de transformare în produs şi cît a unei sume, respectiv diferenţe, de tangente sau cotangente.*

Aplicaţii

1° *Să se transforme în produs expresia* $\sin 72^\circ+\sin 48^\circ$. Avem:

$$\sin 72^\circ+\sin 48^\circ=2\sin\frac{72^\circ+48^\circ}{2}\cos\frac{72^\circ-48^\circ}{2}=$$

$$=2\sin 60^\circ\cos 12^\circ=\sqrt{3}\cos 12^\circ.$$

2° *Să se transforme în produs expresia* $\sin 80^\circ+\sin 70^\circ+\sin 50^\circ+\sin 40^\circ$. Putem scrie:

$$\sin 80^\circ+\sin 70^\circ+\sin 50^\circ+\sin 40^\circ=(\sin 80^\circ+\sin 40^\circ)+(\sin 70^\circ+\sin 50^\circ)=$$
$$=2\sin 60^\circ\cos 20^\circ+2\sin 60^\circ\cos 10^\circ=2\sin 60^\circ(\cos 20^\circ+\cos 10^\circ)=$$

$$=2\sin 60^\circ\cdot 2\cos 15^\circ\cdot\cos 5^\circ=2\sqrt{3}\cos 15^\circ:\cos 5^\circ.$$

3° *Să se transforme în produs şi cît diferenţa* $\operatorname{tg} 68^\circ-\operatorname{ctg} 67^\circ$.

Ţinînd seama că unghiurile de 67° şi 23° sînt complementare, rezultă că $\operatorname{ctg} 67^\circ=\operatorname{tg} 23^\circ$ şi deci putem scrie:

$$\operatorname{tg} 68^\circ-\operatorname{ctg} 67^\circ=\operatorname{tg} 68^\circ-\operatorname{tg} 23^\circ=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 68^\circ\cos 23^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\cos 68^\circ\cos 23^\circ}.$$

4° *Să se transforme în produs expresia:*

$$E=\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

Avem:

$$E=(\cos\alpha+\cos\beta)-[\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)]=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$$

$$-2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=$$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

5° *Să se transforme în produs expresia* $3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$.

Avem:

$$3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=3\left(\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\right).$$

Ţinînd seama că $\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, putem scrie:

$$3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=3\left(\sin\alpha-\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\cos\alpha\right)=\frac{3}{\cos 30^\circ}(\sin\alpha\cos 30^\circ-$$

$$-\sin 30^\circ\cos\alpha)=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin(\alpha-30^\circ)=2\sqrt{3}\sin(\alpha-30^\circ).$$

53. **Formule pentru transformarea unor produse trigonometrice în sume.** Vom da acum o serie de formule cu ajutorul cărora vom transforma anumite produse de funcţii trigonometrice în sume.

Să considerăm formulele:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha, \qquad (7)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha, \qquad (7')$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha+\beta) + \sin (\alpha-\beta),$$

de unde:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin (\alpha+\beta) + \sin (\alpha-\beta)}{2}. \qquad (30)$$

Această formulă ne servește pentru a transforma un produs dintre un sinus și un cosinus în sumă de sinusuri.

Fie acum relațiile:

$$\cos (\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \qquad (6')$$

$$\cos (\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \qquad (6)$$

Dacă le adunăm membru cu membru, găsim:

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha+\beta) + \cos (\alpha-\beta),$$

adică:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos (\alpha+\beta) + \cos (\alpha-\beta)}{2}. \qquad (31)$$

Scăzînd egalitățile (6') și (6) membru cu membru, obținem

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha-\beta) - \cos (\alpha+\beta),$$

deci:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos (\alpha-\beta) - \cos (\alpha+\beta)}{2}, \qquad (32)$$

formulă care transformă un produs de sinusuri într-o diferență de cosinusuri.

Aplicații

1° *Să se calculeze expresia* $\sin (\alpha-30°) \cos (\alpha+30°)$.

Ținînd seama de relația (30), deducem:

$$\sin (\alpha-30°) \cos (\alpha+30°) =$$

$$= \frac{\sin [(\alpha-30°)+(\alpha+30°)] + \sin [(\alpha-30°)-(\alpha+30°)]}{2} = \frac{\sin 2\alpha + \sin(-60°)}{2}.$$

Dar

$$\sin (-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci:}$$

$$\sin (\alpha-30°) \cos (\alpha+30°) = \frac{2 \sin 2\alpha - \sqrt{3}}{4}.$$

2° *Să se calculeze expresia:*

$$E = \cos \alpha + 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}+15°\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2}-15°\right).$$

Din formula (32) rezultă:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15°\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2}-15°\right) =$$

$$= \frac{\cos\left[\left(\frac{\alpha}{2}+15°\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-15°\right)\right] - \cos\left[\left(\frac{\alpha}{2}+15°\right)+\left(\frac{\alpha}{2}-15°\right)\right]}{2} =$$

$$= \frac{\cos 30° - \cos \alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \alpha}{2},$$

deci:

$$E = \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

§ 16. Identități trigonometrice

54. **Identități care se demonstrează cu ajutorul formulelor fundamentale**

Definiție. *Egalitatea care conține funcțiile trigonometrice ale unuia sau a mai multor unghiuri și este satisfăcută pentru toate valorile admisibile ale acestora se numește identitate trigonometrică.*

Expresiile din membrul stîng și membrul drept al egalității se numesc *identice*.

Înlocuirea unei expresii prin alta identică se numește *transformare identică* a acestei expresii.

Exemplu

Expresiile:

a) $\sin^2 \alpha$ și $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; *b)* $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$ și $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ sînt *identice*. Identitatea $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ are sens pentru orice unghi α; identitatea $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ are sens numai pentru $\alpha \neq k\frac{\pi}{2} (k \in Z)$ (pentru $\alpha = k\frac{\pi}{2} (k \in Z)$ una din funcțiile $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ nu are sens).

Adesea se cere să se demonstreze o identitate trigonometrică, adică să se arate că expresiile din membrul stîng și membrul drept al egalității sînt identice.

Pentru aceasta se ajunge la o identitate cunoscută cu ajutorul formulelor fundamentale și al transformărilor algebrice identice, sau, pornind de la o identitate cunoscută, cu ajutorul transformărilor algebrice identice și al formulelor fundamentale se ajunge la egalitatea dată.

Prin transformările identice succesive, o expresie trigonometrică poate căpăta o formă mai simplă, se pot rezolva inegalități trigonometrice, probleme de maxim și minim ș.a.

Exemple. 1) Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1-(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha)}{1-(\sin^6\alpha-\cos^6\alpha)}=\frac{2}{3}.$$

Soluție. Ținînd seama de identitatea $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, obținem:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=$$
$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Prin urmare.

$$\frac{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)}=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}.$$

În acest fel, prin transformări identice succesive ale membrului stîng al egalității date s-a ajuns la egalitatea evidentă $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

Observație. Funcția din membrul stîng nu are sens pentru unghiurile $\alpha=k\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$, în timp ce funcția $\frac{2}{3}$ are sens pentru orice unghi α.

Așadar, egalitatea dată este identitate pentru orice unghi $\alpha\neq k\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$.

2) Să se demonstreze inegalitatea

$$\left|\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

Soluție. Folosind identitățile $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ și

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$ obținem:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Însă $\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|\leqslant 1$. Prin urmare,

$$\left|\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right|=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|\leqslant\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}.$$

c.c.t.d.

3) Să se aducă la o formă mai simplă expresia

$$E(\alpha)=\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right).$$

Soluție. Deoarece $|\sin\alpha|\leqslant 1$ și $|\cos\alpha|\leqslant 1$, expresiile de sub radicali sînt pozitive: prin urmare se pot aplica regulile de operații cu radicali și obținem:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}}-\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{1-\sin\alpha})^2-(\sqrt{1+\sin\alpha})^2}{\sqrt{1+\sin\alpha}\sqrt{1-\sin\alpha}}=\frac{1-\sin\alpha-(1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{-2\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}}=\frac{-2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$$

Analog:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{-2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}.$$

Deci:

$$E(a)=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{|\sin\alpha\cos\alpha|}=\frac{2\sin 2\alpha}{\frac{1}{2}|\sin 2\alpha|}=\frac{4\sin 2\alpha}{|\sin 2\alpha|}=\begin{cases}4 \text{ pentru } \sin 2\alpha>0,\\ -4 \text{ pentru } \sin 2\alpha<0\end{cases}$$

sau încă, ținînd seama de semnul funcției sinus,

$$E(a)=\begin{cases}4 \text{ pentru } k\pi<a<\frac{\pi}{2}+k\pi,\\ -4 \text{ pentru } \frac{\pi}{2}+k\pi<a<\pi+k\pi\end{cases}\quad (k\in Z).$$

55. **Identități condiționate.** Două expresii trigonometrice care nu sînt egale pe mulțimea valorilor admisibile ale unghiului pot fi egale pe o submulțime a acesteia, definită printr-o relație care conține unghiul respectiv.

Astfel spus, dacă unghiul satisface o anumită relație, cele două funcții considerate sînt identice.

O astfel de identitate se numește condiționată de relația pe care o satisface unghiul sau, pe scurt, *condiționată*[1].

[1] Considerațiile făcute rămîn valabile și în cazul în care expresiile conțin mai multe unghiuri.

Exemple

1) *Dacă* α, β, γ *sînt unghiurile unui triunghi, atunci este satisfăcută identitatea*

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Soluție. Dacă α, β, γ sînt unghiurile unui triunghi, atunci ele satisfac relația:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

sau:

$$\alpha+\beta=\pi-\gamma.$$

Unghiurile $\alpha+\beta$ și $\pi-\gamma$ fiind egale, și tangentele lor sînt egale:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\pi-\gamma)$$

sau:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma,$$

de unde după eliminarea numitorului și separarea termenilor:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

O b s e r v a ț i i:

1° Identitatea dată nu are sens dacă triunghiul este dreptunghic.

2° Identitatea este adevărată și în cazul mai general $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ $(k\in Z)$.

2) *Dacă* $\frac{\sin^4 a}{a}+\frac{\cos^4 a}{b}=\frac{1}{a+b}$ $(a>0,\ >0)$, *atunci*

$$\frac{\sin^8 a}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

Soluție. Relația pe care o satisface unghiul α poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{a+b}{a}\sin^4\alpha+\frac{a+b}{b}\cos^4\alpha=1$$

sau:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\frac{b}{a}\sin^4\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$$

sau, după transformări:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\alpha-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha\right)^2=0,$$

de unde

$$\frac{\sin^2\alpha}{a}=\frac{\cos^2\alpha}{b}.$$

Folosind o proprietate a rapoartelor egale, deducem:

$$\frac{\sin^2\alpha}{a}=\frac{\cos^2\alpha}{b}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{a+b}=\frac{1}{a+b}.$$

Așadar:

$$\sin^2 a=\frac{a}{a+b};\ \cos^2 a=\frac{b}{a+b}$$

și deci:

$$\frac{\sin^3\alpha}{a^3}+\frac{\cos^3\alpha}{b^3}=\frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4}{a^3}+\frac{\left(\frac{b}{a+b}\right)^4}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

56. **Relații între funcțiile trigonometrice și arcfuncții.** În cele ce urmează vom demonstra cîteva relații simple între funcțiile trigonometrice și arcfuncții.

1) *Să se demonstreze identitățile:*

a) $\sin(\arcsin x)=x$; *b*) $\cos(\arccos x)=x$;

c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$; *d*) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$.

Vom demonstra identitatea *a*), pentru celelalte procedîndu-se în mod analog. Observăm mai întîi că funcția arcsin x este definită pentru $|x|\leqslant 1$ și deci egalitatea are sens numai pentru aceste valori ale lui x. Fie $x_0\in[-1,1]$ o astfel de valoare. Conform definiției, arcsin x_0 este numărul, aparținînd intervalului $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, al cărui sinus este egal cu x_0, ceea ce demonstrează identitatea.

O b s e r v a ț i e. Identitatea *b*) are sens, de asemenea, numai pentru $|x|\leqslant 1$.

2) *Să se demonstreze identitățile:*

a) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$; *b*) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}$;

c) $\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Soluție. a) Se constată ușor că egalitatea are sens pentru $|x|\leqslant 1$. Dacă se introduce notația $\alpha=\arccos x$, atunci $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ și deci $\sin\alpha\geqslant 0$. Însă $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (v. obs. de la pct. 44) sau, avînd în vedere cele ce precedă:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2},$$

adică

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}.$$

O b s e r v a ţ i e. În mod analog se demonstrează şi identitatea $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

b) Egalitatea are sens dacă $x\neq 0$. Pentru $\alpha=\operatorname{arcctg} x$, formula $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ devine:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)}=\frac{1}{x}:$$

c) Egalitatea are sens pentru orice x. Dacă se introduce notaţia $\alpha=\operatorname{arcctg} x$, atunci $0<\alpha<\pi$. Rezultă că numerele $\cos\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\alpha$ au acelaşi semn şi deci formula $|\cos\alpha|=\frac{|\operatorname{ctg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ se poate scrie sub forma echivalentă $\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ sau încă, avînd în vedere notaţia folosită:

$$\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}:$$

Aplicaţie

Să se demonstreze egalitatea:

$$\sin\left(3\arcsin\frac{1}{4}\right)+\cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}.$$

Soluţie. Introducem notaţiile: $\alpha=\arcsin\frac{1}{4}$, $\beta=\arccos\frac{1}{4}$. În acest fel membrul stîng al egalităţii devine $\sin 3\alpha+\cos 2\beta$. Însă

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)-4\sin^3\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=$$

$$=3\cdot\frac{1}{4}-4\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{11}{16}$$

şi

$$\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1=2\left(\frac{1}{4}\right)^2-1=-\frac{14}{16}:$$

Aşadar

$$\sin 3\alpha+\cos 2\beta=\frac{11}{16}-\frac{14}{16}=-\frac{3}{16},$$

ceea ce demonstrează egalitatea.

57. **Relaţii între arcfuncţii.** 1) *Să se demonstreze identitatea:*

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Soluţie. Este evident că egalitatea are sens pentru $|x|\leqslant 1$. Fie

$$\alpha=\arcsin x\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=x.\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Însă

$$\sin\alpha=x\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x$$

şi

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\pi.$$

Aşadar

$$\alpha=\arcsin x\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x,\\ 0\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\pi\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}-\alpha=\arccos x,$$

ceea ce demonstrează identitatea.

O b s e r v a ţ i e. În mod analog se demonstrează şi identitatea:

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}:$$

2) *Să se demonstreze identitatea*

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Soluţie. Pornim de la identitatea $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ în care luăm $\alpha=\arcsin x$, $\beta=\arcsin y$.

Însă

$$\alpha=\arcsin x\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=x,\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad\beta=\arcsin y\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\beta=y,\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

și

$$\cos\alpha=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2};\ \cos\beta=\cos(\arcsin y)=\sqrt{1-y^2}.$$

Prin urmare

$$\sin(\alpha+\beta)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

Dacă $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, ultima relație se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\alpha+\beta=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

adică

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

O b s e r v a ț i e. Dacă $-\pi\leqslant\alpha+\beta<-\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta\leqslant\pi$ egalitatea nu mai este satisfăcută. De exemplu, pentru $\alpha=\frac{\pi}{6}$ și $\beta=\frac{\pi}{2}$, obținem:

$$\arcsin x+\arcsin y=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=2\frac{\pi}{3},$$

și

$$\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

3) *Să se demonstreze identitatea:*

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Soluție. Pornim de la identitatea $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ Dacă $-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, această identitate poate fi scrisă sub formă echivalentă:

$$\alpha+\beta=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Pentru $\alpha=\operatorname{arctg}x$, $\beta=\operatorname{arctg}y$, ultima identitate capătă forma:

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)},$$

adică

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Aplicație. *Să se demonstreze egalitatea:*

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{16}{13}.$$

Soluție. Deoarece $0<\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $0<\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{3}}{3}$ și funcția arctg este strict crescătoare, rezultă inegalitățile:

$\operatorname{arctg}0<\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{arctg}0<\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ sau, ținînd seama că $\operatorname{arctg}0=0$ și $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$,

$$0<2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<2\frac{\pi}{6},\quad 0<\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\frac{\pi}{3},$$

de unde

$$0<2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\frac{\pi}{3}.$$

Pe de altă parte

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}+\frac{1}{4}}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{4}}{1-\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{16}{13}.$$

Cu aceasta demonstrația este terminată deoarece

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)=\frac{16}{13},\\ \\ 0<2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{16}{13}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze $\sin(\alpha+\beta)$ și $\sin(\alpha-\beta)$ știind că $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ și $\sin\beta=-\frac{8}{17}$, α fiind un unghi din cadranul IV, iar β un unghi din cadranul III.

2. Să se calculeze $\sin(\alpha+\beta)$ și $\cos(\alpha-\beta)$ dacă $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, iar $\operatorname{ctg}\beta=\frac{7}{24}$, α fiind un unghi din cadranul II, iar β un unghi din cadranul III.

3. Știind că $\sin\alpha=\frac{15}{17}$ și $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, unde $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

4. Să se determine $\operatorname{tg}\alpha$ știind că $\operatorname{tg}(45°+\alpha)=a$.

5. Să se calculeze $\sin\alpha$ știind că $\cos(60°-\alpha)=\frac{1}{3}$, α fiind un unghi din cadranul II.

6. Să se calculeze $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ știind că $\sin\alpha_1=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha_3=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, unde $\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\pi<\alpha_2<\frac{3\pi}{2}<\alpha_3<2\pi$.

7. Să se pună sub o formă mai simplă expresia:

$$\cos\alpha-\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

8. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

9. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$$

10. Să se arate că:

$$\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

11. Să se arate că:

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}=-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

12. Să se demonstreze că:

$$\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$$

13. Știind că $\cos\alpha=\frac{7}{25}$ și că $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

14. Să se calculeze $\sin(2\alpha+\beta)$ și $\cos(2\alpha-\beta)$, dacă $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ și $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, α fiind un unghi din cadranul III, iar β un unghi din cadranul II.

15. Dacă $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ și $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$, să se calculeze $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)$.

16. Să se calculeze $\sin 4\alpha$ știind că $\operatorname{tg}\alpha=2$, unghiul α fiind în cadranul I.

17. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}(30°+\alpha)\operatorname{tg}(30°-\alpha)=\frac{2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}.$$

18. Să se arate că:

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

19. Să se arate că:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\left(\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}\right)^2.$$

20. Să se demonstreze că:

$$\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3.$$

21. Să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-4\operatorname{ctg}4\alpha.$$

22. Știind că $\cos\alpha=\frac{119}{169}$ să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, α fiind un unghi din cadranul IV.

23. Să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, știind că $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, α fiind un unghi în cadranul IV.

24. Să se determine $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, știind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$.

25. Să se arate că:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha.$$

26. Să se transforme în produse expresiile:

a) $\sin 44°+\sin 16°$; *b*) $\cos 23°+\cos 37°$;

c) $\sin\frac{7\pi}{24}-\sin\frac{\pi}{24}$; d) $\cos\frac{5\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}$;

e) $\sin 54°+\cos 69°$; *f*) $\cos 34°-\sin 64°$.

27. Să se transforme în produse și cituri expresiile:

a) $\operatorname{tg}34°+\operatorname{tg}26°$; *b*) $\operatorname{ctg}31°+\operatorname{ctg}19°$;

c) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; *d*) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{9}-\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}$.

28. Să se simplifice fracțiile:

$$a)\ \frac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha};$$

$$b)\ \frac{\sin 8\alpha+\sin 6\alpha+\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 6\alpha+\cos 4\alpha+\cos 2\alpha}.$$

29. Să se scrie sub o formă mai simplă expresia:

$$\frac{\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}-\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}.$$

30. Să se transforme în produs expresia:

$$\sin^2\alpha-\frac{1}{3}\cos^2\alpha.$$

31. Să se arate că:

$$\frac{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}3\alpha.$$

32. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin 6\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

33. Să se transforme în sumă următorul produs:

$$8\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ.$$

34. Să se transforme în sumă următorul produs:

$$4\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

35. Să se demonstreze că:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

Ind. Se înmulțesc ambii membri ai egalității cu $2\sin\frac{2\pi}{7}$, apoi se transformă produsele în sume.

Să se demonstreze identitățile:

36. *a)* $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0;$

b) $\sin 3\alpha=4\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha);$

c) $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=$

$$=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

37. *a)* $2(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2=\sin^8\alpha+\cos^8\alpha+1;$

b) $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=-\sin^2\beta.$

38. *a)* $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

b) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2};$$

Să se demonstreze că pentru toate valorile admisibile ale unghiului x au loc identitățile:

39. *a)* $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x$; *b)* $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$

40. $\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}2x+4\operatorname{tg}4x+8\operatorname{ctg}8x=\operatorname{ctg}x.$

41. Să se demonstreze că dacă $\cos(\alpha+\beta)=0$, atunci are loc identitatea:

$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha.$$

Ind. Se înmulțește prima relație cu $2\sin\beta$, apoi se transformă produsul în sumă.

42. Să se demonstreze că dacă $\alpha+\beta=\gamma$, atunci are loc identitatea:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

Ind. Se folosește relația $\cos^2(\alpha+\beta)=\cos^2\gamma$ (consecință a relației $\alpha+\beta=\gamma$).

43. Să se demonstreze că dacă $\cos x\cos y\cos z\neq 0$, atunci are loc identitatea:

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z\,(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x).$$

Ind. Se dezvoltă $\cos(x+y+z)$.

44. Să se demonstreze că dacă $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, atunci:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$

b) $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\pi-\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\beta}{4}\cos\frac{\pi-\gamma}{4}.$

45. Să se demonstreze că dacă α, β, γ sînt unghiurile unui triunghi, atunci:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

46. Să se demonstreze că pentru orice $k\in Z$ și $x+y+z=\pi$ are loc identitatea:

$\sin 2kx+\sin 2ky+\sin 2kz=(-1)^{k+1}4\sin kx\sin ky\sin kz.$

Ind. În identitatea 38, a) luăm $\alpha=2kx$, $\beta=2ky$, $\gamma=2kz$.

47. Dacă $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ atunci:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2};$$

b) $\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma-\cos\delta=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

48. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\arcsin\frac{15}{17}=\arccos\frac{8}{17}$; *b)* $\arccos\frac{8}{17}=\operatorname{arctg}\frac{15}{8}$; *c)* $\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$;

d) $\arccos\left(-\frac{9}{41}\right)=\pi-\arcsin\frac{40}{41}$.

Ind. a) Se introduce notaţia $\alpha=\arcsin\frac{15}{17}$ şi se ţine seama că $\sin\alpha=\frac{15}{17}$ şi $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Să se calculeze:

49. *a)* $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)$; *b)* $\sin(2\operatorname{arctg}3)$; *c)* $\cos\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$; *d)* $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

Ind. a) Se introduce notaţia $\alpha=\arcsin\frac{1}{5}$ şi se foloseşte identitatea $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

50. *a)* $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{5}{13}\right)$; *b)* $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}-\operatorname{arcctg}5\right)$;

c) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{8}{15}-\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

Ind. a) Se introduc notaţiile $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$, $\beta=\arccos\frac{5}{13}$ şi se foloseşte identitatea:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Să se demonstreze identităţile:

51. *a)* $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$;

b) $\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

c) $\sin(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

Ind. a) În identitatea $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ se ia $\alpha=\arccos x$. Identitatea are sens pentru $x\in[-1,1]$.

52. *a)* $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$;

b) $\cos(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

c) $\cos(\operatorname{arcctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ind. În identitatea $|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ se ia $\alpha=\operatorname{arctg}x$ şi se ţine seama că $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

53. *a)* $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{x}$.

Ind. b) În identitatea $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ se ia $\alpha=\arccos x$, observîndu-se că $\alpha\in[0,\pi]$. Identitatea are sens pentru $x\in[-1,0)\cup(0,1]$.

54. *a)* $\operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

b) $\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

c) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{x}$.

Să se demonstreze egalităţile:

55. *a)* $\arcsin\frac{8}{17}+\arcsin\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}$;

b) $\arccos 0{,}8+\arccos 0{,}6=\frac{\pi}{2}$.

Ind. a) $\arcsin\frac{15}{17}=\arccos\frac{8}{17}$.

56. *a)* $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$;

b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Ind. b) Grupînd doi cîte doi termenii din membrul stîng al egalităţii, se aplică de cîteva ori formula (3) de la pct. 57.

57. *a)* $\arcsin\frac{12}{13}-\arcsin\frac{3}{5}=\arcsin\frac{33}{65}$;

b) $\arccos\frac{4}{5}-\arccos\frac{15}{17}=\arccos\frac{84}{85}$;

c) $\operatorname{arcctg}\frac{5}{2}-\operatorname{arcctg}3=\operatorname{arcctg}17$.

58. *a)* $\operatorname{arctg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

b) $\arcsin\frac{7}{25}+\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}=\arccos\frac{3}{5}$.

Să se demonstreze identităţile:

59. *a)* $2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}=\arccos x$;

b) $2\arcsin x=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$.

Ind. a) În identitatea $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ se ia $\alpha=\arccos x$.

Identitatea are sens pentru $x\in[-1,1]$.

60. *a)* $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$;

b) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi$.

Ind. a) Dacă $0\leqslant\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}$, atunci $\cos(2\arccos x)=2x^2-1$ şi $0\leqslant 2\arccos x\leqslant\pi$. identitatea are loc pentru $x\in[0,1]$.

Capitolul IV

Ecuaţii trigonometrice

§ 17. Mulţimea unghiurilor care corespund unei valori date a unei funcţii trigonometrice

58. **Determinarea unghiurilor pentru o valoare dată a funcţiei trigonometrice.** Ne propunem să determinăm mulţimea unghiurilor (arcelor) pentru care valoarea unei anumite funcţii trigonometrice este un număr dat a.

Arcsin a. Numărul a se reprezintă pe axa Oy prin punctul Q (fig. 74). Paralela la axa Ox, dusă prin acest punct, intersectează cercul unitate în două puncte distincte, într-un punct, sau nu-l intersectează după cum $|a|<1$ $(-1<a<1)$, $|a|=1$ $(a=\pm1)$, sau $|a|>1$ $(a<-1$ ori $a>1)$.

Dacă $|a|<1$ (fig. 75, *a*), sinusurile unghiurilor $\alpha+k2\pi$ şi $\pi-\alpha+k2\pi$ $(k\in Z)$, şi numai ale acestor unghiuri, sînt egale cu a; dacă $|a|=1$ (fig. 75, *b*) sinusurile unghiurilor $\frac{\pi}{2}+k\cdot2\pi$ şi $\frac{3\pi}{2}+k\cdot2\pi(k\in Z)$, şi numai ale acestora, sînt egale, respectiv, cu 1 şi -1; dacă $|a|>1$ (fig. 75, *c*), nu există nici un unghi al cărui sinus să fie egal cu a.

În concluzie, *oricare ar fi numărul* $|a|\leqslant1$, *există o mulţime infinită de unghiuri (arce) al căror sinus este egal cu* a; *ele sînt date de formulele* $\alpha+k\cdot2\pi$ şi $\pi-\alpha+k\cdot2\pi$ $(k\in Z)$ *şi se notează* Arcsin a.

O b s e r v a ţ i e. Avînd în vedere egalitatea

$\{\alpha+k\cdot2\pi\}\cup\{\pi-\alpha+k\cdot2\pi\}=$
$=\{\alpha+2k\cdot\pi\}\cup\{-\alpha+(2k+1)\pi\}=$
$=(-1)^k\alpha+k\pi$ $(k\in Z)$, putem scrie concentrat:

$$\text{Arcsin } a=(-1)^k\alpha+k\pi\quad(k\in Z),\qquad(1)$$

α fiind unul dintre unghiurile al căror sinus este egal cu a.

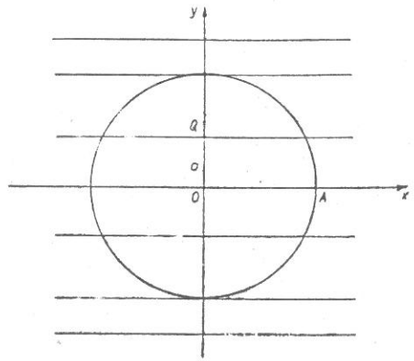


Fig. 74.

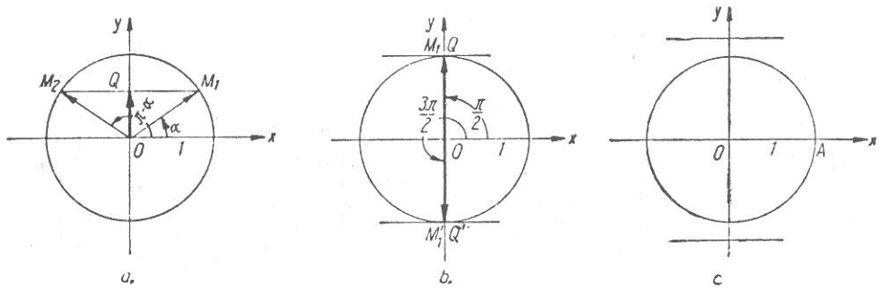


Fig. 75.

Pe de altă parte, observînd că putem lua $\alpha = \arcsin a$ (v. pct. 39), formula precedentă capătă forma definită:

$$\text{Arcsin } a = (-1)^k \arcsin a + k\pi \quad (k \in Z).^1 \qquad (1')$$

Exemple

1) $\text{Arcsin } \frac{\sqrt{3}}{2} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in Z),^2$

2) $\text{Arcsin } 1 = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z).$

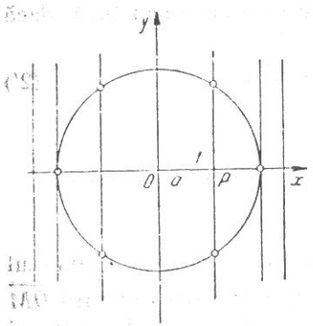


Fig. 76.

Arccos a. Numărul a se reprezintă pe axa Ox prin punctul P (fig. 76). Paralela la axa Oy, dusă prin acest punct, intersectează cercul unitate în două puncte distincte într-un punct sau nu-l intersectează după cum $|a| < 1$, $|a| = 1$, sau $|a| > 1$.

Dacă $|a| < 1$ (fig. 77, a), cosinusurile unghiurilor $\pm\alpha + k \cdot 2\pi$ $(k \in Z)$, și numai ale acestora, sînt egale cu a; dacă $|a| = 1$ (fig. 77, b), cosinusurile unghiurilor $k \cdot 2\pi$ și $\pi \pm k \cdot 2\pi$ $(k \in Z)$, și numai ale acestor unghiuri, sînt egale,

[1] Trebuie făcută o distincție netă între mulțimile Arcsin a și arcsin a. Prima reprezintă mulțimea tuturor unghiurilor al căror sinus este egal cu a, pe cînd a doua conține numai unghiul din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ al cărui sinus este egal cu a. Așadar arcsin $a \subset$ Arcsin a.

[2] Este evident că în locul unghiului $\frac{\pi}{3}$ poate fi luat oricare dintre unghiurile $2\frac{\pi}{3}$, $7\frac{\pi}{3}$, $-5\frac{\pi}{3}$ etc. Același lucru este valabil și pentru mulțimile de unghiuri Arccos a, Arctg a și Arcctg a, considerate în cele ce urmează.

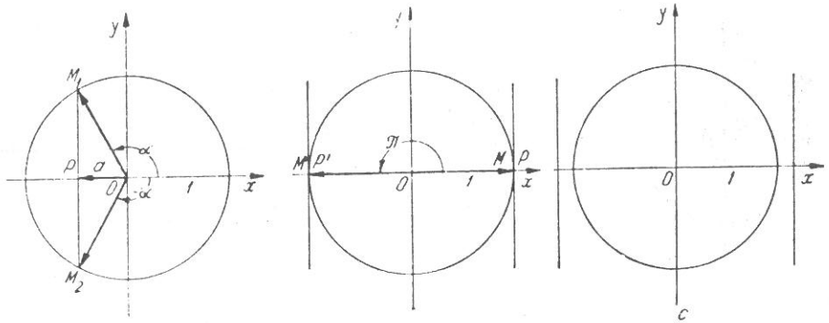


Fig. 77.

respectiv, cu 1 și —1; dacă $|a| > 1$ (fig. 77, c) nu există nici un unghi al cărui cosinus să fie egal cu a.

În concluzie, *oricare ar fi numărul* $|a| \leqslant 1$, *există o mulțime infinită de unghiuri (arce) al căror cosinus este egal cu* a; *ele sînt date de formula* $\pm\alpha + k \cdot 2\pi$ $(k \in Z)$ *și se notează Arccos* a.

Așadar:

$$\text{Arccos } a = \pm\alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z), \qquad (2)$$

α fiind unul dintre unghiurile al căror cosinus este egal cu a sau încă, dacă luăm $\alpha = \arccos a$:

$$\text{Arccos } a = \pm \arccos a + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z), \qquad (2')$$

Exemple

1) $\text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z);$

2) Arccos 2 nu există.

Arctg a. Numărul a se reprezintă pe axa tangentelor (fig. 78) prin punctul R. Dacă α este unul dintre unghiurile formate de raza vectoare unitară $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox, atunci este evident că tangentele unghiurilor $\alpha + k\pi$ $(k \in Z)$, și numai ale acestor unghiuri, sînt egale cu a.

Prin urmare, *oricare ar fi numărul* a, *există o mulțime infinită de unghiuri (arce) a căror tangentă este egală cu* a; *ele sînt date de formula* $\alpha + k\pi$ $(k \in Z)$ *și se notează Arctg* a. În concluzie,

$$\text{Arctg } a = \alpha + k\pi \quad (k \in Z), \qquad (3)$$

α fiind unul dintre unghiurile a căror tangentă este egală cu a sau încă, dacă fixăm acest unghi:

$$\text{Arctg } a = \text{arctg } a + k\pi \quad (k \in Z), \qquad (3')$$

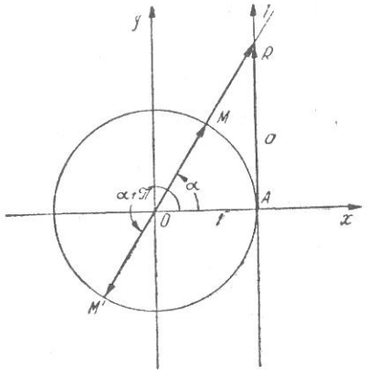


Fig. 78.

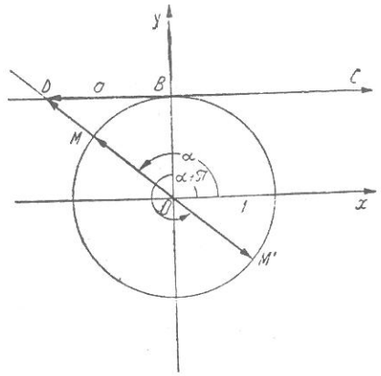


Fig. 79.

Exemple

1) $\text{Arctg } 1 = \text{arctg } 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z);$

2) $\text{Arctg } (-1) = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z).$

Arcctg a. Numărul a se reprezintă pe axa cotangentelor (fig. 79) prin punctul D. Dacă α este unul dintre unghiurile formate de raza vectoare unitară $\overrightarrow{OM}$ cu axa Ox, atunci cotangentele unghiurilor $\alpha + k\pi$ $(k \in Z)$, și numai ale acestora, sînt egale cu a.

Așadar, *oricare ar fi numărul a, există o mulțime infinită de unghiuri (arce) a căror cotangentă este egală cu a; ele sînt date de formula $\alpha + k\pi$ $(k \in Z)$ și se notează* Arcctg a.

În concluzie,

$$\text{Arcctg } a = \alpha + k\pi \quad (k \in Z), \tag{4}$$

α fiind unul dintre unghiurile a căror cotangentă este egală cu a.

La fel ca mai sus, dacă fixăm unghiul α luînd $\alpha = \text{arcctg } a$, formula precedentă devine:

$$\text{Arcctg } a = \text{arcctg } a + k\pi \quad (k \in Z). \tag{4'}$$

Exemple

1) $\text{Arcctg } 1 = \text{arcctg } 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z);$

2) $\text{Arcctg } (-\sqrt{3}) = 150° + k \cdot 180° \quad (k \in Z).$

59. Ecuațiile trigonometrice elementare

Definiție. *Egalitatea care conține necunoscuta numai sub semnul funcției trigonometrice și este satisfăcută numai pentru anumite valori date necunoscutei se numește ecuație trigonometrică.*

Acele valori care satisfac o ecuație trigonometrică se numesc *rădăcinile* sau *soluțiile* sale. A rezolva o ecuație trigonometrică înseamnă a-i determina rădăcinile.

Ecuațiile trigonometrice:

$$\sin x = a; \ \cos x = a; \ \text{tg } x = a; \ \text{ctg } x = a;$$

unde a este un număr real dat, se numesc *elementare* și au o importanță deosebită datorită faptului că, de obicei, rezolvarea unei ecuații trigonometrice se reduce la rezolvarea uneia sau a mai multor ecuații trigonometrice elementare.

Rezolvarea ecuației $\sin x = a$. Dacă $|a| > 1$, ecuația nu admite rădăcini. De aceea putem presupune $|a| \leqslant 1$.

Rădăcinile sale sînt unghiurile al căror sinus este egal cu a și deci

$$x = \text{Arcsin } a = (-1)^k \arcsin a + k\pi \quad (k \in Z).$$

Exemple

Să se rezolve ecuațiile:

$$1) \ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obținem: $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z).$

$$2) \ \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Obținem: $x = \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi =$

$$= (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in Z).$$

$$3) \ \sin x = 0.$$

Obținem: $x = \text{Arcsin } 0 = (-1)^k \arcsin 0 + k\pi = k\pi \quad (k \in Z).$

Se spune că funcția $\sin x$ se anulează pentru valorile $k\pi$ $(k \in Z)$.[1]

[1] În general, prin valorile care anulează o funcție dată $f(x)$ (sau zerourile acestei funcții) se înțelege mulțimea rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$.

Rezolvarea ecuației $\cos x = a$. Ca și în cazul precedent, ecuația are rădăcini numai pentru $|a| \leqslant 1$ și acestea sînt unghiurile al căror cosinus este egal cu a, adică

$$x = \operatorname{Arccos} a = \pm \arccos a + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z).$$

Exemple

Să se rezolve ecuațiile: 1) $\cos x + 1 = 0$.

Obținem: $x = \operatorname{Arccos}(-1) = \pm \arccos(-1) + k \cdot 2\pi = \pm\pi + k \cdot 2\pi = \pi + k \cdot 2\pi (k \in Z)$.

2) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$.

Obținem: $x = \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + k \cdot 2\pi = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z)$.

3) $\cos x = 0$.

Obținem: $x = \operatorname{Arccos} 0 = \pm \arccos 0 + k \cdot 2\pi = \pm \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$

(pentru ultima egalitate vezi aplicația de la pct. 8).

Prin urmare funcția $\cos x$ se anulează pentru valorile $\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$.

Rezolvarea ecuației $\operatorname{tg} x = a$. Rădăcinile sale sînt unghiurile a căror tangentă este egală cu a, adică

$$x = \operatorname{Arctg} a = \operatorname{arctg} a + k\pi \quad (k \in Z).$$

Exemple

Să se rezolve ecuațiile: 1) $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.

Obținem: $x = \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in Z)$.

2) $\operatorname{tg} x + 3 = 0$.

Obținem: $x = \operatorname{Arctg}(-\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + k\pi = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in Z)$.

3) $\operatorname{tg} x = 0$.

Obținem: $x = \operatorname{Arctg} 0 = \operatorname{arctg} 0 + k\pi = +k\pi \quad (k \in Z)$.

Prin urmare funcțiile $\sin x$ și $\operatorname{tg} x$ se anulează pentru aceleași valori.

Rezolvarea ecuației $\operatorname{ctg} x = a$. Rădăcinile sale sînt unghiurile a căror cotangentă este egală cu a, adică

$$x = \operatorname{Arcctg} a = \operatorname{arcctg} a + k\pi \quad (k \in Z).$$

Exemple. Să se rezolve ecuațiile: 1) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 = 0$;

Obtinem: $x = \operatorname{Arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in Z)$.

2) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

Obtinem: $x = \operatorname{Arcctg}(-1) = \operatorname{arcctg}(-1) + k\pi = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$.

3) $\operatorname{ctg} x = 0$.

Obținem: $x = \operatorname{Arcctg} 0 = \operatorname{arcctg} 0 + k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$.

Prin urmare funcțiile $\cos x$ și $\operatorname{ctg} x$ se anulează pentru aceleași valori.

Aplicație. Să se rezolve ecuația:

$$\sin(ax + b) = c,$$

unde $a \neq 0$ și $|c| \leqslant 1$.

Soluție. Obținem:

$$ax + b = (-1)^k \arcsin c + k\pi \quad (k \in Z),$$

de unde

$$x = \frac{1}{a}[-b + (-1)^k \arcsin c + k\pi] \quad (k \in Z).$$

§ 18. Funcții trigonometrice de același nume egale

60. **Egalitatea a două funcții trigonometrice de același nume.** Fie unghiurile u și v. Ne propunem să stabilim relațiile dintre ele, în ipoteza că funcțiile trigonometrice de același nume ale acestor unghiuri sînt egale. Pentru aceasta folosim relațiile:

$$\operatorname{Arcsin}(\sin x) = (-1)^k x + k\pi; \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) = \pm x + k \cdot 2\pi;$$

$$\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x + k\pi; \quad \operatorname{Arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + k\pi. \quad (k \in Z)^1$$

Demonstrațiile acestor formule fiind analoge, ne ocupăm de prima dintre ele. Notăm $\sin x = y$. Conform formulei (1) din § 17:

$$\operatorname{Arcsin}(\sin x) = \operatorname{Arcsin} y = (-1)^k \alpha + k\pi \quad (k \in Z),$$

α fiind un unghi din unghiurile al căror sinus este egal cu y. Evident, x este un astfel de unghi. Prin urmare, înlocuind în relația precedentă pe α cu x, obținem:

$$\operatorname{Arcsin}(\sin x) = (-1)^k x + k\pi \quad (k \in Z),$$

c.c.t.d.

$\sin u = \sin v$. Unghiurile u, al căror sinus este egal cu $\sin v$, sînt date de relația:

$$u = \operatorname{Arcsin}(\sin v) = (-1)^k v + k\pi \quad (k \in Z).$$

[1] În ultimele două relații trebuie ca funcțiile $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ să aibă sens în punctul x.

Reciproc, dacă $u=(-1)^k v+k\pi$ $(k\in Z)$, putem scrie:

$$u=\begin{cases} v+2\,k\pi \text{ pentru } k \text{ par,} \\ x-v+2\,k\pi \text{ pentru } k \text{ impar,} \end{cases}$$

de unde:

$\sin u=\sin(v+2k\pi)=\sin v$ (pentru k par),

$\sin u=\sin(\pi-v+2k\pi)=\sin(\pi-v)=\sin v$ (pentru k impar),

adică:

$$\sin u=\sin v.$$

Aşadar, *sinusurile unghiurilor u şi v sînt egale atunci, şi numai atunci, cînd:*

$$u=(-1)^k v+k\pi \quad (k\in Z).$$

$\cos u=\cos v$. Unghiurile u al căror cosinus este egal cu $\cos v$ sînt date de relaţia:

$$u=\text{Arccos}(\cos v)=\pm v+k\cdot 2\pi \quad (k\in Z).$$

Reciproc, dacă $u=\pm v+k\cdot 2\pi$ $(k\in Z)$, obţinem:

$$\cos u=\cos(\pm v+k\cdot 2\pi)=\cos(\pm v)=\cos v.$$

Aşadar, *tangentele unghiurilor u şi v sînt egale atunci, şi numai atunci, cînd:*

$$u=\pm v+k\cdot 2\pi \quad (k\in Z).$$

$\text{tg}\, u=\text{tg}\, v$. Unghiurile u a căror tangentă este egală cu $\text{tg}\, v$ sînt date de relaţia:

$$u=\text{Arctg}(\text{tg}\, v)=v+k\pi \quad (k\in Z).$$

Reciproc, dacă $u=v+k\pi$ $(k\in Z)$ şi unul din unghiurile u, v este diferit de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in Z)$, obţinem:

$$\text{tg}\, u=\text{tg}(v+k\pi)=\text{tg}\, v.$$

Aşadar, *tangentele unghiurilor u şi v sînt egale atunci, şi numai atunci, cînd:*

$$u=v+k\pi \quad (k\in Z),$$

unul din aceste unghiuri fiind diferit de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in Z)$.

$\text{ctg}\, u=\text{ctg}\, v$. Unghiurile u a căror cotangentă este egală cu $\text{ctg}\, v$ sînt date de relaţia:

$$u=\text{Arcctg}(\text{ctg}\, v)=v+k\pi \quad (k\in Z).$$

Reciproc, dacă $u=v+k\pi$ $(k\in Z)$ şi unul din unghiurile u, v este diferit de $k\pi$ $(k\in Z)$, obţinem:

$$\text{ctg}\, u=\text{ctg}(v+k\pi)=\text{ctg}\, v.$$

Aşadar, *cotangentele unghiurilor u şi v sînt egale atunci, şi numai atunci, cînd:*

$$u=v+k\pi \quad (k\in Z),$$

unul din aceste unghiuri fiind diferit de $k\pi$ $(k\in Z)$.

61. Ecuaţii de forma sin $f(x)$=sin $g(x)$ etc. *Ecuaţia* $\sin f(x)=\sin g(x)$, exprimînd egalitatea sinusurilor a două funcţii, conform celor spuse mai înainte, este echivalentă cu ecuaţia:

$$f(x)=(-1)^k g(x)+k\cdot\pi \quad (k\in Z).$$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 4x+\sin 2x=0.$$

Soluţie:

Ecuaţia poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$\sin 4x=-\sin 2x$$

sau:

$$\sin 4x=\sin(-2x),$$

de unde:

$$4x=(-1)^k(-2x)+k\pi \quad (k\in Z).$$

Pentru k par obţinem:

$$4x=-2x+2k\pi,$$

adică

$$x=k\,\frac{\pi}{3}:$$

pentru k impar:

$$4x=\pi+2x+2k\pi,$$

adică

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Prin urmare, ecuaţia dată este satisfăcută pentru

$$x\in\left\{k\,\frac{\pi}{3}\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in Z}$$

Ecuaţia $\cos f(x)=\cos g(x)$, exprimînd egalitatea cosinusurilor a două funcţii, este echivalentă cu ecuaţia:

$$f(x)=\pm g(x)+k\cdot 2\pi \quad (k\in Z).$$

Exemplu: Să se rezolve ecuația:

$$\sin 5x \sin x = \sin 4x \sin 2x.$$

Soluție. Transformînd produsele de sinusuri în diferențe, obținem:

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x)$$

sau:

$$\cos 4x = \cos 2x,$$

de unde:

$$4x = \pm 2x + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z).$$

Ecuația dată are rădăcinile:

$$x = k\frac{\pi}{3} \text{ și } x = k\pi \quad (k \in Z)$$

sau, cu altă notație:

$$x \in \left\{k\frac{\pi}{3}\right\}_{k \in Z} \cup \{k\pi\}_{k \in Z} = \left\{k\frac{\pi}{3}\right\}_{k \in Z^2}$$

Ecuația $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$, exprimînd egalitatea tangentelor a două funcții, este echivalentă cu ecuația:

$$f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in Z),$$

cu condiția ca, pentru rădăcinile ultimei ecuații, valorile uneia din funcțiile

$$f(x),\ g(x) \text{ să fie diferite de } \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z).$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} x^2 = \operatorname{tg} 2x.$$

Soluție. Obținem ecuația de gradul al doilea în x:

$$x^2 = 2x + k\pi \quad (k \in Z),$$

ale cărei rădăcini sînt reale dacă, și numai dacă, realizantul

$$\Delta = 1 + k\pi \geqslant 0,$$

adică pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$

Rezolvînd ultima ecuație, obținem:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + kx} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pentru aceste valori:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2(1 \pm \sqrt{1 + k\pi}) \text{ există.}$$

Prin urmare, ecuația dată are rădăcinile:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + k\pi} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ecuația $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$ exprimînd egalitatea cotangentelor a două funcții, este echivalentă cu ecuația:

$$f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in Z),$$

cu condiția ca, pentru rădăcinile ultimei ecuații, valorile uneia din funcțiile $f(x)$, $g(x)$ să fie diferite de $k\pi$ $(k \in Z)$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x = 0.$$

Soluție. Obținem:

$$\operatorname{ctg} 2x = -\operatorname{tg} x$$

sau:

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

adică

$$2x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi \quad (k \in Z)$$

sau:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z).$$

Însă pentru aceste unghiuri funcția $\operatorname{tg} x$ (sau $\operatorname{ctg} 2x$) nu are sens. Prin urmare, ecuația dată nu are nici o rădăcină.

O b s e r v a ț i e. Ecuațiile de acest tip se pot rezolva și altfel, și anume, transformîndu-se în produs suma sau diferența funcțiilor trigonometrice de același nume.

De exemplu, pentru ecuația:

$$\sin 4x + \sin 2x = 0$$

obținem:

$$2 \sin 3x \cos x = 0.$$

Ultima ecuație este echivalentă cu ecuațiile:

$$a)\ \sin 3x = 0;\quad b)\ \cos x = 0 \text{ ș.a.m.d.}$$

§ 19. Ecuații trigonometrice reductibile la ecuații elementare și sisteme de ecuații trigonometrice

62. **Ecuații trigonometrice reductibile la ecuații care conțin aceeași funcție a aceluiași unghi.** Unele ecuații trigonometrice se transformă cu ajutorul identităților trigonometrice în ecuații care conțin aceeași funcție a aceluiași unghi. În consecință, rezolvarea lor se reduce, în general, la rezolvarea unei ecuații algebrice în care necunoscuta este o funcție trigonometrică a unghiului ce trebuie determinat.

Exemple. 1) *Să se rezolve ecuația:*

$$2\cos^2 x - 2\sin x + \sqrt{3}\sin x = 2 - \sqrt{3}.$$

Soluție. Trecînd toți termenii în membrul stîng și ținînd seama de identitatea $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, obținem o ecuație de gradul al doilea în $\sin x$:

$$2\sin^2 x + (2-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} = 0,$$

de unde:

$$\sin x = \frac{-2+\sqrt{3} \pm \sqrt{4+4\sqrt{3}+3}}{4} = \frac{-2+\sqrt{3} \pm (2+\sqrt{3})}{4}.$$

Prin urmare, ecuația dată este echivalentă cu ecuațiile:

$$a)\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad b)\ \sin x = -1,$$

ale căror rădăcini sînt, respectiv:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi;\quad x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{2}\right) + k\pi\quad (k \in Z).$$

Așadar:

$$x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi\right\}_{k \in Z} \cup \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k \in Z}.$$

2) *Să se rezolve ecuația:*

$$1 - \sin x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

Soluție. Membrul stîng se poate scrie sub forma:

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Prin urmare, după reducere, ecuația devine:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\quad (k \in Z)^1.$$

3) *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}$$

Soluție. Aplicînd formulele pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului triplu:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

după transformări, obținem:

$$3\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8}.$$

Ținînd seama de identitățile:

$$2\sin x \cos x = \sin 2x;\quad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

ultima ecuație devine:

$$\frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{8}$$

sau, aplicînd din nou formula pentru sinusul unghiului dublu:

$$\sin 4x = \frac{1}{2},$$

ale cărei rădăcini sînt:

$$x = \frac{1}{4}\left[(-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + k\pi\right] = (-1)^k \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}\quad (k \in Z).$$

4) *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{\sin(x+3^\circ)}{\sin(x+5^\circ)} = \frac{3}{5}.$$

Soluție. Formăm proporția derivată:

$$\frac{\sin(x+3^\circ)+\sin(x+5^\circ)}{\sin(x+5^\circ)-\sin(x+3^\circ)} = \frac{3+5}{5-3}.$$

Transformînd suma și diferența de sinusuri în produs, obținem:

$$\frac{\sin(x+4^\circ)\cos 1^\circ}{\cos(x+4^\circ)\sin 1^\circ} = 4$$

[1] k, fiind un număr întreg arbitrar, a putut fi înlocuit cu $-k$.

sau:

$$\operatorname{tg}(x+4^\circ)=4\operatorname{tg}1^\circ,$$

de unde:

$$x=-4^\circ+\operatorname{arctg}(4\operatorname{tg}1^\circ)+k\cdot 180^\circ \qquad (k\in Z).$$

63. **Ecuaţii omogene în** $\sin x$ **şi** $\cos x$. Ecuaţia

$$a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x+\ldots+a_n\cos^n x=0,$$

unde cel puţin unul din numerele $a_0, a_1, \ldots, a_n$ este nenul, se numeşte ecuaţie trigonometrică omogenă în $\sin x$ şi $\cos x$.

Considerăm $a_0\neq 0$. Împărţind ambii membri ai ecuaţiei cu $\cos^n x$, obţinem ecuaţia de gradul n în $\operatorname{tg} x$:

$$a_0\operatorname{tg}^n x+a_1\operatorname{tg}^{n-1}x+\ldots+a_n=0$$

care, rezolvată în raport cu $\operatorname{tg} x$, ne conduce la cel mult n ecuaţii elementare de forma $\operatorname{tg} x=a$ (a real).

Dacă $a_0=0$, ecuaţia dată se descompune în ecuaţia $\cos x=0$ şi o ecuaţie omogenă.

O b s e r v a ţ i e: Prin împărţirea ambilor membri ai unei ecuaţii cu $\cos^n x$ se pot pierde rădăcini (acele rădăcini ale ecuaţiei care sînt, totodată, rădăcini ale ecuaţiei $\cos^n x=0$). În cazul de faţă nu se pierd însă rădăcini. Într-adevăr, fie x_0 o rădăcină a ecuaţiei $\cos^n x=0$. Deducem:

$$\cos x_0=\cos^2 x_0=\ldots=\cos^n x_0=0.$$

Dacă x_0 ar fi rădăcină şi a ecuaţiei date, ar trebui ca $a_0\sin^n x_0=0$, adică $\sin x_0=0$, ceea ce este imposibil, fiindcă funcţiile sinus şi cosinus nu se anulează pentru aceeaşi valoare x_0 a argumentului.

Exemple. 1) *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=0.$$

Soluţie. Împărţind ambii membri cu $\cos x$ şi separînd termenii, obţinem ecuaţia echivalentă:

$$\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

de unde:

$$x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+k\pi=-\frac{\pi}{6}+k\pi \qquad (k\in Z).$$

2) *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}.$$

Soluţie. Ecuaţia se poate omogeniza folosind identitatea: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Obţinem:

$$\sin^6 x+\cos^6 x-\frac{1}{4}(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=0$$

sau:

$$\sin^6 x-\sin^4 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x=0.$$

Împărţind ambii membri ai ecuaţiei omogene cu $\cos^6 x$, obţinem o ecuaţie în $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg}^6 x-\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x+1=0$$

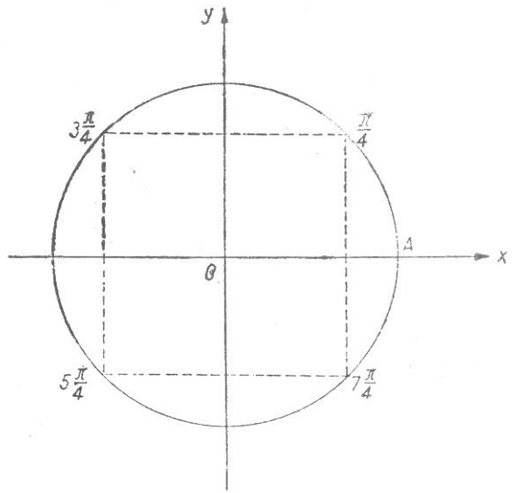


Fig. 80.

sau, grupînd termenii:

$$\operatorname{tg}^4 x(\operatorname{tg}^2 x-1)-(\operatorname{tg}^2 x-1)=0,$$

adică:

$$(\operatorname{tg}^2 x-1)^2(\operatorname{tg}^2 x+1)=0,$$

de unde se obţin ecuaţiile elementare:

$$\operatorname{tg} x=\pm 1,$$

ale căror rădăcini sînt:

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

şi

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in Z).$$

Aşadar ecuaţia dată are rădăcinile:

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi \qquad (k\in Z).$$

O b s e r v a ţ i e. Arcele $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)_{k\in Z}$ au extremităţile în punctele $\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4}$ aparţinînd cercului unitate (fig. 80), iar arcele $\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}_{k\in Z}$ au extremităţile în punctele $3\frac{\pi}{4}$, $7\frac{\pi}{4}$. Prin urmare, rădăcinile ecuaţiei date şi numai ele, sînt arcele cu originea în punctul A şi extremitatea într-unul

din aceste puncte. Însă punctele $\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4}$, $7\frac{\pi}{4}$ fiind vîrfurile unui pătrat (v. aplicația de la pct. 8), putem scrie rădăcinile ecuației sub forma concentrată.

$$x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\quad(k\in Z).$$

64. **Ecuația liniară în** $\sin x$ **și** $\cos x$. Ecuația

$$a\sin x+b\cos x=c,$$

unde numerele a, b nu sînt nule în același timp, se numește ecuația liniară în $\sin x$ și $\cos x$. Pentru alegere considerăm $a\neq 0$.

Metoda unghiului auxiliar. Împărțind ambii membri cu a și notînd $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$, obținem, pe rînd (v. pct. 48):

$$\sin x+\operatorname{tg}\varphi\cos x=\frac{c}{a},$$

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{a}\cos\varphi,$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Însă $\cos\varphi=\frac{1}{+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Deci, ultima ecuație devine:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c\,|a|}{a\sqrt{a^2+b^2}},$$

sau:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},$$

unde se ia semnul + sau —, după $a>0$ sau $a<0$.

Această ecuație are rădăcini dacă $\left|\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1$, adică $c^2\leqslant a^2+b^2$

Presupunînd această condiție îndeplinită și ținînd seama de relația $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$, se determină rădăcinile ecuației:

$$x=(-1)\arcsin\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+k\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\quad(k\in Z).$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x-2=0.$$

Soluție. Împărțind ambii membri cu $\sqrt{3}$ și trecînd termenul constant în membrul drept, obținem:

$$\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Scriind $\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, ecuația precedentă devine:

$$\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6}$$

sau:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1,$$

de unde:

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{6}\quad(k\in Z).$$

Metoda substituției. Ecuația liniară este rațională în $\sin x$ și $\cos x$. Pe de altă parte, aceste funcții se exprimă rațional prin $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

Notînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, se obține ecuația rațională:

$$a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c$$

sau:

$$(c+b)t^2-2at+c-b=0$$

Presupunînd $c+b\neq 0$ și $\Delta=a^2+b^2-c^2\geqslant 0$, obținem:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},$$

de unde:

$$x=2\left(\operatorname{arctg}\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}+k\pi\right)\quad(k\in Z).$$

O b s e r v a ț i i. 1° Funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu are sens pentru $x=\pi+k\cdot 2\pi$ $(k\in Z)$. În consecință, rădăcinile ecuației date de forma $\pi+k\cdot 2\pi$ $(k\in Z)$, nu se află printre rădăcinile obținute anterior. În acest caz:

$$a\sin(\pi+k\cdot 2\pi)+b\cos(\pi+k\cdot 2\pi)=c$$

sau:

$$c+b=0,$$

deci ecuația de gradul al doilea în t degenerează în ecuația de gradul întîi:

$$-2at-2b=0.$$

În concluzie, ecuația $a \sin x+b \cos x=-b$ este satisfăcută pentru:

$$x \in (\pi+k2\pi)_{k \in Z} \cup \left\{2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)+k2\pi\right\}_{k \in Z}$$

2° În principiu, orice ecuație care conține funcțiile trigonometrice ale unghiului x se poate rezolva prin substituție $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. De cele mai multe ori se obțin însă ecuații algebrice în t de grad superior, a căror rezolvare este dificilă. În afară de aceasta trebuie să se cerceteze dacă unghiurile pentru care funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu are sens verifică ecuația respectivă.

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$\sin x-4 \cos x-4=0.$$

Soluție. Făcînd substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, obținem ecuația rațională:

$$\frac{2t}{1+t^2}-4\frac{1-t^2}{1+t^2}-4=0$$

sau:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}=4,$$

de unde:

$$x=2(\operatorname{arctg} 4+k\pi), \quad (k \in Z).$$

Unghiurile precedente nu sînt însă singurele rădăcini ale ecuației date.

Într-adevăr și unghiurile $\{\pi+k \cdot 2\pi\}_{k \in Z}$ (pentru aceste valori $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu are sens) verifică ecuația inițială;

$$\sin(\pi+k \cdot 2\pi)-4 \cos(\pi+k \cdot 2\pi)-4=\sin \pi-4 \cos \pi-4=4-4=0.$$

În consecință, ecuația dată are rădăcinile:

$$x \in \{\pi+k \cdot 2\pi\}_{k \in Z} \cup \{2 \operatorname{arctg} 4+k \cdot 2\pi\}_{k \in Z}$$

65. Exemple de ecuații care se rezolvă prin descompunere în factori

1) *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin x \cos x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0.$$

Soluție. Grupînd termenii, obținem:

$$(\sin x \cos x-\sin^2 x)-(\cos x-\sin x)=0$$

sau:

$$\sin x(\cos x-\sin x)-(\cos x-\sin x)=0,$$

sau încă:

$$(\sin x-1)(\cos x-\sin x)=0.$$

Așadar ecuația dată se descompune în ecuațiile:

$$a) \ \sin x=1; \quad b) \ \cos x-\sin x=0.$$

Ecuația *a)* are rădăcinile $\left\{\frac{\pi}{2}+k \cdot 2\pi\right\}_{k \in Z}$. Ecuația *b)* este omogenă în $\sin x$ și $\cos x$ și se transformă în ecuația echivalentă $1-\operatorname{tg} x=0$, ale cărei rădăcini sînt unghiurile $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k \in Z}$. În consecință, ecuația dată are rădăcinile:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2}+k \cdot 2\pi\right\}_{k \in Z} \cup \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}_{k \in Z}.$$

2) *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin x+\cos x+\sin x \cos x-1=0.$$

Soluție. Scriem ecuația sub forma:

$$\sin x+\cos x=1-\sin x \cos x.$$

Ridicînd la pătrat ambii membri ai ultimei ecuații și ținînd seama de identitățile $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $2 \sin x \cos x=\sin 2x$, obținem:

$$1+\sin 2x=1-\sin 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

sau:

$$\sin 2x(\sin 2x-8)=0.$$

Fiindcă al doilea factor este negativ, atunci:

$$\sin 2x=0,$$

de unde:

$$x=k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z).$$

Însă prin ridicarea la pătrat a membrilor unei ecuaţii se pot introduce rădăcini străine. Eliminarea acestora se poate face cercetînd dacă toate rădăcinile ultimei ecuaţii verifică, sau nu, ecuaţia iniţială.

Scriind unghiurile $x=k\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ sub forma:

$$x=\begin{cases} k'2\pi \text{ pentru } k=4k', \\ k'2\pi+\frac{\pi}{2} \text{ pentru } k=4k'+1, \\ k'2\pi+2\frac{\pi}{2} \text{ pentru } k=4k'+2, \\ k'2\pi+3\frac{\pi}{2} \text{ pentru } k=4k'+3, \end{cases} \qquad (k\in Z)$$

primul membru al ecuaţiei iniţiale are valorile:

$$\sin k'2\pi+\cos k'2\pi+\sin k'2\pi\cos k'2\pi-1=1-1=0$$

pentru unghiurile $k'2\pi$:

$$\sin\left(k'2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(k'2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(k'2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k'2\pi+\frac{\pi}{2}\right)-1=$$

$=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-1=1-1=0$ pentru unghiurile

$k'2\pi+\frac{\pi}{2}$; $\sin(k'2\pi+\pi)+\cos(k'2\pi+\pi)+\sin(k'2\pi+\pi)\cos(k'2\pi+\pi)-1=$

$=\sin\pi+\cos\pi+\sin\pi\cos\pi-1=-1-1=-2$ pentru unghiurile $k'2\pi+\pi$;

$$\sin\left(k'2\pi+3\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(k'2\pi+3\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(k'2\pi+3\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k'2\pi+3\frac{\pi}{2}\right)-1=$$

$=\sin 3\frac{\pi}{2}+\cos 3\frac{\pi}{2}+\sin 3\frac{\pi}{2}\cos 3\frac{\pi}{2}-1=-1-1=-2$ pentru

unghiurile $k'2\pi+3\frac{\pi}{2}$.

Aşadar, numai unghiurile $\{k'2\pi\}_{k'\in Z}$ şi $\left\{k'2\pi+\frac{\pi}{2}\right\}_{k'\in Z}$ sînt rădăcini ale ecuaţiei date.

O b s e r v a ţ i e. Rădăcinile străine se puteau elimina şi folosind faptul că primul membru al ecuaţiei date este o funcţie periodică, cu perioada 2π. Într-adevăr este suficient să se verifice numai unghiurile $0\leqslant k\frac{\pi}{2}<2\pi$ adică $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$. Se constată uşor că, dintre aceste unghiuri, 0 şi $\frac{\pi}{2}$ verifică ecuaţia iniţială. Prin urmare, rădăcinile sale se obţin adăugînd la unghiurile 0 şi $\frac{\pi}{2}$ perioada funcţiei:

$$x\in\{k2\pi\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}_{k\in Z},$$

rezultat obţinut şi mai înainte.

3) Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 7x+\sin x+\cos 8x-1=0.$$

Soluţie: Grupînd termenii, obţinem:

$$(\sin 7x+\sin x)-(1-\cos 8x)=0$$

sau, transformînd funcţiile din paranteze în produse:

$$2\sin 4x\cos 3x-2\sin^2 4x=0.$$

Ultima ecuaţie este echivalentă cu ecuaţiile:

$$a)\ \sin 4x=0;\quad b)\ \cos 3x-\sin 4x=0.$$

Ecuaţia *a*) are rădăcinile $x=k\frac{\pi}{4}$ $(k\in z)$. Pentru a rezolva ecuaţia *b*), o scriem sub forma:

$$\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right),$$

de unde:

$$3x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+2k\pi\ (k\in Z).$$

Aşadar, rădăcinile ecuaţiei date sînt:

$$x\in\left\{k\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7}\right\}_{k\in Z}$$

sau, ţinînd seama de incluziunea $\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}_{k\in Z}\subset\left\{k\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in Z}$:

$$x\in\left\{k\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7}\right\}_{k\in Z}.$$

4) Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2.$$

Soluţie. Ecuaţia dată se poate scrie sub forma:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=2$$

sau:

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0.$$

Grupînd în ultima ecuație primul termen cu al patrulea, al doilea cu al treilea și transformînd sumele în produse, obținem:

$$2\cos 5x\cos 3x+2\cos 5x\cos x=0$$

sau:

$$\cos 5x\,(\cos 3x+\cos x)=0,$$

sau, transformînd suma din paranteză în produs:

$$\cos 5x\cos 2x\cos x=0$$

de unde:

$$5x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in Z).$$

Așadar, ecuația dată are rădăcinile:

$$x\in\left\{\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in Z}$$

O b s e r v a ț i e. Rădăcinile ecuației sînt arcele și numai acelea, cu originea în punctul A și extremitățile în punctele din figura 81, aparținînd cercului unitate. Însă punctele $\frac{\pi}{10}, 3\frac{\pi}{10}, \ldots, 19\frac{\pi}{10}$ fiind vîrfurile unui decagon regulat, iar $\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}$ vîrfurile unui pătrat, rădăcinile ecuației se pot scrie sub forma concisă:

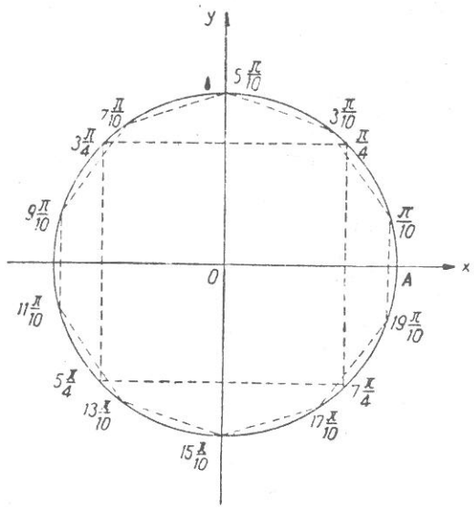


Fig. 81.

$$x\in\left\{\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{10}\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right\}_{k\in Z},$$

adică:

$$x\in\left\{\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right\}_{k\in Z}$$

Rezultatul precedent se putea obține observînd incluziunea

$$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in Z}\subset\left\{\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\right\}_{k\in Z}$$

66. **Sisteme de ecuații trigonometrice.** Găsirea căii de rezolvare a unui sistem trigonometric este, în cele mai multe cazuri, dificilă. De aceea ne limităm la cîteva exemple simple:

1) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=a,\\ x+y=b.\end{cases}$$

Caz particular: $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\pi}{3}$.

Soluție. Transformăm în produs membrul stîng al primei ecuații:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a.$$

Folosind a doua ecuație, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases}2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a,\\ x+y=b.\end{cases}$$

În ipoteza că $\sin\frac{b}{2}\neq 0$ și $\left|\frac{a}{2\sin\frac{b}{2}}\right|\leqslant 1$, soluțiile sistemului dat se obțin rezolvînd sistemul liniar:

$$\begin{cases}\frac{x-y}{2}=\pm\arccos\frac{a}{2\sin\frac{b}{2}}+k\cdot 2\pi,\\ \frac{x+y}{2}=\frac{b}{2}\end{cases}\quad(k\in Z)$$

În cazul particular se obține sistemul liniar:

$$\begin{cases}\frac{x-y}{2}=\pm\arccos\frac{1}{2}+k\cdot 2\pi,\\ \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{6}\end{cases}\quad(k\in Z)$$

sau:

$$\begin{cases}\frac{x-y}{2}=\pm\frac{\pi}{3}k\cdot 2\pi,\\ \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{6},\end{cases}\ (k\in Z)$$

de unde:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi, \\ y=-\frac{\pi}{6}-k\cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi, \\ y=\frac{\pi}{2}-k\cdot 2\pi. \end{cases} \quad (k\in Z)$$

2) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \cos x \cos y=a, \\ x-y=b. \end{cases}$$

Soluție. Transformăm în sumă membrul stîng al primei ecuații:

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=a.$$

Folosind a doua ecuație, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos b]=a, \\ x-y=b. \end{cases}$$

În ipoteză ca $|2a-\cos b|\leqslant 1$, se obține sistemul liniar:

$$\begin{cases} x+y=\pm\arccos(2a-\cos b)+k2\pi, \\ x-y=b \end{cases} \quad (k\in Z)$$

ale cărui soluții sînt soluțiile sistemului dat.

3) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y=b. \end{cases}$$

Caz particular: $a=1-\sqrt{3}$, $b=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soluție. Introducînd noile necunoscute:

$$u=\operatorname{tg} x;\ v=\operatorname{tg} y,$$

se obține sistemul algebric:

$$\begin{cases} u+v=a, \\ \frac{1}{uv}=b, \end{cases}$$

sau, dacă $b\neq 0$:

$$\begin{cases} u+v=a, \\ uv=\frac{1}{b}, \end{cases}$$

de unde rezultă că u și v sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea:

$$z^2-az+\frac{1}{b}=0 \text{ ș.a.m.d.}$$

În cazul particular se obține sistemul algebric:

$$\begin{cases} u+v=1-\sqrt{3}, \\ uv=-\sqrt{3}, \end{cases}$$

de unde rezultă că u și v sînt rădăcinile ecuației:

$$z^2-(1-\sqrt{3})\,z-\sqrt{3}=0.$$

Obținem:

$$u=z_1=1, \qquad v=z_2=-\sqrt{3},$$

și

$$u=z_2=-\sqrt{3}, \qquad v=z_1=1$$

sau, revenind la variabilele inițiale:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x=1 \\ \operatorname{tg} y=-\sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{și} \begin{cases} \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} y=1, \end{cases}$$

de unde se obțin soluțiile sistemului dat:

$$\begin{cases} x=45^\circ+k_1\cdot 180^\circ, \\ y=-60^\circ+k_2\cdot 180^\circ \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x=-60^\circ+k_2\cdot 180^\circ, \\ y=45^\circ+k_1\cdot 180^\circ, \end{cases}$$

k_1 și k_2 fiind numere întregi arbitrare.

4) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin x-\sin y=a, \\ \cos x+\cos y=b. \end{cases}$$

Soluție. Transformînd primii membri ai ecuațiilor în produse, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=a, \\ 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=b. \end{cases}$$

În ipoteza că $b\neq 0$, ecuațiile ultimului sistem se pot împărți membru cu membru și se obține ecuația:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{a}{b}$$

sau:

$$\frac{x-y}{2} = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + k \cdot \pi \ (k \in Z).$$

Substituind valoarea raportului $\frac{x-y}{2}$ într-una din ecuațiile sistemului precedent, se obține un sistem liniar în x și y ș.a.m.d.

Exerciții

Să se determine forma generală a unghiurilor α, fiind date valorile funcțiilor trigonometrice:

1. *a)* $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\sin \alpha = 1$; *c)* $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; *d)* $\sin \alpha = 0$.

2. *a)* $\cos \alpha = 0$, *b)* $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; *c)* $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *d)* $\cos \alpha = -1$.

3. *a)* $\operatorname{tg} \alpha = -1$; *b)* $\operatorname{ctg} \alpha = 1$; *c)* $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$; *d)* $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

Întrebuințînd formulele generale, să se determine următoarele mulțimi de unghiuri:

4. *a)* $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; *b)* $\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\operatorname{Arcsin}(-1)$.

5. *a)* $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$; *b)* $\operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\operatorname{Arccos} 1$.

6. *a)* $\operatorname{Arctg} 0$; *b)* $\operatorname{Arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; *c)* $\operatorname{Arctg}\sqrt{3}$.

7. Să se găsească toate numerele $\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2}$ aparținînd intervalului $[0, 4\pi]$.

8. Să se găsească toate numerele $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$ aparținînd intervalului $[-2\pi, 2\pi]$.

9. Să se găsească toate numerele $\operatorname{Arcctg}(-1)$ aparținînd intervalului $[-\pi, \pi]$.

10. Să se arate că:

a) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{2}}{2} \subset \operatorname{Arctg} 1 \cup \operatorname{Arcctg}(-1)$.

b) $\operatorname{Arcsin} 1 \cup \operatorname{Arcsin}(-1) = \operatorname{Arccos} 0 \cup \operatorname{Arccos} 2$;

c) $(\operatorname{Arctg} 0 \cup \operatorname{Arcctg} 0) \cap (\operatorname{Arcsin} 0 - \operatorname{Arccos} 1) = \operatorname{Arccos}(-1)$.

11. Să se arate că numerele din dreapta sînt rădăcini ale ecuațiilor corespunzătoare:

a) $2 \sin^5 x = 3 \sin^3 x - \sin x$; $-\frac{\pi}{2}, \pi$;

b) $\sin(3x+1) + \cos 3x = 0$; $-\frac{\pi+2}{12}$; $\frac{3\pi-2}{12}$.

12. Este numărul $\frac{\pi}{2}$ rădăcină a ecuației $\frac{\cos x}{1-\sin x} = 0$?

13. Este numărul $\frac{\pi}{4}$ rădăcină a ecuației $\cos 2x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$?

14. Sînt echivalente ecuațiile:

a) $\cos^2 x = 0$ și $\cos 2x = -1$;

b) $(1 - 2 \sin x) \operatorname{tg} x = 0$ și $(1 - 2 \sin x) \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0$;

c) $|\sin x| - |\cos x| = 0$ și $\operatorname{tg}^2 x = 1$?

Să se rezolve ecuațiile:

15. *a)* $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$; *b)* $2 \cos \frac{x+1}{3} + 1 = 0$;

c) $\operatorname{tg} 4x = 0$; *d)* $\sqrt{3} \operatorname{ctg}(3x + 15°) + 3 = 0$;

e) $|\sin x| - \sin x = 2$.

16. *a)* $\cos^2(x + 30°) - \sin^2(x + 30°) = -\frac{1}{2}$;

b) $\sin(24° - x) \sin(66° + x) = \frac{1}{4}$;

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$; *d)* $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 2 \cos x} = \frac{3}{1}$;

e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos 2x + \sin(2x - \pi) \sin x = 0$;

f) $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = 0{,}25$.

17. *a)* $\sin 2x = \sin 5x$; *b)* $\sin 3x = -\sin \frac{x}{3}$;

c) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0$.

18. *a)* $\cos(2x + 10°) = \cos(6x - 10°)$;

b) $\cos(x+1) + \cos(x-1) = 0$;

e) $2 \cos^2 x - 1 = \sin 4x$.

19. *a)* $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 30°\right) = \operatorname{tg}(2x + 60°)$;

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$.

20. *a)* $\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2} \cos x$.

b) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$;

c) $\sin(x + 15°) \sin(x - 30°) = \sin(50° + x) \cos(85° - x)$;

d) $\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1$.

21. *a)* $2\cos^2 2x=\cos 2x$; *b)* $3\,\mathrm{tg}^2 4x=1$.

22. *a)* $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; *b)* $2\cos 2x=7\sin x$;

c) $3\cos^2 x-\sin^2 x+3\cos x=0$; *d)* $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=2$; *e)* $\cos^2 x-|\sin x|=\frac{1}{4}$.

Ind. e) Se scrie ecuația sub forma echivalentă $4|\sin x|^2+4|\sin x|-3=0$.

23. *a)* $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$; *b)* $\sin^2 x-8\sin x\cos x+7\cos^2 x=0$;

d) $9\sin^2 x+15\sin 2x+25\cos^2 x=25$;

e) $\sin^4 x+5\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=2$.

24. *a)* $\cos x-|\mathrm{tg}\,x|=1$; *b)* $(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin x+5$.

Ind. a) Scriind ecuația dată sub forma echivalenă $|\mathrm{tg}\,x|+|1-\cos x|=0$, rezultă că rădăcinile sale sînt rădăcinile comune ale ecuațiilor $\mathrm{tg}\,x=1-\cos x=0$; *b)* Din inegalitățile $|\cos 4x-\cos 2x|\leqslant|\cos 4x|+|\cos 2x|\leqslant 2$ și $|\sin x+5|=\sin x+5\geqslant 4$, rezultă că cei doi membri ai ecuației sînt egali dacă și numai dacă $(\cos 4x-\cos 2x)^2=1$ și $\sin x+5=4$.

25. *a)* $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$; *b)* $4\sin x+3\cos x=2$;

c) $\sin 3x+2\cos 3x=1$.

26. *a)* $5\cos(2x+18°)-12\sin(2x+18°)=13$;

b) $(4\sin x-5\cos x)^2-13(4\sin x-5\cos x)+42=0$;

c) $|\sin x|-|\cos x|=1$.

Ind. c) Funcția $|\sin x|-|\cos x|-1$ admite perioada π. În intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ecuația dată este echivalentă cu ecuatia $\sin x-\cos x=1$, iar în intervalul $\left[\frac{\pi}{2}\pi\right]$ — cu ecuația $\sin x+\cos x=1$.

27. Să se determine unghiurile unui romb, dacă raportul dintre perimetrul său și suma diagonalelor este egal cu $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ind. Se exprimă diagonalele rombului în funcție de latura și unul din semiunghiurile sale.

Să se rezolve ecuațiile:

28. *a)* $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$; *b)* $1-\cos 2x=4\sin x$;
c) $\cos 8x-\cos 6x=\sqrt{3}\cos x$; *d)* $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x=\sin 3x\cos x$.

29. *a)* $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$;

b) $\sin 2x+2\sin x=\sin\frac{x}{2}$;

c) $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x=\mathrm{tg}\,3x$; *d)* $\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$;

e) $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}-\frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x}-\frac{1}{\sec^2 x}-\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x}=-3$.

Ind. Ecuația *d)* este echivalentă cu ecuația:
$$\cos x-\cos 3x=3\sin^2 x.$$

30. *a)* $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$;

b) $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos x$;

c) $1+\cos 2x+\sin x=2\cos^2\frac{x}{2}$.

Ind. Ecuația *b)* se poate scrie sub forma $\sin^2 x=\cos x\sin^2 x$.

31. *a)* $\sin^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\frac{3}{2}$;

b) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$;

c) $\sin^4 x+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}$.

Ind. Se folosesc identitățile: $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

32. Să se verifice că perechile de numere din dreapta sînt soluții ale sistemelor:

$$\begin{cases} x+y=120°, \\ \sin x+\sin y=\frac{3}{2} \end{cases} \qquad (x=90°,\ y=30°) \text{ și } (x=390°,\ y=-270°)$$

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=\frac{1}{2}, \\ \mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=2 \end{cases} \qquad \left(x=\frac{\pi}{2}+(k_1+k_2)\pi,\ y=\frac{\pi}{4}+(k_1-k_2)\pi\right)$$

k_1 și k_2 fiind numere întregi arbitrare.

33. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{1}{2}, \\ x-y=60°; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin x+\sin y=0, \\ \mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y=2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \cos 2x-\cos 2y=-\frac{1}{2}, \\ \sin x\cos y=-\frac{1}{2}; \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x+y=a, \\ \sin x\sin y=b. \end{cases}$

34. Să se determine $\cos(x+y)$, dacă x și y satisfac sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=a, \\ \cos x+\cos y=b, \end{cases} \qquad \text{și } a^2+b^2=0.$$

Ind. Se calculează b^2-a^2 și b^2+a^2 sau se transformă în produse și se deduce $\mathrm{tg}\,\frac{x+y}{2}$.

35. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}^2 y, \\ \sin x=\cos 2y. \end{cases}$$

Ind. Se scrie ultima ecuație sub forma $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)$, de unde

$x=\frac{\pi}{2}-2y+k\cdot 2\pi$ și $x=2y-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$.

36. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=1.\end{cases}$$

Ind. Se scrie prima ecuație sub forma:

$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0$ și se ține seama de faptul că inegalitatea $|x|+|y|\geqslant|k|\cdot 2\pi$ este satisfăcută numai pentru $k=0$.

37. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos y}{b}=\frac{\sin(x-y)}{a-b}.$$

Ind. Aplicînd o proprietate a rapoartelor egale, sistemul se scrie sub forma $\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos y}{b}=\frac{\cos x-\cos y}{a-b}=\frac{\sin(x-y)}{a-b}$, de unde $\cos x-\cos y=\sin(x-y)$ sau, după transformări, $\sin\frac{x-y}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Aplicațiile trigonometriei în geometrie

§ 20. Relații trigonometrice într-un triunghi dreptunghic

67. **Relații trigonometrice între elementele unui triunghi dreptunghic.** Să considerăm un triunghi ABC, dreptunghic în A și să notăm cu a, b, c lungimile laturilor lui. Între cele trei laturi ale triunghiului avem o relație exprimată de teorema lui Pitagora, și anume:

$$a^2=b^2+c^2.$$

Din definițiile funcțiilor trigonometrice ale unui unghi oarecare, date în capitolul II, rezultă că în triunghi ABC avem:

$$\sin B=\frac{b}{a},\quad \sin C=\frac{c}{a};\quad \cos B=\frac{c}{a},\quad \cos C=\frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{b}{c},\quad \operatorname{tg} C=\frac{c}{b},\quad \operatorname{ctg} B=\frac{c}{b},\quad \operatorname{ctg} C=\frac{b}{c}.$$

Din aceste relații deducem că putem exprima cateta b prin una din următoarele relații:

$b=a\sin B$; (1) $\qquad b=c\operatorname{tg} B$; (2)

$b=a\cos C$; (1') $\qquad b=c\operatorname{ctg} C$. (2')

Relațiile (1) și (1') se pot exprima în felul următor:

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu lungimea ipotenuzei înmulțită cu sinusul unghiului opus sau cu cosinusul unghiului alăturat.

Relațiile (2) și (2') se exprimă prin:

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu lungimea celeilalte catete înmulțită cu tangenta unghiului opus sau cu cotangenta unghiului alăturat.

Aplicații. 1° *Știind că $a=4$ cm și $B=15°$, să se determine celelalte laturi și unghiuri ale triunghiului dreptunghic.*

Ținînd seama că $B+C=90°$, rezultă că $C=75°$.

Din formula (1) deducem:

$$b=1 \sin 15°.$$

Dar $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, deci:

$$b=\sqrt{6}-\sqrt{2}\approx 1{,}035 \text{ cm}.$$

Analog avem:

$$c=4 \sin 75° = 4\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}\approx 3{,}863 \text{ cm}.$$

2° *Să se demonstreze că dacă ABC este un triunghi dreptunghic, atunci:*

$$\operatorname{tg} 2C = \frac{2b}{b^2+c^2}.$$

Avem:

$$\operatorname{tg} 2C = \frac{2 \operatorname{tg} C}{1-\operatorname{tg}^2 C} = \frac{2\,\frac{c}{b}}{1-\frac{c^2}{b^2}} = \frac{2bc}{b^2-c^2}.$$

3° *Să se arate că, dacă între elementele unui triunghi avem relația*

$$\sin A = \frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C},$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

Ținînd seama de formulele de transformare în produs a unei sume de sinusuri și de cosinusuri, deducem:

$$\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Dar:

$$\sin A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}},$$

deci relația dată devine:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}},$$

de unde:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = 1.$$

Dar A este unghiul unui triunghi, deci $0 < \frac{A}{2} < 90°$, adică $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ este un număr pozitiv. Rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

deci $\hat{A} = 90°$.

§ 21. Relații trigonometrice într-un triunghi oarecare

68. **Teorema sinusurilor.** Fie ABC un triunghi oarecare, ale cărui laturi au lungimile a, b, c. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului. Vom presupune întîi că toate unghiurile triunghiului sînt unghiuri ascuțite. De aici rezultă că centrul O al cercului circumscris este în interiorul triunghiului (fig. 82, *a*). Ducem prin B diametrul BA'. Triunghiul $A'BC$ este un triunghi dreptunghic, fiind înscris într-un semicerc. Atunci ținînd seama de relația (1) din § 20 și notînd cu raza R raza cercului circumscris triunghiului ABC, deducem:

$$a = 2R \sin A'.$$

Dar $A'=A$, avînd ca măsură jumătatea arcului BC, deci

$$a = 2R \sin A,$$

de unde rezultă:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

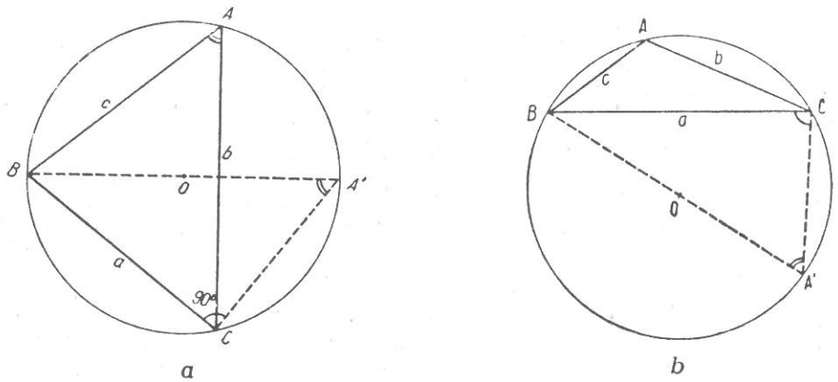


Fig. 82

Analog avem:

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\ \frac{c}{\sin C}=2R.$$

Deci:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R. \qquad (1)$$

Să presupunem acum că unul dintre unghiurile triunghiului ABC, de exemplu unghiul A, este obtuz. În acest caz, centrul O al cercului circumscris este situat în exteriorul triunghiului (fig. 82, *b*). Prin vîrful B ducem diametrul BA'. Triunghiul BCA' este dreptunghic, fiind înscris într-un semicerc, și deci:

$$a=2R \sin A'.$$

Dar unghiurile A și A' sînt suplementare, ca fiind unghiuri opuse într-un patrulater inscriptibil, deci $\sin A'=\sin A$, adică

$$a=2R \sin A,$$

de unde

$$\frac{a}{\sin A}=2R.$$

Celelalte relații se demonstrează ca în cazul precedent. Rezultă că și în acest caz sînt satisfăcute relațiile (1).

Relațiile (1) reprezintă *teorema sinusurilor*:

Într-un triunghi raportul dintre o latură și sinusul unghiului opus este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului.

69. **Teorema cosinusului.** Fie ABC un triunghi oarecare. Să demonstrăm mai întîi că între elementele triunghiului avem relația:

$$a=b \cos C+c \cos B. \qquad (2)$$

Să presupunem întîi că unghiurile B și C sînt ascuțite, deci că piciorul A' al înălțimii coborîte din A este situat între punctele B și C (fig. 83, *a*). Din triunghiurile dreptunghice $AA'B$ și $AA'C$ deducem:

$$BA'=c \cos B;\ A'C=b \cos C,$$

deci ținînd seama că $a=BA'+A'C$, rezultă relația (2).

Dacă unghiul B este obtuz, piciorul A' al înălțimii coborîte din A este situat în exteriorul segmentului BC (fig. 83, *b*). Din triunghiurile dreptunghice $AA'B$ și $AA'C$ rezultă:

$$A'B=c \cos (180°-B),\ A'C=b \cos C.$$

Dar $\cos (180°-B)=-\cos B$ și ținînd seama că $a=A'C-A'B$ găsim aceeași relație (2).

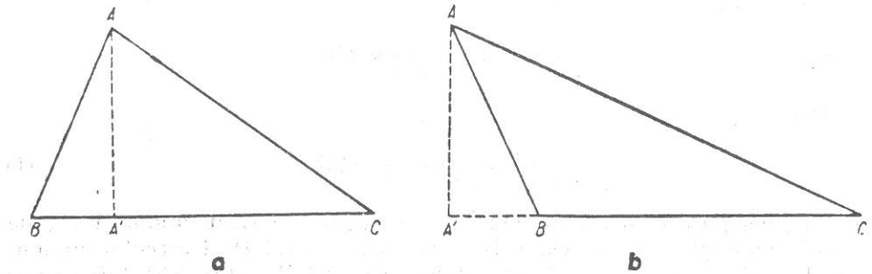


Fig. 83.

Analog se demonstrează relațiile:

$$b=c \cos A+a \cos C, \qquad (2')$$

$$c=a \cos B+b \cos A. \qquad (2'')$$

Să înmulțim acum relația (2') cu b și relația (2'') cu c și să le adunăm. Deducem:

$$b^2+c^2=a(b \cos C+c \cos B)+2bc \cos A$$

sau, avînd în vedere relația (2):

$$b^2+c^2=a^2+2bc \cos A,$$

adică:

$$a^2=b^2+c^2-2bc \cos A. \qquad (3)$$

Această relație poartă numele de *teorema cosinusului*:

Pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi minus de două ori produsul lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ele.

Relația (3) se mai numește *forma trigonometrică a teoremei lui Pitagora generalizată.*[1]

O b s e r v a ț i e. Formula (3) se poate deduce și cu ajutorul produsului scalar. Pentru aceasta este suficient să se observe relația $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ și să se facă înlocuirile corespunzătoare în ambii membri ai egalității:

$$\overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-2\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AB}.$$

[1] La geometrie a fost demonstrată teorema lui Pitagora generalizată. Această teoremă avea două formulări, după cum latura calculată se opunea unui unghi ascuțit sau unui unghi obtuz. Exprimarea trigonometrică unifică cele două formulări.

70. **Teorema tangentelor.** Să demonstrăm următoarea teoremă, numită *teorema tangentelor*:

Raportul dintre diferența lungimilor laturilor unui triunghi și suma lor este egal cu raportul dintre tangenta semidiferenței și tangenta semisumei unghiurilor opuse.

Într-adevăr, din teorema sinusurilor rezultă:

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, deci:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R(\sin A-\sin B)}{2R(\sin A+\sin B)}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}},$$

adică:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}. \tag{4}$$

Analog avem:

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}, \tag{4'}$$

$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}, \tag{4''}$$

Avînd în vedere că $\frac{A+B+C}{2}=90°$, rezultă că $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ și deci relația (4) se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}$$

de unde deducem:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Analog:

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}.$$

71. **Exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi cu ajutorul laturilor.** Din formula (3) deducem:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Cu această valoare a lui $\cos A$ să calculăm expresiile $1-\cos A$ și $1+\cos A$, care intervin în funcțiile trigonometrice ale unghiului $\frac{A}{2}$. Avem:

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}.$$

Să notăm cu p semiperimetrul triunghiului ABC, adică

$$p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Cu această notație avem:

$$a-b+c=2(p-b),\quad a+b-c=2(p-c),\quad b+c-a=2(p-a),$$

deci:

$$1-\cos A=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc};\qquad 1+\cos A=\frac{2p(p-a)}{bc}.$$

Avînd în vedere că $0<\frac{A}{2}<90°$, avem:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

și deci:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \tag{5}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \tag{5'}$$

Din aceste formule rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \tag{6}$$

Analog avem:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}. \qquad (6')$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \qquad (6'')$$

72. **Formule pentru aria unui triunghi.** Vom determina acum o serie de formule pentru calculul ariei unui triunghi. Dacă notăm cu A' piciorul înălțimii coborîte din A pe latura BC, avem:

$$S=\frac{BC\cdot AA'}{2}. \qquad (7)$$

Dacă unghiul B este ascuțit, atunci avem (fig. 83, *a*):

$$AA'=c\sin B. \qquad (8)$$

Dacă unghiul B este obtuz, atunci (fig. 83, *b*):

$$AA'=c\sin(180°-B)$$

și ținînd seama că $\sin(180°-B)=\sin B$, rezultă că înălțimea AA' a triunghiului este dată totdeauna de formula (8). Înlocuind această formulă în (7), obținem

$$S=\frac{ac\sin B}{2}. \qquad (9)$$

Analog:

$$S=\frac{bc\sin A}{2}, \qquad S=\frac{ab\sin C}{2}; \qquad (9')$$

adică aria unui triunghi este egală cu semiprodusul lungimilor a două laturi înmulțit cu sinusul unghiului dintre ele.

Din teorema sinusurilor deducem:

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

care, înlocuită în (9), ne dă:

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

Dar unghiurile $B+C$ și A sînt suplementare, deci $\sin A=\sin(B+C)$, adică:

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}. \qquad (10)$$

Aplicații

1° *Să se determine unghiul și laturile necunoscute ale unui triunghi știind că* $a=4$, $A=60°$, $B=45°$.

Ținînd seama că $A+B+C=180°$ rezultă că $C=75°$ și teorema sinusurilor se scrie:

$$\frac{4}{\sin 60°}=\frac{b}{\sin 45°}=\frac{c}{\sin 75°},$$

de unde deducem:

$$b=\frac{4\sin 45°}{\sin 60°}, \qquad c=\frac{4\sin 75°}{\sin 60°}.$$

Dar $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

deci:

$$b=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}, \quad c=\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}=\frac{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3}.$$

2° *Știind că într-un triunghi avem* $b=2$, $c=3$ *și* $A=60°$, *să se determine latura* a.

Din teorema cosinusului rezultă:

$$a^2=4+9-2\cdot 2\cdot 3\cos 60°=7,$$

deci

$$a=\sqrt{7}.$$

3° *Să se arate că triunghiul în care*

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{a+c}{b}$$

este dreptunghic.

Ținînd seama de teorema sinusurilor, deducem

$$\frac{a+c}{b}=\frac{2R(\sin A+\sin C)}{2R\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Dar:

$$\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+C}{2},$$

deci:

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}},$$

care, înlocuită în relația dată, ne dă:

$$\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}},$$

de unde:

$$\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$$

care are soluțiile:

$$B=A-C, \qquad B=C-A,$$

adică:

$$B+C=A=90°,$$

sau:

$$A+B=C=90°.$$

Triunghiul este deci dreptunghic în A sau în C.

4° *Să se arate că triunghiul în care*

$$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \text{ și } \sin B \sin C=\frac{3}{4}$$

este echilateral.

Din prima relație deducem:

$$b^3+c^3=(b+c)a^2$$

sau, avînd în vedere că $b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2)$:

$$b^2+c^2-bc=a^2.$$

Dar teorema cosinusului ne dă $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, deci relația de mai sus devine:

$$\cos A=\frac{1}{2},$$

adică:

$$A=60°$$

și deci:

$$B+C=120°.$$

Ținînd seama de formula de transformare în sumă a unui produs de sinusuri, a doua relație dată se scrie:

$$\cos(B-C)-\cos(B+C)=\frac{3}{2},$$

de unde, avînd în vedere că $\cos(B+C)=\cos 120°=-\frac{1}{2}$;

$$\cos(B-C)=1,$$

adică:

$$B-C=0$$

și deci:

$$B=C=60°.$$

5° *Să se arate că un triunghi în care*

$$a\,\mathrm{tg}\,A+b\,\mathrm{tg}\,B=(a+b)\,\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}$$

este isoscel.

Relația dată se mai poate scrie:

$$a\left(\mathrm{tg}\,A-\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}\right)=b\left(\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}-\mathrm{tg}\,B\right),$$

de unde, aplicînd formula de transformare în produs și cît, găsim:

$$a\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}=b\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}$$

sau, ținînd seama că $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$:

$$\mathrm{tg}\,A\sin\frac{A-B}{2}=\mathrm{tg}\,B\sin\frac{A-B}{2}.$$

Rezultă:

$$\sin\frac{A-B}{2}(\mathrm{tg}\,A-\mathrm{tg}\,B)=0.$$

Anulînd primul factor, găsim:

$$\frac{A-B}{2}=k\pi,$$

de unde, avînd în vedere că A și B sînt unghiurile unui triunghi:

$$A=B.$$

Același rezultat îl găsim anulînd al doilea factor.

6° *Să se demonstreze că în orice triunghi avem:*

$$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C).$$

Din teorema sinusurilor deducem:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\qquad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

şi deci:

$$b\cos B+c\cos C=\frac{a(\sin B\cos B+\sin C\cos C)}{\sin A}=$$

$$=\frac{a(\sin 2B+\sin 2C)}{2\sin A}=\frac{a\,2\sin(B+C)\cos(B-C)}{2\sin(B+C)}=a\cos(B-C).$$

§ 22. Tabele trigonometrice

73. **Tabele trigonometrice.** Am văzut în capitolele anterioare cum se pot calcula valorile funcţiilor trigonometrice în cazul unor unghiuri particulare, cum ar fi 30°, 45°, 60°, 90°, 15°, 75°, 22°30′. În calcule intervin însă şi valorile funcţiilor trigonometrice ale altor unghiuri. S-a ivit astfel necesitatea de a calcula valorile funcţiilor trigonometrice ale unui unghi oarecare, de a se construi tabele cu aceste valori. Cu ajutorul anumitor formule stabilite în matematica superioară s-au putut determina valorile funcţiilor trigonometrice ale tuturor unghiurilor de la 0° la 90° din minut în minut. Aceste tabele poartă numele de *tabele de valori naturale*. De asemenea, s-au construit *tabele de logaritmi ai funcţiilor trigonometrice*.

Au fost editate o serie de astfel de tabele în care valorile funcţiilor trigonometrice sau logaritmii lor sînt calculaţi cu 3, 4, 5, 6 sau 7 zecimale. Există, de asemenea, tabele cu mai multe zecimale.

În cele ce urmează vom folosi cartea *Tabele şi formule de matematică, fizică şi chimie*, editată de Editura didactică şi pedagogică în 1964.

74. **Tabele de valori naturale ale funcţiilor trigonometrice.** În paginile 100—103 este dată Tabela 4: Valorile naturale ale funcţiilor trigonometrice ale arcelor măsurate în grade sexagesimale. Aici sînt date valorile funcţiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă de la 0° la 90° din 10′ în 10′.

Cu ajutorul acestor tabele se determină direct valorile funcţiilor trigonometrice ale unghiurilor care se află în tabele sau cu ajutorul unei operaţii numită *interpolare*, în cazul unghiurilor care nu se găsesc în tabele.

Astfel în tabele găsim $\sin 41°50'=0{,}66697$, $\sin 72°10'=0{,}95195$, $\cos 24°20'=0{,}91116$, $\cos 58°30'=0{,}52250$, $\operatorname{tg} 11°40'=0{,}20648$, $\operatorname{tg} 64°20'=2{,}08094$, $\operatorname{ctg} 37°10'=1{,}31904$, $\operatorname{ctg} 85°40'=0{,}07578$[1].

[1] În tot acest paragraf = reprezintă propriu-zis ≈.

Pentru a se putea calcula valorile funcţiilor trigonometrice ale căror unghiuri nu se găsesc în tabele, se face presupunerea că variaţia funcţiilor trigonometrice în intervalul de 10′ este proporţională cu variaţia unghiului.

Să calculăm $\sin 34°22'$.

Avem:

$$\sin 34°20'<\sin 34°22'<\sin 34°30',$$

deci ţinînd seama că:

$$\sin 34°20'=0{,}56401,\quad \sin 34°30'=0{,}56641,$$

rezultă:

$$0{,}56401<\sin 34°22'<0{,}56641.$$

În baza presupunerii putem face următorul raţionament:

dacă unghiul creşte cu 10′ (de la 34°20′ la 34°30′)	sinusul creşte cu 0,00240 (de la 0,56401 la 0,56641);
dacă unghiul creşte cu 2 (de la 34°20′ la 34°22′)	sinusul creşte cu $x=\frac{2\cdot 0{,}00240}{10}=0{,}00048.$

De aici rezultă că:

$$\sin 34°22'=0{,}56401+0{,}00048=0{,}56449.$$

Analog se deduc calculele în cazul funcţiei tangentă.

Să calculăm $\cos 59°47'$.

Avînd în vedere că în intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ funcţia cosinus este descrescătoare, rezultă:

$$\cos 59°40'>\cos 59°47'>\cos 59°50'$$

sau, deoarece $\cos 59°40'=0{,}50503$ şi $\cos 59°50'=0{,}50252$, $0{,}50503>\cos 59°47'>0{,}50252$.

Descreşterea valorii cosinusului fiind presupusă proporţională cu creşterea unghiului, rezultă:

dacă unghiul creşte cu 10′ (de la 59°40′ la 59°50′)	cosinusul descreşte cu 0,00251 (de la 0,50503 la 0,50252)
dacă unghiul creşte cu 7′ (de la 59°40′ la 59°47′)	cosinusul descreşte cu $x=\frac{7\cdot 0{,}00251}{10}=0{,}00176.$

Deci:

$$\cos 59°47'=0{,}50503-0{,}00176=0{,}50327.$$

În cazul funcţiei cotangentă calculele sînt analoge.

Să rezolvăm acum problema inversă, și anume: fiind dată valoarea unei funcții trigonometrice, să se găsească unghiul din cadranul *I* a cărui funcție trigonometrică respectivă are valoarea dată.

Să calculăm unghiul α din cadranul *I* pentru care

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}36529.$$

Căutînd în tabela funcției tangentă, găsim că:

$$\operatorname{tg} 20° = 0{,}36397, \quad \operatorname{tg} 20°10' = 0{,}36727$$

și ținînd seama că în cadranul *I* funcția tangentă este crescătoare, rezultă:

$$20° < \alpha < 20°10'.$$

Vom urma acum raționamentul făcut la determinarea valorii funcției trigonometrice, dar în ordine inversă:

dacă tangenta crește cu 0,00330 (de la 0,36397 la 0,36727)	unghiul crește cu 10′ (de la 20° la 20°10′);
dacă tangenta crește cu 0,00132 (de la 0,39397 la 0,36529)	unghiul crește cu $x = \frac{0{,}00132 \cdot 10'}{0{,}00330} = 4'$.

Deci:

$$\alpha = 20° + 4' = 20°4'.$$

Analog se conduc calculele în cazul funcției sinus.

Să calculăm unghiul α din cadranul *I* știind că:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}46138.$$

În tabela funcției cotangentă găsim:

$$\operatorname{ctg} 34°20' = 1{,}46411, \quad \operatorname{ctg} 34°30' = 1{,}45501.$$

Avînd în vedere că funcția cotangentă este descrescătoare în cadranul *I* rezultă:

$$34°20' < \alpha < 34°30'.$$

Deci:

dacă cotangenta descrește cu 0,00910 (de la 1,46411 la 1,45501)	unghiul crește cu 10′ (de la 34°20′ la 34°30′)
dacă cotangenta descrește cu 0,00273 (de la 1,46411 la 1,46138)	unghiul crește cu $x = \frac{0{,}00273 \cdot 10'}{0{,}00910} = 3'$.

Rezultă:

$$\alpha = 34°20' + 3' = 34°23'.$$

Analog în cazul funcției cosinus.

75. **Tabela de logaritmi ai funcțiilor trigonometrice.** În paginile 106—203 este dată Tabela 5: Logaritmii cu cinci zecimale ai funcțiilor trigonometrice ale arcelor de la 0° pînă la 90° din minut în minut. Ca și în cazul tabelelor de valori naturale, în cazul unghiurilor care se găsesc în tabele, logaritmul funcției se găsește direct, iar în cazul unghiurilor care nu se găsesc în tabele se vor calcula cu ajutorul unei interpolări.

Astfel găsim: $\lg \sin 17°34' = \bar{1}{,}47974$, $\lg \cos 54°21' = \bar{1}{,}76554$, $\lg \operatorname{tg} 38°52' = \bar{1}{,}90630$, $\lg \operatorname{ctg} 79°18' = 1{,}27635$.

Să arătăm acum cum se determină logaritmii funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor care nu se află în tabele.

Să se calculeze $\lg \sin 21°45'17''$.

În tabele găsim:

$$\lg \sin 21°45' = \bar{1}{,}56886, \quad \lg \sin 21°46' = \bar{1}{,}56917.$$

Avînd în vedere că în cadranul *I* funcția sinus este crescătoare, iar funcția logaritm este și ea crescătoare în cazul în care baza este mai mare decît 1, rezultă:

$$\bar{1}{,}56886 < \lg \sin 21°45'17'' < \bar{1}{,}56917.$$

Deci:

dacă unghiul crește cu 1′ (de la 21°45′ la 21°46′)	logaritmul crește cu 0,00031 (de la $\bar{1}{,}56886$ la $\bar{1}{,}56917$);
dacă unghiul crește cu 17″ (de la 21°45′ la 21°45′17″)	logaritmul crește cu $x = \frac{17 \cdot 0{,}00031}{60} = 0{,}00009$.

Rezultă că:

$$\lg \sin 21°45'17'' = \bar{1}{,}56886 + 0{,}00009 = \bar{1}{,}56895.$$

Analog se fac calculele în cazul funcției tangentă.

Să se calculeze $\lg \operatorname{ctg} 37°24'11''$.

În tabele găsim:

$$\lg \operatorname{ctg} 37°24' = 0{,}11659, \quad \lg \operatorname{ctg} 37°25' = 0{,}11633.$$

Deci:

dacă unghiul crește cu 1′ (de la 37°24′ la 37°25′)	logaritmul descrește cu 0,00026 (de la 0,11659 la 0,11633);
dacă unghiul crește cu 11″ (de la 37°24′ la 37°24′11″)	logaritmul descrește cu $x = \frac{11 \cdot 0{,}00026}{60} = 0{,}00005$.

Rezultă că:

$$\lg \operatorname{ctg} 37°24'11'' = 0{,}11659 - 0{,}00005 = 0{,}11654.$$

În cazul funcției cosinus calculele sînt analoge.

Să ne ocupăm acum de determinarea unghiului din cadranul *I* pentru care logaritmul unei funcții trigonometrice are o valoare dată.

Să calculăm unghiul α din cadranul *I* pentru care

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \bar{1}{,}61942.$$

În tabele găsim:

$$\lg \operatorname{tg} 22°36' = \bar{1}{,}61936, \quad \lg \operatorname{tg} 22°37' = \bar{1}{,}61972.$$

Avem:

$$22°36' < \alpha < 22°37'$$

Dacă logaritmul crește cu 0,00036 unghiul crește cu 1′

(de la $\bar{1}{,}61936$ la $\bar{1}{,}61972$) (de la 22°36′ la 22°37′);

dacă logaritmul crește cu 0,00006 unghiul crește cu

(de la $\bar{1}{,}61936$ la $\bar{1}{,}61942$) $x = \frac{0{,}00006 \cdot 60''}{0{,}00036} = 10''$.

Deci:

$$\alpha = 22°36' + 10'' = 22°36'10''.$$

Calcule analoge se face în cazul funcției sinus.

Să calculăm unghiul α din cadranul *I* știind că:

$$\lg \cos \alpha = \bar{1}{,}93244.$$

În tabele găsim:

$$\log \cos 31°8' = 1{,}93246, \quad \lg \cos 31°9' = \bar{1}{,}93233,$$

de unde deducem:

$$31°8' < \alpha < 31°9'.$$

Dacă logaritmul descrește cu 0,00008 unghiul crește cu 1′.

(de la $\bar{1}{,}93246$ la $\bar{1}{,}93238$) (de la 31°8′ la 31°9′);

dacă logaritmul descrește cu 0,00002 unghiul crește cu

(de la $\bar{1}{,}93246$ la $\bar{1}{,}93244$) $x = \frac{0{,}00002 \cdot 60''}{0{,}00008} = 15''$.

Rezultă:

$$\alpha = 31°8' + 15'' = 31°8'15''.$$

Aplicații. 1° *Să se determine valoarea expresiei:*

$$E = \frac{\sin 52°34' - \sin 18°11'}{\cos 43°52' + \cos 31°37'}.$$

Avem:

$$\sin 52°34' - \sin 18°11' = 2 \sin 17°11'30'' \cos 35°22'30''$$

$$\cos 43°52' + \cos 31°37' = 2 \cos 37°44'30'' \cos 6°7'30'',$$

deci:

$$E = \frac{\sin 17°11'30'' \cos 35°22'30''}{\cos 37°44'30'' \cos 6°7'30''}.$$

Aplicînd acestei egalități logaritmii, găsim:

$$\lg E = \lg \sin 17°11'30'' + \lg \cos 35°22'30'' - \lg \cos 37°44'30'' - \lg \cos 6°7'30''.$$

Din tabele deducem prin interpolări:

$$\lg \sin 17°11'30'' = \bar{1}{,}47065,$$

$$\lg \cos 35°22'30'' = \bar{1}{,}91137,$$

$$\lg \cos 37°44'30'' = \bar{1}{,}89806,$$

$$\lg \cos 6°7'30'' = \bar{1}{,}99752.$$

Rezultă:

$$\lg E = \bar{1}{,}48644,$$

de unde[1]:

$$E \approx 0{,}3065.$$

2° *Să se determine unghiul α din cadranul I pentru care*

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg} 57°21'10'' + \operatorname{tg} 15°35'20''.$$

Avem:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin 72°56'30''}{\cos 57°21'10'' \cos 15°35'20''}.$$

Aplicînd logaritmii, găsim:

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (\lg \sin 72°56'30'' - \lg \cos 57°21'10'' - \lg \cos 15°35'20'').$$

[1] În locul scăderii ultimilor doi logaritmi se vor folosi cologaritmii acestora.

Din tabele deducem:

$$\lg \sin 72°56'30'' = \bar{1},98046$$

$$\lg \cos 57°21'10'' = \bar{1},73197$$

$$\lg \cos 15°35'20'' = \bar{1},98372$$

deci:

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \cdot 0,26477 = 0,13238.$$

De aici rezultă că:

$$\alpha = 53°26'.$$

§ 23. Rezolvarea triunghiurilor

76. **Rezolvarea triunghiului dreptunghic.** În § 20 am dedus diverse formule între elementele unui triunghi dreptunghic. Să aplicăm acum aceste formule pentru a determina toate elementele unui triunghi dreptunghic cînd cunoaştem unele dintre ele, operaţie care se numeşte *rezolvarea triunghiului dreptunghic.*

Cazul I. Se dă ipotenuza a şi unghiul ascuţit B.
Celelalte elemente sînt date de relaţiile:

$$b = a \sin B; \quad c = a \cos B, \quad C = 90° - B.$$

Cazul II. Se dă o catetă b şi un unghi ascuţit, de exemplu C.
Avem:

$$B = 90° - C, \quad c = b \operatorname{tg} C, \quad a = \frac{b}{\cos C}.$$

Cazul III. Se dă ipotenuza a şi o catetă, de exemplu b.
Avem:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \sin B = \frac{b}{a}, \quad C = 90° - B.$$

Cazul IV. Se dau catetele b şi c.
Celelalte elemente sînt date de formulele:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad C = 90° - B.$$

Exemple

1) *Să se rezolve triunghiul dreptunghic în care ni se dă $a = 2$ şi $B = 22°30'$.*
Avem:

$$b = 2 \sin 22°30' = 2\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,765;$$

$$c = 2 \cos 22°30' = 2\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,553;$$

$$C = 90° - B = 67°30'.$$

2) *Să se rezolve triunghiul dreptunghic în care $b = 3$, $C = 15°$.*
Avem:

$$B = 75°;$$

$$c = 3 \operatorname{tg} 15° = 3(2 - \sqrt{3}) \approx 0,804;$$

$$a = \frac{3}{\cos 15°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{12}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 2} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 1,035.$$

3) *Să se rezolve triunghiul dreptunghic în care $a = 3,852$ şi $b = 1,547$.*
Avem:

$$c = \sqrt{3,852^2 - 1,547^2} = \sqrt{(3,852 + 1,547)(3,852 - 1,547)} = \sqrt{5,399 \cdot 2,305},$$

deci:

$$\lg c = \frac{1}{2}(\lg 5,399 + \lg 2,305) = \frac{1}{2}(0,73231 + 0,36267) = 0,54749.$$

De aici deducem:

$$c = 3,5279.$$

Din formula $\sin B = \frac{b}{a}$ rezultă:

$$\sin B = \frac{1,547}{3,852},$$

de unde

$$\lg \sin B = \lg 1,547 - 3,852 = \bar{1},60380.$$

Deci:

$$B = 23°40'43''$$

şi

$$C = 90° - 23°40'43'' = 66°19'17''.$$

77. **Rezolvarea triunghiului oarecare.** Să ne ocupăm acum de *rezolvarea triunghiului oarecare.* Pentru a putea determina toate elementele unui triunghi oarecare cu ajutorul formulelor deduse în § 21, trebuie să ni se dea trei elemente ale triunghiului, printre care să se afle cel puţin o lungime sau o relaţie între lungimi. Laturile şi unghiurile unui triunghi se numesc *elementele principale* ale acestuia, iar cazurile de rezolvare ale triunghiului în care ni se dau numai elemente principale se numesc *cazuri de rezolvare principale.*

Cazurile principale de rezolvare ale triunghiurilor oarecare sînt în număr de patru şi anume:

Cazul I. *Se dau două unghiuri şi o latură,* de exemplu A, B şi a.
Avem $C = 180° - (A + B)$.

Din teorema sinusurilor deducem:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{a\sin(A+B)}{\sin A}.$$

Problema are soluție oricare ar fi valorile celor trei elemente.

Cazul II. *Se dau două laturi și unghiul cuprins între ele*, de exemplu, a b și C.

Din teorema tangentei rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

De aici deducem unghiul $A-B$ și ținînd seama că $A+B=180^\circ-C$ găsim unghiurile A și B. Latura c rezultă din teorema sinusurilor:

$$c=\frac{A\sin C}{\sin A}.$$

Problema are soluție pentru orice valori ale elementelor, ceea ce se poate vedea din construcția triunghiului.

Cazul III. *Se dau două laturi și unghiul opus uneia dintre ele*, de exemplu a, b și A.

Din teorema sinusurilor deducem:

$$\sin B=\frac{b}{a}\sin A,$$

de unde rezultă unghiul B. Unghiul C rezultă din relația $C=180^\circ-(A+B)$, iar latura c din:

$$c=\frac{a\sin A}{\sin A}.$$

Pentru ca problema să aibă soluție trebuie ca:

$$\frac{b}{a}\sin A<1,^1 \qquad (11)$$

adică:

$$\sin A<\frac{a}{b}.$$

Să presupunem că această relație este satisfăcută și să notăm cu α unghiul din cadranul I pentru care $\sin\alpha=\frac{b}{a}\sin A$. Atunci avem două unghiuri care satisfac problema, și anume:

$$B_1=\alpha,\quad B_2=180^\circ-\alpha.$$

---

[1] Ținînd seama că $a>0$, $b>0$, $\sin A>0$, rezultă $\frac{b}{a}\sin A>0$.

Valorile corespunzătoare ale unghiului C sînt:

$$C_1=180^\circ-(A+\alpha),\quad C_2=\alpha-A.$$

Dacă $b<a$, atunci avem $\frac{b}{a}<1$ și ținînd seama că $\sin A<1$, rezultă că $\frac{b}{a}\sin A<1$, deci problema are soluție.

Din $b<a$ rezultă $B_1<A$ și deci $B_1<90^\circ$. De aici deducem: $B_1<180^\circ-A$, adică $A+\alpha<180^\circ$ și deci $C_1>0$. Valorile B_1 și C_1 satisfac problema.

A doua soluție nu satisface problema fiindcă $\alpha-A<0$.

Deci *problema are o singură soluție acceptabilă.*

Dacă $b=a$, $A<90^\circ$, avem $\sin B=\sin A$ și deci $B_1=A$, $B_2=180^\circ-A$. De aici deducem $C_1=180^\circ-2A>0$ și $C_2=180^\circ-(180^\circ-A+A)=0$, deci *problema are o singură soluție acceptabilă.*

Dacă $b=a$, $A\geqq 90^\circ$, *problema nu are soluții.*

Dacă $b\sin A<a<b$ și $A<90^\circ$, relația (11) este satisfăcută. Avem $A<B_1<90^\circ$, adică $A+B_1<180^\circ$ și $C_1=180^\circ-(A+B_1)>0$. Din $B_2=180^\circ-B_1$ rezultă $C_2=180^\circ-(A+B_2)=B_1-A>0$. *Problema are două soluții.*

Dacă $b\sin A<a<b$ și $A\geqq 90^\circ$, *problema nu are soluții.*

Dacă $b\sin A=a$ și $A<90^\circ$, avem $\sin B=1$, deci $B_1=B_2=90^\circ$ și $C_1=C_2=90^\circ-A$. *Problema are două soluții confundate, triunghiul fiind dreptunghic.*

Dacă $b\sin A=a$ și $A\geqslant 90^\circ$ *problema nu are soluții.*

Dacă $b\sin A>a$, relația (11) nu este satisfăcută și deci *problema nu are soluție.*

Cazul IV. *Se dau toate laturile triunghiului.*

Unghiurile triunghiului date de relațiile:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$C=180^\circ-(A+B).$$

Să analizăm acum cîteva cazuri speciale de rezolvare.

1) *Se dau elementele c și A și relația $a^2-b^2=k^2$.*

Avem:

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{4R^2\sin^2 A-4R^2\sin^2 B}{4R^2\sin^2 C}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)}{\sin^2 C}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\,2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin^2 C}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 C}.$$

Dar $\sin(A+B)=\sin C$, deci:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{k^2}{c^2}$$

sau:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{k^2}{c^2}$$

De aici deducem:

$$\frac{\sin(A-B)-\sin(A+B)}{\sin(A-B)+\sin(A+B)}=\frac{c^2-k^2}{c^2+k^2},$$

adică:

$$\frac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B}=\frac{c^2-k^2}{c^2+k^2},$$

de unde:

$$\operatorname{tg} B=\frac{c^2-k^2}{c^2+k^2}\operatorname{tg} A.$$

De aici rezultă valoarea unghiului B și problema se reduce la cazul principal I.

2) *Să se rezolve un triunghi oarecare cunoscînd unghiurile A și B și semiperimetrul p.*

Avem $C=180^\circ-(A+B)$.

Din teorema sinusurilor avem:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a-b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

Dar:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Deci:

$$a=\frac{2p\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2p\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

Analog avem:

$$b=\frac{p\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\qquad c=\frac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

3) *Să se rezolve un triunghi cunoscînd latura a, unghiul A și înălțimea h_a corespunzătoare laturii a.*

Avînd în vedere formulele (7) și (10) care ne dau aria unui triunghi, deducem:

$$\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A}=a\,h_a,$$

de unde:

$$\sin B\sin C=\frac{h_a\sin A}{a}.$$

Ținînd seama de formula de transformare a unui produs de sinusuri în sumă rezultă:

$$\cos(B-C)-\cos(B+C)=\frac{2h_a\sin A}{a}.$$

Dar $\cos(B+C)=-\cos A$, deci:

$$\cos(B-C)=\frac{2h_a\sin A-a\cos A}{a}.$$

Dacă:

$$\frac{2h_a\sin A-a\cos A}{a}<1,$$

din această relație deducem valoarea diferenței $B-C$, de unde, avînd în vedere că $B+C=180^\circ-A$, rezultă unghiurile B și C. Problema se reduce la cazul principal de rezolvare I.

Aplicații

1° *Să se rezolve triunghiul ABC știind că $a=20$, $A=69^\circ$, $B=82^\circ$.*

Avem $C=180^\circ-(A+B)=29^\circ$.

Din teorema sinusurilor rezultă:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{20\sin 82^\circ}{\sin 69^\circ}.$$

Logaritmînd deducem:

$$\lg b=\lg 20+\lg\sin 82^\circ-\lg\sin 69^\circ=$$

$$=1{,}30103+\bar{1}{,}99575-\bar{1}{,}97015=1{,}32663,$$

de unde rezultă:

$$b=21{,}21.$$

Analog găsim:

$$c=10{,}39.$$

2° *Să se rezolve un triunghi în care* $a=20{,}21$, $b=15{,}76$, $A=100°3'$.
Din teorema sinusurilor deducem:

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{15{,}76\sin 100°3'}{20{,}21}=\frac{15{,}76\sin 79°57'}{20{,}21}.$$

Logaritmînd, găsim:

$$\lg\sin B=\lg 15{,}76+\lg\sin 79°57'-\lg 20{,}21=$$

$$=1{,}19756+\bar{1}{,}99328-1{,}30557=\bar{1}{,}88527.$$

Deci:

$$B=50°9'36''.^1$$

De aici rezultă:

$$C=180°-(A+B)=29°47'24''.$$

Cu această valoare putem scrie:

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20{,}21\sin 29°47'24''}{\sin 100°3'}=\frac{20{,}21\sin 29°47'24''}{\sin 79°57'},$$

adică:

$$\lg c=\lg 20{,}21+\lg\sin 29°47'24''-\lg\sin 79°57'=$$

$$=1{,}30557+\bar{1}{,}69620-\bar{1}{,}99328=1{,}00849,$$

de unde rezultă:

$$c=10{,}20.$$

3° *Să se rezolve triunghiul ABC știind că* $a=75$, $b=92$, $c=107$.
Avem $p=137$, deci:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{45\cdot 30}{137\cdot 62}},$$

de unde:

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\lg 45+\lg 30-\lg 137-\lg 62)=$$

$$=\frac{1}{2}(1{,}65321+1{,}47712-2{,}13672-1{,}79239)=\bar{1}{,}60061.$$

[1]Valoarea $B=180°-50°9'36''=129°50'24''$ nu este acceptabilă pentru că în acest caz avem $A+B=229°53'24''>180°$. Dealtfel, construcția geometrică arată că totdeauna pentru $a>b$ avem soluție unică.

Rezultă că:

$$\frac{A}{2}=21°44'8'',$$

adică:

$$A=43°28'16''.$$

Analog găsim:

$$B=57°33'28''.$$

Deci:

$$C=180°-(A+B)=78°58'16''.$$

4° *Să se rezolve triunghiul ABC știind că* $A=123°$, $a=181{,}60$, $b-c=29{,}54$.

Din teorema sinusurilor deducem:

$$\frac{b-c}{\sin B-\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

sau:

$$\frac{b-c}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

Dar $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$, deci:

$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{a}=\frac{29{,}54\cos 61°30'}{181{,}60}.$$

Logaritmînd, găsim:

$$\lg\sin\frac{B-C}{2}=\lg 29{,}54+\lg\cos 61°30'-\lg 181{,}60=$$

$$=1{,}47041+1{,}67866-2{,}25912=\bar{2}{,}88995.$$

De aici rezultă:

$$\frac{B-C}{2}=4°27',$$

adică:

$$B-C=8°54'.$$

Avînd în vedere că $B+C=180°-A=57°$, găsim:

$$B=32°57',\quad C=24°3'.$$

[1]Soluția $\frac{B-C}{2}=180°-4°27'$ nu este acceptabilă.

Cu aceste valori din teorema sinusurilor deducem:

$$b=117{,}80, \quad c=88{,}26.$$

5° *Să se rezolve triunghiul ABC știind că $a=32{,}41$, $b=25{,}17$, iar unghiul A este dublul unghiului B.*

Avînd în vedere că $A=2B$, teorema sinusurilor se scrie:

$$\frac{a}{2\sin B\cos B}=\frac{b}{\sin B},$$

de unde:

$$\cos B=\frac{a}{2b}=\frac{32{,}41}{50{,}34},$$

adică

$$\lg\cos B=\lg 32{,}41-\lg 50{,}34=1{,}51068-1{,}70191=\bar{1}{,}80877.$$

Găsim:

$$B=49°54'40'',$$

deci:

$$A=99°49'20''$$

De aici deducem:

$$C=180°-(A+B)=30°16'$$

și din teorema sinusurilor:

$$c=16{,}58.$$

§ 24. Aplicații în geometrie, fizică și topografie

78. **Aplicații în geometrie.** 1° *Să se calculeze lungimea bisectoarelor unui triunghi în funcție de elementele principale ale triunghiului.*

Fie l_a, l_b, l_c lungimile acestor bisectoare. Notînd cu D piciorul bisectoarei unghiului A și aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ABD, deducem:

$$\frac{l_a}{\sin B}=\frac{c}{\sin\widehat{ADB}}.$$

Dar $\widehat{ADB}=180°-\left(B+\frac{A}{2}\right)=180°-B-\frac{180°-B-C}{2}=90°-\frac{B-C}{2}$,

deci $$\sin\widehat{ADB}=\cos\frac{B-C}{2}$$

și relația de mai sus ne dă:

$$l_a=\frac{c\cdot\sin B}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Analog avem:

$$l_b=\frac{a\sin C}{\cos\frac{C-A}{2}},\quad l_c=\frac{b\sin A}{\cos\frac{A-B}{2}}.$$

2° *Să se calculeze aria unui patrulater cunoscînd diagonalele sale și unghiul dintre ele.*

Fie $ABCD$ *un patrulater oarecare.* Dacă notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor și cu φ unghiul diagonalelor, atunci avem (fig. 84):

$$S_{(ABCD)}=S_{(AOB)}+S_{(OBC)}+S_{(OCD)}+S_{(ODA)},$$

adică

$$S=\frac{OA\cdot OB\sin\varphi}{2}+\frac{OB\cdot OC\sin(180°-\varphi)}{2}+\frac{OC\cdot OD\sin\varphi}{2}+$$
$$+\frac{OD\cdot OA\sin(180°-\varphi)}{2}$$

sau, ținînd seama că $\sin(180°-\varphi)=\sin\varphi$, rezultă:

$$S=\frac{\sin\varphi(OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA)}{2}=\frac{\sin\varphi(OA+OC)(OB+OD)}{2}=$$
$$=\frac{AC\cdot BD\sin\varphi}{2},$$

deci *aria unui patrulater este egală cu semiprodusul diagonalelor înmulțit cu sinusul unghiului dintre ele.*

3° *Să se determine unghiul format de diagonalele unui paralelogram în funcție de laturile paralelogramului și de unghiuri dintre ele.*

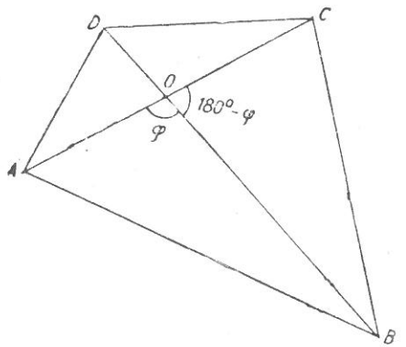


Fig. 84.

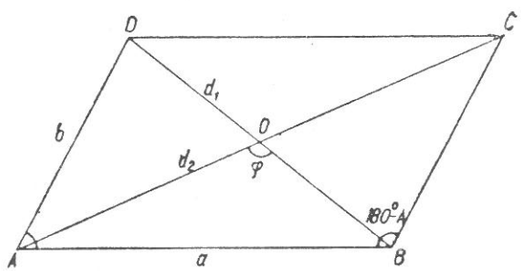


Fig. 85.

Fie $ABCD$ un paralelogram și O punctul de intersecție a diagonalelor (fig. 85). Notînd $a = AB$, $b = AD$, $d_1 = BD$, $d_2 = AC$, $\varphi = \widehat{AOB}$, și aplicînd teorema cosinusului în triunghiurile ABD și ABC, deducem:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A.$$

În triunghiul OAB teorema cosinusurilor ne dă:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos \varphi,$$

de unde:

$$\cos \varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 4a^2}{2d_1 d_2}$$

sau, ținînd seama de relațiile de mai sus:

$$\cos \varphi = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 A}}.$$

De aici deducem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^4 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{2ab \sin A}{b^2 - a^2}.$$

4° *Să se determine volumul și aria laterală a unei piramide hexagonale regulate a cărei înălțime este h, iar unghiul plan de la vîrf α.*

Fie $SABCDEF$ piramida și O centrul cercului circumscris hexagonului $ABCDEF$ (fig. 86). Avem $SO = h$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSD} = \widehat{DSE} = \widehat{ESF} = \widehat{FSA} = \alpha$.

Dacă notăm cu S aria hexagonului $ABCDEF$, atunci volumul piramidei este:

$$V = \frac{Sh}{3}.$$

Notînd cu a latura hexagonului, rezultă că $OA = a$, ca fiind raza cercului circumscris hexagonului, iar $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ca fiind apotema hexagonului. Deci:

$$S = \frac{6a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Din triunghiul dreptunghic SAM deducem:

$$SM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Scriind teorema lui Pitagora în triunghiul SOM, găsim:

$$h^2 = -\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

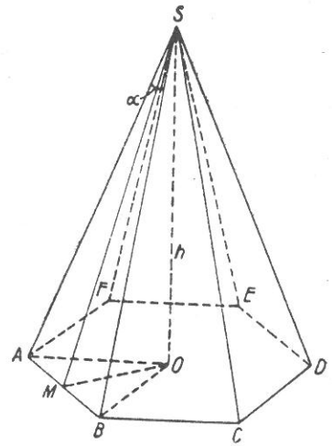


Fig. 86.

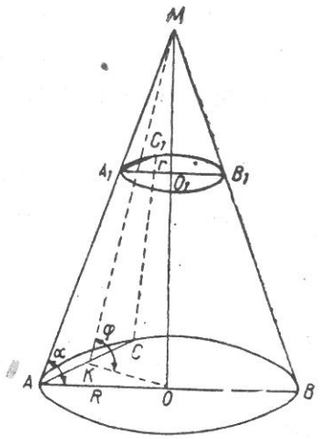


Fig. 87.

De aici rezultă:

$$a^2 = \frac{4h^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 3}$$

și deci:

$$S = \frac{6\sqrt{3}\, h^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 3},$$

adică:

$$V = \frac{2\sqrt{3}\, h^3}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 3}.$$

Aria laterală a piramidei este

$$S' = 6S_{(SAB)} = 6\frac{SM \cdot AB}{2} = \frac{3a^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

deci:

$$S' = \frac{6h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 3}.$$

5° *Se dă un trunchi de con cu razele bazelor R și r. Prin două generatoare ale trunchiului se duce un plan care face cu planul bazei un unghi φ. Să se determine aria secțiunii știind că generatoarea trunchiului face cu planul bazei unghiul α* (fig. 87).

Prelungim generatoarele AA_1 și BB_1 pînă în punctul M. Notînd cu S aria secțiunii, avem:

$$S = S_{AMC} - S_{A_1MC_1}.$$

Triunghiurile AMC și A_1MC_1 fiind asemenea, avem:

$$\frac{S_{A_1MC_1}}{S_{AMC}} = \frac{A_1M^2}{AM^2}.$$

Analog, din asemănarea triunghiurilor AOM și A_1O_1M rezultă:

$$\frac{A_1M}{AM} = \frac{r}{R},$$

deci:

$$\frac{S_{A_1MC_1}}{S_{AMC}} = \frac{r^2}{R^2},$$

de unde:

$$\frac{S_{AMC} - S_{A_1MC_1}}{S_{AMC}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2},$$

adică:

$$S = \frac{R^2 - r^2}{R^2} S_{AMC}.$$

Aria triunghiului AMC este:

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MK = AK \cdot MK.$$

Din triunghiul AOK rezultă:

$$AK = \sqrt{R^2 - OK^2}.$$

Dar $OK = MO \operatorname{ctg} \varphi$ (triunghiul MOK), iar $MO = R \operatorname{tg} \alpha$ (triunghiul MOA), deci

$$AK = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \sqrt{(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos \alpha} \cdot \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos \varphi \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{R}{\sin \varphi \cos \alpha} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)}.$$

Din triunghiul MOK deducem:

$$MK = \frac{MO}{\sin \varphi}$$

sau, ținînd seama de valoarea de mai sus a lui MO:

$$MK = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi}.$$

Cu aceste valori avem:

$$S_{AMC} = \frac{R}{\sin \varphi \cos \alpha} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)} \; \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi} =$$

$$= \frac{R^2 \sin \alpha}{\sin^2 \varphi \cos^2 \alpha} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)},$$

deci:

$$S = \frac{(R^2 - r^2) \sin \alpha}{\sin^2 \varphi \cos^2 \alpha} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)}$$

79. **Aplicații în fizică.** 1° *Să se determine intensitatea F a rezultantei a două forțe de intensități F_1 și F_2 care fac între ele un unghi α* (fig. 88).

Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul ABC, obținem:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,BC \cos(180° - \alpha)$,

adică:

$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha$

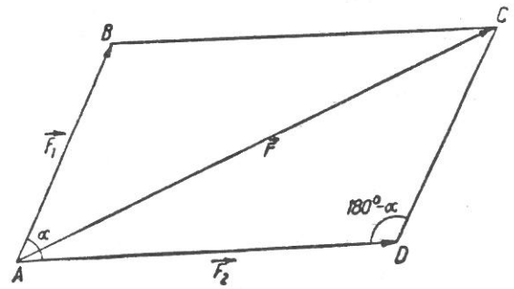


Fig. 88.

2° *O rază luminoasă străbate o placă de sticlă limitată de plane paralele. Să se determine poziția razei după trecerea ei prin placă* (fig. 89).

Fie MN și PQ planele care limitează placa, d grosimea plăcii și n indicele de refracție al ei. Raza incidentă AB se refractă de două ori. Întîi întîlnind placa se refractă mergînd în direcția BC, determinată de legea refracției:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

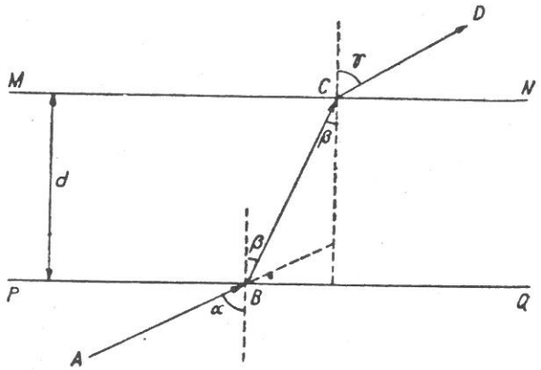


Fig. 89.

La ieşire din placă raza merge după direcţia CD, care se determină prin condiţia:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{1}{n}.$$

Din aceste două relaţii rezultă:

$$\sin\alpha=\sin\gamma,$$

adică, ţinînd seama că α şi γ sînt ascuţite:

$$\alpha=\gamma.$$

Deci, prin trecerea unei raze luminoase printr-o placă cu feţe paralele, ea nu-şi schimbă direcţia.

80. Aplicaţii în topografie. În numeroase probleme practice trebuie să se cunoască distanţele dintre anumite puncte de pe suprafaţa pămîntului şi unghiurile dintre direcţiile determinate de cîte două din aceste puncte. Măsurarea directă a acestor distanţe şi unghiuri este dificilă şi, în unele cazuri imposibilă. Folosind însă unele cunoştinţe căpătate la rezolvarea triunghiurilor, o astfel de problemă se reduce la măsurarea pe teren a distanţei dintre două puncte şi a unghiurilor dintre anumite direcţii; celelalte distanţe şi unghiuri se determină prin calcul.

Distanţele pe teren se măsoară, de obicei, cu *lanţul* sau cu *panglica*, iar unghiurile dintre două direcţii cu *grafometrul* sau cu *teodolitul*. Pentru vizarea obiectelor, teodolitul este prevăzut cu o lunetă care se poate roti atît în planul orizontal cît şi în planul vertical. În acest fel cu acest instrument se pot măsura unghiul dintre proiecţiile orizontale a două direcţii şi unghiul dintre o direcţie şi proiecţia sa pe planul orizontal.

Să ilustrăm acum cele spuse mai sus prin două exemple simple.

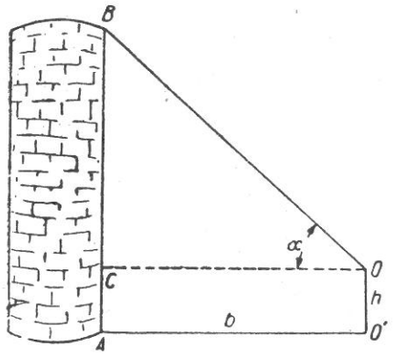


Fig. 90.

1° *Să se determine înălţimea unui turn vertical, în ipoteza că porţiunea de teren din vecinătatea bazei turnului este situată în planul orizontal.*

Fie AB înălţimea turnului considerat şi O' un punct din planul orizontal (fig. 90). Plasînd staţia în poziţia verticală $O'O$, se vizează din O punctul B — vîrful turnului. În acest fel se măsoară unghiul $\widehat{COB}=\alpha$ format de dreapta OB cu proiecţia sa

pe planul orizontal. Avînd în vedere că distanţa $AO'=b$ se măsoară pe teren, problema se reduce de fapt la determinarea catetei BC a triunghiului dreptunghic BCO în care se cunosc unghiul opus şi cealaltă catetă. Aşadar

$$CB=b\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

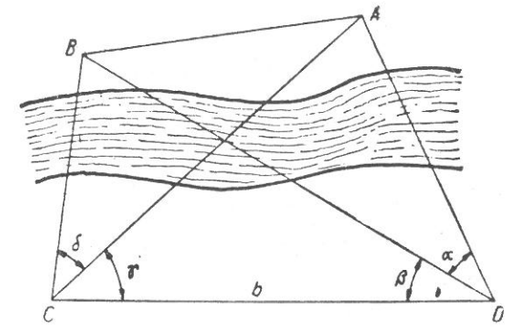


Fig. 91.

Dacă $h=O'O$ este înălţimea instrumentului de măsurat unghiurile, atunci înălţimea turnului se calculează cu ajutorul formulei:

$$AB=AC+CB=h+b\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

2° *Să se determine distanţa dintre două puncte A şi B situate într-o porţiune de teren inaccesibilă.*

Presupunem că există punctele C şi D, coplanare cu A şi B, din care se văd aceste puncte şi astfel încît distanţa dintre ele să poată fi măsurată (fig. 91). Fie b distanţa dintre punctele C, D şi α, β, γ, δ măsurile unghiurilor $\widehat{ADB}$, $\widehat{BDC}$, $\widehat{DCA}$, $\widehat{ACB}$ respectiv. Din triunghiul ACD, în care se cunosc latura CD şi unghiurile adiacente, obţinem:

$$AC=\frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

iar din triunghiul BCD:

$$BC=\frac{b\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}.$$

În acest fel în triunghiul ABC se cunosc laturile AC, BC şi unghiul cuprins între ele; prin urmare se poate calcula latura AB.

Exerciţii

Să se rezolve triunghiurile dreptunghice în care se dau următoarele elemente:

1. $a=627$; $B=23°30'$.
2. $b=324{,}6$; $B=40°28'$.
3. $a=30{,}69$; $b=24{,}67$.
4. $b=20{,}18$; $c=28{,}93$.
5. $b=320$; $\frac{B}{C}=\frac{7}{5}$.

6. $a=225;\ \frac{c}{b}=0{,}75.$

Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relațiile:

7. $\operatorname{ctg} B+\frac{1}{\sin B}=\frac{a+c}{b}$;

8. $\frac{1}{\cos 2B}+\operatorname{tg} 2B=\frac{c+b}{c-b}$;

Să se rezolve următoarele triunghiuri oarecare:

9. $a=14{,}5;\ B=40°40';\ C=64°20'.$

10. $a=11;\ b=8;\ C=42°40'.$

11. $a=47;\ b=59;\ A=108°.$

12. $a=345;\ b=384;\ c=113.$

13. $a=105;\ A=58°;\ b+c=216{,}5.$

14. $A=35°17'15'';\ B=62°43'30'';\ p=120.$

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem următoarele identități:

15. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{S}{p^2}$;

16. $1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{c}{p}$;

17. $a^2+b^2+c^2=4S(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C).$

18. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$

19. $\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c}=\frac{p^2}{abc}$;

20. Să se demonstreze că triunghiul în care

$$(p-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

este isoscel.

21. Să se calculeze lungimile laturilor unui paralelogram, știind că diagonala lui de lungime l formează cu laturile unghiurile α și β.

22. Într-un triunghi oarecare ABC, înălțimea AD este tăiată de înălțimea CE în mijlocul său. Să se arate că tangentele unghiurilor B și C ale triunghiului verifică relația:

$$\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C=2.$$

Să se calculeze unghiurile B și C în funcție de unghiul A.

23. Se dă un cerc cu centrul în O și un diametru AB al lui. Să se determine o coardă să facă cu diametrul un unghi α și să fie împărțit de el în raportul m.

24. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ortic în funcție de laturile triunghiului dat.

25. Să se calculeze intensitatea rezultantei a două forțe concurente care fac între ele un unghi de $63°40'$ și au intensitățile $F_1=174{,}44\ N$ și $F_2=240{,}10\ N$.

26. În planul P se duce dreapta (d) care face cu proiecția pe planul P a unei oblice (Δ) unghiul $\beta\ \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. Știind că dreapta (Δ) face cu planul P unghiul α, să se afle unghiul φ dintre dreptele (d) și (Δ).

27. Unghiurile plane ale unui triedru sînt egale cu α, β, γ. Să se determine unghiurile diedre.

28. Într-o piramidă patrulateră regulată, unghiul diedru de la bază este egal cu α. Prin muchia acestui diedru se duce un plan care formează cu planul bazei unghiul β. Să se determine aria secțiunii dacă latura bazei este a.

29. Într-o piramidă patrulaterală regulată este înscrisă o sferă de rază R. Să se determine aria laterală a piramidei, dacă unghiul diedru dintre fețele laterale este egal cu α.

30. Să se afle aria totală a unui con a cărui generatoare G este înclinată pe planul bazei cu un unghi α.

31. Pentru a calcula distanța dintre două puncte A și B între care se află un obstacol, se alege punctul C din care se văd punctele A și B. Distanțele AC, CB și unghiul $\widehat{ACB}$ se pot măsura. Să se calculeze distanța AB, dacă $AC=320$ m, $CB=400$ m și $\widehat{ACB}=110°21'$.

32. Pentru a determina lățimea unui rîu între două puncte A și B, pe prelungirea segmentului BA se alege punctul M din care se vede A. După aceea se alege punctul accesibil N. Știind că $AM=50$ m, $MN=36$ m, $\widehat{BMN}=74°29'$ și $\widehat{BNM}=80°56'$, să se calculeze distanța AB.

33. Pentru a determina distanța dintre două puncte C și D, care nu se văd unul din celălalt, se alege pe teren dreapta DN și pe această dreaptă punctele A și B din care este vizibil punctul C. După aceea se măsoară distanțele $DA=836$ m, $AB=513$ m și unghiurile $\widehat{DAC}=54°16'$ și $\widehat{DBC}=38°43'$. Să se determine distanța dintre punctele C și D.

34. Pentru a determina distanța dintre două puncte inaccesibile A și B, se măsoară distanța $CD=245$ m și unghiurile $\widehat{ACD}=32°14'$, $\widehat{BCD}=48°23'$, $\widehat{ADC}=62°7'$, $\widehat{BDC}=81°17'$. Să se calculeze distanța dintre punctele A și B.

35. Punctele A, B, C formează pe teren un triunghi echilateral cu latura $a=2{,}5$ km. Să se calculeze distanța de la punctul M, situat în interiorul unghiului $\widehat{ABC}$, pînă la punctele considerate dacă din punctul M latura AB se vede sub unghiul $\alpha=22°12'$, iar latura BC se vede sub unghiul $\beta=10°28$.
Ind. Se aplică teorema sinusurilor în triunghiurile ABM, BCM și se determină unghiul $\widehat{BCM}$.

Numere complexe sub formă trigonometrică

§ 25. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

81. **Planul complex.** Numerele de forma $z=x+iy$, unde x și y sînt numere reale, iar $i=\sqrt{-1}$ și $i^2=-1$ se numesc *numere complexe*.

Din această definiție rezultă că numerele complexe $x+iy$ cu $y=0$ sînt numere reale, deci dacă notăm cu R mulțimea numerelor reale și cu K mulțimea numerelor complexe, avem $R \subset K$.

Două numere complexe x_1+iy_1 și x_2+iy_2 sînt egale dacă și numai dacă $x_1=x_2$ și $y_1=y_2$.

Am văzut cum putem stabili o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor reale și mulțimea punctelor unei drepte.[1] Să arătăm acum cum putem stabili o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor complexe și mulțimea punctelor dintr-un plan.

Fie $z=x+iy$ un număr complex. Să considerăm un plan pe care să-l raportăm la un sistem de două axe ortogonale Ox, Oy. Un punct M din acest plan este determinat de coordonatele x și y și reciproc. Ținînd seama că $z=x+iy$, rezultă că *există o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor complexe z și mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan* (fig. 92). Punctul $M(x,y)$ se numește *imaginea geometrică* a numărului z, iar z se numește *afixul punctului* M. Lungimea segmentului OM se numește *modulul* numărului complex z și se notează cu $|z|$ sau ρ, iar unghiul orientat dintre axa Ox și vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numește *argumentul* numărului complex și se notează cu $\arg z$ sau cu φ. Acest plan se numește *planul complex*.

Să considerăm acum vectorul $\overrightarrow{OM}$. Mărimile proiecțiilor acestui vector pe axele Ox și Oy sînt x, respectiv y. De aici rezultă că avem o

[1] Algebra, anul I liceu.

corespondență biunivocă între mulțimea numerelor complexe și mulțimea vectorilor din plan cu originea O (fig. 93).

82. **Forma trigonometrică a numărului complex.** Dacă notăm cu A proiecția punctului M pe axa Ox, din triunghiul dreptunghic OAM deducem:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}, \qquad (1)$$

de unde rezultă:

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi.$$

Cu aceste valori ale lui x și y, numărul complex z se scrie sub forma

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Această formă a numărului complex se numește *forma trigonometrică a numărului complex*.

Din relațiile (1) deducem:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

De asemenea, din triunghiul dreptunghic AOM deducem:

$$OM^2=OA^2+AM^2,$$

adică:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Numărul complex $x-iy$ se numește conjugatul numărului $z=x+iy$ și se notează cu $\bar{z}$. Din definiția modulului și argumentului unui număr complex rezultă (fig. 94):

$$|\bar{z}|=|z|,\quad \arg\bar{z}=2\pi-\arg z$$

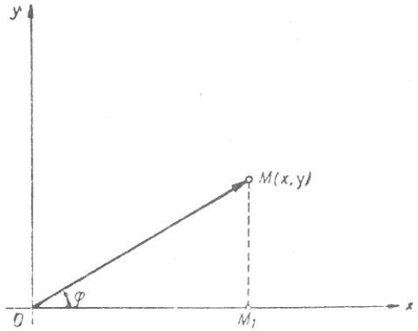


Fig. 92.

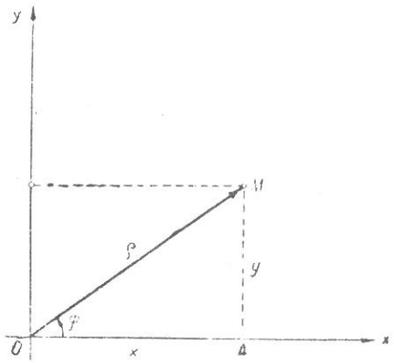


Fig. 93.

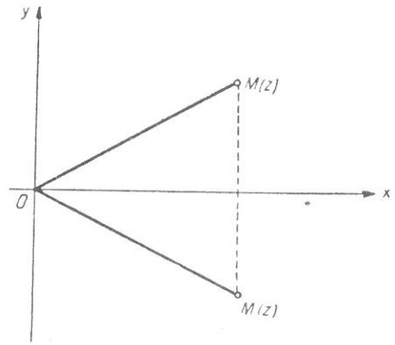


Fig. 94.

Imaginea geometrică a numărului z este simetrică față de axa Ox a imaginii geometrice a numărului z.

Numărul complex $z=x+iy$ este nul dacă, și numai dacă, $x=y=0$. De aici rezultă că dacă $z=0$, atunci $|z|=0$ și reciproc.

Ținînd seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, rezultă că două numere complexe $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ și $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ sînt egale dacă și numai dacă $\rho_1=\rho_2$ și $\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$ $(k\in Z)$.

Să scriem acum sub forma trigonometrică cîteva numere complexe.

Exemple

1) Fie numărul complex $z_1=1-i$. Imaginea geometrică a acestui număr este punctul $M_1(1,-1)$ situat în cadranul IV (fig. 95, *a*). Avem:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=-1$$

și ținînd seama că $M_1\in$ cadran IV, rezultă că $\varphi_1=\frac{7\pi}{4}$. De asemenea, avem $\rho_1=\sqrt{2}$, deci:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

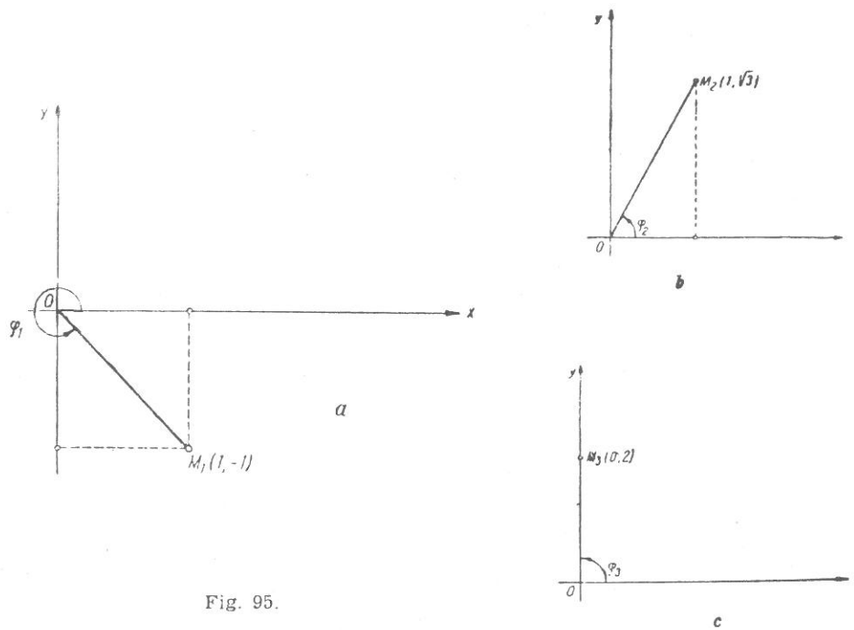


Fig. 95.

2) Să scriem sub forma trigonometrică numărul complex $z_2=1+i\sqrt{3}$. Imaginea geometrică a acestui număr este punctul $M_2(1,\sqrt{3})$ situat în cadranul I (fig. 95, *b*). Avem $\operatorname{tg}\varphi_2=\sqrt{3}$ și avînd în vedere că $M_2\in$ cadran I, deducem $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$. De asemenea, avem $\rho_2=2$ și deci:

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

3) Imaginea geometrică a numărului $z_3=2i$ este punctul $M_3(0,2)$ situat pe axa Oy, adică $\varphi_3=\frac{\pi}{2}$ (fig. 95, *c*). De asemenea, avem $\rho_3=2$ și deci:

$$z_3=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

4) *Fie numărul complex* $z_4=\sin\alpha-i\cos\alpha$.

Avem:

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\quad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

adică:

$$z_4=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Dar: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$, deci

$$z_4=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$$

Rezultă:

$$|z_4|=1,\ \arg z_1=\alpha-\frac{\pi}{2}.$$

5) Să scriem sub forma trigonometrică numărul complex $z_5=1-\cos\alpha+$ $+i\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$. Avem:

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

deci

$$z_5=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dar $\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$,

de unde deducem:

$$z_5 = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Avînd în vedere că $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, rezultă $0 \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant \pi$ și deci $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$.

De aici rezultă că:

$$|z_5| = 2\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \arg z_5 = \frac{\pi-\alpha}{2}.$$

§ 26. Operații cu numere complexe

83. **Adunarea și scăderea numerelor complexe.** Să considerăm acum două numere complexe $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Avem:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

De aici rezultă că:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

adică adunarea numerelor complexe este o operație comutativă și asociativă.

Pentru a da o interpretare geometrică a adunării numerelor complexe, să considerăm punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, ale căror afixe sînt numerele complexe z_1, respectiv z_2 și vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$. Notînd cu M punctul care împreună cu O, M_1 și M_2 formează un paralelogram (fig. 96), deducem că:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}.$$

De aici rezultă că vectorul $\overrightarrow{OM}$ are ca proiecții pe axele de coordonate numerele $x_1 + x_2$, respectiv $y_1 + y_2$, deci punctul M are coordonatele $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$. Rezultă că afixul punctului M este numărul complex $z_1 + z_2$.

Așadar corespondența biunivocă stabilită între mulțimea numerelor complexe și mulțimea vectorilor din plan se bucură de următoarea proprietate importantă:

Dacă numerelor complexe z_1, z_2 le corespund respectiv vectorii $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, atunci sumei $z_1 + z_2$ îi corespunde vectorul sumă $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

O astfel de corespondență biunivocă se numește *izomorfism*, iar despre mulțimea numerelor complexe și mulțimea vectorilor din plan se spune că

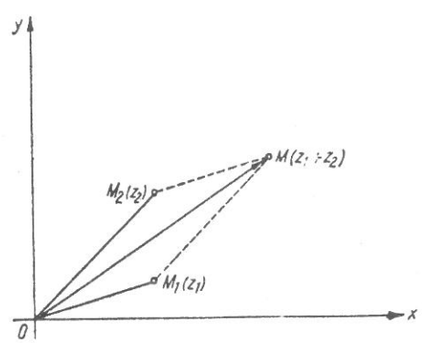


Fig. 96.

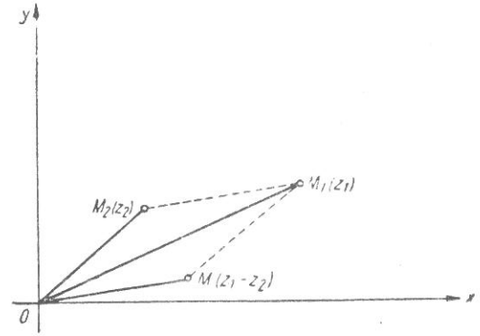


Fig. 97.

sînt *izomorfe*. Se poate arăta că în acest caz *orice proprietate a sumei vectorilor este, de asemenea, proprietate a sumei numerelor complexe* (de exemplu comutativitatea și asociativitatea menționate mai sus).

Din triunghiul OM_1M deducem:

$$OM \leqslant OM_1 + M_1M$$

sau, ținînd seama că $M_1M = OM_2$, $OM \leqslant OM_1 + OM_2$.

Dar

$$OM = |z_1 + z_2|, \quad OM_1 = |z_1|, \quad OM_2 = |z_2|,$$

deci

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1}$$

De asemenea, dacă considerăm numerele complexe z_1 și z_2, avem:

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2).$$

Între vectorii $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ și $\overrightarrow{M_2M_1}$ avem relația (fig. 97):

$$\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1},$$

de unde rezultă:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2},$$

deci vectorul $\overrightarrow{M_2M_1}$ are ca proiecții pe axele de coordonate numerele $x_1 - x_2$ și $y_1 - y_2$. Ducînd prin O vectorul $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_2M_1}$, rezultă că figura OM_2M_1M este un paralelogram și M este tocmai imaginea geometrică a numărului complex $z_1 - z_2$.

84. **Produsul numerelor complexe.** Produsul numerelor complexe z_1 și z_2 se face după regula de înmulțire a polinoamelor, înlocuind pe i^2 cu -1, adică:

$$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

De aici rezultă că:

$$z_1z_2=z_2z_1,$$

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3,$$

adică înmulțirea numerelor complexe este comutativă, asociativă și distributivă față de adunarea numerelor complexe.

Să considerăm acum numerele complexe:

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Făcînd produsul acestor două numere, obținem:
$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)]$
sau ținînd seama de formulele de adunare a unghiurilor

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

adică

$$|z_1z_2|=|z_1|\ |z_2|;\ \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2. \qquad (2)$$

Deci, *modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulelor, iar argumentul produsului este egal cu suma argumentelor.*

Să demonstrăm prin inducție completă că produsul a n numere complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ este dat de formula:

$$z_1z_2\ldots z_n=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)], \qquad (3)$$

unde am notat

$$\rho_k=|z_k|,\ \varphi_k=\arg z_k\ (k=1,2,\ldots n).$$

Această formulă este adevărată pentru $n=2$. Să presupunem că formula (3) este adevărată pentru $n=p$ și să calculăm produsul numerelor complexe $z_1, z_2, \ldots, z_p, z_{p+1}$. În acest caz, notînd $z=z_1z_2\ldots z_p$, avem $|z|=\rho_1\rho_2\ldots\rho_p$, $\arg z=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_p$. Cu această notație produsul numerelor $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}$ se scrie:

$$z_1z_2\ldots z_pz_{p+1}=zz_{p+1}$$

și ținînd seama de formula (2), rezultă:

$$|z_1z_2\ldots z_{p+1}|=|z|\,|z_{p+1}|,\ \arg(z_1z_2\ldots z_{p+1})=\arg z+\arg z_{p+1},$$

adică:

$$|z_1z_2\ldots z_{p+1}|=\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1},\ \arg(z_1z_2\ldots z_{p+1})=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{p+1}$$

și deci formula (3) este demonstrată.

Pentru a da o interpretare geometrică înmulțirii numerelor complexe, să considerăm punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și $E(1, 0)$. Pe segmentul OM_2 se construiește triunghiul OM_2M direct asemenea triunghiului OEM_1 (fig. 98). Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă:

$$\frac{OM}{OM_1}=\frac{OM}{OE_1},\ \widehat{M_2OM}=\widehat{EOM_1}.$$

Dar

$$OE=1,\ OM_1=\rho_1,\ OM_2=\rho_2$$

$$\widehat{EOM_1}=\varphi_1,\ \widehat{EOM_2}=\varphi_2,$$

deci

$$OM=\rho_1\rho_2,\ \widehat{EOM}=\varphi_1+\varphi,$$

de unde rezultă că punctul M este imaginea geometrică a numărului complex z_1z_2.

Să aplicăm acum aceste rezultate la un exemplu.

Să se determine produsul numerelor complexe

$$z_k=\cos\frac{\pi}{2^k}+i\sin\frac{\pi}{2^k},$$

unde

$$k=0, 1, \ldots, n.$$

Avem $|z_k|=1$ și $\arg z_k=\frac{\pi}{2^k}$,

deci notînd:

$$z=z_0z_1\ldots z_n,$$

avem

$$|z|=|z_0|\ |z_1|\ldots z_n=1$$

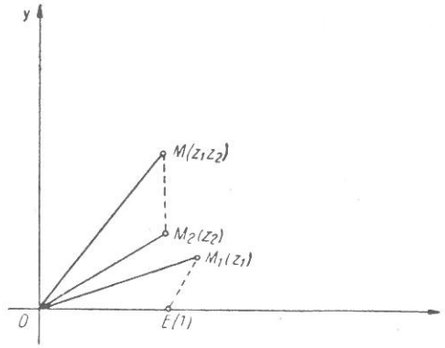


Fig. 98.

și

$$\arg z = \arg z_0 + \arg z_1 + \ldots + \arg z_n = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \ldots + \frac{\pi}{2^n}.$$

Dar

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n},$$

deci:

$$\arg z = \frac{\pi(2^{n+1} - 1)}{2^n}.$$

Rezultă că:

$$z = \cos\frac{(2^{n+1} - 1)\pi}{2^n} + i \sin\frac{(2^{n+1} - 1)\pi}{2^n}.$$

85. **Împărțirea numerelor complexe.** Fie acum numerele complexe z_1 și $z_2 \neq 0$. Pentru a împărți numărul z_1 la z_2, trebuie să determinăm un număr complex $z = x + iy$ astfel încît:

$$z_1 = z_2 z.$$

Înmulțind această egalitate membru cu membru cu $\bar{z}_2$, obținem:

$$z_1 \bar{z}_2 = z_2 \bar{z}_2 z.$$

Dar $z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2$ și ținînd seama că $z_2 \neq 0$, adică $|z_2| \neq 0$, deducem:

$$z = \frac{z_1 z_2}{|z_2|^2}$$

sau:

$$z = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

adică:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Dacă cele două numere sînt scrise sub forma trigonometrică $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, această formulă devine:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

deci:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Ca și în cazul interpretării geometrice a înmulțirii numerelor complexe, să considerăm punctele M_1, M_2 și E să construim triunghiul OM_1M direct asemenea cu triunghiul OM_2E (fig. 99). Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\frac{OM}{OE} = \frac{OM_1}{OM_2}, \quad \widehat{MOM_1} = \widehat{EOM_2}.$$

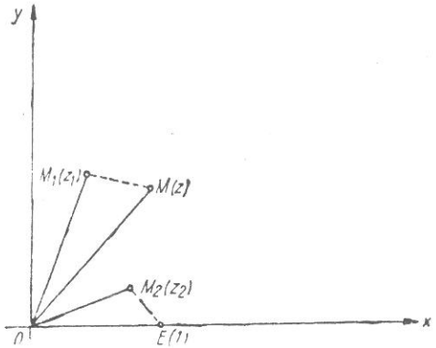


Fig. 99.

Dar

$$OE = 1, \quad OM_1 = \rho_1, \quad OM_2 = \rho_2,$$

$$\widehat{EOM_1} = \varphi_1, \quad \widehat{EOM_2} = \varphi_2,$$

deci

$$OM = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \widehat{EOM} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

De aici rezultă că punctul M este imaginea geometrică a numărului complex $\frac{z_1}{z_2}$.

86. **Puterea numerelor complexe.** Să luăm acum în formula (3)

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = \rho, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi.$$

Cu aceasta obținem:

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \tag{4}$$

adică:

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \arg z.$$

Dar, pe de altă parte:

$$z^n = \rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

și formula (1) devine:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \tag{5}$$

Aceasta este formula lui Moivre.[1]

[1] A. Moivre, matematician francez (1667—1754).

Să demonstrăm că formula lui Moivre este adevărată și dacă n este un număr întreg negativ. Într-adevăr, dacă $n=-p$ unde $p>0$, atunci avem:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\frac{1}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^p}.$$

Dar, ținînd seama că p este un număr natural, putem aplica formula (5) și deci:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\frac{1}{\cos p\varphi+i\sin p\varphi}$$

sau amplificînd fracția din membrul doi cu conjugatul numitorului:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos p\varphi-i\sin p\varphi.$$

Dar $\cos p\varphi-i\sin p\varphi=\cos(-p\varphi)+i\sin(-p\varphi)$ și avînd în vedere că $-p=n$, rezultă:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Vom da acum un exemplu în care să aplicăm formula lui Moivre.

Exemplu

Să se calculeze expresia $E=(\sqrt{3}-i)^8(-1+i\sqrt{3})^{11}$. Dacă notăm $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=-1+i\sqrt{3}$, avem $|z_1|=2$, $\arg z_1=\frac{11\pi}{6}$, $|z_2|=2$, $\arg z_2=\frac{2\pi}{3}$ deci:

$$z_1=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right),\ z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Aplicînd formula lui Moivre, rezultă:

$$z_1^8=2^8\left(\cos\frac{44\pi}{3}+i\sin\frac{44\pi}{3}\right),\ z_2^{11}=2^{11}\left(\cos\frac{22\pi}{3}+i\sin\frac{22\pi}{3}\right),$$

de unde:

$$E=2^{19}(\cos 22\pi+i\sin 22\pi)=2^{19}.$$

Aplicații

1° Dacă în (4) luăm $\varphi=\frac{\pi}{2}$, obținem:

$$i^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}. \tag{5'}$$

Pentru $n=4m$ avem:

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\cos 2m\pi=1,\ \sin\frac{n\pi}{2}=\sin 2m\pi=0.$$

Pentru $n=4m+1$ avem:

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\cos\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \sin\frac{n\pi}{2}=\sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Pentru $n=4m+2$ avem:

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\cos(2m\pi+\pi)=-1,\ \sin\frac{n\pi}{2}=\sin(2m\pi+\pi)=0.$$

Pentru $n=4m+3$ avem:

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\cos\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=0,\ \sin\frac{n\pi}{2}=\sin\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=-1.$$

Cu aceste valori, formula (5') ne dă:

$$i^{4m}=1,\ i^{4m+1}=i,\ i^{4m+2}=-1,\ i^{4m+3}=-i, \tag{6}$$

unde m este un număr întreg.

2° Să presupunem acum că n este un număr natural și să dezvoltăm membrul întîi al egalității (5) după formula binomului lui Newton. Obținem:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos^n\varphi+iC_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi+$$
$$+i^2C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\ldots+i^nC_n^n\sin\varphi.$$

Avînd în vedere formula (6), această relație se mai poate scrie:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+$$
$$+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi+\ldots+i\,(C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-$$
$$-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi-\ldots).$$

Cu aceasta, formula (5) ne dă:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\ldots$$
$$\sin n\varphi=C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+C_n^5\cos^{n-5}\sin^5\varphi-\ldots \tag{7}$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{tg} n\varphi=\frac{C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi-\ldots}{\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\ldots}$$

sau împărțind și numărătorul și numitorul fracției din membrul al doilea $\cos^n\varphi$.

$$\operatorname{tg} n\varphi=\frac{C_n^1\operatorname{tg}\varphi-C_n^3\operatorname{tg}^3\varphi+C_n^5\operatorname{tg}^5\varphi-\ldots}{1-C_n^2\operatorname{tg}^2\varphi+C_n^4\operatorname{tg}^4\varphi-\ldots} \tag{7'}$$

De asemenea, din formulele (7) rezultă:

$$\operatorname{ctg} n\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^n \varphi - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2}\varphi + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4}\varphi - \dots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1}\varphi - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3}\varphi + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5}\varphi \dots}$$

Formulele (7), (7'), și (7'') ne dau *funcțiile trigonometrice ale unghiului* $n\varphi$ *în funcție de funcțiile trigonometrice ale unghiului* φ.

De exemplu, să determinăm funcțiile trigonometrice ale unghiului 5φ. Din formulele (7), (7') și (7'') deducem:

$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi \sin\varphi - 10\cos^2\varphi \sin^3\varphi + \sin^5\varphi,$$

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \sin^2\varphi + 5\cos\varphi \sin^4\varphi,$$

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\operatorname{tg}^2\varphi + 5\operatorname{tg}^4\varphi},$$

$$\operatorname{ctg} 5\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^5\varphi - 10\operatorname{ctg}^3\varphi + 5\operatorname{ctg}\varphi}{5\operatorname{ctg}^4\varphi - 10\operatorname{ctg}^2\varphi + 1}.$$

87. **Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex.** Să considerăm acum numărul complex $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ și să determinăm rădăcina de ordinul n a lui. Pentru aceasta vom nota:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Ridicînd această egalitate la puterea n și ținînd seama de formula (4), obținem:

$$\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Numerele complexe din cei doi membri fiind egale, deducem:

$$r^n = \rho, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

adică:

$$r = \rho^{\frac{1}{n}}{}^{1}, \quad \theta = \frac{2k\pi + \varphi}{n}.$$

Deci:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right).$$

Dacă notăm:

$$\xi_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right),$$

[1] $\rho^{\frac{1}{n}}$ reprezintă rădăcina aritmetică.

atunci avem:

$$\xi_{n+k} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(2\pi + \frac{2k\pi+\varphi}{n}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)\right]$$

și ținînd seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, deducem:

$$\xi_{n+k} = \xi_k.$$

Deci obținem valori distincte pentru rădăcinile de ordinul n al lui z, dînd lui k valorile $0, 1, \dots, n-1$.

Rezultă formula:

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right) (k = 0, 1, \dots, n-1). \qquad (8)$$

Cu notația de mai sus, rădăcinile de ordinul n ale numărului complex z sînt $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$. Avem:

$$|\xi_0| = |\xi_1| = \dots = |\xi_{n-1}| = \rho^{\frac{1}{n}},$$

deci imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordinul n ale numărului z sînt situate la aceeași distanță de originea axelor de coordonate, deci se află pe un cerc cu centrul în O și cu raza $\rho^{\frac{1}{n}}$.

Argumentele numerelor $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, sînt respectiv;

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots; \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

De aici rezultă că dacă notăm cu $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ imaginile geometrice ale punctelor $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, atunci (fig. 100):

$$\widehat{M_0OM_1} = \widehat{M_1OM_2} = \dots = \widehat{M_{n-2}OM_{n-1}} = \widehat{M_{n-1}OM_0} = \frac{2\pi}{n}.$$

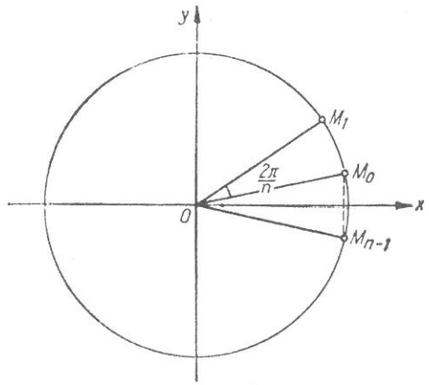


Fig. 100.

Deci imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordinul n ale numărului complex z formează un poligon regulat înscris în cercul O cu raza $|z|^{\frac{1}{n}}$.

În particular, să determinăm rădăcinile de ordinul n ale numerelor 1 și -1. Avem:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0, \text{ deci:}$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

De asemenea, avem:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

deci:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Rădăcinile de ordinul n ale numărului 1 se numesc *rădăcinile de ordinul n ale unității*. Să demonstrăm următoarea proprietate a acestor rădăcini: *orice putere întreagă a unei rădăcini de ordinul n a unității este o rădăcină de ordinul n a unității.*

Într-adevăr dacă notăm

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

atunci avem:

$$\omega_k^p = \cos \frac{2kp\pi}{n} + i \sin \frac{2kp\pi}{n}.$$

Notînd cu k_1 restul împărțirii numărului kp la n, putem scrie:

$$kp = mn + k_1,$$

unde $0 \leqslant k_1 \leqslant n-1$, deci:

$$\frac{2kp\pi}{n} = 2m\pi + \frac{2k_1\pi}{n},$$

adică:

$$\omega_k^p = \cos \frac{2k_1\pi}{n} + i \sin \frac{2k_1\pi}{n}.$$

Rezultă $\omega_k^p = \omega_{k_1}$, relație care demonstrează proprietatea enunțată.

Să aplicăm formula de extragere a rădăcinii dintr-un număr complex la cîteva cazuri particulare.

Exemple

1) *Să se calculeze* $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}$.

Avem

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right),$$

deci:

$$\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{3}}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{3}}{4}\right) (k = 0, 1, 2, 3).$$

Cele patru rădăcini sînt:

$$\zeta_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right),$$

$$\zeta_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\zeta_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}\right),$$

$$\zeta_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}\right).$$

2) *Să se calculeze* $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$.

Avem:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), \quad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right),$$

deci:

$$\frac{1+i}{1-i} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă:

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}} = \cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Cele trei rădăcini căutate sînt deci:

$$\zeta_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2};$$

$$\zeta_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2};$$

$$\zeta_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

88. **Ecuații binome.** O ecuație de forma:

$$z^n + a = 0, \tag{9}$$

unde a este un număr complex, se numește *ecuație binomă*.

Pentru a rezolva o astfel de ecuație vom scrie numărul $-a$ sub forma trigonometrică:

$$-a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Cu aceasta ecuația (9) devine:

$$z^n = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

de unde rezultă:

$$z = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\rho}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\rho}{n}\right)(k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Deci cele n rădăcini ale ecuației (9) sînt:

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)(k=0,1, \ldots, n-1),$$

unde:

$$\rho = |-a|, \quad \varphi = \arg(-a).$$

Să rezolvăm acum cîteva ecuații binome.

Exemple

1) *Să se rezolve ecuația:*

$$(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0.$$

Această ecuație se poate scrie sub forma:

$$z^6 = -\frac{1+5i}{2-3i}$$

sau:

$$z^6 = 1 - i.$$

Ținînd seama că $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, ecuația dată devine:

$$z^6 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

de unde deducem că rădăcinile ecuației sînt:

$$z_k = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{6} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{6}\right)(k=0,1, \ldots, 5).$$

2) *Să se rezolve ecuația:* $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+ai}{1-ai}$,

unde a este un număr real pozitiv.

Notînd $\rho = \sqrt{1+a^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} a$, deducem:

$$1 + ai = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$1 - ai = \rho[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)],$$

deci:

$$\frac{1+ai}{1-ai} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

și ecuația dată se scrie: $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$,

de unde deducem:

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \cos\frac{k\pi+\varphi}{2} + i\sin\frac{k\pi+\varphi}{2}\ (k=0, 1, 2, 3).$$

De aici obținem:

$$z = \frac{\sin\frac{k\pi+\varphi}{2} + \left(1-\cos\frac{k\pi+\varphi}{2}\right)}{1+\cos\frac{k\pi+\varphi}{2} + i\sin\frac{k\pi+\varphi}{2}}.$$

Dar:

$$1-\cos\frac{k\pi+\varphi}{2} = 2\sin^2\frac{k\pi+\varphi}{4}, \quad 1+\cos\frac{k\pi+\varphi}{2} = 2\cos^2\frac{k\pi+\varphi}{2},$$

$$\sin\frac{k\pi+\varphi}{2} = 2\sin\frac{k\pi+\varphi}{4}\cos\frac{k\pi+\varphi}{4},$$

deci:

$$z = \frac{2\sin\frac{k\pi+\varphi}{4}\left(\cos\frac{k\pi+\varphi}{4} + i\sin\frac{k\pi+\varphi}{4}\right)}{2\cos\frac{k\pi+\varphi}{4}\left(\cos\frac{k\pi+\varphi}{4} + i\sin\frac{k\pi+\varphi}{4}\right)},$$

adică:

$$z = \operatorname{tg}\frac{k\pi+\varphi}{4}\ (k=0, 1, 2, 3).$$

Cele patru rădăcini ale ecuației date sînt deci:

$$z_1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}, \quad z_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right), \quad z_3 = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right), \quad z_4 = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right)$$

sau: $$z_1=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4},\ z_2=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}},\ z_3=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4},\ z_4=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}-1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}+1}.$$

Exerciţii

1. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

   a) $-1-i$; *b)* $\sqrt{3}-i$; *c)* $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; *d)* $1+\cos\alpha-i\sin\alpha$.

2. Să se facă produsul următoarelor numere complexe, scriindu-le sub forma trigonometrică:

$$z_1=\sqrt{3}+i,\quad z_2=2-2i,\quad z_3=-1-i\sqrt{3}.$$

3. Să se calculeze expresia:

$$\frac{(\sqrt{3}-i)(\sin\alpha-i\cos\alpha)}{(-1+i)(\sin\alpha+i\cos\alpha)}.$$

4. Să se determine modulele şi argumentele următoarelor numere complexe:

$$z_1=(1-i\sqrt{3})^6,\quad z_2=\sqrt{(\sqrt{3}+i)},\quad z_3=\frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}+i)^3}.$$

5. Să se arate că: $$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

6. Să se calculeze suma:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{2^2}+\dots+\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{2^n}.$$

7. Să se demonstreze formula:

$$\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

8. Să se calculeze următorii radicali:

   a) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$; *b)* $\sqrt[4]{1+i}$; *c)* $\sqrt[3]{1+\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

9. Să se rezolve următoarele ecuaţii binome:

   a) $z^3-27=0$; *b)* $z^4+625=0$;
   c) $z^3-i=0$; *d)* $(2-i)z^3-3-i=0$.

10. Să se rezolve ecuaţia:

$$z^8-2z^4+2=0.$$

Probleme recapitulative

1. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^3 ka-\cos^3\left(\frac{2\pi}{3}-ka\right)}{\cos ka+\cos\left(\frac{\pi}{3}+ka\right)}=\frac{3}{4}n.$$

   Ind. T_k, termenul de rangul k al sumei precedente, este egal cu $\frac{3}{4}$.

2. Să se determine constantele a, b, c astfel ca expresia $E=a\sin x\cos x(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)+b\sin^2 x\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)+(c-2)\sin^4 x\cos^4 x(\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x)+2(\sin^6 x+\cos^6 x)$ să nu depindă de x.
   Ind. Notînd $\sin^2 2x=t$, după transformări, se obţine:

$$E(t)=(c-2)t^2-\frac{1}{2}(b+2c-1)t+a+b+c,\ \text{de unde: } c=2,\ b=-3,$$

   iar a este arbitrar.

3. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left|\frac{\sin x-\cos x}{1-\sin x\cos x}\right|\leqslant 1.$$

   Ind. Cu ajutorul substituţiei $\sin x-\cos x=t$, inegalitatea devine $\frac{2|t|}{t^2+1}\leqslant 1$.

4. Să se arate că funcţia $f(x)=\cos\alpha x+\cos x$, unde α este un număr iraţional, nu este periodică.
   Ind. Presupunînd că $f(x)$ admite perioada T, pentru $x=0$ se obţine ecuaţia $\cos\alpha T+\cos T=2$ care nu admite soluţii dacă $T>0$ şi α este iraţional.

5. Să se demonstreze că funcţia:

$$f(x)=x-\sin x$$

   este strict monotonă.

   Ind. $f(x)_2-f(x_1)=(x_2-x_1)-2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}$ şi dacă $x_2>x_1$, atunci

$$\left|2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|<x_2-x_1.$$

6. Să se traseze graficul funcţiei:
   $f(x)=\sin x|\cos x|+\cos x|\sin x|$.

Ind. Funcţia admite perioada 2π şi

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x \text{ dacă } x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],\\ 0 \text{ dacă } x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]\\ -\sin 2x \text{ dacă } x\in\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}$$

7. Să se determine modulul numărului complex:

$$z'=\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^0}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^1}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\ldots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right]$$

Ind. Notînd $\frac{1+i}{2}=z$, obţinem succesiv:

$$z'=(1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2})\ldots(1+z^{2^n})=$$

$$=\frac{(1-z)(1+z)(1+z^{2^2})\ldots(1+z^{2^n})}{1-z}=$$

$$=\frac{(1-z^2)(1+z^2)(1+z^{2^2})\ldots(1+z^{2^n})}{1-z}=\frac{(1-z^4)(1+z^{2^2})\ldots(1+z^{2^n})}{1-z}=$$

$$\ldots=\frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z},$$

de unde

$$z'=\begin{cases}\frac{5}{4}(1+i), \text{ dacă } n=1,\\ \left(1-\frac{1}{2^n}\right)(1+i), \text{ dacă } n>1.\end{cases}$$

8. Să se stabilească relaţia:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

Ind. Ecuaţia binomă $x^{2n+1}-1=0$ are rădăcinile

$$x_k=\cos\frac{2\pi k}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi k}{2n+1}\ (k=0,1,\ldots,2n),$$

iar $\sum_{k=0}^{2n}x_k=0$, de unde rezultă că suma părţilor reale $\sum_{k=0}^{2n}\cos\frac{2\pi k}{2n+1}$ este nulă.

Însă $\sum_{k=0}^{2n}\cos\frac{2\pi k}{2n+1}=1+\left(\cos\frac{2n\cdot 2\pi}{2n+1}+\cos\frac{1\cdot 2\pi}{1n+1}\right)+$

$$+\left(\cos\frac{(n-1)2\pi}{2n+1}+\cos\frac{2\cdot 2\pi}{2n+1}\right)+\ldots+\left(\cos\frac{(n+1)2\pi}{2n+1}+\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2n+1}\right)=$$

$$=1-2\left[\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{1\cdot\pi}{2n+1}\right].$$

Mai departe se ţine seama în ultima expresie de relaţia:

$$\cos\frac{[2n-(2k-1)]\pi}{2n+1}=-\cos\frac{k\cdot 2\pi}{2n+1}\ (k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

9. Să se rezolve inecuaţia:

$$a^{\sin x}>a^{\cos x}, \text{ unde } a>0.$$

Ind. Dacă $0<a<1$, atunci $a^{\sin x}>a^{\cos x}\Leftrightarrow\sin x<\cos x$; dacă $1<a$, atunci

$$a^{\sin x}>a^{\cos x}\Leftrightarrow\sin x>\cos x.$$

10. Să se rezolve ecuaţia:

$\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3$.

Ind. Cu ajutorul identităţii
$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$,

ecuaţia dată se scrie sub forma $\sin\frac{3x}{2}\sin 2x\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos^2\frac{x}{2}=0$.

11. Să se rezolve ecuaţia:

$(1-\alpha)\cos 4x-2(5-2\alpha)\cos 2x+5\alpha+13=0$
şi să se discute după valorile parametrului α.
Ind. Pentru $\alpha=1$ ecuaţia nu admite soluţii; pentru $\alpha\neq 1$ se obţine ecuaţia echivalentă

$\cos 2x=\frac{\alpha+2}{-\alpha+1}$ care admite soluţii pentru

$$-1\leqslant\frac{\alpha+2}{-\alpha+1}\leqslant 1, \text{ de unde } \alpha\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right].$$

12. Să se rezolve ecuaţia:

$x^2+2x\cos(k\pi x)+1=0.\qquad (k\in Z).$

Ind. Ecuaţia echivalentă $\cos(k\pi x)=-\frac{x^2+1}{2x}$ admite soluţii numai dacă $|x|=1$

Se obţine soluţia $x=1$ pentru k impar şi $x=-1$ pentru k par.

13. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{1}{4}$$

14. Să se rezolve ecuația:

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=-\frac{1}{2}.$$

Ind. Înmulțind ambii membri ai ecuației cu $2\sin x$ și transformînd produsele obținute în sume, sau ținînd seama de exercițiul 7 din cap. VI, se obține ecuația echivalentă $\sin\frac{2n+1}{2}x=0$ $(x\neq k\pi)$, de unde $x=k\frac{2\pi}{2n+1}$ (k este un număr întreg arbitrar, nedivizibil cu $2n+1$).
Pentru oricare din aceste valori ale lui k este deci valabilă egalitatea

$\sum_{l=1}^{m}\cos\frac{k2\pi}{2n+1}l=-\frac{1}{2}$, care constituie o generalizare a ex. 8.

15. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2\cos x\cos 3y=a+\frac{1}{a}, \\ 2\sin x\sin 3y=1-a. \end{cases}$$

Ind. Fiindcă $|2\cos x\cos 3y|\leqslant 2$, iar $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geqslant 2$, sistemul poate să aibă soluții numai pentru $|a|=1$. Dacă $a=-1$ sistemul este incompatibil, dacă $a=1$ se obțin soluțiile $x=(l+k)\pi$, $y=(l-k)\frac{\pi}{3}$ $(l,k\in Z)$.

16. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, atunci

$$\cos A+\cos B+\cos C<2.$$

Ind. Scriind sistemul sting sub forma:

$$\cos A+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

și observînd că se poate considera $A\leqslant 60°$, prin majorări succesive, se obține inegalitatea dată.

17. Fiind dat un dreptunghi de dimensiuni a și b, să se construiască un alt dreptunghi de arie m^2, astfel ca vîrfurile primului să fie situate pe laturile celui de-al doilea.
Ind. Notînd cu α unghiul dintre două laturi ale dreptunghiurilor considerate, se obține $\sin 2\alpha=\frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2}$

Construcția este posibilă pentru $\sqrt{ab}\leqslant m\leqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

18. O piramidă patrulateră regulată cu latura bazei egală cu a și unghiul diedru de la bază egal cu 2α se secționează cu planul bisector al diedrului de la bază. Să se calculeze aria secțiunii.

Ind. Se consideră planul determinat de vîrful piramidei și de mijloacele a două laturi opuse ale bazei. Aria secțiunii este dată de relația $S=a^2\cdot\frac{\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^3 3\alpha}$.

19. Într-un con se înscrie un cilindru a cărui înălțime este egală cu raza bazei conului. Să se determine unghiul format de axa conului cu generatoarea sa, dacă raportul dintre aria totală a cilindrului și aria bazei conului este egal cu $\frac{3}{2}$.

Ind. Notînd cu α unghiul căutat, cu R raza bazei conului, iar cu r raza bazei cilindrului, se obține relația $2\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R}=\frac{3}{2}$ care conduce la ecuația $4\,\mathrm{tg}^2\alpha-12\,\mathrm{tg}\,\alpha+5=0$.

Soluția acceptabilă este $\alpha=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$.

20. Să se descompună o forță $\vec{F}$ în două componente $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$ dacă $\frac{F_2}{F_1}=\frac{3}{4}$ și $\widehat{(\vec{F_2},\vec{F})}=2\widehat{(\vec{F_1},\vec{F})}$.

Ind. Notînd $\widehat{(\vec{F_1},\vec{F})}=\alpha$ și folosind teorema sinusurilor, se obține ecuația

$3\sin 2\alpha-4\sin\alpha=0$ cu soluția nebanală $\alpha=\arccos\frac{2}{3}$.

Mai departe, intensitățile forțelor F_1 și F_2 sînt date de soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{F_2}{F_1}=\frac{3}{4}, \\ F_2^2=F^2+F_1^2-2FF_1\cos\alpha, \end{cases}$$

adică $F_1=4\lambda$, $F_2=3\lambda$, unde $\lambda=\frac{1}{3}F,\ \frac{3}{7}F$.

Răspunsuri

Capitolul I

1. *a)* $20^g, \frac{\pi}{10}$; *c)* 156^g, $\frac{39\pi}{50}$. **2.** *a)* $\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{1}{20}$; 5,5. **3.** $\frac{4\pi}{5}$. **4.** $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$. **6.** *a)* 720°, 4 π; *c)* 225°, $\frac{5\pi}{4}$. **7.** *a)* 36°; *c)* 390°. **8.** *b)* 97° 24′; *d)* −148°59′. **9.** 6,53 m. **10.** 95,5°. **11.** *a)* $\frac{2\pi}{3}$; *c)* $\frac{8\pi}{9}$. **12.** $\omega = 10\pi$ rad/s. **13.** 404. **14.** 9 s. **15.** după 12 min; 1 oră 24 min; $12(2n-1)$ min. **16.** după 3 min; 27 min; $3(4n-3)$ min.

Capitolul II

1. *a)* $17^2 = 15^2 + 8^2$; $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ etc. **6.** *a)* $\frac{20}{29}, \frac{21}{29}, \frac{20}{21}, \frac{21}{20}$. **7.** 14 cm, 48 cm. **8.** $5\sqrt{29}$ cm. **9.** $\frac{5}{4}$. **10.** $\frac{60}{169}$. **11.** *a)* 3,5; *c)* $5\frac{\sqrt{3}}{3}$; *e)* 2. **12.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **13.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ **14.** $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{3}$. **15.** $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $AB = 3$; $|\overrightarrow{CD}| = 1$, $CD = -1$. **16.** $AB + BA = 0$, $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BA}| = 4$. **17.** *a)* nu; *b)* nu; *c)* da. **18.** *d.* **19.** $-\frac{d}{2}$. **24.** *b) Ind.* $-500° = -2\cdot 360° + 220°$; *d)* $-\frac{42\pi}{5} = -42\pi - \frac{2\pi}{5}$. **25.** $\frac{3}{2}$. **26.** $-5\sqrt{3}, 0, \frac{2}{3}$. **27.** 0. **28.** $\pi - 1$, $-(\pi+1)$. **29.** *a)* sin 38°; *c)* sin(30°+α). **30.** *b)* cos 89°; *d)* $\cos\left(120° - \frac{\alpha}{2}\right)$. **31.** *a)* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{22}$; *c)* $\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\alpha}{4}\right)$. **32.** a) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; *c)* $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **33.** *a)* 45° 30′+44°30′=90°. **34.** *a)* R; *b)* $R - \left\{\frac{k}{\pi}\right\}$; *c)* $R - \left(\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\} \cup (2k\pi)\right)$ **37.** *a)* π; *b)* π. **38.** *a)* pară; *b)* impară; *c)* nici pară, nici impară; *d)* impară; *e)* nici pară, nici impară; *f)* pară. **29.** *a)* strict crescătoare; *b)* strict descrescătoare; *c)* nu. **40.** *a)* $y \in [-1,3]$; *b)* $y \in [1,7]$; *c)* $y \in [1,3]$. **41.** *a)* $x \in [-2,2]$; *b)* $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$; *c)* $x \in [0,1]$; *d)* $x \in [-1,3]$; *e)* $x \in R - \{-1\}$.

42. $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. **43.** $\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$. **44.** *a)* $y \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right]$ *b)* $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{8\pi+3}{12}\right]$. **45.** *a)* −; *b)* +; *c)* −. **47.** *a)* +; *c)* −; *e)* +. **48.** *a)* +; *c)* +; *e)* −. **50.** $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$. **51.** $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. **52.** $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$. **53.** $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$. **55.** *a)* $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$; *c)* $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}$. **56.** *a)* 1,0 tg 450° nu există, 0; *c)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$; *e)* $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1$. **57.** −1,2. **58.** *a)* $-\frac{6+\sqrt{6}}{6}$; *b)* 0; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *d)* cos 32°−sin 32°.

Capitolul III

1. $\frac{36}{85}; \frac{84}{85}$. **2.** $\frac{3}{5}$; $-\frac{44}{125}$. **3.** $-\frac{36}{77}$. **4.** $\frac{a-1}{a+1}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$. **6.** $-\frac{31}{25\sqrt{2}}$ **7.** $\sin\beta \sin(\alpha+\beta)$. **13.** $-\frac{336}{625}; -\frac{527}{625}; \frac{336}{527}$. **14.** $-\frac{123}{845}; -\frac{116}{845}$. **15.** $\frac{3}{4}$. **16.** $-\frac{24}{25}$. **22.** $\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}; -\frac{5}{12}$. **23.** $\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{3}$. **24.** $\frac{15}{17}; \frac{8}{17}; \frac{15}{8}$. **26.** *a)* cos 16°; *b)* $\sqrt{3}\cos 7°$; *c)* $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{8}$; *d)* $-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$; *e)* 2sin 27° 30′cos 16° 30′; *f)* −sin 4°. **27.** *a)* $\frac{\sqrt{3}}{2\cos 34°\cos 26°}$; *b)* $\frac{\sin 50°}{\sin 31°\sin 19°}$; *c)* $\frac{1}{2\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}}$; *d)* $-\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}}$. **28.** *a)* tg 2α; *b)* tg 5α. **29.** $\frac{\sin^2\alpha}{\cos 4\alpha\cos 3\alpha\cos\alpha}$. **30.** $\frac{4}{3}\sin(\alpha-30°)\sin(\alpha+30°)$. **33.** 2 cos 10°+cos 30°. **34.** $\sin 2(a-b) + \sin 2(b-c) + \sin 2(c-a)$.

Capitolul IV

1. *a)* $\alpha - (-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi$; *c)* $\alpha = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\pi$. **2.** *a)* $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$; *c)* $\alpha = \pm\frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi$; *d)* $\alpha = \pi + k\cdot 2\pi$. **3.** *a)* $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; *b)* $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$; *d)* $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$. **4.** *a)* $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi$; *c)* $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$. **5.** *a)* $\pm\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$; *c)* $k\cdot 2\pi$; **6.** *a)* $k\pi$; *c)* $\frac{\pi}{3} + k\pi$; **7.** $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$. **8.** $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. **9.** $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. **12.** nu. **13.** nu. **14.** *a)* da; *b)* nu;

c) da; **15.** *a)* $(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{3}$; *b)* $(3k+1)\,360° - 1°$; *c)* $k\frac{\pi}{4}$; *d)* $k \cdot 60 + 45°$; *e)* $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$. **16.** *a)* $\{30° + k \cdot 180°\} \cup \{-90° + k \cdot 180°\}$; *b)* $\{9° + k \cdot 180°\} \cup \{-51° + k \cdot 180°\}$; *c)* $k\pi$; *d)* $\operatorname{arctg} 4 + k\pi$; *e)* $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$; *f)* $k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ **17.** *a)* $\left\{k\frac{2\pi}{3}\right\} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{7}\right\}$; *b)* $\left\{k\frac{3\pi}{5}\right\} \cup \left\{(2k+1)\frac{3\pi}{8}\right\}$; *c)* $-\frac{\pi}{4} + k\pi$. **18.** *a)* $\{5° + k\,90°\} \cup \{k\,45°\}$; *b)* $(2k+1)\frac{\pi}{2} \cdot$ *c)* $\left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$. **19.** *a)* $-20° + k \cdot 120°$; *b)* $\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$. **20.** *a)* $\{30° + k\,180°\} \cup \{-15° + k\,90°\}$. *b)* $\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}$; *c)* $-10° + k\,90°$; *d)* $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{12}\right\} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\} = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{12}\right\}$. **21.** *a)* $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$; *b)* $\pm\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$. **22.** *a)* $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$; *b)* $(-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{4} + k\pi$; *c)* $\{(2k+1)\pi\} \cup \left\{\pm\arccos\frac{1}{4} + k \cdot 2\pi\right\}$; *d)* $\frac{\pi}{4} + k\pi$; *e)* $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$. **23.** *a)* $-\frac{\pi}{6} + k\pi$; *b)* $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 7 + k\pi\}$; *c)* $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{3}\right) + k\pi\right\}$; *d)* $\{k\pi\} \cup \left\{k\pi + \operatorname{arctg}\frac{15}{8}\right\}$; *e)* $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. **24.** $k \cdot 2\pi$; *b)* $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$. **25.** *a)* $\{2k\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$; *b)* $k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin\frac{2}{5} - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, *c)* $(-)1^k\frac{1}{3}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} + k\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2$. **26.** *a)* $k\pi - \frac{\pi}{20} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; *b)* $k\pi + (1-)^k \arcsin\frac{6}{\sqrt{41}} + \operatorname{arctg}\frac{5}{4}$. Ecuația $4\sin x - 5\cos x = 7$ nu admite soluții; *c)* $\frac{\pi}{2} + k\pi$. **27.** 30° și 150°. **28.** *a)* $\left\{k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$; *b)* $k\pi$, *c)* $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k\frac{2\pi}{7} \pm \frac{\pi}{42}\right\}$; *d)* $k\frac{\pi}{3}$: Se ține seamă de incluziunea $\left\{k\frac{\pi}{3}\right\} \supset \{k\pi\}$. **29.** *a)* $k\frac{\pi}{4}$; *b)* $\{k2\pi\} \cup \left\{k4\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\}$; *c)* $k\frac{\pi}{3}$; *d)* $\{k\pi\} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{3}\right\}$; *e)* $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. **30.** *a)* $\left\{k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right\} \cup \left\{k2\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\}$; *b)* $\{k \cdot 180°\} \cup \{45° + k\,180°\}$; *c)* $\{k2\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$. **31.** *a)* $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{8}\right\} \cup \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}$; *b)* $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{6}\right\}$; *c)* $\pm 1{,}344 + k2\pi$. **33.** *a)* $x = 60° + k\,180°$, $y = k\,180°$ și $x = k\,180°$, $y = -60° + k\,180°$; *b)* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = -\frac{\pi}{4} - k\pi$; *c)* $x = -\frac{\pi}{6} + (k_1 + k_2)\pi$, $y = (k_1 - k_2)\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + (k_1 + k_2)\pi$, $y = \pm\frac{2\pi}{3} + (k_1 - k_2)\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + (k_1 + k_2)\pi$, $y = (k_1 - k_2)\pi$; *d)* Dacă $|2b + \cos a| \leqslant 1$,

atunci $x = \frac{1}{2}[a \pm \arccos(2b + \cos a)] + k\pi$, $y = \frac{1}{2}[a \mp \arccos(2b + \cos a)] - k\pi$.

34. $\cos(x+y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$. **35.** $\left(x_1 = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + k2\pi,\ y_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + k'\pi\right)$ și $\left(x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + k2\pi,\ y_2 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + k'\pi\right)$, k și k' fiind numere întregi arbitrare.

36. $\left(x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = -\frac{1}{2}\right)$; $\left(x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -\frac{1}{2}\right)$; $(x_3 = 1,\ y_3 = 0)$; $(x_4 = -1,\ y_4 = 0)$; $(x_5 = 0,\ y_5 = 1)$; $(x_6 = 0,\ y_6 = -1)$. **37.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} - l\pi$ $(k, l = Z)$.

Capitolul V

1. $b = 250$, $c = 575$, $C = 66°30'$. **2.** $a = 427{,}1$, $c = 277{,}5$, $C = 40°32'$. **3.** $c = 18{,}25$, $B = 53°30$ $C = 36°30'$. **4.** $a = 35{,}24$, $B = 34°53'44''$, $C = 55°6'16''$. **5.** $a = 403{,}34$, $c = 245{,}54$, $B = 52°30'$, $C = 37°30'$. **6.** $b = 180$, $c = 135{,}6$, $B = 53°7'49''$, $C = 36°52'11''$. **9.** $b = 11{,}8$, $c = 14{,}2$, $A = 67°$. **10.** $c = 7{,}46$, $B = 46°39'$, $C = 25°39'$. **11.** n-are soluție. **12.** $A = 39°12'$, $B = 112°42'$, $C = 28°6'$. **13.** $B = 62°34'$, $C = 59°26'$. **14.** $a = 28{,}22$, $b = 43{,}41$, $c = 48{,}37$, $C = 81°59'15''$. **31.** 592,8 m. **32.** 62,8 m **33.** 981 m. **34.** 122 m. **35.** 4,620 km, 6,067 km; 3,723 km.

Capitolul VI

1. *a)* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; *b)* $2(\cos 330° + i\sin 330°)$; *c)* $2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; *d)* $2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$ **2.** $8\sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225)$.

3. $\sqrt{2}[\cos(2\alpha + 15°) + i\sin(2\alpha + 15°)]$. **4.** $\rho_1 = 64$, $\varphi_1 = 0°$; $\varphi_2 = 16$, $\varphi_2 = 210°$; $\varphi_3 = 2$, $\varphi_3 = 270°$. **6.** $\frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(2n - \cos\frac{n\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\frac{n\pi}{4}}{2n\,(5 - 2\sqrt{2})}$. **8.** *a)* $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{3}}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{3}}{3}\right)$ $k = 0, 1, 2$; *b)* $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{16}\pi + i\sin\frac{8k+1}{16}\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$; *c)* $\sqrt[3]{2}\cos\alpha\left(\cos\frac{2k\pi + \alpha}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \alpha}{3}\right)$ **9.** *a)* $z_1 = 3$, $z_2 = \frac{3(-1 + i\sqrt{3})}{2}$, $z_3 = \frac{3(-1 - i\sqrt{3})}{2}$; *b)* $z = 5\left[\cos(2k+1)\frac{\pi}{4} + i\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]$, $k = 0, 1, 2, 3$; *c)* $z = \cos\frac{(4k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{6}$, $k = 0, 1, 2$; *d)* $z = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{(8k+1)\pi}{12} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{12}\right]$ $k = 0, 1, 2$. **10.** $z = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{(8k+1)\pi}{16} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{16}\right]$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Bibliografie

Pentru aprofundarea problemelor din acest manual recomandăm elevilor să consulte următoarele lucrări:

1. Cristescu, V. *Culegere de probleme de trigonometrie*, București, 1936.
2. Gheorghiev, G. și colaboratorii. *Culegere de probleme de trigonometrie*, Iași.
3. Ionescu Țiu C. și Vidrascu, M. *Exerciții și probleme de trigonometrie*, Editura didactică și pedagogică, București, 1969.
4. Novoselov, S. *Curs special de trigonometrie*, București, 1958.
5. F. G. M. *Exercices de trigonométrie*, Paris, 1915.
6. Stoka, M., Baianu, M., Mărgăritescu, E. *Culegere de probleme de trigonometrie pentru licee*. Editura didactică și pedagogică, București, 1966, 1970.

CUPRINS