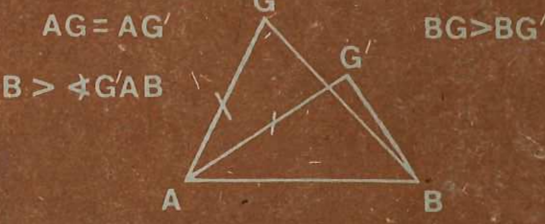
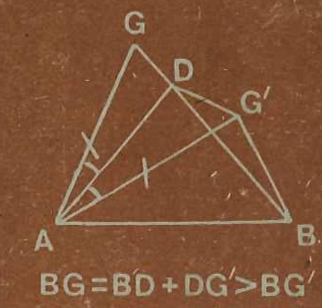
Lei 9,80

ISBN 973-30-0045-0

Matematică — Geometrie

VI





MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

VI

Matematică

Geometrie

Manual pentru clasa a VI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
București, 1989

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. univ. dr. ION CUCULESCU Prof. CONSTANTIN OTTESCU
Prof. LAURENȚIU N. GAIU

VI

Matematică

Geometrie

Manual pentru clasa a VI-a

Editura Didactică și Pedagogică,
București — 1989

Manualul a fost elaborat în anul 1979 și revizuit în anul 1981. Actuala ediție este în concordanță cu programa școlară aprobată de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39 197/1983.

Conținutul manualului a fost analizat și avizat de Comisia de matematică a Ministerului Educației și Învățămîntului

Referenți: *Prof. univ. dr.* DAN I. PAPUC
Lector univ. dr. ADRIAN ALBU
Lector univ. dr. DUMITRU OPRIȘ
Prof. CONSTANTIN CĂRBUNARU
Prof. DUMITRU BERBECEL
Prof. ELENA BUCUR

ISBN 973-30-0045-0

Redactor: prof. **IOAN ȘT. MUȘAT**
Tehnoredactor: **VICTORIA GHIMIȘ**
Coperta: **NICOLAE SÎRBU**

Nr. colilor de tipar : 10
Bun de tipar : 3.VII.1989

Com. nr. 90138/35053
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.

PARTEA ÎNTÎI

CELE MAI SIMPLE FIGURI GEOMETRICE

1. INTRODUCERE

În clasa a V-a, și chiar în clasele anterioare, ați făcut cunoștință cu o serie de noțiuni și rezultate din geometrie[1].

Anul acesta, vom începe un studiu mai sistematic al geometriei. Vom studia o parte din geometria în plan[2], deci vom studia proprietăți ale figurilor dintr-un plan dat, fixat.

Planul este o noțiune „abstractă", despre care ne facem o idee apropiată de cea exactă privind, de exemplu, suprafața unei mese, placa de sticlă de la fereastră, o foaie netedă de hîrtie (caiet), o pagină de carte și închipuindu-ne că toate acestea sînt prelungite la nesfîrșit „în toate părțile". În plus, vom considera că el nu are grosime.

Geometria, ca orice disciplină matematică, își stabilește adevărurile pe calea judecății, raționamentului, și nu pe calea experienței. Înainte de a învăța cum se folosește judecata în geometria plană, să facem cunoștință cu elementele ei de bază, cele mai simple, cu convențiile lor de desen și notație.

2. PUNCTE ȘI DREPTE

Punctul[3] este, de asemenea, o noțiune „abstractă", ni-l imaginăm, spre exemplu, ca urma lăsată pe hîrtie de apăsarea vîrfului unui creion bine ascuțit, ca înțepătura unui vîrf de ac. Îl reprezentăm în desen, spre exemplu, ca în figura 1 și îl notăm cu o literă mare de

$\times A$ Fig. 1

tipar, spre exemplu: A. Se pot folosi și alte litere: B, C, D,..., M, N, P etc. Uneori literei i se atașează un accent sau mai multe accente, de exemplu, A' sau A'' și se citește „A prim" sau „A secund", sau i se atașează un indice (număr natural), de exemplu A_1, A_2 sau A_3 și se citește „A indice unu" (sau — mai pe scurt — „A unu"), „A indice doi" (sau „A doi") etc. Cu ajutorul unei astfel de notații întrebuințăm mai puține litere din alfabet. În plus, vom considera că punctul nu are nici o dimensiune.

S-a convenit ca o mulțime de puncte să se numească *figură geometrică*, deci punctul din desenul de mai sus este și el o *figură geometrică* (o mulțime cu un singur element).

[1] Cuvîntul „*geometrie*" ete compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *ge* = pămînt și *metron* = măsură.
[2] Cuvîntul „*plan*" vine din limba latină: *planus* = neted.
[3] Cuvîntul „*punct*" vine din limba latină: *punctum* = înțepătură.

În figura 2, punctele A și B ocupă locuri diferite în planul paginii de hîrtie. S-a convenit că astfel de puncte să se numească puncte *diferite* sau puncte *distincte* și să se noteze această situație geometrică: $A \neq B$. Citim: *punctul A este diferit de punctul B* sau *punctele A și B sînt distincte.* (Evident, dacă $A \neq B$, vom înțelege că și $B \neq A$).

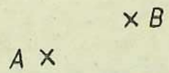


Fig. 2

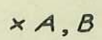


Fig. 3

În figura 3, punctele A și B ocupă același loc în planul paginii de hîrtie. S-a convenit ca astfel de puncte să fie numite puncte *identice* sau puncte *confundate.* Tot prin convenție, notăm această situație geometrică: $A = B$ și citim: *punctele A și B sînt* puncte *identice*, sau puncte *confundate*, sau încă *punctele A și B „coincid“*. (Evident, dacă $A = B$, vom înțelege că și $B = A$.) De fapt, este vorba despre unul și același punct, motiv pentru care folosim o singură notație pentru „astfel de puncte“, de exemplu, numai litera A.

Dreapta ne-o imaginăm, spre exemplu, ca pe un fir de ață foarte subțire și foarte bine întins. O reprezentăm în desen, spre exemplu, ca în figura 4 și o notăm uneori cu o singură literă mică, de exemplu una din literele: a, b, c, d,... etc. (Ca și în cazul notației punctului, literei cu care notăm dreapta i se poate atașa un accent sau un indice, de exemplu: a' și citim „a prim“, sau a_1 și citim „a indice unu“ (sau „a unu“).) O gîndim prelungită la nesfîrșit în ambele părți (sensuri) și o desenăm cu ajutorul unui instrument numit *„riglă“*[1]; dreapta nu are lățime sau grosime.

Fig. 4

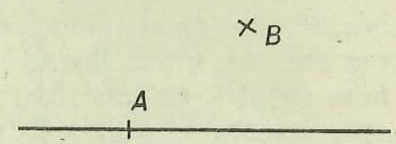


Fig. 5

În figura 5, punctul A „se află pe dreapta a“, scriem $A \in a$ și citim: *punctul A aparține dreptei a*; punctul B nu „se află pe dreapta a“, scriem $B \notin a$ și citim: *punctul B nu aparține dreptei a.* Despre punctul B se mai obișnuiește să se spună că: *punctul B este „exterior“ dreptei a* sau *„în exteriorul“ dreptei a.*

Dacă se dau două puncte distincte (diferite), A și B, deci dacă $A \neq B$, atunci putem desena *o singură dreaptă* care să treacă prin punctele A și B.

În figura 6 am ilustrat grafic această situație. Mai spunem: *două puncte distincte determină o singură dreaptă.* S-a convenit ca această dreaptă să se noteze AB.

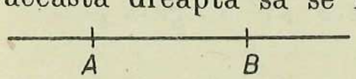


Fig. 6

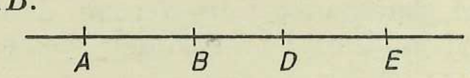


Fig. 7

Dreptei AB îi mai aparțin și alte puncte, de exemplu D sau E; scriem $D \in AB$, $E \in AB$ și putem desena ca în figura 7.

[1] Cuvîntul *„riglă“* vine din limba latină: *regula* = linie dreaptă, măsură.

Spunem că punctele ce aparțin unei drepte, ca de exemplu punctele A, B, D, E din figura 7 sînt puncte *colineare* (adică aparțin aceleiași drepte). Mulțimea punctelor care aparțin dreptei AB formează *o mulțime de puncte colineare.* Dreptele: AB, AE, DB sau BE au aceleași puncte, din care motiv s-a convenit să se numească drepte *identice* sau drepte *confundate.* De fapt, este vorba despre una și aceeași dreaptă, de aceea pentru „toate“ folosim o singură notație, de exemplu: AB.

Dacă punctul F nu aparține dreptei AB ($F \notin AB$), spunem că punctele A, B, F sînt puncte *necolineare* și putem desena aceasta ca în figura 8.

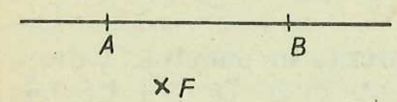


Fig. 8

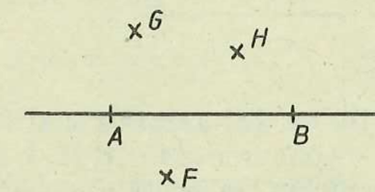


Fig. 9

Mai putem desena și alte puncte „exterioare“ dreptei AB, ca în figura 9. Scriem $F \notin AB$, $G \notin AB$, $H \notin AB$.

Spunem, în acest caz, că mulțimea punctelor A, B, F, G, H este *o mulțime de puncte necolineare* (nu aparțin toate aceleiași drepte).

În figura 10, dreapta AB și dreapta BF *au un singur punct comun* (punctul B). S-a convenit ca astfel de drepte să se numească drepte *concurente*[1] și să se noteze $BA \cap BF = \{B\}$, punîndu-se în evidență astfel „punctul lor de concurență, B“. Se observă că, în desenul de mai sus, pe dreapta AB nu este fixat locul în care se găsește punctul A, iar pe dreapta BF nu este fixat locul lui F. În această situație trebuie să înțelegem că A poate fi oriunde pe dreapta AB ($A \neq B$), iar F oriunde pe dreapta BF ($B \neq F$), pentru că despre dreptele AB și BF tot concurente vom spune că sînt.

Obișnuim să spunem că *dreapta BA și dreapta BF sînt concurente în punctul B*, sau: *dreapta BA și dreapta BF se intersectează în punctul B.*

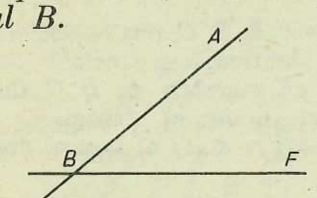


Fig. 10

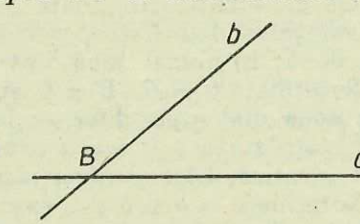


Fig. 11

În cazul în care notăm dreapta AB cu a și dreapta BF cu b, situația geometrică de mai sus se desenează și se notează ca în figura 11.

Pentru această situație geometrică scriem: $a \cap b = \{B\}$ și citim: *dreptele a și b sînt concurente în punctul B* sau *dreptele a și b se intersectează în punctul B* sau *dreapta a este concurentă cu dreapta b în punctul B.*

[1] Cuvîntul *„concurente“* este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *con* = împreună și *currere* = a fugi, a alerga.

Punctul B mai poate aparţine şi altor drepte, diferite de a şi b, de exemplu dreptelor c şi d (ca în figura 12).

Despre toate aceste drepte, adică despre dreptele a, b, c, d spunem că *sînt concurente în acelaşi punct B* (sau că: *dreptele a, b, c, d, sînt concurente într-un singur punct, B*, sau *dreptele a, b, c, d se intersectează într-un punct B)*.

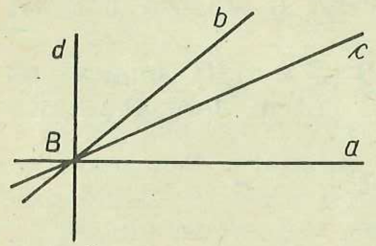


Fig. 12

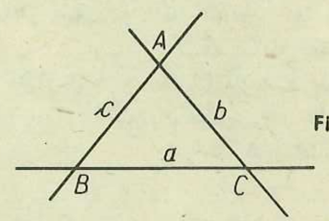


Fig. 13

În figura 13, dreptele a şi b sînt concurente în punctul C, dreptele b şi c concurente în A, iar c şi a concurente în B. Despre dreptele a, b, c spunem, în acest caz, că *sînt concurente două cîte două*.

Observaţie. În unele manuale punctul este reprezentat în desen printr-un „punct ortografic". Noi am adoptat în acest manual reprezentarea din figura 1 (pag. 3), interpretînd că, de fapt, punctul poate fi considerat „locul de intersecţie a două drepte".

● 1. Întrebări şi exerciţii

Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii sînt adevărate şi care sînt false:

1. Un punct este: a) un număr; b) o mulţime de numere; c) o figură geometrică.

2. O dreaptă este: a) o mulţime; b) o mulţime de puncte; c) o mulţime de puncte colineare; d) o figură geometrică.

3. Notaţia $A = B$ (sau $a = b$) exprimă că: două puncte (sau două drepte) sînt: a) egale; b) diferite; c) identice.

4. Notaţiile: $A = B$ şi $B = C$ exprimă că punctele A, B, C sînt: a) numai două dintre ele identice; b) toate trei identice.

5. Notaţiile: $A \neq B$ şi $B \neq C$ exprimă că punctele A, B, C sînt: a) diferite două cîte două; b) numai două dintre ele diferite; c) identice.

6. Notaţiile: $A \neq B$, $B \neq C$ şi $C \neq A$ exprimă că punctele A, B, C sînt: a) numai două dintre ele diferite; b) diferite două cîte două; c) identice.

7. Notaţiile $a = b$ şi $b = c$ exprimă că dreptele a, b, c sînt: a) numai două dintre ele identice; b) toate trei identice.

8. Notaţiile $a \neq b$ şi $b \neq c$ exprimă că dreptele a, b, c sînt: a) diferite două cîte două; b) numai două dintre ele diferite; c) identice.

9. Notaţiile $a \neq b$, $b \neq c$ şi $c \neq a$ exprimă că dreptele a, b, c sînt: a) numai două dintre ele diferite; b) diferite două cîte două; c) identice.

10. Notaţia $A \in a$ exprimă că: a) punctul A aparţine dreptei a; b) punctul A nu aparţine dreptei a; c) dreapta a aparţine punctului A.

11. Notaţia $a \cap b = \{A\}$ exprimă că: a) $A \in a$ şi $A \notin b$; b) $A \notin a$ şi $A \in b$; c) $A \in a$ şi $A \in b$.

12. Notaţia $AB \cap CD = \{B\}$ exprimă că dreptele AB şi CD: a) sînt concurente; b) au un singur punct comun; c) au mai multe puncte comune; d) nu au puncte comune.

13. Notaţiile $a \cap b = \{A\}$ şi $b \cap c = \{A\}$ exprimă că dreptele a, b, c, diferite două cîte două: a) sînt concurente în acelaşi punct; b) sînt concurente două cîte două; c) au un punct comun.

14. Notaţiile $a \cap b = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$ şi $A \neq B$ exprimă că dreptele a, b, c, diferite două cîte două: a) sînt concurente două cîte două; b) nu au un punct comun; c) nu sînt concurente în acelaşi punct.

15. Notaţiile $a \cap b = \{C\}$, $b \cap c = \{A\}$, $c \cap a = \{B\}$ şi $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$ exprimă că dreptele a, b, c: a) sînt concurente două cîte două; b) nu au nici un punct comun; c) nu sînt concurente în acelaşi punct.

16. O sută de puncte, toate diferite între ele, aparţin dreptei xy. Pe dreapta xy mai există: a) încă un punct; b) încă zece puncte; c) oricît de multe puncte dorim; d) nici un alt punct.

17. Printr-un punct trec: a) o singură dreaptă; b) numai două drepte diferite; c) oricît de multe drepte diferite.

18. Prin două puncte diferite trec: a) o singură dreaptă; b) două drepte diferite; c) oricît de multe drepte diferite.

19. Trei puncte, diferite două cîte două, sînt colineare dacă: a) sînt diferite; b) sînt pe aceeaşi dreaptă; c) sînt pe două drepte diferite.

20. Trei puncte, diferite două cîte două, sînt necolineare dacă există o dreaptă care să treacă: a) prin toate; b) numai prin două dintre ele.

21. Două drepte diferite pot fi concurente: a) într-un punct; b) în două puncte; c) în mai multe puncte.

22. Folosind desenul din figura 14, cu notaţiile existente, scrieţi:

a) Două puncte care aparţin dreptei a;

b) Două puncte care nu aparţin dreptei b;

c) Trei puncte colineare;

d) Patru puncte necolineare, astfel încît oricare trei dintre ele să fie necolineare;

e) Patru puncte necolineare astfel încît trei dintre ele să fie colineare.

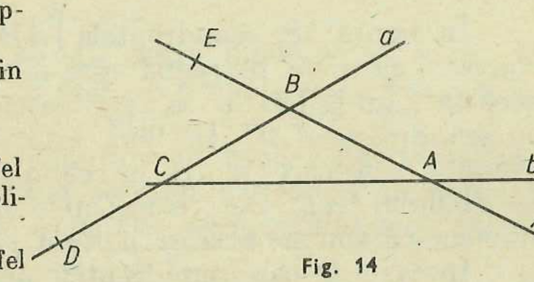


Fig. 14

23. Reproduceţi în caietele voastre figura 14 şi puneţi în evidenţă în desen: a) dreapta ED; b) dreapta EC; c) punctul $F \in b$ şi colinear cu punctele E şi D; d) Punctul $\{H\} = CE \cap AD$.

24. A, B, C, D, E fiind puncte astfel încît oricare două dintre ele sînt diferite, ilustraţi grafic:

a) A, B, C, D colineare; b) A, B, C necolineare; c) A, B, C, D necolineare, astfel încît A, B, C colineare; d) A, B, C, D necolineare, astfel încît să nu existe trei colineare; e) $AB \cap CD = \{E\}$; f) $AB \cap CD = \{B\}$; g) $AB \cap CD$ şi $E \notin AD$; h) $AB \cap BC$ şi $D \in AC$; i) $AB \cap BC$ şi $AC \cap BD = \{E\}$.

3. SEMIDREPTE ŞI SEGMENTE

Semidreapta. O semidreaptă se reprezintă în desen, spre exemplu, ca în figura 15. Spre deosebire de o dreaptă, pe care o considerăm prelungită la nesfîrşit în ambele părţi, semidreapta o considerăm prelungită la nesfîrşit într-o singură parte şi limitată în cealaltă parte. Punctul O se numeşte *originea* semidreptei.

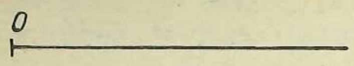


Fig. 15

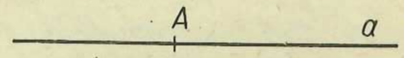


Fig. 16

Fiind date o dreaptă a și un punct $A \in a$, există două semidrepte, și nu mai multe, cu originile în A și care să fie incluse în dreapta a (fig. 16). Orice punct al dreptei a, diferit de A, aparține numai uneia dintre cele două semidrepte.

Fiind date două puncte distincte, A și B, să considerăm dreapta AB și semidreapta inclusă în această dreaptă, cu originea în A, și căreia îi aparține punctul B (fig. 17). Această semidreaptă se notează cu $[AB$, dacă punctul A (originea semidreptei) aparține semidreptei (deci $A \in [AB$), iar dacă punctul A nu aparține semidreptei, aceasta se notează cu $(AB$ (deci $A \notin (AB$). Prima se numește *semidreaptă închisă*, iar a doua, *semidreaptă deschisă*. Avînd în vedere că toate punctele semidreptei $[AB$ sînt și puncte ale dreptei AB (dreapta AB mai are și alte puncte), convenim să spunem că *semidreapta* $[AB$ *este inclusă în dreapta* AB *și să scriem* $[AB \subset AB$ sau — evident — $(AB \subset AB$.

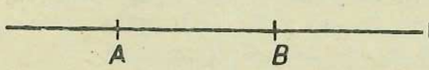


Fig. 17

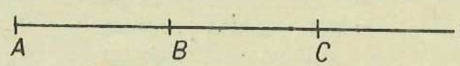


Fig. 18

În figura 18, semidreptele $[AB$ și $[AC$ au aceleași puncte. S-a convenit ca astfel de semidrepte să se numească *identice*, să se noteze aceasta $[AB = [AC$ și să se citească: semidreapta $[AB$ este identică cu semidreapta $[AC$. De fapt, este vorba despre una și aceeași semidreaptă, din care motiv întrebuințăm numai una dintre notații — de exemplu $[AB$. Despre punctele B și C, în acest caz, obișnuim să spunem că sînt *de aceeași parte a punctului A*.

În cazul în care semidreptele nu au aceleași puncte, s-a convenit ca ele să se numească *semidrepte distincte* (diferite). De exemplu:

a) în figura 19, semidreptele $[DE$ și $[DF$ (sau $(DE$ și $(DF$) au aceeași origine, punctul D, sînt incluse în aceeași dreaptă, a, dar nu au aceleași puncte. Ele sînt semidrepte distincte și notăm aceasta: $[DE \neq [DF$ (sau $(DE \neq (DF$). În acest caz, spunem că semidreptele distincte $[DE$ și $[DF$ (sau $(DE$ și $(DF$) sînt *una în prelungirea celeilalte*, sau că *o semidreaptă o prelungește pe cealaltă* sau că sînt *semidrepte opuse*, iar despre punctele E și F obișnuim să spunem că sînt *de o parte și de alta a punctului D;*

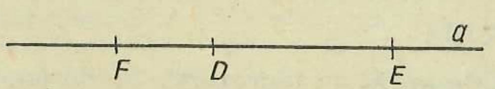


Fig. 19

b) pe aceeași figură (fig. 19), semidreptele $[FE$ și $[EF$ (sau $(FE$ și $(EF$) au origini diferite, sînt incluse în aceeași dreaptă a, și nu au aceleași puncte; ele sînt tot semidrepte diferite $[FE \neq [EF$ (sau $(FE \neq (EF$), dar nu sînt „semidrepte opuse";

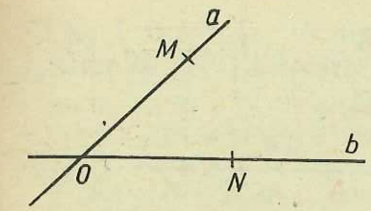


Fig. 20

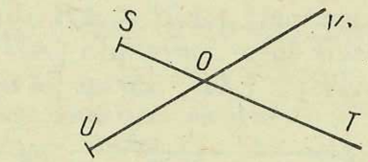


Fig. 21

c) în figura 20, semidreptele $(OM$ și $(ON$ au aceeași origine, sînt incluse în dreptele concurente a și b ($a \cap b = \{O\}$), nu au nici un punct comun, deci sînt tot semidrepte diferite. Și în acest caz scriem $(OM \neq (ON$;

d) în figura 21, semidreptele $[ST$ și $[UV$ au origini diferite, (S și U), sînt incluse în dreptele concurente ST și UV ($UV \cap ST = \{O\}$) nu conțin aceleași puncte, deci ele sînt semidrepte diferite $[ST \neq [UV$ (semidreptele $[ST$ și $[UV$ au numai un singur punct comun și anume punctul O).

Segmentul[1]. Considerăm două puncte distincte, A și B ($A \neq B$) și dreapta AB, căreia, evident, ele îi aparțin (fig. 22).

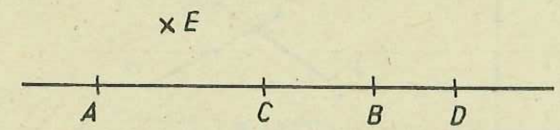


Fig. 22

Porțiunea din dreapta AB, situată între punctele A și B, se numește *segment*. Un punct care se află pe dreapta AB, între A și B, se mai numește punct *interior* segmentului.

Segmentul pe care ni-l închipuim format numai din mulțimea punctelor sale interioare se numește *segment deschis* și se notează (AB). Punctele A și B se numesc „capetele" segmentului sau „extremitățile"[2] lui.

Segmentul conceput din mulțimea formată din capetele A și B ale segmentului și din toate punctele sale interioare se numește *segment închis* și se notează $[AB]$. Se poate scrie $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$.

În figura 22, punctul C este un punct interior segmentului deschis (AB) și scriem $C \in (AB)$, deci el este punct interior și segmentului închis $[AB]$ și scriem $C \in [AB]$; punctul D, care aparține dreptei AB, nu este punct interior segmentului $[AB]$, deoarece nu este între A și B, și scriem $D \notin [AB]$; punctul E nu este punct interior segmentului, deoarece el nu aparține dreptei AB și scriem $E \notin [AB]$, capetele A și B nu sînt puncte interioare segmentului deschis, deci $A \notin (AB)$, $B \notin (AB)$. Dacă segmentul este închis, atunci $A \in [AB]$ și $B \in [AB]$. Convenim să numim *segment nul* segmentul (AB), în care $A = B$. Deci $(AA) = \varnothing$, $[AA] = \{A\}$.

Avînd în vedere că toate punctele segmentului $[AB]$ sînt puncte ale dreptei AB, spunem că segmentul $[AB]$ este *inclus*, în dreapta

[1] Cuvîntul „*segment*" vine din limba latină: *segmentum* = parte tăiată.
[2] Cuvîntul „*extremitate*" vine din limba latină: *extremus* = care este la margine.

AB și scriem: $[AB] \subset AB$. Pentru același motiv, segmentul $[AB]$ este *inclus* în semidreapta $[AB$, dar și în semidreapta $[BA$, și putem scrie: $[AB] \subset [AB$, dar și $[AB] \subset [BA$ (fig. 23).

Fig. 23

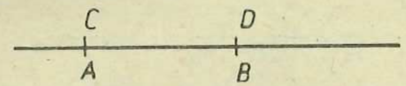


Fig. 24

Două segmente, $[AB]$ și $[CD]$ (sau (AB) și (CD)), pot fi gîndite ca fiind *identice* dacă conțin aceleași puncte interioare; scriem $[AB] = [CD]$ (sau $(AB) = (CD)$) (fig. 24). De fapt, este vorba despre unul și același segment, și reținem o singură notație, de exemplu: $[AB]$ (respectiv (AB)).

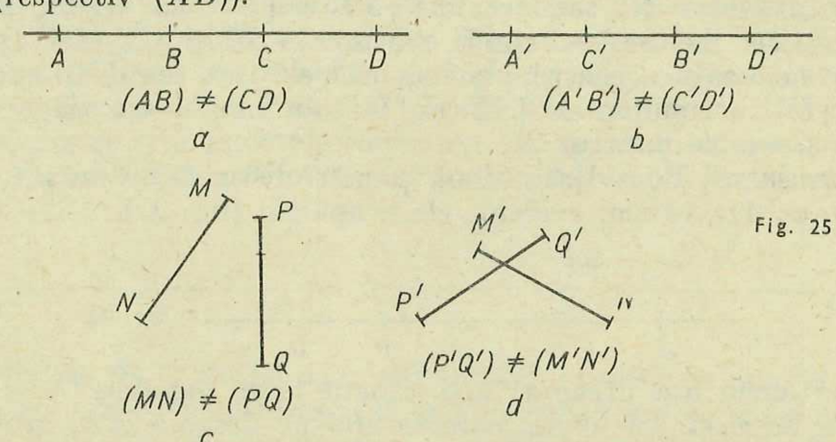


Fig. 25

Dacă segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $[A'B']$ și $[C'D']$, $[MN]$ și $[PQ]$, $[M'N']$ și $[P'Q']$ nu conțin aceleași puncte interioare, convenim să le numim segmente *diferite* și scriem aceasta astfel: $[AB] \neq [CD]$; $[A'B'] \neq [C'D']$; $[MN] \neq [PQ]$; $[M'N'] \neq [P'Q']$. În figura 25 ilustrăm grafic asemenea situații.

● 2. Întrebări și exerciții

1. Folosind notațiile din figura 26, stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

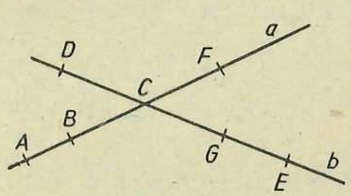


Fig. 26

1) a) $A \in BC$; b) $A \notin BC$; c) $A \in (AB$; d) $A \notin (AB$; e) $A \in [AB$; f) $A \notin [AB$.

2) Punctele B și C sînt de aceeași parte: a) a punctului A; b) a punctului F; c) a punctului D.

3) Punctele B și F sînt de o parte și de alta a punctului a) D; b) C; c) A.

4) Punctul G se găsește între: a) D și E; b) D și C; c) C și E; d) A și F; e) B și C.

5) Semidreptele $[BC$ și $[CF$ sînt: a) diferite; b) identice; c) opuse.

6) a) $[AB \not\subset a$; b) $[BC \subset a$; c) $[BC] \subset b$; d) $[BC] \not\subset [BC$; e) $[CF] \subset a$; f) $[GC \subset (GD$; g) $[FB \subset [CA$.

2. Considerăm punctele A, B, C, D, E. Ilustrați grafic:
a) B și C de aceeași parte a punctului A;
b) B și C de o parte și de alta a punctului A;
c) $[AB = [AC$; d) $[AB \neq [AC$; e) $[BC = [AC$; f) $[AB] \cap [DE] = \{C\}$;
g) $[AE] = [CD]$;
h) $[AB] \neq [CD]$ și au un punct interior comun E;
i) $[AB] \neq [CD]$ și au mai multe puncte interioare comune;
j) $[AB] \neq [CD]$ și nu au puncte interioare comune;
k) $[AB \neq [CD$ și oricare trei dintre punctele A, B, C, D sînt necolineare;
l) $(AB \neq (CD$ și trei dintre puncte colineare.

3. O mie de puncte, toate diferite între ele, aparțin segmentului $[AB]$. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false: Pe segmentul $[AB]$ mai există: a) încă un punct; b) încă zece puncte; c) oricît de multe puncte dorim; d) nici un alt punct.

4. SEMIPLANE

Un semiplan este, de exemplu, partea hașurată din figura 27, adică acea parte a unui plan în care acesta este împărțit de o dreaptă oarecare a. Orice dreaptă împarte planul în două semiplane. Spunem că semiplanul este mărginit de dreapta a. Orice punct al planului, care nu aparține dreptei a, se află numai în unul din cele două semiplane.

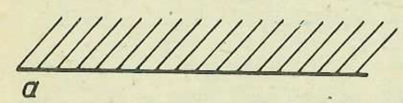


Fig. 27

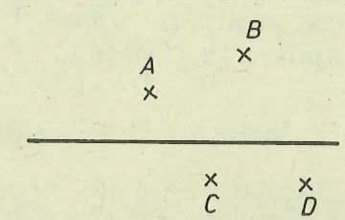


Fig. 28

Fiind date o dreaptă și două puncte, neaparținînd ei, spunem, după caz, sau că *punctele se află în același semiplan determinat de dreaptă*, sau că *punctele sînt situate de o parte și de alta a dreptei*.

În figura 28, punctele A și B sînt situate de aceeași parte a dreptei a; la fel, punctele C și D. Punctele A și D sau A și C sînt situate de o parte și de alta a dreptei a.

S-a convenit ca notația unui semiplan să se facă cu ajutorul dreptei care mărginește semiplanul și cu al unuia dintre punctele semiplanului. În cazul în care gîndim semiplanul format din mulțimea tuturor punctelor dreptei care mărginește semiplanul, împreună cu mulțimea tuturor punctelor semiplanului respectiv, el se numește *semiplan închis*, și se notează, de exemplu, $[dA$, deci $d \subset [dA$ (fig. 29).

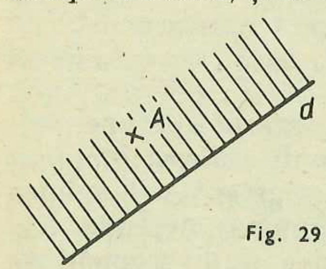


Fig. 29

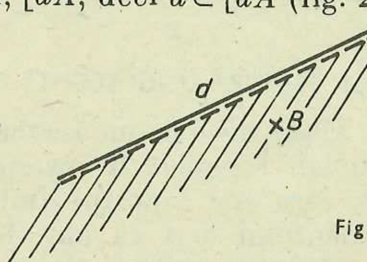


Fig. 30

În cazul în care gîndim semiplanul format numai din mulțimea tuturor punctelor semiplanului respectiv, el se numește *semiplan deschis* și se notează $(dB$, deci $d \not\subset (dB$ (fig. 30).

Două semiplane sînt *identice* dacă au aceleași puncte. De exemplu, în figura 31 scriem: $[aA = [aB$ (sau $(aA = (aB$).

Dacă semiplanele nu au aceleași puncte, s-a convenit să se numească *semiplane diferite* (distincte), așa ca în figura 32 și scriem $[aA \neq [aB$ (respectiv $(aA \neq (aB$), sau, ca în figura 33: $[aA \neq [bA$ (respectiv $(aA \neq (bA$).

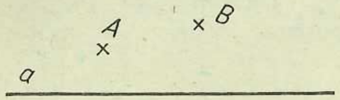


Fig. 31

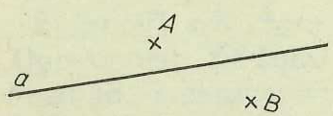


Fig. 32

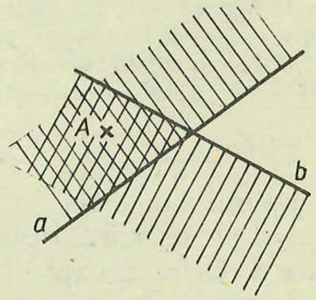


Fig. 33

Cele două semiplane în care este împărțit planul de o dreaptă se numesc *semiplane opuse*. În figura 32 sînt reprezentate două semiplane opuse: $[aA$ și $[aB$.

3. Întrebări și exerciții

1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false: Un semiplan este: a) o mulțime de puncte; b) mulțimea punctelor dintr-un plan dat; c) mulțimea punctelor dintr-un plan dat, mărginită de o dreaptă dată.

2. Priviți figura 34, și, folosind notațiile de acolo, stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false.

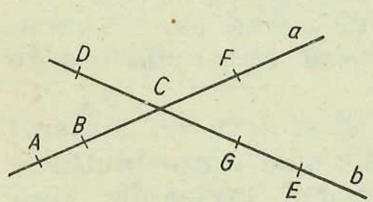


Fig. 34

1) Punctele A și B sînt de aceeași parte a dreptei: a) CF; b) CE; c) a; d) b.

2) Punctele B și F sînt de o parte și de alta a dreptei: a) AC; b) DG; c) a; d) b;

3) a) $G \in [aE$; b) $G \notin (aE$; c) $D \in (aE$; d) $D \notin [aE$; e) $A \in [bB$; f) $B \in (bF$; g) $F \in (aD$; k) $F \in [aD$.

3. A, B, C, D fiind puncte și d o dreaptă, ilustrați grafic situațiile geometrice: a) dreapta $AB = d$ și $C \in [dD$; b) dreapta $AB = d$ și $C \notin [dD$; c) dreapta $CD = d$ și $A \in [dB$; d) dreapta $CD = d$ și $A \notin [dB$.

5. MĂSURA UNUI SEGMENT

Dacă alegem un segment drept unitate de măsură, atunci oricărui alt segment îi corespunde un număr, numit *măsura lungimii sale*, care este raportul dintre lungimea acestui segment și lungimea segmentului luat ca unitate de măsură. Acest număr depinde deci de mărimea unității de măsură alese. Lungimea unui segment se poate determina cu aproximație, cu ajutorul riglei gradate și exprimă de cîte ori lungimea segmentului măsurat este mai mare decît lungimea unității de măsură de pe riglă, cu care se compară.

Pentru segmentul din figura 35 spunem că lungimea lui este de 3,6 cm sau că distanța dintre punctele A și B este de 3,6 cm. Aceasta înseamnă că lungimea segmentului $[AB]$ este de 3,6 ori mai mare decît cea a unității cu care a fost măsurat (centimetrul). Numim *distanța de la punctul A la punctul B* lungimea segmentului $[AB]$ și notăm această lungime: AB. Tot cu AB notăm și lungimea segmentului (AB).

Faptul că am notat cu AB dreapta care trece prin punctele A, B (deci o mulțime de puncte) și că tot cu AB notăm distanța dintre punctele A și B (deci un număr real) nu poate fi un motiv de confuzie, deoarece din contextul în care a fost folosită notația rezultă dacă este vorba despre o figură geometrică sau despre un număr.

Două segmente (ambele închise sau ambele deschise) care au lungimile egale se numesc *segmente congruente*[1]. (Se folosește cuvîntul

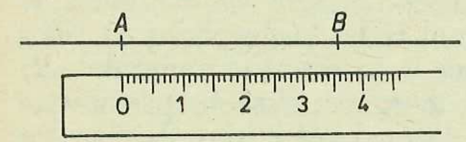


Fig. 35

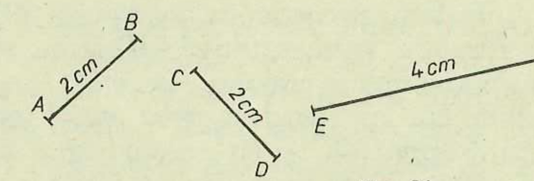


Fig. 36

egal numai pentru segmente *identice*.) De exemplu: dacă segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au lungimile egale, deci dacă $AB = CD$, atunci segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sînt congruente și scriem $[AB] \equiv [CD]$ (și înțelegem că și $[CD] \equiv [AB]$) sau $(AB) \equiv (CD)$ (și înțelegem că și $(CD) \equiv (AB)$).

În cazul în care segmentele $[AB]$ și $[CD]$ nu au lungimile egale, deci dacă $AB \neq CD$, atunci ele *nu sînt congruente*, și scriem aceasta $[AB] \not\equiv [CD]$, (și înțelegem că și $[CD] \not\equiv [AB]$).

Faptul că două sau mai multe segmente sînt congruente, se poate ilustra grafic desenînd segmentele și scriind deasupra (sau dedesubt) numărul ce reprezintă lungimea lor comună, ca în figura 36.

Uneori este mai comod să însemnăm pe desen cu cîte o liniuță (sau cu același număr de liniuțe) segmentele congruente, ca în figura 37.

Vom înțelege că: $[EF] \equiv [GH]$; $[RT] \equiv [SP] \equiv [UV]$ și $[MN] \equiv [NP]$.

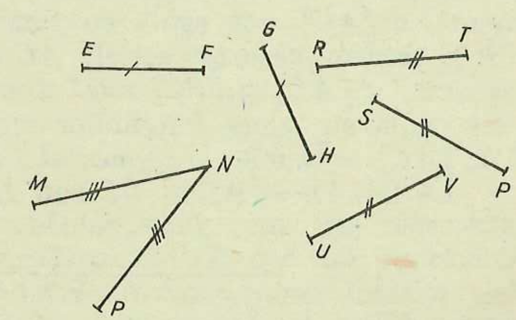


Fig. 37

[1] Cuvîntul „*congruent*" vine din limba latină: *congruentia* = potrivire, conformitate, acord.

6. CONSTRUCȚIA, CU AJUTORUL RIGLEI, A UNUI SEGMENT CONGRUENT CU UN SEGMENT DAT

Vrem să desenăm pe semidreapta $[OC$ un segment $[OD]$, congruent cu un segment dat $[AB]$ (desenat, fixat dinainte).

În figura 38, segmentul $[AB]$ este desenat alături de semidreapta $[OC$.

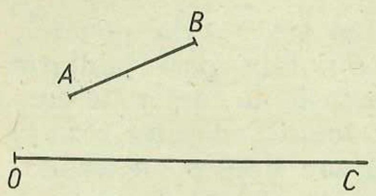


Fig. 38

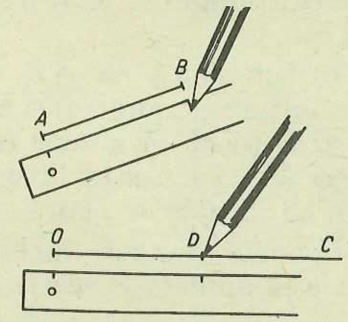


Fig. 39

Putem proceda ca în figura 39: așezăm rigla cu marginea ei pe direcția segmentului $[AB]$ și cu zeroul riglei în dreptul punctului A, marcăm cu creionul pe riglă un semn în dreptul punctului B; schimbăm apoi poziția riglei astfel încît marginea ei să fie pe direcția semidreptei $[OC$ și cu zeroul riglei în dreptul punctului O, marcăm cu creionul pe semidreapta $[OC$, în dreptul semnului de pe riglă, un punct pe care-l notăm cu D.

În acest fel, spunem că am construit (desenat) segmentul $[OD]$ congruent cu segmentul dat ($[AB]$). Să reținem că această construcție este o *construcție aproximativă*, erorile putîndu-se datora grosimii vîrfului creionului și subiectivității celui care a efectuat construcția.

7. OPERAȚII CU MĂSURI DE SEGMENTE

Fiind numere, lungimile segmentelor se pot aduna (scădea) între ele, dacă măsurarea lor s-a făcut cu aceeași unitate de măsură. Există o situație geometrică ce conduce la adunarea (scăderea) lungimilor segmentelor. Dacă avem trei puncte A, B, C, diferite două cîte două și coliniare, astfel încît B să fie între A și C, atunci lungimea segmentului $[AC]$ este egală cu suma lungimilor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$. Scriem aceasta astfel: $AC = AB + BC$ și spunem că *suma segmentelor* $[AB]$ *și* $[BC]$ *este tot un segment* ($[AC]$) a cărui lungime este egală cu suma lungimilor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$. În acest caz, $[AC]$ se numește *segmentul sumă* (fig. 40).

La fel $AB = AC - BC$ sau $BC = AC - AB$.

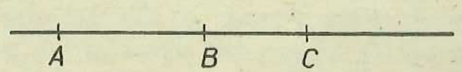


Fig. 40

În acest caz, segmentele $[AB]$ sau $[BC]$ se numesc *segmente diferență*, și gîndim că *diferența a două segmente este tot un segment*, a cărui lungime este egală cu diferența lungimilor segmentelor date.

În cazul în care segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sînt incluse în drepte diferite, ca în figura 41, pentru a le aduna, procedăm astfel: construim pe o semidreaptă $[OE$ un segment $[OF]$ congruent cu unul din cele două, de exemplu $[OF] \equiv [AB]$, apoi în prelungirea segmentului $[OF]$, „așezăm" segmentul $[FG] \equiv [CD]$. Se constată că $OG = OF + FG$. Segmentul $[OG]$ este segmentul a cărui lungime este egală cu suma lungimilor segmentelor $[AB]$ și $[CD]$, adică $OG = AB + CD$; segmentul $[OG]$ este deci segmentul sumă (fig. 42).

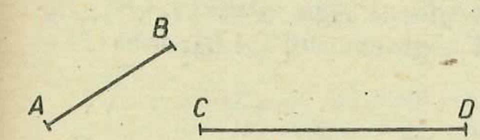


Fig. 41

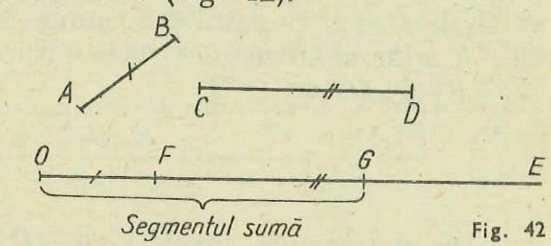


Fig. 42

Segmentele închise, astfel construite pe semidreapta $[OE$, sînt unul în prelungirea celuilalt și așezate capăt la capăt. În cazul în care avem de însumat mai mult de două segmente diferite, procedeul este același: construim mai întîi suma a două segmente, apoi segmentul sumă „îl adunăm" cu al treilea segment ș.a.m.d. Segmentele închise, care au fost însumate au fost așezate capăt la capăt și unul în prelungirea celuilalt.

Pentru a scădea segmentele $[AB]$ și $[CD]$, incluse în drepte diferite (fig. 41), procedăm astfel: pe o semidreaptă $[OP$ construim mai întîi un segment $[OR]$ congruent cu cel mai mare dintre segmentele date; de exemplu $[OR] \equiv [CD]$, apoi, pe aceeași semidreaptă, construim segmentul $[RQ] \equiv [AB]$, punctul Q fiind interior segmentului $[OR]$; deci $OQ = OR - QR$, adică $OQ = CD - AB$, segmentul $[OQ]$ fiind *segmentul diferență* (fig. 43).

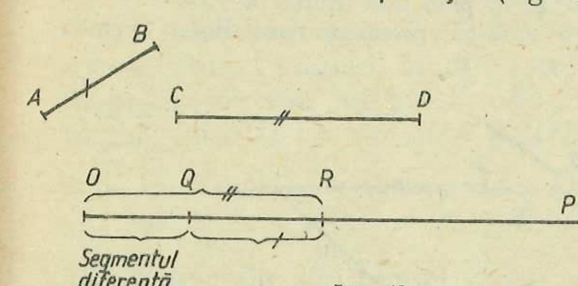


Fig. 43

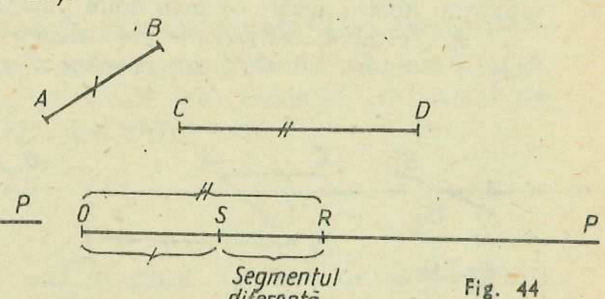


Fig. 44

Observație. Construcția segmentului congruent cu segmentul $[AB]$ putea fi făcută pe aceeași semidreaptă $[OP$, dar din punctul O, adică: desenăm segmentul $[OS] \equiv [AB]$, S fiind punct interior segmentului $[OR]$. În acest caz, „segmentul diferență" este $[SR]$, pentru că $SR = OR - OS$ (fig. 44).

Oricum am executa construcția, segmentele $[OQ]$ și $[SR]$ sînt congruente.

Calculul aritmetic, pentru suma sau diferența a două sau mai multe lungimi de segmente, se face cu numere. Reamintim că operațiile de adunare și scădere se fac cu numere rezultate din măsurări efectuate cu aceeași „unitate de măsură".

8. MIJLOCUL UNUI SEGMENT

Dacă punctele A, O, B, distincte două cîte două, sînt colineare și dacă lungimea AO este egală cu lungimea OB, deci dacă $[AO] \equiv [OB]$, atunci punctul O se numește *mijlocul segmentului* $[AB]$ (fig. 45). Așadar spunem că O este mijlocul segmentului $[AB]$ dacă $O \in [AB]$ și $[AO] \equiv [OB]$.

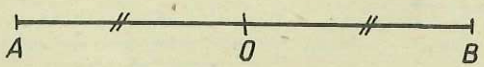


Fig. 45

De aici rezultă imediat că $AO = OB = \frac{AB}{2}$.

Pe orice segment există un punct interior care este mijlocul său și acesta este un *punct unic*. Cu ajutorul riglei gradate se poate determina (aproximativ) mijlocul unui segment dat.

● 4. Întrebări și exerciții

1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false.

1) Lungimea unui segment este: a) un segment; b) o mulțime de puncte; c) un număr.

2) Două segmente sînt congruente dacă: a) pot fi măsurate cu aceeași unitate de măsură; b) au aceeași lungime; c) sînt părți din aceeași dreaptă.

3) Mijlocul unui segment este: a) un număr; b) o unitate de măsură; c) un punct.

4) Un segment poate fi împărțit în două segmente congruente: a) printr-un punct și numai unul; b) prin două puncte; c) prin mai multe puncte.

2. Folosind convențiile de desen și notații, precizați care dintre segmentele din figura 46 sînt congruente.

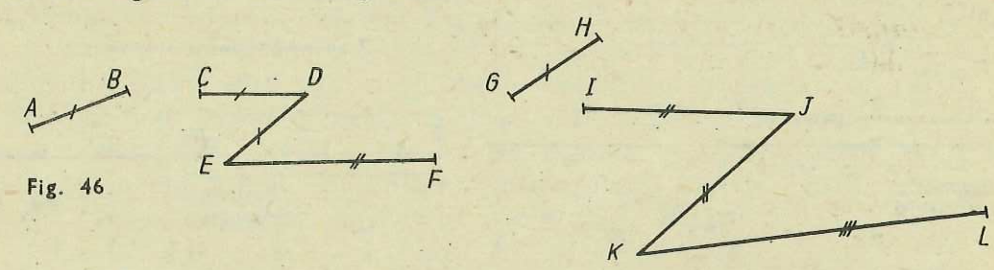


Fig. 46

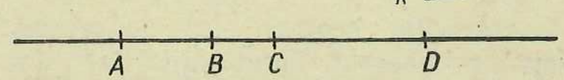


Fig. 47

3. Priviți figura 47 și stabiliți care dintre egalități sînt adevărate și care sînt false: a) $AB = AC - BC$; b) $AB = AB - BC$; c) $AB = AC - BD$; d) $AD = AB + BC + CD$; e) $AD = AB + BD$; f) $CD = AD - AB - BC$; g) $BC = BD - CD$; h) $BC = AD - AB - CD$; i) $AC = AB - BC$; j) $BC = AD - AB + CD$.

4. Să se construiască, cu ajutorul riglei gradate, segmentele: a) $AB = 1{,}2$ dm; b) $CD = 7$ cm; c) $EF = 3{,}4$ cm.

5. Punctele A, B, C sînt colineare și distincte două cîte două. În care dintre următoarele situații segmentul $[AB]$ poate fi considerat sumă sau diferență de segmente? a) $AC = 2$ cm, $CB = 7$ cm, $AB = 9$ cm; b) $AC = 13{,}4$ dm, $CB = 9{,}6$ dm, $AB = 3{,}8$ dm.

6. Punctele A, B, C fiind colineare și distincte două cîte două, calculați lungimea segmentului și ilustrați grafic segmentul respectiv:

a) $[BC]$, știind că: $AB = 7$ cm, $AC = 9$ cm;

b) $[AC]$, știind că: $AB = 9$ cm, $BC = 3$ cm.

7. Să se calculeze și să se ilustreze grafic cu segmentele respective: a) $AB + CD$; b) $AB - CD$; c) $AB + CD + EF$, știind că: $AB = 7$ cm; $CD = 4$ cm; $EF = 2$ cm.

8. Ilustrați grafic mijlocul segmentului $[AB]$ în următoarele cazuri: a) $AB = 20$ cm; b) $AB = AC + CB$, unde $AC = 8$ cm, $CB = 6$ cm; c) $AB = AC - CB$, unde $AC = 8$ cm, $CB = 6$ cm.

9. UNGHIUL[1)]

Definiție. Figura geometrică formată din două semidrepte avînd aceeași origine se numește unghi.

Cele două semidrepte se numesc *laturile*[2)] *unghiului*, iar originea lor comună se numește *vîrful unghiului*. În figura 48,*a*, $[MN$ și $[MP$ sînt laturile, iar M vîrful; în figura 48,*b* $[FE$ și $[FG$ sînt laturile și F vîrful; în figura 48,*c* $[OA$ și $[OB$ sînt laturile și O vîrful.

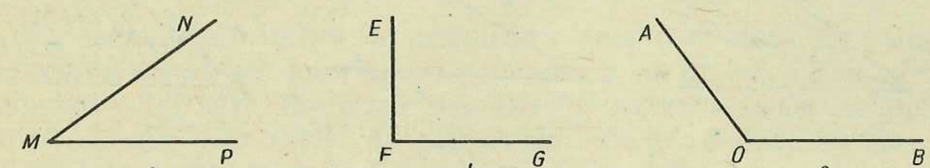


Fig. 48

Dacă cele două semidrepte care formează unghiul sînt semidrepte opuse, atunci unghiul se numește *unghi alungit* sau *unghi cu laturile în prelungire* sau *unghi plin*. În figura 49 este desenat un astfel de unghi; laturile lui sînt $[OA$ și $[OB$, iar vîrful este O.

Fig. 49

Fig. 50

Convenim să numim *unghi nul*, unghiul format de două semidrepte identice. În figura 50 este desenat un astfel de unghi; vîrful lui este punctul O, iar laturile sînt $[OA$ și $[OB$.

Unghiul format, de exemplu, de semidreptele $[MN$ și $[MP$ (fig. 48,*a*) se notează $\sphericalangle NMP$ sau $\widehat{NMP}$, și se citește *unghiul NMP*. Precizăm că, în notarea unui unghi, nu are importanță care dintre

---

[1)] Cuvîntul „*unghi*" vine din limba latină: *angulus* = unghi.

[2)] Cuvîntul „*latură*" vine din limba latină: *latus-eris* = margine.

laturile lui este menţionată prima; important este ca litera din vîrful lui să fie scrisă la mijloc; deci notaţiile $\sphericalangle NMP$ sau $\sphericalangle PMN$ exprimă acelaşi unghi. În loc de $\sphericalangle NMP$ putem scrie, mai pe scurt, $\sphericalangle M$ sau $\widehat{M}$ şi citim *unghiul M*, dar aceasta numai dacă este clar care sînt laturile lui şi nu există posibilitatea unor confuzii.

Uneori, dacă mai multe unghiuri au acelaşi vîrf şi este clar care sînt laturile lor, se poate întrebuinţa tot o notaţie prescurtată şi anume cu ajutorul literei din vîrf şi cu al unor *indici* (numere naturale), de exemplu $\sphericalangle O_1$ sau $\sphericalangle O_2$ sau $\sphericalangle O_3$, cu notaţiile făcute ca în figura 51, adică $\sphericalangle AOB$ este $\sphericalangle O_1$, $\sphericalangle BOC$ este $\sphericalangle O_2$, $\sphericalangle COD$ este $\sphericalangle O_3$. Unghiurile astfel notate se citesc: *unghiul O indice unu, unghiul O indice doi sau unghiul O indice trei* etc.

Dacă unghiul este format de semidreptele h şi k, aşa ca în figura 52, îl notăm $\sphericalangle hk$, care este totuna cu $\sphericalangle kh$ şi se mai poate nota $\widehat{hk}$ sau $\widehat{kh}$.

Un unghi care nu este nici „nul", ca unghiul AOB din figura 50, şi nici nu este alungit, ca unghiul AOB din figura 49, se numeşte *unghi propriu*. În figurile 48 (a, b, c), 51 şi 52 sînt desenate unghiuri proprii.

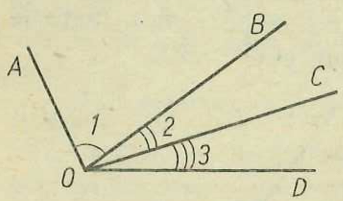


Fig. 51

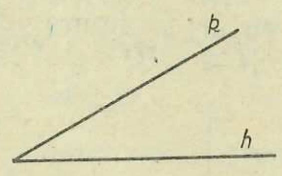


Fig. 52

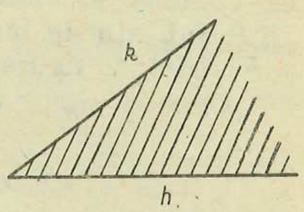


Fig. 53

Fiind dat un unghi propriu hk, deosebim o porţiune de plan, care în figura 53 este haşurată, şi care se numeşte *interiorul unghiului hk* şi se notează $(\sphericalangle hk)$.

Interiorul unui unghi propriu hk apare ca partea comună (intersecţia) semiplanului mărginit de dreapta h şi în care este inclusă semidreapta k, cu semiplanul mărginit de dreapta k şi în care este inclusă semidreapta h.

Folosind notaţia semiplanului cu ajutorul dreptei şi al punctului, rezultă că interiorul unghiului hk este $(hB \cap (kA$ (fig. 54).

Porţiunea din plan care nu aparţine nici interiorului unghiului nici laturilor se numeşte *exteriorul unghiului hk* (fig. 55).

Interiorul unui unghi se notează $(\sphericalangle ABC)$ sau $(\sphericalangle A)$ sau $(\sphericalangle hk)$.

Unind vîrful unui unghi AOB cu un punct C care aparţine interiorului unghiului, se obţine o *semidreaptă interioară unghiului* (semidreapta $[OC$ din figura 56). (Evident, toate punctele acestei semidrepte sînt puncte care aparţin interiorului unghiului.)

Dacă unim însă vîrful unghiului cu un punct care aparţine exteriorului unghiului, se obţine o *semidreaptă exterioară unghiului*. (Toate

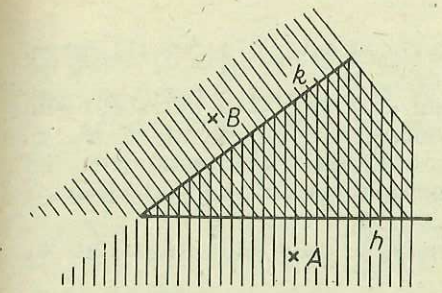


Fig. 54

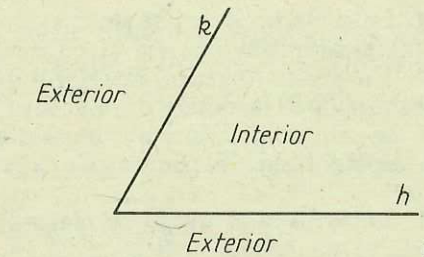


Fig. 55

punctele acestei semidrepte exterioare unghiului sînt — evident — puncte care aparţin exteriorului unghiului.) Semidreapta $[OD$ din figura 56 este o *semidreaptă exterioară* unghiului AOB.

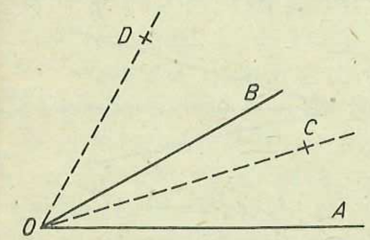


Fig. 56

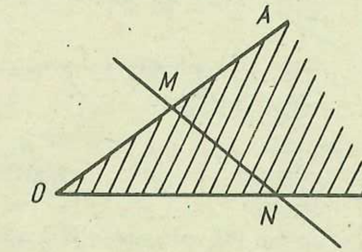


Fig. 57

Dacă $\sphericalangle AOB$ este un unghi propriu şi $M \in (OA$ şi $N \in (OB$, atunci dreapta MN are o porţiune inclusă în interiorul unghiului AOB (segmentul (MN)) (fig. 57).

* * *

În geometrie întîlnim propoziţii în care sînt evidenţiate însuşirile proprii, esenţiale, ale unor figuri geometrice, ca de exemplu: „Figura geometrică formată de două semidrepte avînd aceeaşi origine se numeşte *unghi*". O astfel de propoziţie este o „definiţie". În cazul de faţă este vorba de definiţia noţiunii de *unghi*".

Printr-o definiţie se precizează ce înţeles se dă unei anumite noţiuni (cuvînt sau simbol).

La definirea unor noi noţiuni se folosesc alte noţiuni definite anterior. Dar există şi noţiuni care nu se definesc; acestea sînt „noţiunile fundamentale" („primare"), al căror înţeles rezultă din descrieri sau intuiri.

Încă înainte de a începe studiul sistematic al geometriei am luat cunoştinţă de o noţiune primară a întregii matematici, noţiunea de *mulţime*, iar în paginile de pînă acum ale acestui manual am întîlnit noţiunile primare de: *plan*, *punct*, *dreaptă*.

Aşa cum spuneam şi mai sus, la definirea unor noţiuni se folosesc noţiuni primare şi noţiuni definite anterior.

● 5. Întrebări şi exerciţii

Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii sînt adevărate şi care sînt false.

1. Un unghi este: a) o parte dintr-o dreaptă; b) două segmente concurente; c) o figură geometrică formată de două semidrepte diferite care au aceeaşi origine.

2. Laturile unui unghi sînt: a) două drepte concurente; b) segmente concurente; c) semidrepte diferite și cu aceeași origine.

3. Un punct aparține interiorului unui unghi dat, dacă el se găsește: a) într-un semiplan determinat de o latură a unghiului; b) în două semiplane determinate de cele două laturi ale unghiului; c) în intersecția a două semiplane, fiecare semiplan fiind determinat de o latură a unghiului și un punct al celeilalte laturi.

4. Laturile unui unghi se măsoară: a) cu rigla; b) cu o anumită unitate de lungime; c) nu se pot măsura.

5. Care dintre expresiile următoare este corectă pentru a denumi unghiul propriu cu vîrful în punctul C din figura 58: a) $\sphericalangle ABC$; b) $\sphericalangle BCD$; c) $\sphericalangle ABD$; d) $\sphericalangle DCB$; e) $\sphericalangle C$; f) $\sphericalangle EDB$?

6. Urmăriți figura 59 și spuneți care dintre următoarele unghiuri sînt alungite și care sînt nule: a) $\sphericalangle CAB$; b) $\sphericalangle ABD$; c) $\sphericalangle DAB$; d) $\sphericalangle BCA$; e) $\sphericalangle BCD$.

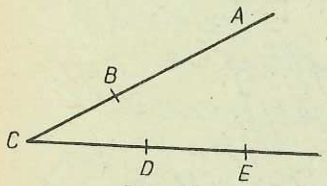


Fig. 58

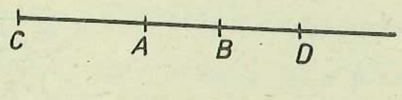


Fig. 59

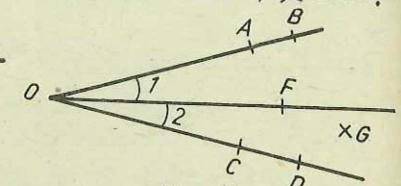


Fig. 60

7. În figura 60, punctele F și G aparțin interiorului: a) unghiului O_1; b) unghiului FOC; c) unghiului AOB; d) unghiului AOC.

8. Folosind aceeași figură (fig. 60), stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false: a) unghiurile AOF și O_1 au aceleași puncte interioare; b) punctul G aparține interiorului unghiului O_2 și exteriorului unghiului O_1; c) punctele semidreptei $[OF$ aparțin interiorului unghiului AOC; d) punctele A și B aparțin interiorului unghiului O_2.

9. Folosind desenele și notațiile convenționale, ilustrați grafic: a) $\sphericalangle AOB$ propriu; b) $\sphericalangle CDB$ nul; c) $\sphericalangle ABC$ alungit; d) punctele M și N interioare unghiului xOy propriu; e) o latură a unghiului propriu O trece prin punctele distincte A și B; f) punctele care aparțin interiorului unghiului ABC sînt aceleași cu cele ale interiorului unghiului xOy.

10. Fie semiplanul $[dA$, punctul $O \in d$ și punctul $B \in [dA$, $(A \neq B$ și $B \notin OA)$. Să se figureze pe același desen: a) un punct C care să aparțină interiorului unghiului AOB; b) un punct $D \in [dA$ — punctele C și D fiind de o parte și de alta a semidreptei $[OA$ —; c) punctul $E \in (OA$, care să fie și colinear cu punctele C și D; d) o semidreaptă $(OP$ care să fie inclusă în interiorul unghiului BOE.

11. Considerăm semidreptele $[Ox$, $[Oy$, $[Oz$, astfel încît să nu existe printre ele două opuse.

a) Cîte unghiuri se pot forma avînd ca laturi aceste semidrepte?

b) Se poate construi o figură astfel încît interioarele *oricăror* două dintre unghiurile obținute cu ajutorul semidreptelor date să nu aibă puncte comune?

c) Dar astfel încît interiorul unuia din unghiuri să fie inclus în întregime în interiorul altuia?

12. Fie A, B, C puncte necolineare $(A \neq B, B \neq C, C \neq A)$ și dreptele AB, BC, CA. În cîte părți (ce n-au puncte comune) apare împărțit, de cele trei drepte, planul?

10. MĂSURA UNUI UNGHI

Și unghiurile se măsoară! Ceea ce se măsoară este „deschiderea" dintre semidreptele care formează unghiul (în nici un caz lungimile laturilor, care, ca orice semidrepte, se întind la nesfîrșit). Se alege

ca unitate de măsură un anumit unghi. Măsura (mărimea) unghiurilor se determină cu ajutorul unui instrument numit *raportor* (fig. 61).

Notăm măsura unghiului AMB astfel: $m\ (\sphericalangle AMB)$ și citim: *măsura unghiului AMB*.

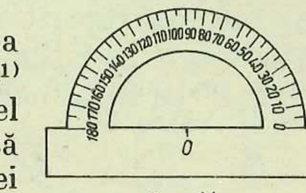


Fig. 61

Din motive istorice, unitatea de măsură a unghiurilor a fost aleasă *unghiul de un grad*[1] (scriem $1°$ și citim unghiul de un grad), astfel încît unghiul alungit să aibă $180°$. Gîndim că unghiul nul are $0°$ (zero grade). Pe baza acestei unități, sînt gradate toate raportoarele. Prin convenție, unghiul de un grad ($1°$) are șaizeci (60) de minute[2] (scriem $1° = 60'$), iar unghiul de un minut ($1'$) are șaizeci (60) de secunde[3] (scriem $1' = 60''$).

Despre măsura unui unghi care este egală cu un număr întreg de grade scriem, — de exemplu — $m\ (\sphericalangle AOB) = 25°$ și citim: „măsura unghiului AOB este egală cu 25 de grade". La fel, despre măsura unui unghi care este egală cu un număr întreg de grade, minute și secunde, scriem, de exemplu, $m\ (\sphericalangle xOy) = 32°43'16''$ și citim „măsura unghiului xOy este egală cu 32 de grade, 43 de minute și 16 secunde".

Trebuie menționat că nu orice unghi are ca măsură un număr întreg de grade și că nici diviziunile (minutele și secundele) nu permit măsurarea exactă a oricărui unghi. Adică există unghiuri care pot avea o măsură ce nu poate fi exprimată printr-un număr întreg de grade, minute și secunde. Nici chiar dacă am scrie, la secunde, după virgulă, un număr foarte mare, dar finit de zecimale, tot nu am putea exprima exact măsura acestor unghiuri. În cazul în care $\sphericalangle AOB$ are o măsură care nu este precizată, se obișnuiește să se noteze $m(\sphericalangle AOB) = x°$.

Cum determinăm, cu ajutorul raportorului, măsura unui unghi dat? De exemplu, fiind dat unghiul ABC (fig. 62), așezăm centrul raportorului în punctul B (vîrful unghiului), astfel ca semidreapta $[BC$ să fie în dreptul diviziunii $0°$ a raportorului (fig. 63) și citim pe scala (cadranul) raportorului, în dreptul laturii $[BA$ a unghiului, numărul de grade ($38°$) ce reprezintă măsura unghiului. Spunem că unghiul ABC are $38°$ și scriem $m(\sphericalangle ABC) = 38°$. (Măsura astfel determinată este aproximativă.)

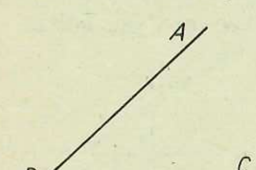


Fig. 62

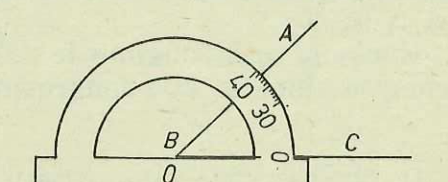


Fig. 63

[1] Cuvîntul „*grad*" vine din limba latină: *gradus* = treaptă, pas.
[2] Cuvîntul „*minut*" vine din limba latină: *minutus* = mic, mărunt.
[3] Cuvîntul „*secundă*" vine din limba latină: *secundus* = al doilea, următor. Aceste denumiri au fost introduse de Ptolemeu, în sec. 2 e.n.

Cum desenăm, cu ajutorul raportorului, un unghi care să aibă ca măsură un număr întreg de grade? De exemplu, cum desenăm un unghi cu măsura de 60°? Figurăm mai întîi o semidreaptă $[OA$, așezăm apoi raportorul cu centrul în punctul O și diviziunea 0° pe semidreapta $[OA$ (fig. 64) și apoi însemnăm cu creionul pe foaia de hîrtie un punct B, în dreptul diviziunii 60° (se citește de la diviziunea 0° către 60°).

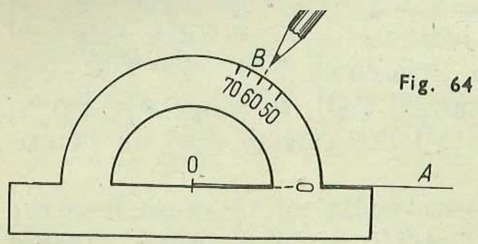


Fig. 64

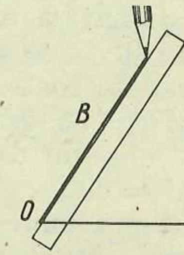


Fig. 65

Înlăturăm raportorul și cu ajutorul riglei punem în evidență semidreapta $[OB$ (fig. 65); obținem astfel unghiul AOB, a cărui măsură este de 60°. Să reținem totuși că aceasta este o construcție aproximativă.

Putem desena — în principiu — segmente oricît de lungi dorim, însă unghiuri mai mari decît 180° nu putem desena.

11. UNGHIURI CONGRUENTE

Definiție. Două unghiuri cu măsurile egale se numesc unghiuri congruente. (De exemplu, fiind date unghiurile AOB și $A'O'B'$, astfel încît $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle A'O'B')$, spunem că unghiurile AOB și $A'O'B'$ sînt congruente, scriem: $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$ și citim: unghiul AOB este congruent cu unghiul $A'O'B'$.)

Dar dacă două unghiuri, de exemplu, $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ nu au măsurile egale ($m(\sphericalangle A) \neq m(\sphericalangle B)$), atunci ele nu sînt congruente și le numim *unghiuri necongruente* (scriem $\sphericalangle A \not\equiv \sphericalangle B$ și citim: unghiul A este necongruent cu unghiul B).

Comparînd măsurile a două unghiuri, putem preciza care din ele este unghiul mai mare. De exemplu, dacă $m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B)$, vom înțelege că unghiul A este mai mare decît unghiul B și vom scrie $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Evident, toate unghiurile nule sînt congruente între ele, și toate unghiurile alungite sînt congruente între ele.

12. CONSTRUCȚIA, CU AJUTORUL RAPORTORULUI, A UNUI UNGHI CONGRUENT CU UN UNGHI DAT

Vom folosi un procedeu asemănător cu cel folosit la construirea segmentelor congruente.

Fiind dat un unghi AOB (fig. 66,*a*) se cere să se construiască un alt unghi $A'O'B'$ congruent cu unghiul dat AOB.

Procedăm astfel: așezăm raportorul cu centrul în punctul O și cu diviziunea 0° pe semidreapta $[OA$ și însemnăm pe raportor, cu creionul, un punct M, acolo unde semidreapta $[OB$ intersectează marginea raportorului (fig. 66, *b*). Desenăm apoi pe o foaie de hîrtie o semidreaptă $[O'A'$ și așezăm raportorul în punctul O', astfel încît diviziunea 0° să se găsească pe semidreapta $[O'A'$; însemnăm, cu creionul, pe foaia de hîrtie, punctul M', în dreptul punctului M de pe raportor

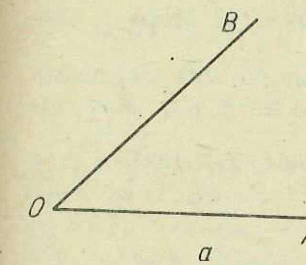


Fig. 66, *a*

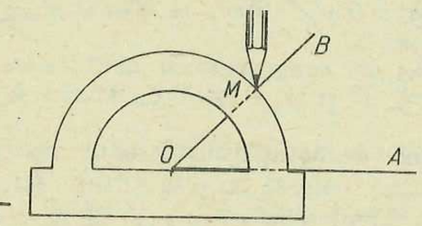


Fig. 66, *b*

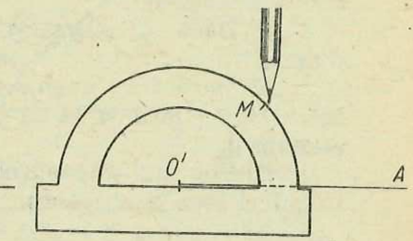


Fig. 67

(fig. 67). După îndepărtarea raportorului, unim pe O' cu M' și obținem semidreapta $[O'M'$, care va fi a doua latură a unghiului construit $A'O'B'$ (fig. 68). În acest mod spunem că am construit $\sphericalangle A'O'B' \equiv \equiv \sphericalangle AOB$ (dat).

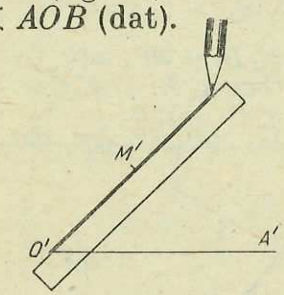


Fig. 68

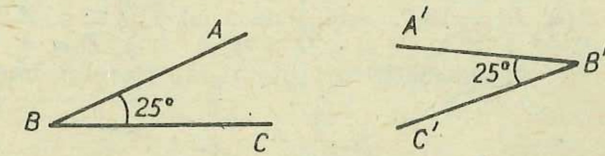


Fig. 69

Ca și în cazul segmentelor congruente, convenim să notăm — pe figură — că două (sau mai multe) unghiuri sînt congruente, sau scriind în interiorul lor măsura lor comună, ca în figura 69, sau — și acesta este procedeul cel mai des întrebuințat — notînd în interiorul unghiurilor congruente cîte o liniuță (sau un număr egal de liniuțe), ca în figura 70. Astfel vom înțelege că $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle O$; $\sphericalangle B \equiv \equiv \sphericalangle B'$ și $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle N'$.

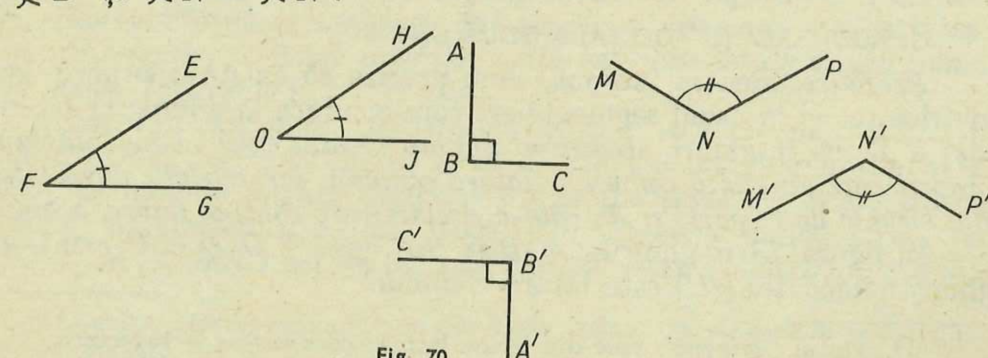


Fig. 70

6. Întrebări și exerciții

La exercițiul 1 și 2 stabiliți care propoziții sînt adevărate și care sînt false.

1. Unitatea de măsură pentru unghiuri este: a) un număr natural?; b) un număr zecimal?; c) unghiul de un grad?

2. Două unghiuri sînt congruente dacă: a) au același vîrf? b) au laturile congruente? c) au aceeași măsură?

3. Un unghi este congruent cu el însuși? (Adică $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle AOB$?) Motivați răspunsul.

4. Dacă $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$, atunci și $\sphericalangle x'O'y' \equiv \sphericalangle xOy$? Motivați răspunsul.

5. Dacă două unghiuri sînt congruente cu un al treilea unghi, sînt congruente între ele? (Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$?) Motivați răspunsul.

6. Folosind convențiile de notații din desenul din figura 71, stabiliți care unghiuri sînt congruente.

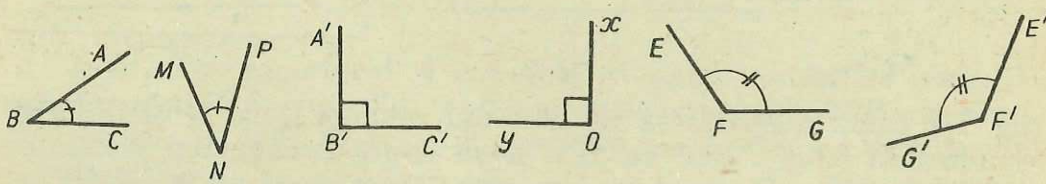


Fig. 71

7. Știind că m($\sphericalangle O$) = 30°, m($\sphericalangle A$) = 15°, m($\sphericalangle B$) = 30°, m($\sphericalangle C$) = 0°; m($\sphericalangle D$) = 180°, stabiliți dacă: a) $\sphericalangle O \equiv \sphericalangle A$; b) $\sphericalangle O \equiv \sphericalangle B$; c) $\sphericalangle C \not\equiv \sphericalangle D$; d) $\sphericalangle A \not\equiv \sphericalangle C$; e) $\sphericalangle O > \sphericalangle A$; f) $\sphericalangle B < \sphericalangle D$; g) $\sphericalangle C > \sphericalangle O$.

8. Desenați, cu ajutorul raportorului, unghiuri de: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°.

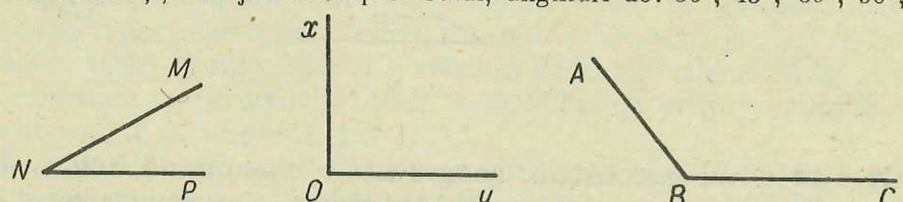


Fig. 72

9. Considerăm ca „unghiuri date“ (desenate) unghiurile din figura 72. Construiți, cu ajutorul raportorului, unghiurile $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle ABC$; $\sphericalangle x'O'y' \equiv \sphericalangle xOy$; $\sphericalangle M'N'P' \equiv \sphericalangle MNP$.

10. Există unghiuri a căror măsură să fie de $15\sqrt{2}$ grade?

13. ADUNAREA (SCĂDEREA) A DOUĂ UNGHIURI

Pregătire. Pentru început, vom preciza că există o situație geometrică (ca și în cazul segmentelor) care conduce la adunarea (scăderea) a două unghiuri. *Definim unghiuri adiacente*[1] *două unghiuri proprii care au vîrful comun, o latură comună, iar celelalte două laturi sînt situate de o parte și de alta a dreptei care conține latura comună.*

În figura 73 unghiurile AOB și BOC (sau $\sphericalangle O_1$ și $\sphericalangle O_2$) sînt unghiuri adiacente; $[OB$ este latura comună.

[1] Cuvîntul „*adiacent*“ vine din limba latină: *adiacens-tis* = învecinat.

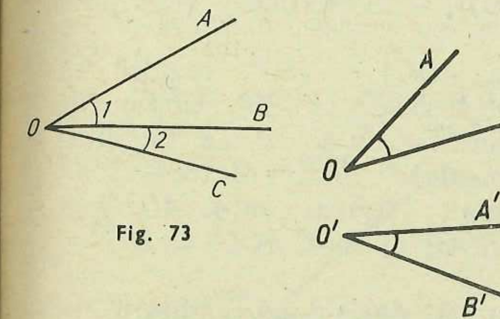


Fig. 73

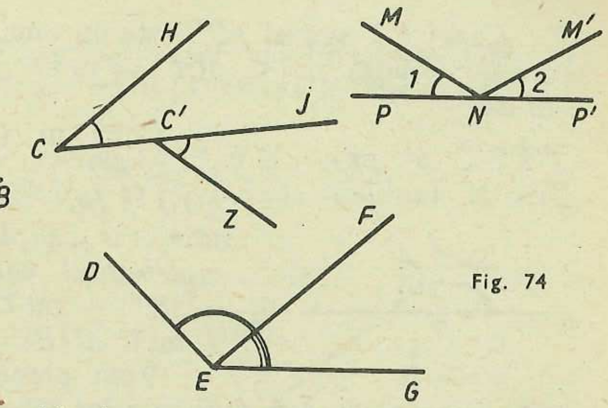


Fig. 74

În figura 74 sînt desenate unghiuri care nu sînt adiacente. Unghiurile O și O' nu au vîrful comun și nici latură comună; $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle C'$ nu au vîrful comun; $\sphericalangle N_1$ și $\sphericalangle N_2$ nu au laturile $[NM$ și $[NM'$ de o parte și de alta a dreptei PP'; $\sphericalangle DEG$ și $\sphericalangle FEG$ nu au laturile $[EF$ și $[ED$ de o parte și de alta a laturii comune $[EG$.

Reținem, din *definirea* și *descrierea* unghiurilor adiacente, că *un unghi alungit nu poate fi adiacent cu nici un alt unghi* (fig. 75).

Adunarea a două unghiuri. Să considerăm două unghiuri adiacente, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ (latura comună $[OB$).

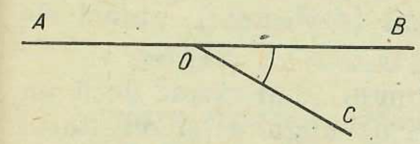


Fig. 75

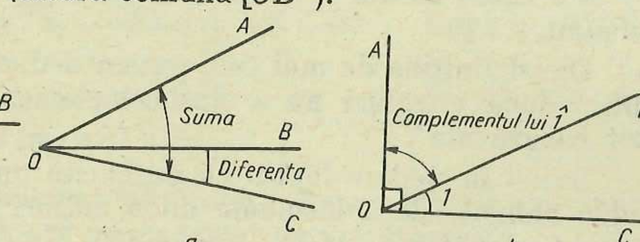


Fig. 76

Există următoarele situații geometrice legate de $\sphericalangle AOC$:

Cazul 1. Unghiul AOC nu este alungit (fig. 76,*a*). În acest caz m($\sphericalangle AOC$) = m($\sphericalangle AOB$) + m($\sphericalangle BOC$) sau m($\sphericalangle AOB$) = m($\sphericalangle AOC$) − m($\sphericalangle BOC$) sau m($\sphericalangle BOC$) = m($\sphericalangle AOC$) − m($\sphericalangle AOB$) și putem efectua un calcul aritmetic între măsurile acestor unghiuri și deci rezultatul adunării (scăderii) va fi un număr (măsură) *unic*. Unghiul AOC, din prima egalitate, este *unghiul sumă*, iar unghiurile AOB sau BOC, din egalitățile următoare, sînt *unghiuri diferență*. Să reținem: *suma (diferența) a două unghiuri adiacente este tot un unghi, numit unghi sumă (diferență).*

În cazul în care m($\sphericalangle AOC$) = 90° și m($\sphericalangle AOC$) = m($\sphericalangle AOB$) + + m($\sphericalangle BOC$), deci m($\sphericalangle AOB$) + m($\sphericalangle BOC$) = 90°, unghiurile AOB și BOC se numesc *unghiuri adiacente* și *complementare*[1] fiecare dintre ele fiind complementul celuilalt (fig. 76,*b*) și scriem: m($\sphericalangle AOB$) = = 90° − m($\sphericalangle BOC$) sau m($\sphericalangle BOC$) = 90° − m($\sphericalangle AOB$).

[1] Cuvîntul „*complementar*“ vine din limba latină: *complementum* = întregire, care completează.

Cazul 2. Unghiul AOC este un unghi alungit (fig. 77) și în această situație relația $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC)$ este adevărată.

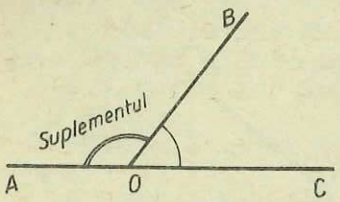


Fig. 77

Cum $m(\sphericalangle AOC) = 180°$, rezultă că $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180°$. Unghiurile AOB și BOC se numesc, în acest caz, unghiuri *adiacente și suplementare*[1], fiecare dintre ele fiind *suplementul* celuilalt; scriem: $m(\sphericalangle AOB) = 180° - m(\sphericalangle BOC)$ și $m(\sphericalangle BOC) = 180° - m(\sphericalangle AOB)$.

Vom preciza că, dacă două unghiuri „nu sînt adiacente", dar măsurile lor însumate dau 90° sau 180°, atunci, prin abuz de limbaj, vom spune că unghiurile se numesc *complementare*, în prima situație, și *suplementare*, în cea de-a doua situație.

Așadar, putem da următoarele definiții:

1. **Două unghiuri se numesc complementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 90°.** Atunci fiecare unghi este un „complement" al celuilalt.

2. **Două unghiuri se numesc suplementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 180°.** Atunci fiecare unghi este un „suplement" al celuilalt.

Din definițiile de mai sus, putem deduce următoarea propoziție: **„Dacă două unghiuri au același complement (suplement), atunci ele sînt congruente".**

Avînd în vedere faptul că nu există unghi „mai mare" decît un unghi alungit, dacă însumăm două măsuri de unghiuri și rezultatul obținut depășește 180°, $(m\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) > 180°)$, *„rezultatul"* nu mai poate fi privit ca „măsura unui unghi" (fig. 78). În acest caz, nu există un unghi care să aibă ca măsură suma măsurilor unghiurilor AOB și BOC.

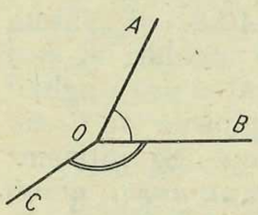


Fig. 78

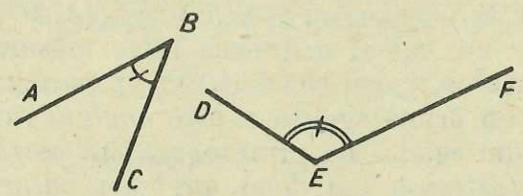


Fig. 79

În cazul în care două unghiuri nu sînt adiacente, dar suma măsurilor lor este mai mică decît 180°, de exemplu $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DEF$, ca în figura 79, pentru a ilustra grafic suma lor putem proceda astfel: pe o semidreaptă $[B'x$ construim un unghi congruent cu unul din cele două, de exemplu: construim $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle ABC$. În continuare,

[1] Cuvîntul *„suplementar"* vine din limba latină: *supplementum* = care se adaugă.

construim $\sphericalangle C'B'F' \equiv \sphericalangle DEF$, astfel încît unghiurile construite să fie adiacente, latura comună putînd fi $[B'C'$, ca în figura 80, sau $[B'x$.

Putem scrie: $m(\sphericalangle A'B'F') = m(\sphericalangle A'B'C') + m(\sphericalangle C'B'F')$, adică $m(\sphericalangle A'B'F') = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle DEF)$, unghiul $A'B'F'$ fiind *unghiul sumă.*

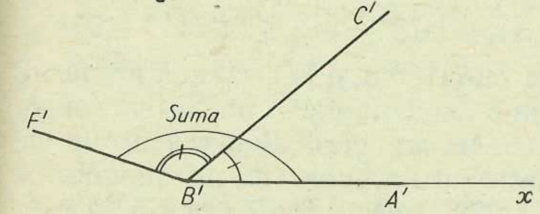


Fig. 80

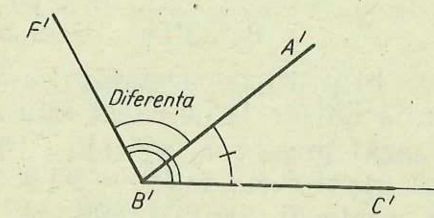


Fig. 81

Pentru a ilustra grafic diferența acelorași două unghiuri neadiacente, fixăm unghiul mai mare, în cazul de față unghiul DEF, și, pe semidreapta $[B'x$, construim $\sphericalangle C'B'F' \equiv \sphericalangle DEF$ (fig. 81). Apoi, pe $[B'C'$ ca latură și cu originea în B', construim $\sphericalangle C'B'A' \equiv \sphericalangle CBA$ cu semidreapta $[B'A'$ interioară unghiului $C'B'F'$.

Putem scrie: $m(\sphericalangle A'B'F') = m(\sphericalangle C'B'F') - m(\sphericalangle C'B'A')$, adică $m(\sphericalangle A'B'F') = m(\sphericalangle DEF) - m(\sphericalangle CBA)$. Unghiul $A'B'F'$ este *unghiul diferență.*

14. OPERAȚII CU MĂSURI DE UNGHIURI

Pentru adunarea (scăderea) măsurilor a două unghiuri exprimate în grade, minute și secunde se va ține cont de următoarele:

a) Se adună (scad) între ele unitățile de același ordin (secunde, minute, grade).

b) Dacă în urma însumării, la un anumit ordin (secunde sau minute), se depășesc 60 de unități, se transformă grupele de cîte 60 de unități de același ordin în unități de ordin imediat superior, care se adună acestora.

c) Dacă la scăderea măsurilor a două unghiuri, numărul unităților de un anumit ordin ale unghiului „descăzut" este mai mic decît numărul unităților de același ordin ale unghiului „scăzător", atunci la descăzut se „împrumută" o unitate de ordin imediat superior, care se transformă în 60 de unități de ordin imediat inferior și se adaugă celor existente.

Exemple: Știind că $m(\sphericalangle A) = 46°35'24''$ și $m(\sphericalangle B) = 35°56'47''$, să se calculeze: a) $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)$ și b) $m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle B)$.

a) Se începe adunarea de la unitățile de ordin inferior (de la secunde): $24'' + 47'' = 71''$; $71'' - 60'' = 11''$; scriem $11''$ și ținem în minte $1'$ $(60'' = 1')$.

Se continuă cu adunarea minutelor: $35' + 56' + 1' = 92'$; $92' - 60' = 32'$; scriem $32'$ și ținem în minte $1°$ $(60' = 1°)$.

În final se adună și gradele: $46° + 35° + 1° = 82°$.

În practică, în vederea adunării, măsurile unghiurilor se scriu unele sub altele, astfel:

$$\begin{array}{l} 46°35'24'' + \\ 35°56'47'' \\ \hline 82°32'11'' \end{array} \quad \text{Deci } m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = 82°32'11''.$$

b) Întrucît constatăm că atît la minute cît și la secunde, numărul unităților de la descăzut este mai mic decît numărul unităților corespunzătoare de la scăzător, transformăm un grad al descăzutului în minute și secunde ($1° = 59'60''$). Descăzutul devine (măsura unghiului A poate fi scrisă): $(46-1)°\ (35 + 59)'\ (24 + 60)''$ sau $45°94'84''$. Acum scăderea poate fi făcută cu ușurință:

$$\begin{array}{l} 45°94'84'' - \\ 35°56'47'' \\ \hline 10°38'37'' \end{array} \quad \text{Deci } m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle B) = 10°38'37''.$$

Pot fi întîlnite și exerciții de tipul acesta: „Să se transforme în grade, minute și secunde măsura de $14\,257''$ a unui unghi".

Stabilim mai întîi cîte grupe de cîte $60''$ se pot constitui din cele $14\,257''$, împărțind acest număr la 60:

$$\begin{array}{l|l} 14257'' & 60 \\ \cline{2-2} 120 & 237' \\ \hline =225 & \\ 180 & \\ \hline =457 & \\ 420 & \\ \hline =37'' & \end{array}$$

Se obțin, deci, 237 de grupe de cîte $60''$ și un rest de $37''$. Cum $60''$ constituie un minut, rezultă că măsura unghiului ar mai putea fi scrisă $14\,257'' = 237'37''$.

Apoi, stabilim cîte grupe de cîte $60'$ se pot constitui din cele $237'$:

$$\begin{array}{l|l} 237' & 60 \\ \cline{2-2} 180 & 3° \\ \hline =57' & \end{array}$$

Se obțin, deci 3 grupe de cîte $60'$ (adică $3°$) și un rest de $57'$. În final putem scrie $14\,257'' = 3°57'37''$.

Adunarea măsurilor mai multor unghiuri se realizează în același mod ca și adunarea măsurilor a numai două unghiuri. Se pot întîlni situații cînd din suma unităților de același ordin se pot constitui mai multe unități de ordin imediat superior. Spre exemplu:

$$\begin{array}{l} 12°48'56'' \\ 7°39'49'' \\ 18°54'45'' \\ 13°47'29'' \\ \hline 53°10'59'' \end{array} \quad \begin{array}{l} (56'' + 49'' + 45'' + 29'' = 179'' = 2'59'') \\ (48' + 39' + 54' + 47' + 2' = 190' = 3°10') \\ (12° + 7° + 18° + 13° + 3° = 53°) \\ \\ \\ \end{array}$$

Dacă unghiurile ale căror măsuri se cere a se aduna sînt unghiuri congruente, problema revine la înmulțirea măsurii unui unghi cu un număr natural. De exemplu: $12°58'43'' \times 4 =$

Calculul se face ca la adunare:

$43'' \times 4 = 172''$; $172'' - 120'' = 52''$; scriem $52''$ și ținem în minte $2'$ ($120'' = 2'$).

$58' \times 4 + 2' = 234'$; $234' - 180' = 54'$; scriem $54'$ și ținem în minte $3°$ ($180' = 3°$).

$12° \times 4 + 3° = 51°$. Deci $12°58'43'' \times 4 = 51°54'52''$.

Măsura unui unghi, exprimată în grade, minute și secunde poate fi împărțită la un număr natural. Se procedează astfel:

Se împarte mai întîi numărul de grade, la numărul natural dat, cîtul obținut fiind exprimat tot în grade; restul împărțirii gradelor se transformă în minute, prin înmulțirea lui cu 60 ($1° = 60'$) produsul obținut se adună cu numărul de minute din măsura unghiului. Suma obținută (exprimată, evident, în minute) se împarte la numărul natural dat, obținîndu-se un cît exprimat tot în minute; restul împărțirii minutelor se transformă în secunde prin înmulțirea lui cu 60 ($1' = 60''$), iar produsul obținut se adună cu numărul de secunde din măsura unghiului. Noua sumă se împarte și ea la numărul natural dat.

Exemple: a) $75°47'38'' : 2$

$$\begin{array}{l|l} 75° & 2 \\ \cline{2-2} 6 & 37° \\ \hline 15 & \\ 14 & \\ \hline =1° & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1° = 60' \\ 60' + 47' = 107' \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 107' & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 53' \\ \hline =7 & \\ 6 & \\ \hline 1' & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1' = 60'' \\ 60'' + 38'' = 98'' \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 98'' & 2 \\ \cline{2-2} 8 & 49'' \\ \hline 18 & \\ 18 & \\ \hline == & \end{array}$$

Deci $75°47'38'' : 2 = 37°\,53'49''$.

b) $125°37'15'' : 3$

$$\begin{array}{l|l} 125° & 3 \\ \cline{2-2} 12 & 41° \\ \hline ==5 & \\ 3 & \\ \hline 2° & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2° = 120' \\ 120' + 37' = 157' \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 157' & 3 \\ \cline{2-2} 15 & 52' \\ \hline =7 & \\ 6 & \\ \hline 1' & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1' = 60'' \\ 60'' + 15'' = 75'' \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 75'' & 3 \\ \cline{2-2} 6 & 25'' \\ \hline 15 & \\ 15 & \\ \hline == & \end{array}$$

Deci $125°37'15'' : 3 = 41°52'25''$.

Subliniem faptul că nu în toate cazurile la împărțirea măsurii unui unghi, exprimată în grade, minute și secunde se obține ca rezultat un număr întreg de secunde. În astfel de cazuri, rezultatul se poate exprima cu aproximație. De exemplu:

c) $45°29'17'' : 7$

$$\begin{array}{l|l} 45° & 7 \\ \cline{2-2} 42 & 6° \\ \hline =3° & \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 3° = 180' \\ 180' + 29' = 209' \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 209' & 7 \\ \cline{2-2} 14 & 29' \\ \hline =69 & \\ 63 & \\ \hline =6' & \end{array} \quad \begin{array}{l} 6' = 360'' \\ 360'' + 17'' = 377'' \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 377'' & 7 \\ \cline{2-2} 35 & 53'' \\ \hline =27 & \\ 21 & \\ \hline =6'' & \end{array}$$

Rezultat aproximativ: $45°29'17'' : 7 \simeq 6°29'54''$.

7. Întrebări și exerciții

1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

1) Diferența a două unghiuri este: a) un unghi; b) un număr natural; c) o dreaptă.

2) Două unghiuri sînt adiacente dacă au: a) același vîrf; b) același vîrf și o latură comună; c) același vîrf, o latură comună și celelalte două situate în semiplane diferite față de latura comună.

3) Dacă două unghiuri sînt adiacente, atunci: a) unul dintre ele este alungit; b) ambele sînt alungite; c) nici unul nu este alungit.

4) Două unghiuri adiacente sînt complementare dacă suma măsurilor lor este: a) $90°$; b) o măsură mai mică decît $90°$; c) o măsură mai mare decît $90°$; d) $180°$.

5) Două unghiuri sînt suplementare dacă suma măsurilor lor este: a) o măsură mai mare decît a unui unghi alungit; b) o măsură mai mică decît $180°$; c) măsura unui unghi alungit; d) $90°$.

2. Să se transforme în grade, minute și secunde următoarele măsuri de unghiuri:

a) $284''$; b) $1\,375''$; c) $4\,867''$; d) $1\,225'$; e) $324'$.

3. Știind că $m(\sphericalangle O_1) = 35°$, $m(\sphericalangle O_2) = 20°$, $m(\sphericalangle O_3) = 12°$, verificați dacă:

a) $m(\sphericalangle O_1) + m(\sphericalangle O_2) = m(\sphericalangle O_2) + m(\sphericalangle O_1)$;

b) $m(\sphericalangle O_1) + (m(\sphericalangle O_2) + m(\sphericalangle O_3)) = (m(\sphericalangle O_1) + m(\sphericalangle O_2)) + m(\sphericalangle O_3)$;

c) $m(\sphericalangle O_1) - (m(\sphericalangle O_2) + m(\sphericalangle O_3)) = m(\sphericalangle O_1) - m(\sphericalangle O_2) - m(\sphericalangle O_3)$.

4. Efectuați:

a) $37°25'12'' + 8°13'10''$; b) $37°25'12'' - 8°13'10''$

c) $14°54'16'' + 4°13'15''$; d) $14°54'16'' - 4°13'59''$.

5. Să se calculeze măsura complementului unghiului care are măsura de a) $32°$; b) $45°$; c) $37°15'$; d) $50°18'32''$; e) $90°$.

6. Să se calculeze măsura suplementului unghiului care are măsura de: a) $70°$; b) $90°$; c) $110°35'$; d) $80°46'36''$ e) $180°$.

7. Considerăm „date" (desenate) unghiurile AOB și $A_1O_1B_1$. Știind că $m(\sphericalangle A_1O_1B_1) > m(\sphericalangle AOB)$, să se ilustreze grafic: a) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A_1O_1B_1$; b) $\sphericalangle A_1O_1B_1 - \sphericalangle AOB$.

8. Două unghiuri complementare pot fi congruente? Care este măsura lor?

9. Două unghiuri suplementare pot fi congruente? Care este măsura lor?

15. BISECTOAREA UNUI UNGHI. UNGHI DREPT. UNGHI ASCUȚIT. UNGHI OBTUZ

Să considerăm un unghi propriu dat (desenat), o semidreaptă cu originea în vîrful unghiului dat, situată în interiorul acestui unghi și care să formeze unghiuri congruente cu laturile unghiului dat.

Să ilustrăm această situație geometrică. (Vom ține seama că nu există unghi a cărui măsură să fie mai mare decît $180°$.)

Marcăm unghiurile congruente (fig. 82) și scriem relațiile de congruență:

$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CBD$ ($\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$), pentru figura 82,*a*;

$\sphericalangle A'O'B' \equiv \sphericalangle B'O'C'$ ($\sphericalangle O'_1 \equiv \sphericalangle O'_2$), pentru figura 82,*b*.

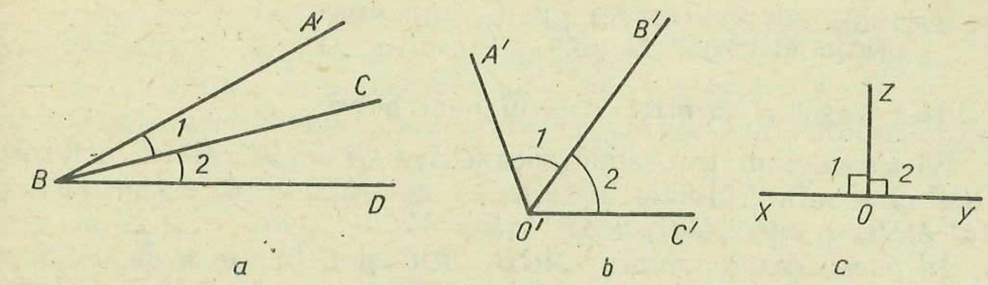


Fig. 82

Semidreptele $[BC$, $[O'B'$ se numesc *bisectoarele*[1] *unghiurilor* ABC, $A'O'B'$.

Definiție. Se numește bisectoare a unui unghi propriu o semidreaptă cu originea în vîrful unghiului, situată în interiorul unghiului, astfel încît cele două unghiuri formate de ea cu laturile unghiului inițial să fie congruente.

Pe scurt, obișnuim să spunem: bisectoarea unui unghi propriu este o semidreaptă, cu originea în vîrful unghiului, care îl împarte în două unghiuri congruente. Să reținem că *bisectoarea unui unghi este o semidreaptă unică* (în sensul că este o semidreaptă și numai una).

Observație. În figura 82,*c* unghiul xOy este alungit ($m(\sphericalangle xOy) = 180°$). Dacă semidreapta $[Oz$ îl împarte în două unghiuri congruente, numim această semidreaptă tot bisectoare și scriem: $\sphericalangle xOz \equiv \sphericalangle zOy$ ($m(\sphericalangle xOz) = m(\sphericalangle zOy)$). Cum $m(\sphericalangle xOz) + m(\sphericalangle zOy) = 180°$, rezultă că fiecare unghi are ca măsură $90°$ și scriem: $m(\sphericalangle xOz) = 90°$ sau $m(\sphericalangle zOy) = 90°$.

Cu ajutorul raportorului se poate construi (aproximativ) bisectoarea unui unghi dat.

Definiție. Se numește unghi drept orice unghi care este congruent cu un suplement al său. Rezultă că un unghi a cărui măsură este de $90°$ este un unghi drept (și orice unghi drept are măsura de $90°$).

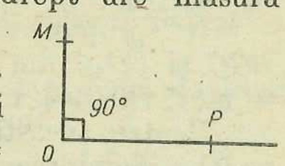


Fig. 83

Uneori, un unghi drept se notează astfel: 1 dr. Vom înțelege că este vorba despre un unghi a cărui măsură este de $90°$ (fig. 83) și vom scrie: $m(\sphericalangle MOP) = 90°$, deci $\sphericalangle MOP = 1$ dr.

Definiție. Se numește unghi ascuțit orice unghi a cărui măsură este mai mică de $90°$, de exemplu unghiul ABD (fig. 82,*a*), și scriem $m(\sphericalangle ABD) < 90°$.

Definiție. Se numește unghi obtuz[2] orice unghi a cărui măsură este mai mare de $90°$ (dar, evident, mai mică de $180°$), de exemplu unghiul $A'O'C'$ (fig. 82,*b*) și scriem $m(\sphericalangle A'O'C') > 90°$.

[1] Cuvîntul „*bisectoare*" este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *bis* = de două ori și *secare* = a tăia.

[2] Cuvîntul „*obtuz*" vine din limba latină: *obtusus* = tocit.

16. UNGHIURI FORMATE ÎN JURUL UNUI PUNCT. UNGHIURI OPUSE LA VÎRF

16.1 Unghiuri formate în jurul unui punct

Să considerăm trei semidrepte $(OA$, $(OB$ și $(OC$, astfel încît $(OB$ și $(OC$ să se afle în semiplane diferite, determinate de dreapta OA și $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle AOC) > 180°$ (fig. 84).

În acest caz, unghiurile AOB, BOC și COA au același vîrf — punctul O; orice punct al planului, nesituat pe niciuna dintre laturile $(OA$, $(OB$, $(OC$, și diferit de O, aparține interiorului unuia dintre unghiuri; și nu există nici un punct comun interioarelor a două dintre ele.

Reuniunea interioarelor unghiurilor AOB, BOC, COA și a celor trei semidrepte $[OA$, $[OB$, $[OC$ este întreg planul.

Unghiurile AOB, BOC și COA se numesc *„unghiuri formate în jurul punctului O“*.

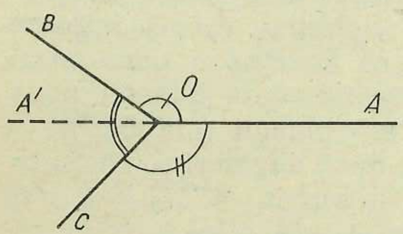


Fig. 84

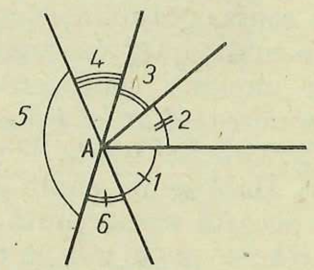


Fig. 85

Se poate realiza o figură geometrică astfel încît să îndeplinească toate condițiile de mai sus, considerînd mai mult de trei semidrepte cu aceeași origine. Ele vor determina mai multe unghiuri care se vor numi tot „unghiuri formate în jurul unui punct“ (și anume în jurul originii comune a semidreptelor), de exemplu, unghiurile A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (fig. 85) sînt unghiuri formate în jurul punctului A.

Ne propunem să calculăm suma măsurilor unghiurilor AOB, BOC și COA din figura 84, deci să calculăm suma: $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COA)$.

Pentru aceasta, considerăm semidreapta $[OA'$, care prelungește pe $[OA$. Semidreapta $[OA'$ este inclusă în interiorul unghiului BOC. Unghiul AOA' fiind unghi alungit, putem scrie:

(1) $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOA') = 180°$ și

(2) $m(\sphericalangle A'OC) + m(\sphericalangle COA) = 180°$.

Reamintim că, în clasa a V-a, s-a învățat următoarea proprietate: dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$. (Două egalități se pot aduna membru cu membru, obținîndu-se tot o egalitate.) Aplicăm această proprietate la egalitățile (1) și (2) și vom obține:

(3) $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOA') + m(\sphericalangle A'OC) + m(\sphericalangle COA) = 360°$.

Dar (4) $m(\sphericalangle BOA') + m(\sphericalangle A'OC) = m(\sphericalangle BOC)$ (unghiurile BOA' și $A'OC$ fiind adiacente).

Înlocuim în primul membru al egalității (3) suma $m(\sphericalangle BOA') + m(\sphericalangle A'OC)$, cu $m(\sphericalangle BOC)$ și obținem:

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COA) = 360°$.

O egalitate asemănătoare se obține și în cazul mai multor unghiuri situate „în jurul unui punct-origine“.

În cazul figurii 85, egalitatea se scrie astfel:

$m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle A_2) + m(\sphericalangle A_3) + m(\sphericalangle A_4) + m(\sphericalangle A_5) + m(\sphericalangle A_6) = 360°$.

Formulăm acest rezultat astfel:

Unghiurile formate în jurul unui punct au ca sumă a măsurilor lor 360°.

16.2 Unghiuri opuse la vîrf

Să examinăm figura formată de două drepte concurente AA' și BB', $(AA' \cap BB' = \{O\})$, (fig. 86). Observăm că s-au format patru unghiuri: AOB, BOA', $A'OB'$ și $B'OA$. Unghiurile AOB și $A'OB'$ cît și unghiurile AOB' și BOA' *au vîrful O comun și laturile unuia prelungesc laturile celuilalt.* Astfel, putem da următoarea:

Definiție. Două unghiuri cu același vîrf se numesc opuse la vîrf dacă laturile unuia sînt în prelungirea laturilor celuilalt (sînt semidrepte opuse).

Față de dreapta AA' (fig. 86), considerînd unghiurile suplementare AOB și BOA', putem scrie:

(1) $m(\sphericalangle AOB) = 180° - m(\sphericalangle BOA')$.

Față de dreapta BB', unghiurile suplementare BOA' și $A'OB'$ ne permit să scriem:

(2) $m(\sphericalangle A'OB') = 180° - m(\sphericalangle BOA')$.

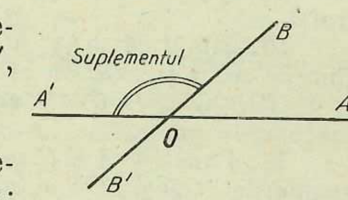


Fig. 86

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle A'OB')$, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$. (Două unghiuri ale căror măsuri au același suplement sînt congruente.)

Reținem deci, un rezultat foarte important: **dacă două unghiuri sînt opuse la vîrf, atunci ele sînt unghiuri congruente.**

● 8. Întrebări și exerciții

1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false: bisectoarea unui unghi împarte unghiul în: a) două unghiuri congruente; b) mai multe unghiuri congruente.

2. Dacă $m(\sphericalangle AOB) = 60°$ și $m(\sphericalangle AOC) = 20°$, care este măsura unghiului BOC? Există un singur caz?

3. Dacă $m(\sphericalangle AOC) > m(\sphericalangle AOB) > m(\sphericalangle BOC)$ și $m(\sphericalangle BOC) = 25°$, $m(\sphericalangle AOB) = 30°$, care este măsura unghiului AOC?

4. Unghiurile AOC și BOC sînt adiacente. Care propoziție este adevărată: a) $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle COB)$; b) $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle COB)$?

5. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

1) Două unghiuri opuse la vîrf au: a) vîrful comun și o latură comună; b) vîrful comun și o latură a unui unghi prelungește latura celuilalt unghi; c) vîrful comun și laturile unui unghi prelungesc laturile celuilalt unghi?

2) Suma tuturor unghiurilor adiacente două cîte două care se pot desena în jurul unui punct și de aceeași parte a unei drepte care trece prin acel punct este: a) mai mare de 180°; b) egală cu 180°; c) mai mică de 180°.

3) Suma tuturor unghiurilor adiacente două cîte două, care se pot desena în jurul unui punct, este: a) mai mare de 360°; b) mai mică de 360°; c) egală cu 360°.

6. În figura 87, dreptele AA', BB' și CC' sînt concurente în același punct O. Cunoaștem că m ($\sphericalangle O_1$) = 30° și m ($\sphericalangle O_5$) = 60°. Găsiți: a) toate perechile de unghiuri opuse la vîrf, dacă există; b) toate perechile de unghiuri complementare, dacă există; c) calculați suplementul unghiului O_1 față de dreapta AA'.

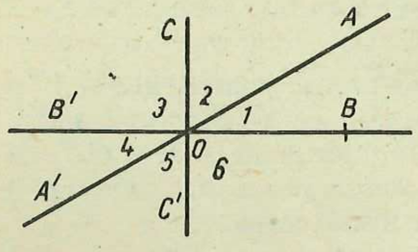


Fig. 87

7. Este posibil ca: a) Două unghiuri opuse la vîrf să fie complementare? Care este măsura lor? b) Două unghiuri opuse la vîrf să fie suplementare? Care este măsura lor?

8. Stabiliți care este: a) măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente și care au laturile necomune în prelungire; b) măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf; c) măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente și complementare.

9. Calculați măsurile unghiurilor formate de bisectoarea unui unghi AOB cu laturile sale dacă m ($\sphericalangle AOB$) este: a) 30°; b) 90°; c) 120°; d) 180°, apoi ilustrați grafic.

10. Știind că m ($\sphericalangle AOB$) = 120° și m ($\sphericalangle BOC$) = 40°, ilustrați grafic unghiurile AOB și BOC în următoarele situații: a) $[OC$ interioară unghiului AOB; b) $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sînt adiacente. Apoi calculați măsura unghiului AOC în fiecare caz în parte.

11. Punctele A și C se găsesc în semiplane diferite față de dreapta OB. Dacă unghiurile AOB și BOC au măsurile de 140° și respectiv 60°, să se calculeze măsura unghiului format de semidreapta $[Ox$, bisectoarea unghiului AOC cu: a) semidreapta $[OC$; b) semidreapta $[OB$; c) să se calculeze și măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB și BOC.

12. În figura 88, unghiurile O_1, O_2, O_3 sînt congruente. Care este măsura lor comună? Dacă se notează cu $[OM$, $[ON$, $[OP$ bisectoarele unghiurilor O_1, O_2, O_3, să se calculeze: a) măsurile unghiurilor care au ca laturi cele trei bisectoare; b) m($\sphericalangle MOC$), m($\sphericalangle NOA$) și m($\sphericalangle POB$). Ce puteți spune despre semidreptele $[OM$ și $[OC$, $[ON$ și $[OA$, $[OP$ și $[OB$?

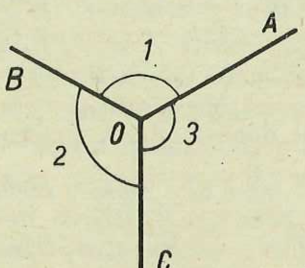


Fig. 88

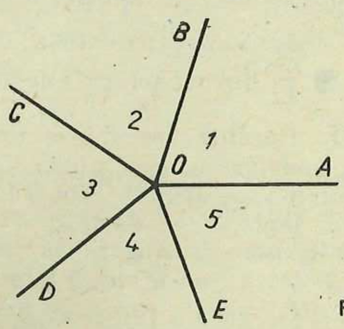


Fig. 89

13. În figura 89, cele cinci unghiuri sînt congruente. Care este măsura lor comună? Construiți semidreapta $[OM$ opusă semidreptei $[OA$, apoi calculați m($\sphericalangle DOM$) și m($\sphericalangle EOM$). Ce puteți spune despre semidreapta $[OM$?

17. DREPTE PERPENDICULARE[1]

Să considerăm două drepte a și b concurente în punctul O. Notăm unghiurile formate în jurul punctului O, ca în figura 90.

O situație specială apare cînd unul dintre unghiurile cu vîrful în O are ca măsură 90°; de exemplu m($\sphericalangle O_1$) = 90°. Atunci toate cele patru unghiuri: O_1, O_2, O_3, O_4 au măsurile de cîte 90°, deoarece: $\sphericalangle O_1 \equiv \sphericalangle O_3$ (fiind unghiuri opuse la vîrf), deci m($\sphericalangle O_3$) = 90°; apoi suplementul unghiului O_1 față de dreapta a este $\sphericalangle O_2$, adică m($\sphericalangle O_1$)+ + m($\sphericalangle O_2$) = 180°, și cum m($\sphericalangle O_1$) = 90°, rezultă că și m($\sphericalangle O_2$) = 90°. În fine, $\sphericalangle O_2 \equiv \sphericalangle O_4$, ca unghiuri opuse la vîrf și deci m($\sphericalangle O_4$) = 90°.

Definiție. Dacă la intersecția a două drepte concurente unul dintre unghiurile ce se formează în jurul punctului lor de intersecție este un unghi drept, atunci cele două drepte concurente se numesc drepte perpendiculare sau drepte ortogonale[2].

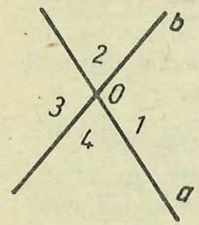


Fig. 90

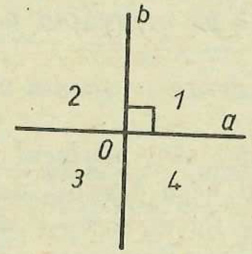


Fig. 91

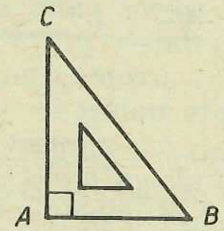


Fig. 92

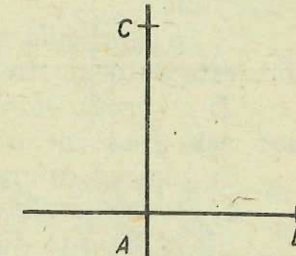


Fig. 93

În figura 91 am desenat și notat două drepte perpendiculare a și b (deci m($\sphericalangle ab$) = m($\sphericalangle O_1$) = 90°). Scriem $a \perp b$ (sau $b \perp a$) și citim: *dreptele a și b sînt două drepte perpendiculare*, sau *dreapta a este perpendiculară pe dreapta b* (și invers).

Dreptele perpendiculare se desenează, de exemplu, cu ajutorul unui instrument numit *echer*[3].

În figura 92 este reprezentat un echer pe care îl notăm ABC. Segmentele $[AB]$, $[BC]$ și $[CA]$ se mai numesc „laturile" echerului și sînt astfel construite încît m($\sphericalangle CAB$) = 90°.

Pentru a desena două drepte perpendiculare se așază echerul pe foaia de hîrtie și cu vîrful creionului parcurgem laturile $[AC]$ și $[AB]$ ale echerului, marcînd în prealabil punctele A, B, C. Urmele lăsate de creion pe foaia de hîrtie, apoi „prelungite", reprezintă două drepte AB și AC, perpendiculare între ele în punctul A. Desenăm ca în figura 93 și scriem: $AB \perp AC$ (sau $AC \perp AB$).

Drepte perpendiculare se pot desena și cu ajutorul raportorului, în felul următor: marcăm pe foaia de hîrtie trei puncte, și anume:

[1] Cuvîntul „*perpendicular*" vine din limba latină: *perpendiculum* = fir cu plumb.

[2] Cuvîntul „*ortogonal*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *orthos* = drept și *gonia* = unghi.

[3] Cuvîntul „*echer*" este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *ex* = de la, din și *quadrare* = a tăia în unghiuri drepte.

3*

centrul raportorului (notat, de exemplu, cu O) și două puncte în dreptul diviziunilor 0° și 90° ale raportorului (notate, de exemplu, cu A și B) (fig. 94,*a* și *b*); dreptele OA și OB sînt două drepte perpendiculare, deoarece m ($\sphericalangle AOB$) $= 90°$, și scriem: $OA \perp OB$ (sau $OB \perp OA$).

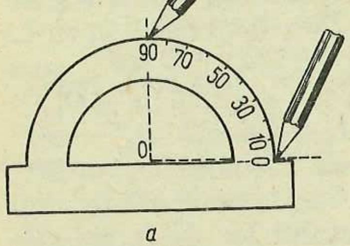


Fig. 94, *a*

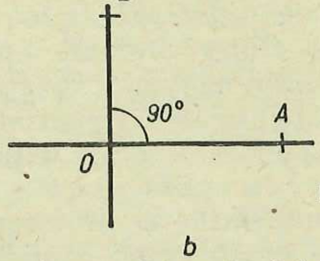


Fig. 94, *b*

Ne propunem să construim (desenăm) cu ajutorul riglei și al echerului:

1) *perpendiculara dintr-un punct dat pe o dreaptă dată* (punctul dat este exterior dreptei date);

2) *perpendiculara pe o dreaptă dată într-un punct dat al ei* (punctul dat este fixat pe dreapta dată);

3) *perpendiculara pe un segment dat, în mijlocul segmentului.*

1. *Perpendiculara dintr-un punct dat pe o dreaptă dată*

Fie a dreapta dată și M punctul exterior ei, dat ($M \notin a$), (fig. 95). Așezăm echerul astfel încît o latură a unghiului drept să treacă prin punctul M, iar cealaltă latură a unghiului drept să coincidă cu dreapta a (fig. 96); marcăm cu creionul pe dreapta a, în dreptul punctului A al echerului, un punct M'($M' \in a$), apoi, unind punctele M și M', punem în evidență dreapta MM' (fig. 97). Scriem: $MM' \perp a$ (sau $a \perp MM'$).

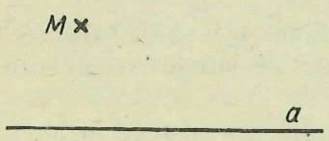


Fig. 95

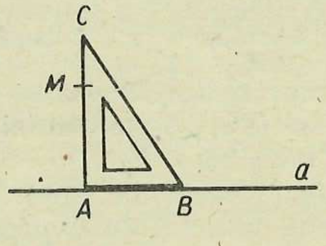


Fig. 96

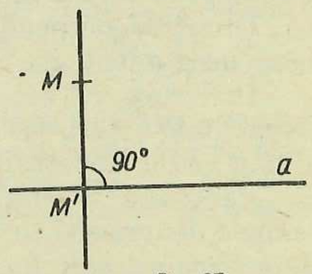


Fig. 97

În acest mod, *am construit cu echerul o perpendiculară (dreapta MM') din punctul dat, M, pe dreapta dată, a.* Punctul M', unde perpendiculara MM' intersectează dreapta dată a, se numește *piciorul perpendicularei duse din punctul M pe dreapta a.*

Această perpendiculară *este unică*, adică *dintr-un punct oarecare M, exterior unei drepte date a, se poate duce pe dreapta a o singură perpendiculară.* Distanța dintre punctele M și M' se numește *distanța de la punctul M la dreapta a.* Așadar, prin „distanța de la un punct la o dreaptă" vom înțelege *distanța dintre punctul considerat și piciorul perpendicularei din acel punct pe acea dreaptă.*

Observație. Pentru a ilustra grafic un punct M care se află la „distanța m" de o dreaptă d, trebuie să facem două desene, deoarece punctul M se poate găsi într-unul sau în celălalt dintre cele două semiplane determinate de dreapta d. Executăm un singur desen numai atunci cînd se precizează în ce semiplan determinat de dreapta d se află punctul M.

2. *Perpendiculara pe o dreaptă dată într-un punct dat al ei*

Fie a dreapta dată și N punctul dat, ($N \in a$) (fig. 98).

Așezăm echerul astfel încît o latură a unghiului drept al său să coincidă cu dreapta a, iar vîrful unghiului drept al echerului să coincidă cu punctul N (fig. 99).

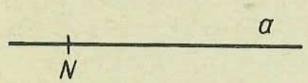


Fig. 98

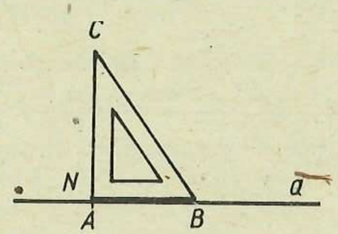


Fig. 99

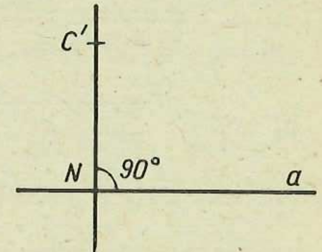


Fig. 100

Din punctul N, pe cealaltă latură a unghiului drept al echerului „trasăm" cu creionul dreapta perpendiculară pe care fixăm, de exemplu, un punct C' (fig. 100). Scriem: $C'N \perp a$ (sau $a \perp C'N$).

În această situație, spunem că am construit cu echerul o *perpendiculară ($C'N$) pe dreapta dată a, într-un punct dat al ei, N.*

Și în acest caz, dreapta perpendiculară $C'N$ este unică, în sensul că *prin punctul dat $N \in a$ există o singură perpendiculară pe dreapta a.*

În acest caz, piciorul perpendicularei este chiar punctul N; deci distanța de la N la dreapta a este măsura segmentului „nul", adică este egală cu „zero".

3. *Perpendiculara pe un segment dat, în mijlocul segmentului.*

Fie $[MN]$ segmentul dat și punctul A' mijlocul lui ($A' \in [MN]$ și $[MA'] \equiv [A'N]$), (fig. 101).

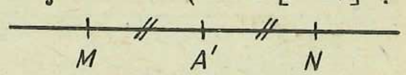


Fig. 101

Urmează să executăm o construcție cunoscută, și anume: în punctul $A' \in [MN]$ desenăm, cu ajutorul echerului, o perpendiculară pe dreapta MN. Notăm perpendiculara construită, de exemplu, cu xy (fig. 102). Scriem: 1) $xy \perp [MN]$ și 2) $[MA'] \equiv [A'N]$. Dreapta xy, astfel construită, se numește „mediatoarea[1] segmentului $[MN]$". Așadar, putem da următoarea definiție.

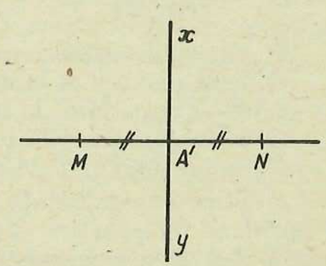


Fig. 102

[1] Cuvîntul *„mediatoare"* vine din limba latină: *mediator-oris* = mijlocitor, care este la mijloc.

Definiție. Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul segmentului.

Să reținem că un segment are o singură mediatoare.

Dacă două drepte care se intersectează nu sînt perpendiculare, atunci se spune că una este *oblică*[1] față de cealaltă. În figura 103 sînt pesenate perpendiculara și o oblică din punctul A la dreapta a.

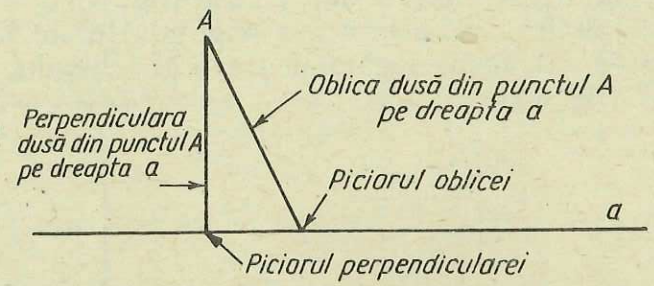


Fig. 103

9. Întrebări și exerciții

1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:

1) În jurul unui punct, considerat vîrf de unghiuri, se pot desena: a) cel mult sau b) cel puțin patru unghiuri adiacente două cîte două și fiecare cu măsura de cîte 90°.

2) Două drepte perpendiculare formează în jurul punctului de concurență patru unghiuri, dintre care: a) toate sînt ascuțite; b) toate sînt obtuze; c) toate sînt drepte; d) două sînt ascuțite și două sînt obtuze.

3) Printr-un punct exterior unei drepte, se poate duce pe acea dreaptă: a) o perpendiculară; b) o singură perpendiculară.

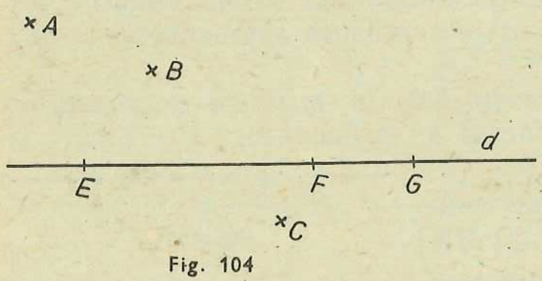


Fig. 104

2. Reproduceți în caietele voastre desenul din figura 104 și, folosind echerul, puneți în evidență pe desenul reprodus:

a) perpendicularele pe dreapta d din punctele A, B și C;

b) perpendicularele pe dreapta d în punctele, E, F și G.

3. Folosind același desen, indicați cu ajutorul echerului următoarele distanțe: a) de la punctul A la dreapta d; b) de la punctul B la dreapta d; c) de la punctul C la dreapta d; d) de la punctul E la dreapta d; e) de la punctul A la punctul B; f) de la punctul A la punctul E; g) de la punctul B la punctul C; h) de la punctul F la punctul G.

4. Știm că segmentul $[AB]$ are lungimea de 6 cm. Fie M mijlocul său, iar C un punct ce nu aparține dreptei AB. Dacă dreapta MC este perpendiculară pe dreapta AB, cum se numește dreapta MC? Ilustrați grafic această situație.

5. Folosind convențiile de desen și notații, ilustrați grafic:

1) Dreptele a și b perpendiculare între ele în punctul O.

[1] cuvîntul „*oblică*" vine din limba latină: *obliquus* = pieziș, înclinat.

2) Distanțele de la punctele A și B $(A \neq B)$ la dreapta c, care sînt de 4 cm și: a) punctele A și B sînt de o parte și de alta a dreptei c; b) punctele A și B sînt în același semiplan.

3) Distanța de la punctul A la dreapta d, de: a) $AA' = 3$ cm; b) $AA' = 4$ cm; c) $AA' = 0$ cm.

4) Distanțele de la punctele A și B $(A \neq B)$ la dreapta a care sînt de 5 cm și dreapta AB este perpendiculară pe dreapta a $(AB \perp a)$.

6. Două unghiuri sînt adiacente și complementare. Cîte grade are unghiul care se obține dacă se adună: a) jumătățile lor; b) cîte o treime din fiecare; c) dublul primului unghi cu dublul unghiului al doilea.

7. Două unghiuri sînt adiacente și suplementare. Cîte grade are unghiul care se obține dacă se adună: a) jumătățile lor; b) cîte o treime din fiecare.

8. Să se deseneze, cu ajutorul raportorului, un unghi a cărui măsură să fie de 30° și apoi să se construiască, folosind numai rigla și echerul: a) complementul lui; b) suplementul lui.

9. Să se repete construcțiile cerute la problema precedentă în cazul unghiurilor care au măsurile de 40° și respectiv de 70°.

10. Să se deseneze un unghi oarecare AOB. Semidreptele $[OA'$ și $[OB'$ sînt opusele semidreptelor $[OA$ și respectiv $[OB$. Se notează $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle X)$; $m(\sphericalangle AOB') = m(\sphericalangle Y)$; $m(\sphericalangle BOA') = m(\sphericalangle Z)$.

Ce relație există între unghiurile X și Y; între unghiurile X și Z; între unghiurile Y și Z?

11. În figura 105, punctele A, O și D sînt colineare. Cunoscînd că $m(\sphericalangle AOB) = 40°$ și că $[OB \perp [OC$, să se calculeze $m(\sphericalangle COD)$.

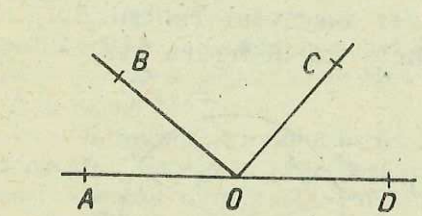


Fig. 105

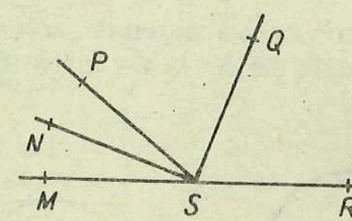


Fig. 106

12. În figura 106, punctele M, S și R sînt colineare. Dacă semidreptele $[SN$ și $[SQ$ sînt bisectoarele unghiurilor MSP și PSR și $m(\sphericalangle MSN) = 20°$, să se calculeze: a) $m(\sphericalangle PSR)$; b) $m(\sphericalangle NSQ)$. Cum sînt semidreptele $[SN$ și $[SQ$ una față de cealaltă?

13. În figura 107, punctele A, O și E sînt colineare. Dacă semidreapta $[OC$ este bisectoarea unghiului BOD, $m(\sphericalangle EOD) = 20°$ și $m(\sphericalangle DOB) = 60°$, să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB și BOC.

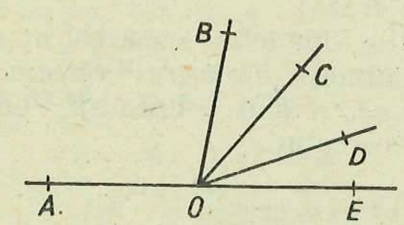


Fig. 107

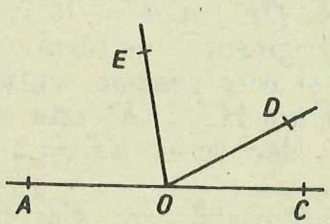


Fig. 108

14. În figura 108, punctele A, O și C sînt colineare, $m(\sphericalangle EOD) = 70°$ și $m(\sphericalangle DOC) = 30°$. Un punct B este în același semiplan cu D și E față de dreapta AC. Calculați $m(\sphericalangle EOB)$; dacă $m(\sphericalangle BOC)$ este de: a) 80°; b) 40°; c) 100°; d) 125°. Cărui interior de unghi aparține punctul B, în fiecare caz în parte?

18. CERCUL[1]

D e f i n i ț i e. Figura geometrică alcătuită din toate punctele din plan care sînt la aceeași distanță de un punct fix, numit centru[2], se numește cerc.

Se numește *rază*[3] a cercului segmentul care unește centrul cercului cu un punct oarecare al figurii geometrice. Prin „*rază*" mai înțelegem și lungimea acestui segment.

Instrumentul cu ajutorul căruia desenăm cercuri se numește *compas*[4] (fig. 109).

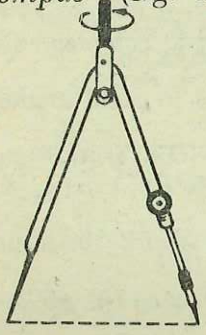


Fig. 109

Cum desenăm un cerc? Însemnăm pe foaia de hîrtie un punct, de exemplu, punctul O (el va fi punctul fix — centrul). Fixăm piciorul cu ac al compasului în punctul O și dăm compasului o mișcare de „rotație". Creionul compasului va descrie figura geometrică numită „*cerc*" (fig. 110). Trebuie să avem grijă ca figura construită „să se închidă", altfel nu am desena toate punctele cercului. Figura 111, de exemplu, nu reprezintă un cerc, deoarece nu au fost desenate toate punctele cercului.

După ce s-a desenat „corect" un cerc și s-a notat centrul lui, se pot desena pe foaia de hîrtie diferite puncte, ca în figura 112.

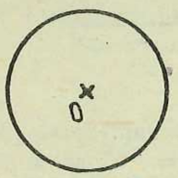


Fig. 110

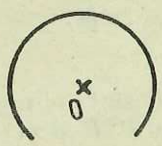


Fig. 111

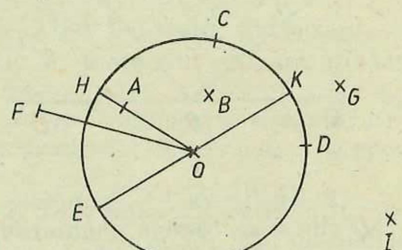


Fig. 112

Despre punctele E, H, C, K, D obișnuim să spunem că „aparțin cercului". Lungimile segmentelor $[OE]$, $[OH]$, $[OC]$, $[OK]$, $[OD]$ sînt egale între ele și egale cu raza cercului desenat. Scriem aceasta astfel: $OE = OH = OC = OK = OD = r$ (raza).

Segmentul ale cărui extremități sînt două puncte ce aparțin unui cerc și care conține centrul cercului se numește *diametrul*[5] *cercului*. În figura 112, $[EK]$ este un diametru (E, O, K sînt colineare). Vom putea deci scrie: $EK = 2 \cdot r$ (r fiind raza cercului).

[1] Cuvîntul „*cerc*" vine din limba latină: *circus* = cerc.
[2] Cuvîntul „*centru*" vine din limba latină: *centrum* = centru.
[3] Cuvîntul „*rază*" vine din limba latină: *radius* = spiță.
[4] Cuvîntul „*compas*" este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *com* = cu și *passus* = pas, deschidere.
[5] Cuvîntul „*diametru*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *dia* = prin și *metron* = măsură.

Despre punctele A, B obișnuim să spunem că aparțin „interiorului cercului". Se observă că lungimea segmentului $[OA]$ cît și lungimea segmentului $[OB]$ sînt mai mici decît raza cercului desenat. Scriem aceasta astfel: $OA < r$, $OB < r$.

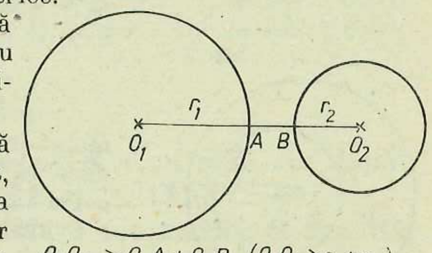
Despre punctele F, G, I obișnuim să spunem că aparțin „exteriorului cercului". În acest caz, observăm că lungimile segmentelor $[OF]$, $[OG]$, $[OI]$ sînt mai mari decît raza cercului desenat. Scriem aceasta astfel: $OF > r$, $OG > r$, $OI > r$.

Să presupunem că desenăm „două" cercuri, cu centrele în punctele O_1 și O_2, care au razele de „lungimi" diferite. Cercul de centru O_1 — de exemplu — să aibă raza r_1 mai mare decît raza r_2 a cercului de centru O_2 ($r_1 > r_2$).

Sînt posibile următoarele situații geometrice.

a) Cercurile desenate să nu aibă nici un punct comun și nici interioarele celor dou cercuri să nu aibă puncte comune, ca în figura 113.

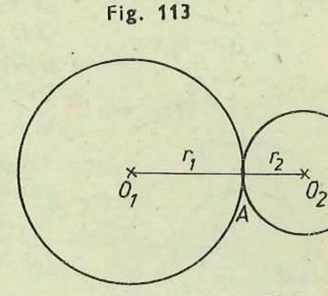
Despre astfel de cercuri obișnuim să spunem că sînt fiecare în exteriorul celuilalt, sau „cercuri exterioare". Se observă că distanța dintre centrele O_1 și O_2, care se numește chiar „distanța centrelor", este mai mare decît suma razelor, adică: $O_1O_2 > O_1A + O_2B$ (unde $O_1A = r_1$ și $O_2B = r_2$), sau $O_1O_2 > r_1 + r_2$.



$O_1O_2 > O_1A + O_2B$ $(O_1O_2 > r_1 + r_2)$
Fig. 113

b) Cercurile desenate să aibă un singur punct comun, de exemplu punctul A, iar interioarele celor două cercuri să nu aibă puncte comune, ca în figura 114.

Obișnuim să numim astfel de cercuri cercuri tangente[1] fiecare în exteriorul celuilalt sau „cercuri tangente exterioare". Punctul A se numește „punct de tangență". Se observă că distanța centrelor O_1O_2 este egală cu suma razelor, adică: $O_1O_2 = O_1A + O_2A$ (unde $O_1A = r_1$ și $O_2A = r_2$), sau $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

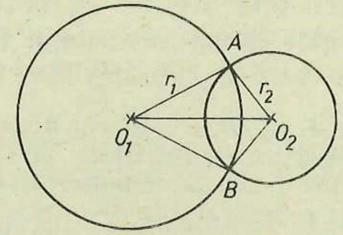


$O_1O_2 = O_1A + O_2A$
$(O_1O_2 = r_1 + r_2)$
Fig. 114

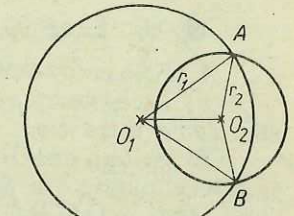
c) Cercurile desenate să aibă două puncte diferite comune, de exemplu A și B ($A \neq B$) și să existe puncte interioare comune celor două cercuri, ca în figura 115 sau în figura 116.

Astfel de cercuri obișnuim să le numim „cercuri secante"[2].

Observăm că distanța centrelor O_1O_2 este mai mică decît suma razelor, adică: $O_1O_2 < O_1A + O_2A$ (sau $O_1O_2 < O_1B + O_2B$), unde $O_1A = O_1B = r_1$ și $O_2A = O_2B = r_2$.



$O_1O_2 < O_1A + O_2A = O_1B + O_2B$
$O_1O_2 > O_1A - O_2A = O_1B - O_2B$
$(r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2)$
Fig. 115



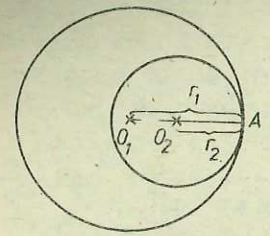
$O_1O_2 < O_1A + O_2A = O_1B + O_2B$
și
$O_1O_2 > O_1A - O_2A = O_1B - O_2B$
$(r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2)$
Fig. 116

[1] Cuvîntul „*tangent*" vine din limba latină: *tangere* = a atinge.
[2] Cuvîntul „*secant*" vine din limba latină: *secare* = a tăia.

De asemenea, observăm că distanța centrelor este mai mare decît diferența razelor, adică: $O_1O_2 > O_1A - O_2A$ (sau $O_1O_2 > O_1B - O_2B$).

Cele de mai sus pot fi rezumate astfel:

$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2.$$



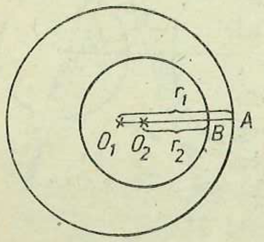
$O_1O_2 = O_1A - O_2A$

$(O_1O_2 = r_1 - r_2)$

Fig. 117

d) Cercurile desenate să aibă un singur punct comun, de exemplu punctul A și toate punctele interioare cercului cu rază mai mică să aparțină interiorului cercului cu raza mai mare, ca în figura 117.

Convenim să numim astfel de cercuri cercuri tangente, unul în interiorul celuilalt sau „cercuri tangente interioare". Punctul A se numește „punct de tangență". Observăm că distanța centrelor O_1O_2 este egală, în acest caz, cu diferența dintre cele două raze, adică: $O_1O_2 = O_1A - O_2A$, (unde $O_1A = r_1$ și $O_2A = r_2$), sau $O_1O_2 = r_1 - r_2$.



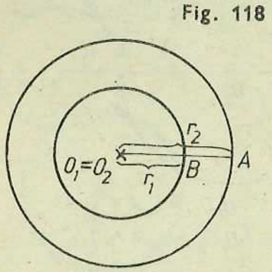
$O_1O_2 < O_1A - O_2B$

$(O_1O_2 < r_1 - r_2)$

Fig. 118

e) Cercurile desenate să nu aibă nici un punct comun, dar toate punctele interioare cercului cu rază mai mică să aparțină interiorului cercului cu rază mai mare, ca în figura 118.

Numim astfel de cercuri cercuri, unul în interiorul celuilalt sau „cercuri interioare". Se observă că distanța centrelor este mai mică decît diferența razelor, adică $O_1O_2 < O_1A - O_2B$ (unde $O_1A = r_1$ și $O_2B = r_2$), sau $O_1O_2 < r_1 - r_2$.



$O_1O_2 = 0$ Fig. 119

f) Cercurile desenate să nu aibă nici un punct comun, dar toate punctele interioare cercului de rază mai mică să aparțină interiorului cercului de rază mai mare, iar centrele O_1 și O_2 să fie puncte „identice", $(O_1 = O_2)$, ca în figura 119.

În acest caz cercurile se numesc „cercuri concentrice"[1], iar distanța centrelor O_1 și O_2 este egală cu zero $(O_1O_2 = 0)$.

10. Exerciții

1. Folosind convențiile de desen și notații, ilustrați grafic:

a) Zece puncte: $A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}$, știind că distanțele lor la un punct fix B sînt egale între ele.

b) Se dau punctele A, A', B, B' (diferite două cîte două); știind că sînt îndeplinite simultan (în același timp); condițiile: $AA' \perp BB'$, $AA' \cap BB' = \{O\}$ și $OA = OA' = OB = OB' = 3$ cm. Cum putem fixa pe această figură încă două puncte C și D, diferite de primele și diferite între ele, dacă $OC = OD$?

2. Fie O centrul unui cerc. Segmentul $[OA]$ este o rază a acestui cerc ($OA = 3$ cm). Desenați cercul de centru O și rază OA, precum și punctele A, B și C $(A \neq B \neq C)$ în următoarele situații: a) Punctele A, O, B sînt colineare, $OA = OB = OC$ și $OC \perp AB$. b) $OA = OB$, $OA \perp OB, OC = 2$ cm și punctul C aparține exteriorului unghiului AOB. c) $OA = OB$, m $(\sphericalangle AOB) = 60°$, $OC = 4$ cm și punctul C aparține interiorului unghiului AOB.

[1] cuvîntul „*concentrice*" este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *con* = cu, împreună și *centrum* = centru.

3. Știind că $O_1O_2 = 4$ cm, ilustrați grafic și apoi numiți cercurile care au centrele în punctele O_1 și O_2 și au razele r_1 și respectiv r_2 egale cu: a) $r_1 = 2$ cm; $r_2 = 1{,}5$ cm; b) $r_1 = 1{,}5$ cm; $r_2 = 3{,}5$ cm; c) $r_1 = 2{,}5$ cm; $r_2 = 1{,}5$ cm; d) $r_1 = 5$ cm; $r_2 = 1$ cm; e) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 1$ cm.

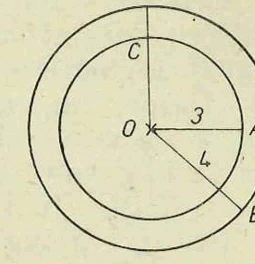


Fig. 120

4. În figura 120 cercurile sînt concentrice. Determinați lungimea segmentului $[CD]$ (punctele O, C, D sînt colineare), dacă raza $OA = 3$ cm și raza $OB = 4$ cm.

5. Notăm centrele a două cercuri cu A și B, razele lor (în această ordine) sînt $r_1 = 2$ cm și $r_2 = 3$ cm. Desenați aceste cercuri dacă ele sînt: a) cercuri exterioare; b) cercuri tangente exterioare (notați punctul de tangență cu C); c) cercuri secante (notați punctele comune cu C și D); d) cercuri tangente interioare (notați punctul de tangență cu C); e) cercuri interioare; f) cercuri concentrice.

19. TRIUNGHIUL[1]

Să considerăm trei puncte necolineare A, B, C. Două cîte două, aceste puncte determină segmentele $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.

D e f i n i ț i e. Se numește triunghi o figură geometrică ce rezultă dintr-o reuniune ca $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$, unde A, B, C sînt puncte necolineare.

În figura 121 este desenat un *triunghi*, notat ABC.

S-a convenit ca semnul „$\triangle$" să fie citit „triunghi". Deci notația „$\triangle ABC$" se citește: „triunghiul ABC".

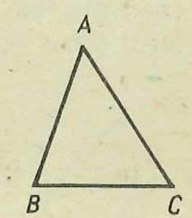


Fig. 121

Elementele „cele mai importante" atașate unui triunghi ABC sînt segmentele $[AB]$, $[BC]$ și $[CA]$, care se numesc *laturile triunghiului* și unghiurile BAC, ABC și ACB (numite, pe scurt și $\sphericalangle A, \sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$), care se numesc *unghiurile triunghiului*. Observăm că, spre deosebire de laturile unui unghi care sînt semidrepte, laturile unui triunghi sînt segmente; deci cuvîntul „latură", luat izolat, n-are nici un sens în geometrie.

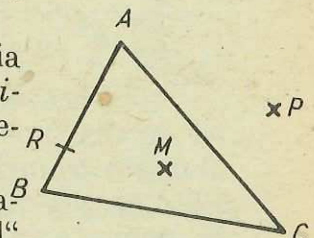


Fig. 122

Despre un punct care aparține interiorului fiecăruia dintre unghiurile unui triunghi spunem că este în „*interiorul*" *triunghiului*. În figura 122, punctul M este în interiorul $\triangle ABC$.

Un punct este în „*exteriorul*" *triunghiului* dacă aparține planului acestuia, dar nu este nici „în interiorul" lui și nici nu aparține vreuneia dintre laturile sale. În aceeași figură 122, punctul P este în exteriorul $\triangle ABC$, iar punctul R aparține laturii $[AB]$, deci triunghiului ABC.

Spunem că $\sphericalangle ABC$ *se „opune" laturii* $[AC]$ și invers: *latura* $[AC]$ *se „opune"* $\sphericalangle ABC$... etc.

[1] Cuvîntul „*triunghi*" este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *tri* = (cu) trei și *angulus* = unghi.

O latură a unui triunghi se numește „alăturată" unghiurilor ale căror vîrfuri sînt în capetele sale. În figura 122, latura $[BC]$ este „alăturată" unghiurilor B și C.

Despre un unghi al unui triunghi se spune că este „cuprins" între acele laturi ale triunghiului care, ca segmente, sînt incluse în laturile unghiului. De exemplu, în figura 122 *$\sphericalangle C$ este cuprins între laturile $[CB]$ și $[CA]$*.

Oricărui triunghi îi corespund deci *șase elemente*, care uneori sînt exprimate în numere (lungimile laturilor sale și măsurile unghiurilor sale).

Pentru lungimile laturilor unui triunghi s-a mai convenit și următoarea notație: latura $[BC]$, care se opune unghiului A, să se noteze cu „a", latura $[CA]$, care se opune unghiului B, să se noteze cu „b" și latura $[AB]$, care se opune unghiului C, să se noteze cu „c".

Suma lungimilor laturilor $\triangle ABC$, adică: $BC + CA + AB = a + b + c$ se numește *perimetrul*[1] $\triangle ABC$. Obișnuim să notăm perimetrul și astfel: $2p = a + b + c$, deci p este semiperimetrul: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Triunghiurile pot fi clasificate după măsurile unghiurilor lor, astfel:

a) Dacă un triunghi are toate unghiurile ascuțite (cu măsurile mai mici de 90°), el se numește *triunghi ascuțitunghic*. Îl desenăm, de exemplu, ca în figura 123,*a* și scriem: $m(\sphericalangle A) < 90°$, $m(\sphericalangle B) < 90°$, $m(\sphericalangle C) < 90°$;

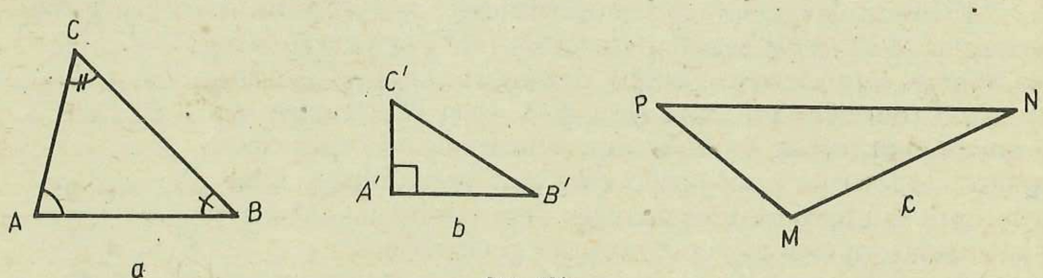


Fig. 123

b) Dacă un triunghi are un unghi drept — cu măsura de 90° — (el nu mai poate avea încă un unghi drept sau un unghi obtuz) se numește *triunghi dreptunghic*. Îl desenăm, de exemplu, ca în figura 123,*b* și scriem: $m(\sphericalangle A') = 90°$. (Latura care se opune unghiului drept se numește *ipotenuză*[2], iar celelalte două se numesc *catete*[3].)

c) Dacă un triunghi are un unghi obtuz, (el nu mai poate avea încă un alt unghi obtuz sau unghi drept) se numește *triunghi obtuzunghic*, ca de exemplu cel din figura 123,*c*, și scriem: $m(\sphericalangle M) > 90°$.

---

[1] Cuvîntul „*perimetru*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *peri* = împrejur și *metron* = măsură.

[2] Cuvîntul „*ipotenuză*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *hypo* = dedesubt și *teincin* = a întinde.

[3] Cuvîntul „*catetă*" provine din limba greacă: *kathetos* = perpendiculară.

Triunghiurile mai pot purta și alte denumiri, după lungimile comparative ale laturilor lor, fără ca aceasta să constituie un criteriu[1] de clasificare.

a) Dacă un triunghi are laturile de lungimi diferite, el se numește *triunghi oarecare* sau *triunghi scalen*[2]. Îl desenăm ca în figura 124; dacă dorim, marcăm cu un număr diferit de liniuțe laturile lui, deoarece acestea nu sînt congruente și scriem: $[AB] \not\equiv [BC]$, $[BC] \not\equiv [CA]$ și $[CA] \not\equiv [AB]$.

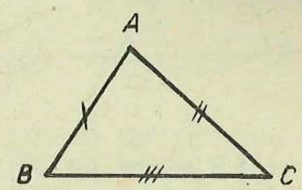


Fig. 124

b) Dacă un triunghi are două laturi congruente (cu aceeași lungime), el se numește *triunghi isoscel*[3]. Îl desenăm ca în figura 125 și, dacă dorim, marcăm cu același număr de liniuțe laturile congruente și scriem: $[AB] \equiv [AC]$, respectiv $[MN] \equiv [MP]$. S-a convenit ca latura necongruentă ($[BC]$, respectiv $[NP]$) să se numească *baza*[4] *triunghiului isoscel*, iar vîrful unghiului opus bazei să se numească *vîrful triunghiului isoscel* (punctul A, respectiv M).

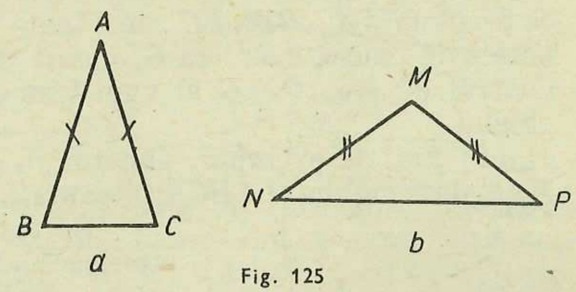


Fig. 125

c) Dacă un triunghi are toate laturile congruente (cu aceeași lungime) el se numește *triunghi echilateral*[5]. Îl desenăm ca în figura 126, și, de asemenea, dacă dorim, marcăm cu același număr de liniuțe laturile și scriem: $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$.

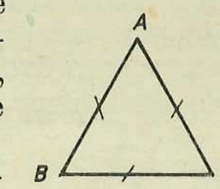


Fig. 126

Observăm că triunghiul echilateral este un „triunghi isoscel particular", deci mulțimea triunghiurilor echilaterale este inclusă în mulțimea triunghiurilor isoscele.

20. LINIILE IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

Într-un triunghi, în afară de „elementele cele mai importante" (laturile și unghiurile), mai sînt și alte „elemente" ale sale, pe care le menționăm:

---

[1] Cuvîntul „*criteriu*" vine din limba greacă: *kriteryon* = mijloc de recunoaștere, punct de vedere, apreciere, principiu după care se face o anumită clasificare.

[2] Cuvîntul „*scalen*" vine din limba greacă: *skalenos* = șchiop.

[3] Cuvîntul „*isoscel*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *isos* = egal și *schelos* = picior.

[4] Cuvîntul „*bază*" vine din limba latină: *basis* = sprijin, bază.

[5] Cuvîntul „*echilateral*" este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *aequus* = egal și *latus-eris* = latură.

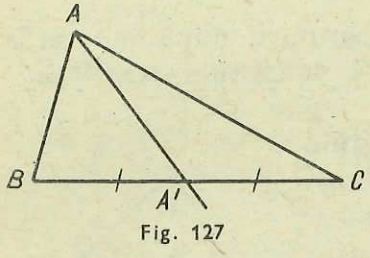


Fig. 127

1) Fie, de exemplu, punctul A' mijlocul laturii $[BC]$, în triunghiul ABC ($[BA'] \equiv [A'C]$, fig. 127).

Segmentul cu extremitățile A și A' (vîrful triunghiului și mijlocul laturii opuse) se numește *mediana*[1)] corespunzătoare laturii $[BC]$. Faptul că, în triunghiul ABC, $[AA']$ este mediană, se poate scrie: $A' \in (BC)$ și $[BA'] \equiv [A'C]$. Uneori prin mediană înțelegem dreapta AA', alteori semidreapta $[AA'$. Se obișnuiește ca punctul A' să se numească „piciorul medianei“ corespunzătoare laturii $[BC]$.

Cînd privim mediana ca segment, putem vorbi de „lungimea medianei“. Lungimea medianei se notează, de obicei, cu litera m ($m_a = AA'$, m_a fiind lungimea medianei corespunzătoare laturii de lungime a).

Să reținem că un triunghi are trei mediane: $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ și că dreptele AA', BB', CC' sînt, toate trei, concurente în același punct, notat, de obicei, cu litera G, numit *centrul de greutate al triunghiului*. Centrul de greutate G al unui triunghi este un punct interior triunghiului.

2) Fie, de exemplu, punctul A_1 intersecția bisectoarei unghiului BAC al triunghiului ABC cu dreapta BC ($\sphericalangle BAA_1 \equiv \sphericalangle A_1AC$, fig. 128).

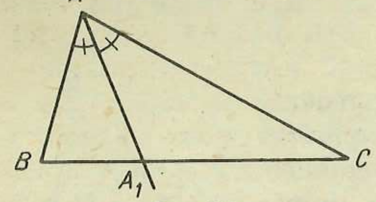


Fig. 128

Se spune că $[AA_1]$ este o bisectoare interioară a triunghiului ABC (cea corespunzătoare unghiului A). Uneori prin bisectoarea interioară a triunghiului înțelegem bisectoarea unghiului respectiv al triunghiului. Faptul că, în triunghiul ABC, $[AA_1]$ este bisectoare, se poate scrie: $A_1 \in (BC)$ și $\sphericalangle BAA_1 \equiv \sphericalangle A_1AC$.

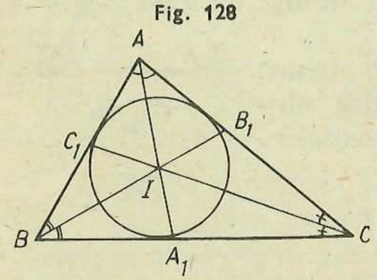


Fig. 129

Cînd privim bisectoarea ca segment, putem vorbi de „lungimea bisectoarei“. Lungimea bisectoarei interioare se notează, de obicei cu litera l ($l_a = AA_1$, l_a fiind lungimea bisectoarei interioare corespunzătoare unghiului A). În acest caz, se obișnuiește ca punctul A_1 să se numească „piciorul bisectoarei“ corespunzătoare vîrfului A. Faptul că, în triunghiul ABC, $[AA_1]$ este bisectoarea unghiului BAC se poate scrie: $A_1 \in (BC)$ și $\sphericalangle BAA_1 \equiv \sphericalangle CAA_1$.

Să reținem că un triunghi are trei bisectoare interioare: $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, incluse în bisectoarele unghiurilor respective și că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt, toate trei, concurente în același punct, notat, de obicei, cu litera I, care este „*centrul cercului înscris* în triunghiul ABC“. Centrul cercului înscris (I) al unui triunghi este un punct în interiorul triunghiului (fig. 129).

[1)] Cuvîntul „*mediană*“ vine din limba latină: *medianus* = de mijloc.

3) Fie, de exemplu, punctul A_2 intersecția perpendicularei din vîrful A al triunghiului ABC cu dreapta BC ($AA_2 \perp BC$, fig. 130).

Segmentul cu extremitățile A și A_2 se numește *înălțimea*[1)] din A a triunghiului ABC. Se obișnuiește ca punctul A_2 să se numească „piciorul înălțimii“ din A. Uneori prin înălțime înțelegem dreapta AA_2. Faptul că, în triunghiul ABC, $[AA_2]$ este înălțime, se poate scrie: $A_2 \in BC$ și $AA_2 \perp BC$.

Cînd privim înălțimea ca segment, putem vorbi de „lungimea înălțimii“. Lungimea înălțimii se notează, de obicei cu litera h ($h_a = AA_2$, h_a fiind lungimea înălțimii din vîrful A).

Să reținem că un triunghi are trei înălțimi: $[AA_2]$, $[BB_2]$, $[CC_2]$ și că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sînt, toate trei, concurente în același punct notat, de obicei, cu litera H (numit *ortocentru*[2)], deoarece prin el trec înălțimile care sînt ortogonale în raport cu laturile).

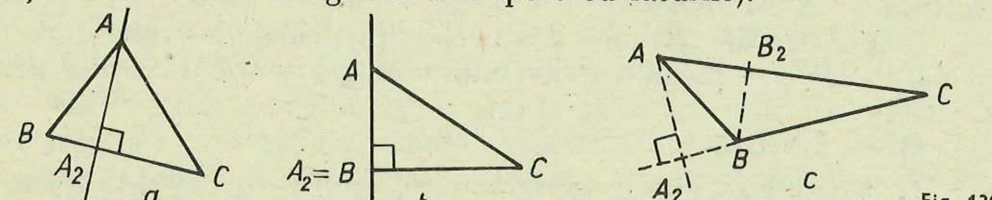


Fig. 130

În figura 130,*a*, triunghiul ABC este ascuțitunghic. Picioarele înălțimilor din A, B, C pe laturile opuse sînt puncte interioare laturilor triunghiului ($A_2 \in (BC)$, $B_2 \in (CA)$ și $C_2 \in (AB)$). Ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic este un punct interior triunghiului.

În figura 130, *b*, triunghiul ABC este dreptunghic în B ($m(\sphericalangle B) = 90°$). Picioarele înălțimilor din A și C pe laturile opuse coincid cu punctul B; piciorul înălțimii din B pe AC este un punct interior laturii (AC), ($B_2 \in (AC)$). Ortocentrul unui triunghi dreptunghic este chiar vîrful unghiului drept.

În figura 130, *c*, triunghiul ABC este obtuzunghic în B($m(\sphericalangle B) > 90°$). Piciorul înălțimii din A (punctul A_2) și al înălțimii din C (punctul C_2) nu sînt puncte interioare laturii $[BC]$ și respectiv $[AB]$. Piciorul înălțimii duse din B (punctul B_2) este un punct interior segmentului (AC), ($B_2 \in (AC)$). Ortocentrul H al unui triunghi obtuzunghic este un punct exterior triunghiului.

4) Dacă în $\triangle ABC$ punctul A' este mijlocul segmentului $[BC]$ ($[BA'] \equiv [A'C]$) și construim în punctul A' dreapta xy perpendiculară pe dreapta BC ($xy \perp BC$) (fig. 131), spunem că dreapta xy este mediatoarea laturii $[BC]$. Faptul că, în $\triangle ABC$, xy este mediatoarea corespunzătoare laturii $[BC]$ se poate scrie: $A' \in (BC)$ și $[BA'] \equiv [A'C]$ și $xy \perp BC$.

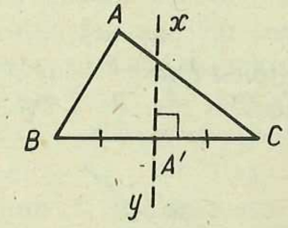


Fig. 131

[1)] Cuvîntul „*înălțime*“ vine din limba latină: *in-altum* = înalt, adînc.

[2)] Cuvîntul „*ortocentru*“ este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *orthos* = drept și *kentron* = centru.

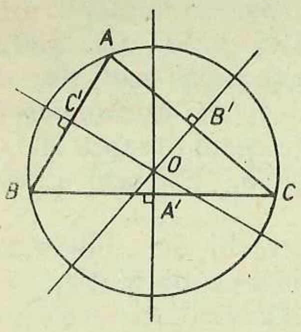


Fig. 132

Să reținem că un triunghi are trei mediatoare și că ele sînt toate trei concurente în același punct notat cu litera O, care este „centrul cercului circumscris" triunghiului (fig. 132). Punctul de concurență (intersecție) a mediatoarelor este un punct: a) interior triunghiului, în cazul triunghiurilor ascuțitunghice; b) situat pe cea mai mare dintre laturile lui, în cazul triunghiurilor dreptunghice; c) exterior triunghiului, în cazul triunghiurilor obtuzunghice.

Așadar, un triunghi are „trei mediane", „trei înălțimi", „trei bisectoare" și „trei mediatoare". Acestea se numesc *linii (drepte) importante în triunghi.*

Demonstrațiile privind concurența medianelor, a bisectoarelor, a înălțimilor și a mediatoarelor unui triunghi se vor face mai tîrziu.

● 11. Exerciții

1. Marcînd segmentele congruente cu ajutorul liniuțelor, desenați triunghiurile: a) MNP isoscel ($[MN] \equiv [NP]$); b) $M'N'P'$ echilateral; c) $M_1N_1P_1$ oarecare. (Cum marcăm faptul că laturile acestui triunghi sînt de lungimi diferite?)

2. Desenați în $\triangle ABC$ mediana din vîrful A, în cazul cînd $\triangle ABC$ este: a) ascuțitunghic; b) dreptunghic în A; c) obtuzunghic ($m(\measuredangle A) > 90°$).

3. Desenați în $\triangle A'B'C'$ înălțimea din vîrful A', în cazul cînd $\triangle A'B'C'$ este: a) ascuțitunghic; b) dreptunghic în B'; c) obtuzunghic ($m(\measuredangle B') > 90°$).

4. Desenați în $\triangle A_1B_1C_1$ bisectoarea unghiului A_1, în cazul cînd $\triangle A_1B_1C_1$ este: a) ascuțitunghic; b) dreptunghic în A_1; c) obtuzunghic ($m(\measuredangle A_1) > 90°$).

5. Desenați în $\triangle MNP$ mediatoarea corespunzătoare laturii $[NP]$, în cazul cînd $\triangle MNP$ este: a) ascuțitunghic; b) dreptunghic în M; c) obtuzunghic ($m(\measuredangle M) > 90°$).

6. Desenați în $\triangle$ obtuzunghic MNP ($m(\measuredangle M) > 90°$): a) înălțimile din vîrfurile P și N și notați punctul lor de intersecție; b) mediatoarele laturilor $[MP]$ și $[MN]$ și notați punctul lor de intersecție.

7. Desenați în triunghiul dreptunghic ABC ($m(\measuredangle A) = 90°$):
a) înălțimile din B și C și notați punctul lor de intersecție; b) mediatoarele laturilor $[AB]$ și $[AC]$ și notați punctul lor de intersecție.

21. CONSTRUCȚIA TRIUNGHIURILOR

a) Ne punem acum problema *să construim un triunghi care are măsura unghiului A de 40°, lungimea laturii AB de 4 cm* și *lungimea laturii AC de 3 cm.*

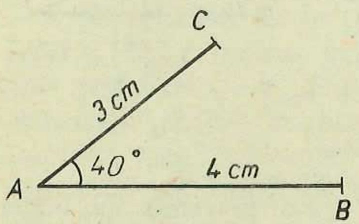


Fig. 133

Desenăm pentru aceasta un unghi de 40°, notăm cu A vîrful lui și așezăm pe laturile sale segmentele $[AB]$ de lungime 4 cm și $[AC]$ de lungime 3 cm (fig. 133).

Construcția triunghiului cerut s-a terminat, deoarece am reușit să fixăm vîrfurile triunghiului. Dacă s-ar cere ca triunghiul nostru să aibă, în plus, unghiul din B de 100° și am construi semidreapta respectivă cu originea în B, în același semiplan cu C determinat de dreapta AB, am avea toate șansele ca această semidreaptă să nu treacă prin C și deci ca un astfel de triunghi să nu poată exista (fig. 134).

b) Să considerăm acum o altă *problemă de construcție a unui triunghi ABC avînd lungimea laturii AB de 4 cm, măsura unghiului A de 30° și cea a unghiului B de 50°.*

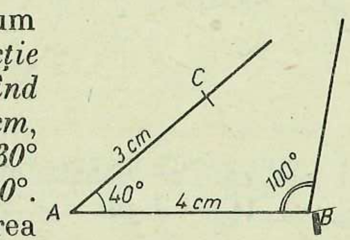


Fig. 134

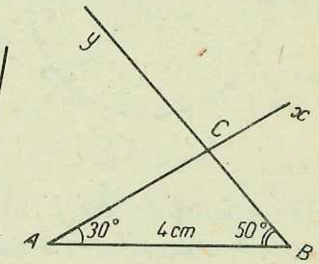


Fig. 135

Luăm, pentru rezolvarea ei, un segment $[AB]$ cu lungimea de 4 cm și construim, cu ajutorul raportorului, semidreptele $[Ax$ și $[By$, situate de aceeași parte a dreptei AB, care să formeze unghiurile $m(\measuredangle BAx) = 30°$ și $m(\measuredangle ABy) = 50°$ (fig. 135).

Vîrful C al triunghiului va trebui să se găsească la intersecția semidreptelor $[Ax$ și $[By$. Odată determinat punctul C, construcția triunghiului dorit este terminată, deoarece am reușit să fixăm vîrfurile triunghiului, iar elementele rămase — lungimile laturilor $[AC]$, $[BC]$ și măsura unghiului C — rezultă, determinate prin construcție.

În legătură cu o problemă de acest tip putem avea „surpriza" ca semidreptele $[Ax$ și $[By$ să nu se intersecteze și, deci, ca triunghiul ABC căutat să nu existe. De exemplu, dacă ni s-ar cere ca $[AB]$ să aibă lungimea tot de 4 cm, dar măsurile unghiurilor A și B să fie de 100°, respectiv 120°, (fig. 136).

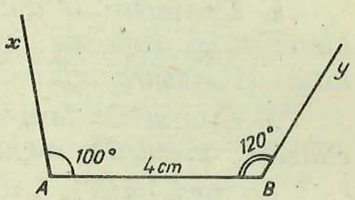


Fig. 136

c) În sfîrșit, să considerăm o a treia problemă: *Să se construiască un triunghi ABC astfel încît lungimile laturilor sale [AB], [BC], [CA] să fie de 2 cm, 1,5 cm și 2,5 cm.*

Desenăm un segment $[AB]$ cu lungimea de 2 cm și construim, cu ajutorul compasului, un cerc care să aibă centrul în punctul A și raza de 2,5 cm (toate punctele ce aparțin acestui cerc sînt „depărtate" de A la 2,5 cm); construim apoi un alt cerc care să aibă centrul în punctul B și raza de 1,5 cm (toate punctele ce aparțin acestui cerc sînt „depărtate" de B la 1,5 cm). Cum cel de-al treilea vîrf al triunghiului (punctul C) trebuie să se „găsească" la o distanță de 2,5 cm de punctul A și la 1,5 cm de punctul B, înseamnă că el trebuie să aparțină ambelor cercuri (fig. 137).

Se observă că cercurile au două puncte comune (C și C'), rezultă că problema are două soluții. Putem considera problema rezolvată, deoarece am reușit să fixăm vîrfurile triunghiului.

Și la o astfel de problemă putem avea „surpriza" să nu existe soluție, deoarece cele două cercuri pot să nu se intersecteze.

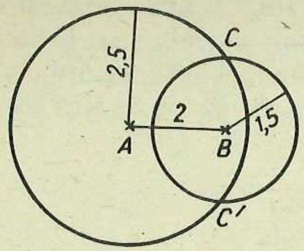


Fig. 137

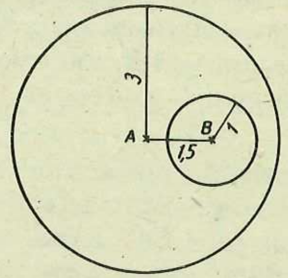


Fig. 138

De exemplu, dacă ni s-ar cere să construim un triunghi cu: $AB = 1,5$ cm, $BC = 1$ cm și $AC = 3$ cm (fig. 138).

Construcțiile examinate mai sus ne conduc la a ne pune următoarele probleme:

1. *Ce relații de mărime trebuie să existe între trei numere pentru ca ele să poată reprezenta lungimile laturilor unui triunghi?*

2. *Cît de mari pot să fie două numere, pentru ca ele să poată reprezenta măsurile a două unghiuri ale unui triunghi?*

3. *Cunoscînd lungimile a două laturi dintr-un triunghi și măsura unghiului cuprins între aceste laturi, să se calculeze lungimea celei de-a treia laturi precum și măsurile celorlalte două unghiuri ale triunghiului.*

4. *Cunoscînd lungimea unei laturi și măsurile celor două unghiuri alăturate ei dintr-un triunghi, să se calculeze lungimile celorlalte două laturi și măsura celui de-al treilea unghi ale triunghiului.*

5. *Cunoscînd lungimile celor trei laturi ale unui triunghi, să se calculeze măsurile unghiurilor sale.*

La problemele 1 și 2 vom da răspuns în cursul acestei clase, dar ceva mai tîrziu. Problemele 3, 4, 5 sînt mai dificile și le vom rezolva în anii viitori.

● 12. Exerciții

1. Să se calculeze perimetrul $\triangle ABC$ dacă: a) $AB = 3$ cm $BC = 6$ cm $CA = 5$ cm; b) $AB = 7$ cm $BC = 12$ cm $CA = 11$ cm; c) triunghiul este echilateral ($AB = 7$ cm); d) triunghiul este isoscel ($AB = AC = 6$ cm) cu baza $BC = 4$ cm.

2. Ce lungime au laturile $\triangle MNP$ dacă: a) Este isoscel, are perimetrul egal cu 110 cm și baza egală cu 30 cm; b) Este echilateral și are perimetrul egal cu 12 dm; c) lungimile laturilor sînt numere naturale, consecutive, și perimetrul egal cu 12; d) lungimile laturilor sînt numere naturale, perimetrul egal cu 45, iar lungimea uneia dintre laturi, mai mare cu 1 și respectiv 5, decît a celorlalte două.

3. Construiți, folosind rigla gradată și raportorul (unde este posibil și echerul), un triunghi ABC în care se cunosc datele de mai jos. (În fiecare caz în parte, specificați denumirea triunghiului construit, atît după măsurile unghiurilor lui, cît și după lungimea comparativă a laturilor): a) $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm și $m(\sphericalangle ABC) = 70°$; b) $BC = 5$ cm, $m(\sphericalangle ABC) = 30°$ și $m(\sphericalangle ACB) = 60°$; c) $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm și $AC = 3$ cm; d) $AB = AC = 4$ cm și $m(\sphericalangle BAC) = 90°$;

e) $BC = 7$ cm și $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB) = 25°$; f) $BC = 3$ cm și $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB) = 60°$.

4. Desenați, cu ajutorul echerului, înălțimile triunghiurilor ABC construite la subpunctele din exercițiul 3 și marcați locul ortocentrului fiecăruia.

5. Desenați, cu ajutorul riglei gradate medianele triunghiurilor ABC din exercițiul 3 și marcați locul centrului de greutate al fiecăruia.

6. Construiți cu ajutorul raportorului bisectoarele unghiurilor triunghiurilor ABC din exercițiul 3 b) și f) și marcați locul centrului cercului înscris în fiecare dintre acestea.

7. În construcțiile de triunghiuri de la exercițiul 3 au fost indicate: „Lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins între ele", „Lungimea unei laturi și măsurile unghiurilor alăturate ei" și „Lungimile celor trei laturi". Întrebarea care vi se adresează este dacă aceste trei moduri sînt singurele de a „da" (sau „determina") un triunghi? Dacă mai sînt și altele, care sînt acestea?

8. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd $m(\sphericalangle A) = 35°$, $AB = 5$ cm și $BC = 4$ cm (deci două laturi și unghiul opus uneia din ele). Cîte soluții are problema?

9. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd $m(\sphericalangle A) = 150°$, $AB = 2$ cm și $BC = 5$ cm. Cîte soluții are problema?

10. Aceeași problemă în cazul $m(\sphericalangle A) = 60°$, $AB = 4$ cm, $BC = 2$ cm, precum și în cazul $m(\sphericalangle A) = 145°$, $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm.

11. Arătați, folosind rigla și compasul, că nu poate exista un triunghi cu laturile de 4 cm, 9 cm, 14 cm. Aceeași problemă pentru 4 cm, 9 cm, 3 cm.

22. CAZURILE DE CONGRUENȚĂ A TRIUNGHIURILOR OARECARE

Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri oarecare. Notația: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ o citim „triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$" și înțelegem prin aceasta *șase* congruențe, care au loc în același timp, și anume:

$$[AB] \equiv [A'B'],\ [BC] \equiv [B'C'],\ [CA] \equiv [C'A'];$$
$$\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C',\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A',\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'.$$

Pentru a scrie cele șase congruențe se ține seama că:

1) Laturile și unghiurile celor două triunghiuri *se corespund* în ordinea dată (scrisă) de congruența celor două triunghiuri. Ele se mai numesc și elemente (laturi sau unghiuri) *omoloage*[1)].

2) Laturile și unghiurile celor două triunghiuri congruente, care se corespund (omoloage), sînt congruente.

În triunghiurile congruente ABC și $A'B'C'$, laturile omoloage: (care se corespund) ce sînt congruente sînt: $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$, $[CA] \equiv [C'A']$, iar unghiurile omoloage (care se corespund) ce sînt congruente sînt: $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$.

În triunghiurile congruente MNP și QRS, laturile omoloage, care sînt congruente, sînt: $[MN] \equiv [QR]$, $[NP] \equiv [RS]$, $[MP] \equiv [QS]$, iar unghiurile omoloage, care sînt congruente, sînt: $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle S$, $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle Q$, $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle R$.

---

1) Cuvîntul „*omolog*" vine din limba greacă: *homologos* = în armonie.

4*

Să observăm că din $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ *nu rezultă* $\triangle ABC \equiv \triangle A'C'B'$, dar din $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ *rezultă:* $\triangle ACB \equiv \triangle A'C'B'$ și încă alte patru astfel de relații. Ca exercițiu vă propunem să le scrieți pe toate.

Ilustrăm grafic în figura 139, *a* și *b* elementele care sînt respectiv congruente în triunghiurile congruente ($\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ și $\triangle MNP \equiv \triangle QRS$).

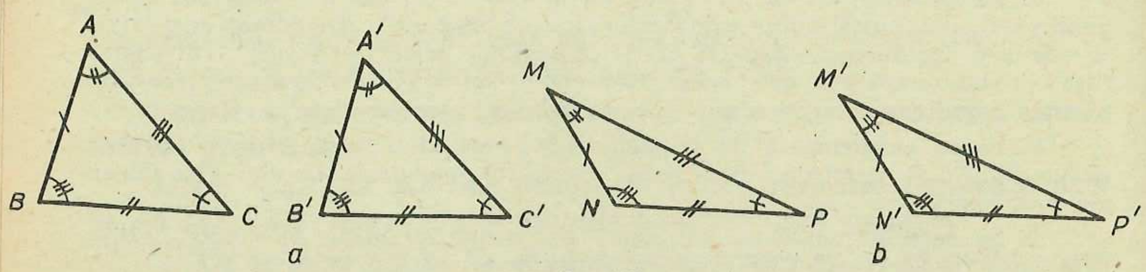


Fig. 139

Experiența cîștigată prin rezolvarea problemelor privind construirea de triunghiuri ne arată că următoarele afirmații, care se numesc „cazurile de congruență a triunghiurilor oarecare“, sînt adevărate.

Cazul 1. *Dacă în triunghiurile oarecare ABC și A'B'C' avem:* $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Ca urmare, rezultă că și: $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $[AC] \equiv [A'C']$.

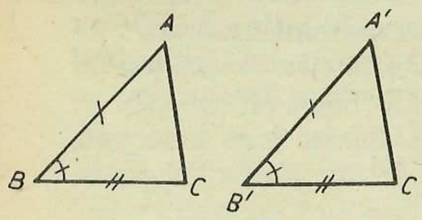


Fig. 140

Pe scurt: **două triunghiuri oarecare care au cîte două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente sînt congruente** (fig. 140).

Cazul 2. *Dacă în triunghiurile oarecare ABC și A'B'C' avem:* $[BC] \equiv [B'C']$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, *atunci* $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Ca urmare, rezultă că și: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $[AC] \equiv [A'C']$, $[AB] \equiv [A'B']$.

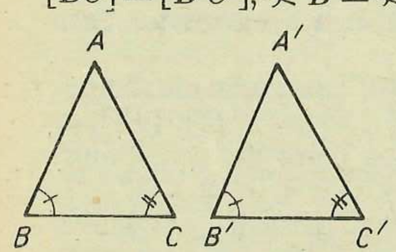


Fig. 141

Pe scurt: **două triunghiuri oarecare care au cîte o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente sînt congruente** (fig. 141).

Cazul 3. *Dacă în triunghiurile oarecare ABC și A'B'C' avem:* $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$ și $[BC] \equiv [B'C']$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Ca urmare, rezultă că și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$.

Pe scurt: **două triunghiuri oarecare care au laturile respectiv congruente sînt congruente** (fig. 142).

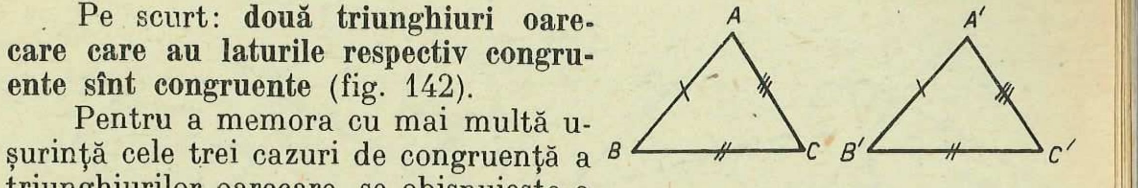


Fig. 142

Pentru a memora cu mai multă ușurință cele trei cazuri de congruență a triunghiurilor oarecare, se obișnuiește a se rezuma acestea astfel: cazul 1: LUL (adică: latură-unghi-latură), cazul 2: ULU (adică: unghi-latură-unghi) și cazul 3: LLL (adică: latură-latură-latură).

Observația 1. După ce am stabilit că două triunghiuri oarecare sînt congruente (conform unuia dintre cazurile de congruență), putem descoperi restul elementelor care sînt, respectiv congruente, ținînd seamă și de faptul că: *la laturi congruente se opun unghiuri respectiv congruente* și, invers, *la unghiuri congruente se opun laturi respectiv congruente.*

Observația 2. Într-un triunghi avem de considerat șase elemente principale, și anume: cele trei unghiuri și cele trei laturi. Este suficient să constatăm, în două triunghiuri oarecare, congruența a trei dintre aceste elemente, *alese în mod convenabil*, dintre care cel puțin un element să fie latură, pentru a putea afirma congruența celor două triunghiuri oarecare și, în particular, congruența celorlalte trei elemente.

Cazurile de congruență a triunghiurilor oarecare asigură „alegerea convenabilă“ din două triunghiuri a trei dintre elementele principale. Oricare altă alegere din două triunghiuri a trei elemente congruente sau a unui număr mai mic de „trei“ elemete congruente *nu* „asigură“ congruența celor două triunghiuri și, ca urmare, nici congruența celorlalte elemente.

Aplicația 1. În figura 143, la triunghiurile *ABC* și *A'C'B'* sînt marcate elementele „respectiv“ congruente. Se cere să precizăm dacă triunghiurile desenate sînt congruente. Conform indicațiilor de pe figură, putem afirma că triunghiurile *ABC* și *A'C'B'* sînt congruente conform cazului 1 de congruență (LUL) și scriem $\triangle ABC \equiv \triangle A'C'B'$ (în această ordine). Ca urmare, și celelalte „trei“ elemente, care nu sînt marcate pe figură, sînt „respectiv“ congruente, adică în această congruență ele se corespund astfel: $[BC] \equiv [C'B']$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C'$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle B'$.

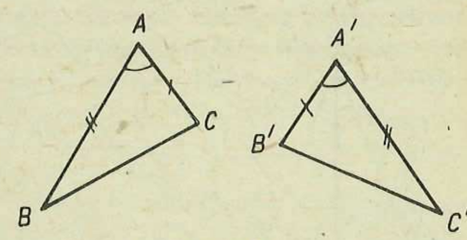


Fig. 143

Aplicația 2. Despre triunghiurile din figura 144 ni se dau următoarele informații: $[BC] \equiv [C_1A_1]$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A_1$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C_1$. Se cere să stabilim dacă $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Pentru ușurința înțelegerii, marcăm pe figură elementele respectiv congruente (fig. 145) pentru a cerceta dacă ele „convin“ vre-

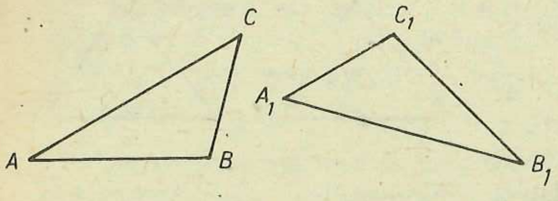


Fig. 144

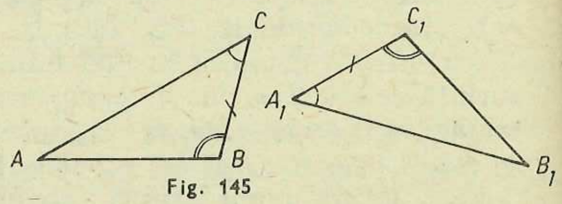


Fig. 145

unuia dintre „cazurile de congruență". Răspunsul este afirmativ; triunghiurile sînt congruente, conform cazului 2 de congruență (ULU), și scriem $\triangle ABC \equiv \triangle B_1C_1A_1$ (în această ordine.) Ca urmare și celelalte „trei elemente", care nu sînt marcate pe figură, sînt „respectiv" congruente, adică $[AB] \equiv [B_1C_1]$, $[AC] \equiv [B_1A_1]$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B_1$.

Aplicația 3. Despre două triunghiuri, MNP și QRS, se dau următoarele informații: $[MN] \equiv [RQ]$; $[MP] \equiv [RS]$ și $[NP] \equiv [QS]$. Să se precizeze dacă triunghiurile sînt congruente.

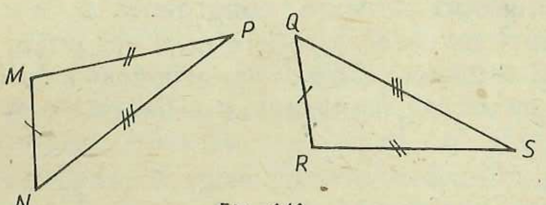


Fig. 146

Ne folosim de un desen. Desenăm mai întîi triunghiurile MNP și RQS; marcăm pe figură semnele pentru a indica congruențele date, apoi cercetăm dacă acestea sînt suficiente pentru a afirma congruența triunghiurilor (fig. 146).

Constatăm că elementele care se corespund realizează o congruență a triunghiurilor, și anume cazul 3 de congruență (LLL), deci $\triangle MNP \equiv \triangle RQS$ (în această ordine).

Restul elementelor, „respectiv" congruente, vor fi perechile de unghiuri omoloage și anume: $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle R$; $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle Q$; $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle S$.

13. Exerciții

1. În „perechile" de triunghiuri din figura 147 sînt marcate elementele congruente (pentru a simplifica notația, triunghiurile „dintr-o pereche" au fost notate: pentru prima pereche: T_1 și T'_1; pentru a doua pereche: T_2 și T'_2 etc). Stabiliți care triunghiuri sînt congruente și indicați cazul de congruență în care se încadrează.

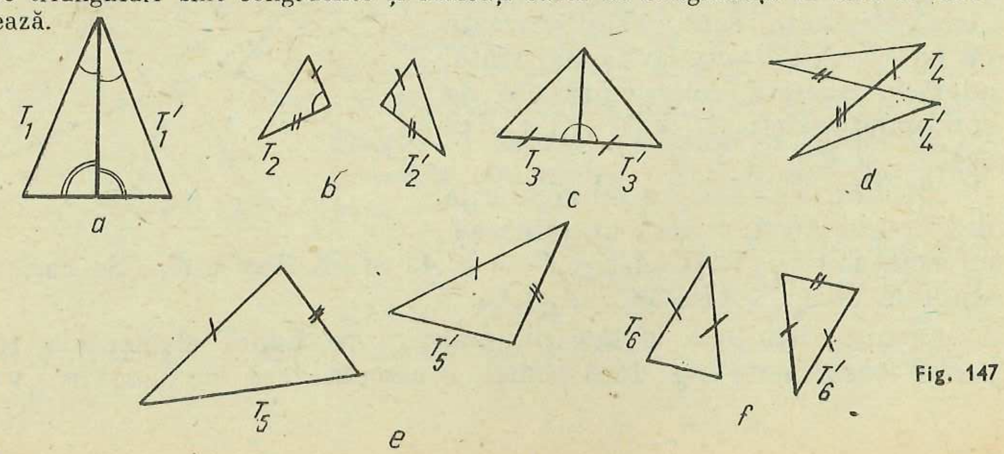


Fig. 147

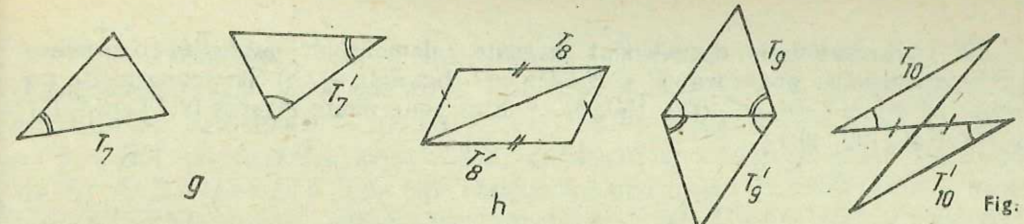


Fig. 147

2. În figura 148, triunghiurile din fiecare pereche au cîte două elemente corespondente, care sînt respectiv congruente, conform semnelor de pe figură. Precizați informația suplimentară necesară pentru a se putea aplica cazul de congruență specificat în fiecare din situațiile ce urmează:

În figura 148, *a* pentru: a_1) *ULU*; a_2) *LUL*. În figura 148, *b*, pentru: b_1) *LUL*; b_2) *LLL*. În figura 148, *c* pentru: c_1) *LUL*; c_2) *ULU*.

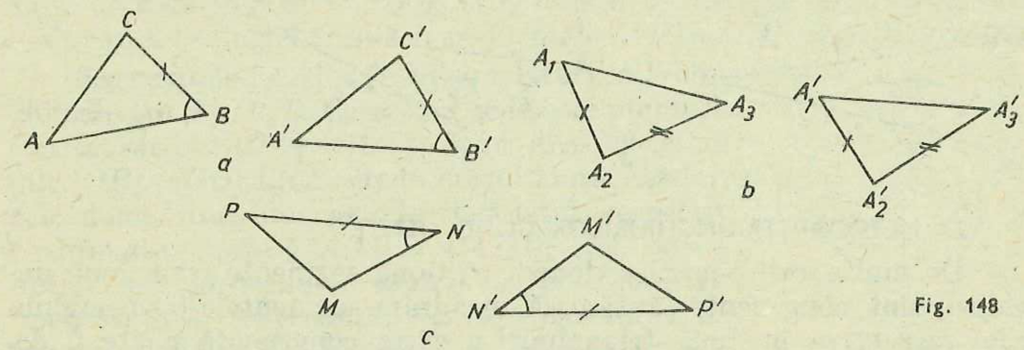


Fig. 148

3. În triunghiurile din figura 149 sînt marcate elementele congruente. Scrieți care triunghiuri sînt congruente (specificînd cazul de congruență) și care sînt „toate" elementele „respectiv" congruente.

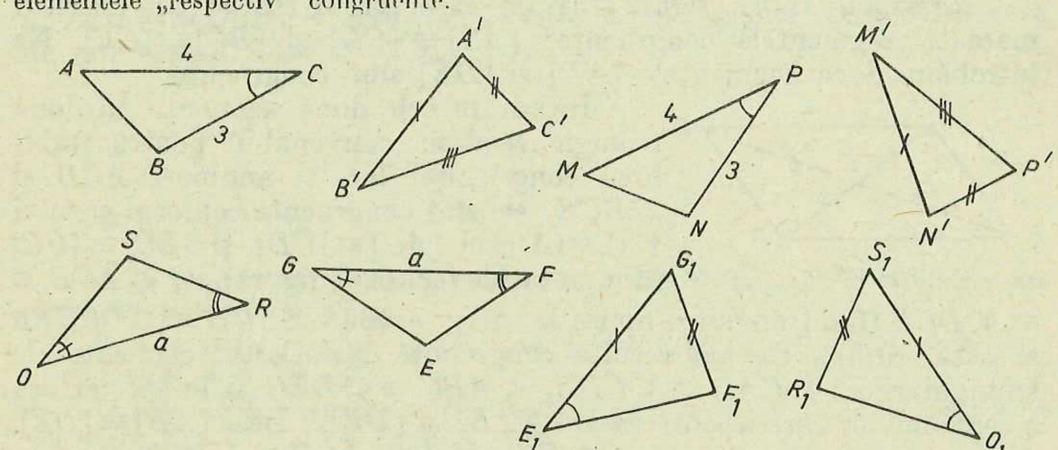


Fig. 149

4. Ce relație trebuie să existe între elementele unui triunghi ABC, pentru a fi posibile simultan congruențele $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ și $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$?

5. De ce două triunghiuri care au două laturi și unghiul opus uneia din ele respectiv congruent nu sînt neapărat congruente?

6. Se dau: un triunghi ABC, un punct D (diferit de punctele A, B și C) și o semidreaptă cu originea în D. Să se construiască un triunghi congruent cu $\triangle ABC$, care să aibă punctul D drept unul din vîrfuri, iar una dintre laturi să se găsească pe semidreapta dată. Dați mai multe soluții folosind diferite cazuri de congruență.

7. În următoarele desene sînt marcate „elementele" respectiv congruente. a) Sînt congruente unghiurile C și N? De ce? (fig. 150, *a*). b) Sînt congruente unghiurile A' și M'. De ce? (fig. 150, *b*).c) Sînt congruente laturile $[RS]$ și $[S'T']$? De ce? (fig. 150, *c*).

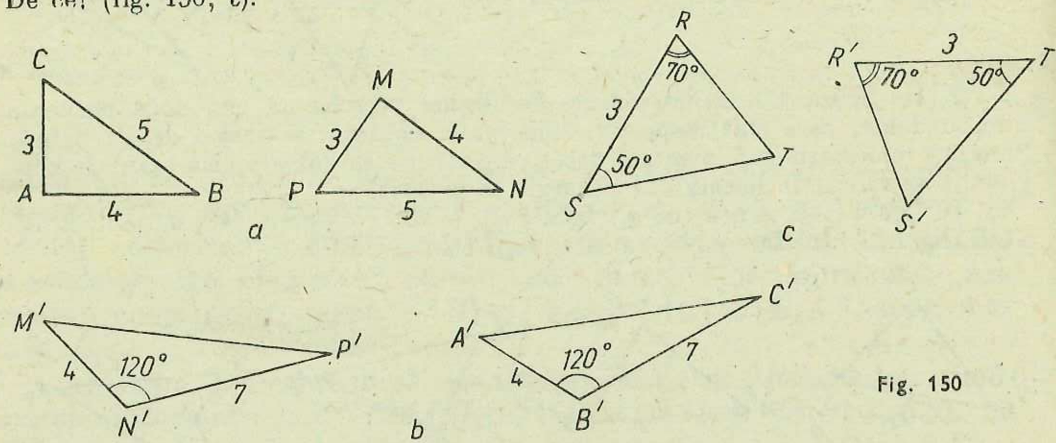


Fig. 150

23. METODA[1] TRIUNGHIURILOR CONGRUENTE

De multe ori, pentru a dovedi că două segmente (sau două unghiuri) sînt congruente căutăm să încadrăm segmentele (sau unghiurile) respective în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată, astfel încît segmentele (sau unghiurile) în discuție să fie elemente omoloage.

Exemplul 1. În figura 151, în care $AD \cap BE = \{C\}$, au fost marcate segmentele congruente: $[AC] \equiv [CD]$ și $[BC] \equiv [CE]$. Ne întrebăm dacă segmentele $[AB]$ și $[DE]$ sînt congruente.

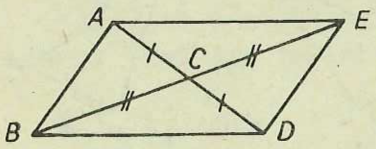


Fig. 151

Încadrăm cele două segmente în două triunghiuri alese „convenabil" pentru stabilirea congruenței lor, și anume $\triangle ACB$ și $\triangle DCE$; ele sînt congruente conform cazului 1 (LUL) căci $[AC] \equiv [CD]$ și $[BC] \equiv [CE]$ (din notațiile făcute pe figură), iar $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DCE$ (fiind unghiuri opuse la vîrf); așadar $\triangle ACB \equiv \triangle DCE$ (în această ordine). De aici rezultă congruența „celorlalte" elemente ale triunghiurilor: $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CDE$; $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEC$ și, în special, cea a segmentelor care ne interesează ($[AB]$ și $[DE]$). Deci $[AB] \equiv [DE]$.

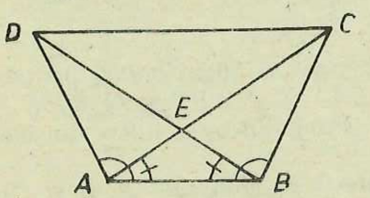


Fig. 152

Exemplul 2. În figura 152, în care $AC \cap BD = \{E\}$, au fost marcate unghiurile congruente $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ și $\sphericalangle EAB \sphericalangle EBA$. Ne întrebăm dacă segmentele $[DB]$ și $[CA]$ sînt congruente.

Alegem triunghiurile ADB și BCA, care conțin segmentele $[DB]$ și $[CA]$. Aceste triunghiuri sînt congruente, conform cazului 2 (ULU), deoarece: $[AB]$ este latură comună celor două triunghiuri, iar unghiurile „alăturate" laturii $[AB]$ sînt congruente: $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ și $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB$, conform indicațiilor date în desen, deci, $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ (în această ordine); rezultă congruența celorlalte elemente care sînt omoloage: $[DA] \equiv [CB]$, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCA$ și, în special, cea a segmentelor care ne interesează, $[DB] \equiv [CA]$.

[1] Cuvîntul „*metodă*" vine din limba greacă: *methodos* = mijloc, cale, mod de cercetare.

Exemplul 3. Desenăm două cercuri concentrice, de raze diferite (fig. 153). Știind că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ (A și C puncte ce aparțin cercului de rază mai mică, iar B și D puncte ce aparțin cercului de rază mai mare), ne întrebăm dacă segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sînt congruente.

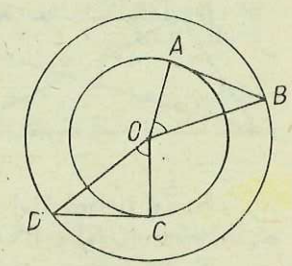


Fig. 153

Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sînt laturi în triunghiurile OAB și OCD. Cercetînd aceste triunghiuri, constatăm că: $[OA] \equiv [OC]$, fiind raze în cercul mic, $[OB] \equiv [OD]$, fiind raze în cercul mare. Așadar, cele două triunghiuri au cîte două laturi respectiv congruente. Cum $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$, din datele inițiale ale problemei, rezultă că cele două triunghiuri sînt congruente conform cazului 1 de congruență (LUL), și scriem: $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (în această ordine). De aici rezultă că sînt congruente și celelalte elemente, unghiuri și laturi, care sînt omoloage: $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCD$, $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$, și, în special, segmentul care ne interesează, $[AB] \equiv [CD]$.

14. Exerciții

1. În figura 154,*a* știm că $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DA]$. Sînt congruente unghiurile B și D? De ce?

În figura 154, *b* știm că $[MN] \equiv [NP] \equiv [PQ] \equiv [QM]$. Sînt congruente unghiurile M și P? De ce?

În figura 154, *c* știm că $[A'D'] \equiv [B'C']$ și $[A'B'] \equiv [D'C']$. Sînt congruente unghiurile A' și C'? De ce?

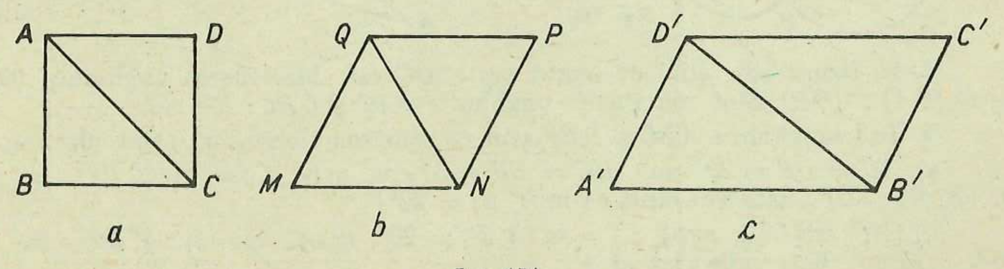


Fig. 154

2. În figura 155, știm că $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle BDA$ și $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle ABD$. Sînt congruente segmentele $[AC]$ și $[BD]$? De ce?

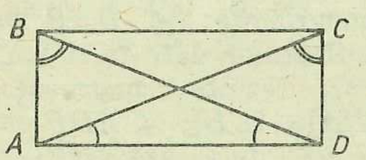


Fig. 155

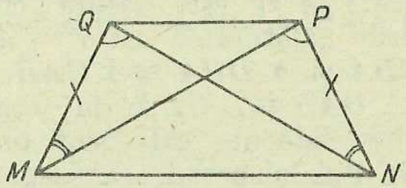


Fig. 156

3. În figura 156, știm că $\sphericalangle MPN \equiv \sphericalangle NQM$; $\sphericalangle QNP \equiv \sphericalangle PMQ$ și $[PN] \equiv [QM]$. Sînt congruente segmentele $[MP]$ și $[QN]$? De ce?

4. În figura 157, punctul O este piciorul medianei corespunzătoare laturii $[BD]$ în triunghiul ABD, punctele A, O, C sînt colineare și $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle DBA$. Sînt congruente segmentele $[DC]$ și $[BA]$? De ce?

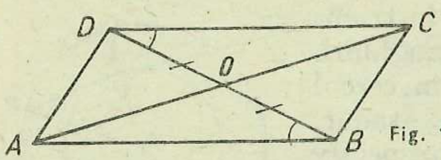


Fig. 157

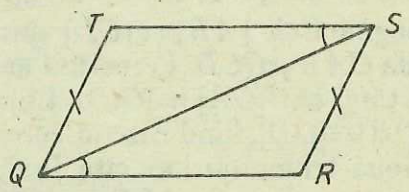


Fig. 158

5. În figura 158, știm că $\sphericalangle SQR \equiv \sphericalangle QST$ și $[SR] \equiv [QT]$. Sînt congruente segmentele $[QR]$ și $[ST]$? De ce?

6. În figurile 159, *a* și *b* $[NQ$ este bisectoarea unghiului MNP, iar $[QN$ este bisectoarea unghiului MQP. Stabiliți dacă în fiecare din cele două figuri există cîte „o pereche" de segmente congruente.

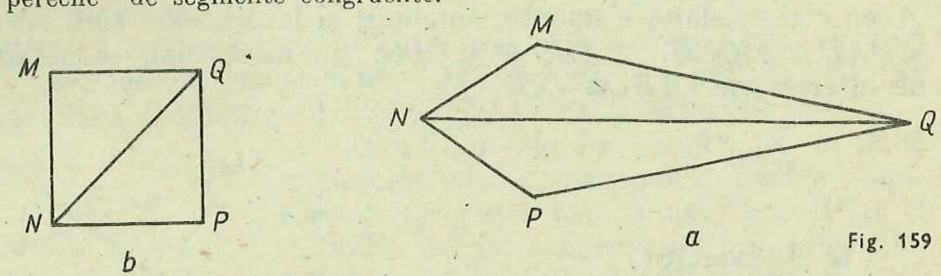


Fig. 159

7. În figura 160, cercurile de centre O_1 și O_2 au raze diferite și două puncte comune A și B. Sînt congruente unghiurile O_1AO_2 și O_1BO_2? De ce?

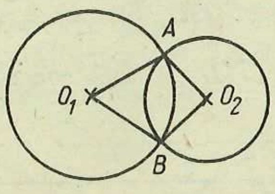


Fig. 160

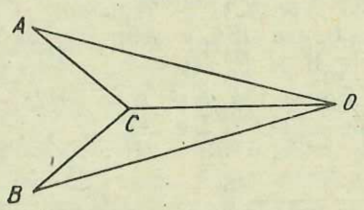


Fig. 161

8. În figura 161, știm că semidreapta $[OC$ este bisectoarea unghiului AOB și că $[OA] \equiv [OB]$. Sînt congruente unghiurile OAC și OBC? De ce?

9. În triunghiurile ABC și DEF știm că următoarele afirmații sînt adevărate:

a) $AC = DF = 30$ cm, $BC = EF = 37$ cm, $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle F) = 50°$ și $m(\sphericalangle B) = 20°$. Este adevărat că $m(\sphericalangle E) = 22°$?

b) $[AC] \equiv [DF]$, $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle F) = 20°$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 80°$ și $CB = 27$ cm. Este adevărat că $FE = 30$ cm?

c) $[AC] \equiv [DE]$, $[AB] \equiv [FE]$; $[BC] \equiv [DF]$ și $m(\sphericalangle A) = 40°$. Este adevărat că $m(\sphericalangle E) = 50°$?

Justificați răspunsurile.

10. În triunghiul ABC știm că următoarele afirmații sînt adevărate: $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $BN \cap CM = \{P\}$, $[BP] \equiv [CP]$ și $[MP] \equiv [NP]$. Este adevărat că $[BM] \equiv [CN]$? Justificați răspunsul.

11. În triunghiul MNP știm că următoarele afirmații sînt adevărate: $A \in (MP)$, $B \in (NP)$, $[PA] \equiv [PB]$ și $\sphericalangle PAN \equiv \sphericalangle PBM$. Cercetați dacă: a) $[NP] \equiv [MP]$; b) $\sphericalangle ANB \equiv \sphericalangle BMA$; c) $[AM] \equiv [BN]$. Justificați răspunsurile.

12. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AC = 4$ cm, $AB = 3$ cm. Fie $M \in CA$ (A între C și M) și $N \in AB$ (B între A și N) astfel încît $AM = 3$ cm și $BN = 1$ cm. Cercetați dacă: a) $[MN] \equiv [BC]$; b) $\sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle ABC$.

13. Fie ABC un triunghi oarecare cu $m(\sphericalangle A) < 90°$. Perpendicularele în punctul A pe dreptele AB și AC conțin respectiv punctele M și N astfel încît $[AM] \equiv [AB]$ (M și C în semiplane opuse determinate de dreapta AB) și $[AN] \equiv [AC]$ (N și B în semiplane opuse determinate de dreapta AC). Cercetați dacă $[MC] \equiv [NB]$.

14. În exteriorul triunghiului oarecare ascuțitunghic MNP sînt „construite" triunghiurile echilaterale MNO și MPR. Cercetați dacă $[OP] \equiv [NR]$.

PARTEA A DOUA

GEOMETRIA BAZATĂ PE DEMONSTRAȚII[1]

24. PROPOZIȚII MATEMATICE. AXIOMĂ[2]. TEOREMĂ[3]

În studiul de pînă acum al geometriei ne-am folosit foarte mult de intuiție. De acum încolo ne vom baza, în stabilirea de noi proprietăți ale figurilor geometrice, într-o mai mare măsură pe judecată (raționament). Desigur că și în expunerea de pînă acum am folosit elemente de raționament în stabilirea proprietăților figurilor geometrice, de exemplu la congruența unghiurilor opuse la vîrf, dar rolul principal l-a avut evidența desenului.

Punctele principale de plecare ale judecăților pe care le vom face în viitor vor fi cele trei cazuri de congruență a triunghiurilor oarecare. Scopul pe care-l vom urmări va fi acela de a forma și dezvolta raționamentul geometric și de a deduce cu ajutorul lui proprietățile cele mai importante ale figurilor geometrice.

În matematică (deci și în geometrie) se întîlnesc unele propoziții care exprimă adevăruri ce se admit fără demonstrații și care se numesc *axiome*; spre exemplu: „Prin două puncte distincte (diferite) oarecare „trece" o singură dreaptă (axioma dreptei).

Propozițiile matematice care exprimă adevăruri ce trebuie să fie dovedite se numesc *teoreme*; de exemplu: „Două unghiuri opuse la vîrf sînt congruente."

În enunțul oricărei teoreme deosebim două părți: *ipoteza*[4] sau premisa[5], care este formată din toate faptele pe care enunțul teoremei le „presupune" adevărate, și *concluzia*[6], care este formată din ceea ce enunțul teoremei afirmă că se poate deduce din ipoteză.

În exemplul de mai sus, ipoteza este: „două unghiuri sînt opuse la vîrf", iar concluzia: „aceste unghiuri sînt congruente".

---

[1] Cuvîntul „*demonstrație*" vine din limba latină: *demonstratio* = dovedire.
[2] Cuvîntul „*axiomă*" vine din limba greacă: *axioma* = opinie, teză admisă. (Termenul a fost folosit, începînd din sec. 6—5 î.e.n. de către matematicienii din școala lui Pitagora.)
[3] Cuvîntul „*teoremă*" vine din limba greacă: *theorema* = examinare, cercetare. (Termenul a fost folosit pentru prima dată de filozoful grec Aristotel, în sec. 4. î.e.n.).
[4] Cuvîntul „*ipoteză*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *hypo* = sub și *thesis* = punere.
[5] Cuvîntul „*premisă*" vine din limba latină: *praemissus* = pus înainte, anterior.
[6] Cuvîntul „*concluzie*" vine din limba latină: *conclusio* = încheiere.

În unele cazuri teoremele sînt enunțate sub forma unor propoziții ipotetice (condiționale) — ipoteza începe cu cuvîntul „dacă", iar concluzia cu cuvîntul „atunci". Cum teoreme se întîlnesc nu numai în geometrie, ci și în aritmetică sau algebră (în matematică, în general), vom da un exemplu de teoremă prezentată sub forma unei propoziții ipotetice (condiționale), întîlnită la aritmetică în clasa a V-a: „Dacă un număr este divizibil prin 2 și prin 3, atunci el este divizibil prin 6". Se reține cu ușurință că „un număr este divizibil prin 2 și prin 3" este ipoteza, iar „el este divizibil prin 6" este concluzia.

Teoremele trebuie să fie „demonstrate", adică adevărurile din concluzie trebuie să fie „dovedite" cu ajutorul unor „argumente" care sînt adevărurile din ipoteză și alte adevăruri (axiome sau teoreme demonstrate anterior).

Dacă se schimbă între ele ipoteza și concluzia unei teoreme, se obține o nouă propoziție, care se numește *propoziție reciprocă*[1]. Spre exemplu, pornind de la teorema enunțată mai sus, vom putea formula următoarea propoziție reciprocă: „Dacă un număr este divizibil prin 6, atunci el este divizibil prin 2 și prin 3". Se poate recunoaște ușor că aici ipoteza este: „un număr este divizibil prin 6" (ceea ce reprezenta concluzia teoremei enunțate anterior), iar: „el este divizibil prin 2 și prin 3" este concluzia (ceea ce reprezenta ipoteza primei teoreme).

Vom observa că, dacă o propoziție (teoremă) este adevărată, nu înseamnă neapărat că și reciproca ei este adevărată. De exemplu, am demonstrat, la pagina 33 că: „Dacă două unghiuri sînt opuse la vîrf, atunci ele sînt unghiuri congruente". „Reciproca" ei ar afirma că: „Dacă două unghiuri sînt congruente, atunci ele sînt opuse la vîrf". Această din urmă propoziție este falsă, deoarece concluzia ei *nu este întotdeauna adevărată*. Pentru a dovedi falsitatea ei este suficient să dăm un singur exemplu din care să rezulte aceasta. Dacă vom privi — spre exemplu — unghiurile *RQS* și *TSQ* din figura 158 (pag. 58), care sînt congruente, ne vom da seama imediat că ele nu sînt opuse la vîrf. Un exemplu care arată că *uneori* concluzia unei propoziții *nu este adevărată* se numește *contra exemplu*.

De asemenea, în clasa a V-a s-a demonstrat că: „Dacă fiecare termen al unei sume de mai multe numere naturale este divizibil printr-un anumit număr natural, atunci și suma va fi divizibilă prin acel număr natural". „Reciproca" acestei propoziții ar afirma că: „Dacă o sumă de mai multe numere naturale este divizibilă printr-un anumit număr natural, atunci fiecare dintre termenii sumei va fi divizibil prin acel număr natural". Dovedirea falsității acestei propoziții reciproce nu comportă nici o dificultate, prezentînd un singur exemplu care să contrazică „concluzia".

---

[1] Cuvîntul „*reciprocă*" vine din limba latină: *reciprocus* = care se întoarce de unde a venit, care inversează.

Se obişnuieşte ca, faţă de teorema reciprocă, teorema iniţială să se numească *teoremă directă*. Se mai spune că cele două teoreme sînt una reciproca celeilalte, ceea ce înseamnă că oricare dintre ele ar putea fi considerată ca teoremă directă.

Dacă atît o teoremă directă, cît şi reciproca ei sînt ambele adevărate, atunci le putem concentra într-o singură teoremă, folosind în formularea enunţului expresia „dacă şi numai dacă". Iată un exemplu: „Un număr este divizibil prin 6 dacă şi numai dacă el este divizibil prin 2 şi prin 3". Pentru demonstrarea unei astfel de teoreme trebuie să facem, de fapt, două demonstraţii: să demonstrăm şi directa, şi reciproca.

În lecţiile ce vor urma vom întîlni şi exemple de astfel de teoreme cu adevăruri din domeniul geometriei.

Sînt şi situaţii cînd o teoremă (propoziţie) poate să admită mai multe reciproce. Aceasta se întîmplă atunci cînd ipoteza sau concluzia teoremei (propoziţiei) date (sau chiar ambele) conţine (conţin) două sau mai multe afirmaţii (părţi). În acest caz, numim propoziţie reciprocă a unei propoziţii date, acea propoziţie în care *ipoteza* este formată din concluzia propoziţiei date (sau numai din o parte a concluziei) şi o parte din ipoteza propoziţiei date, iar *concluzia* este formată din partea rămasă a ipotezei propoziţiei date (şi ceea ce a mai rămas din concluzia propoziţiei date).

Facem precizarea că, dacă reciproca unei teoreme este o propoziţie falsă, atunci această reciprocă *nu este o teoremă* şi deci teorema dată nu admite „teoremă reciprocă".

Pentru exemplificarea celor de mai sus, să considerăm următoarea propoziţie:

„Dacă punctele C şi D sînt de o parte şi de alta a dreptei AB şi $[AC] \equiv [BC]$ şi $[AD] \equiv [BD]$, atunci $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$".

Ipoteza acestei propoziţii conţine următoarele afirmaţii (adevăruri): (1) Punctele C şi D sînt de o parte şi de alta a dreptei AB; (2) $[AC] \equiv [BC]$; (3) $[AD] \equiv [BD]$.

Concluzia afirmă că în această situaţie triunghiul ACD este congruent cu triunghiul BCD, adică congruenţa: (4) $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ este *întotdeauna adevărată*.

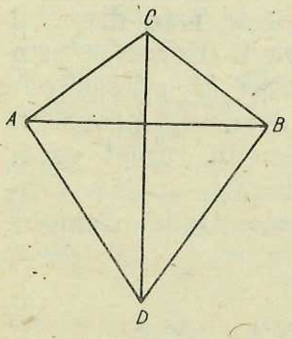


Fig. 162

Nu este greu să demonstrăm că propoziţia de mai sus este adevărată, deoarece triunghiurile ACD şi BCD (fig. 162) sînt congruente, conform cazului 3 de congruenţă a triunghiurilor oarecare (LLL).

Deoarece ipoteza propoziţiei de mai sus conţine mai multe afirmaţii (3 la număr), este posibilă formarea mai multor propoziţii reciproce. Cum formulăm reciprocele propoziţiei de mai sus? Vom schimba, pe rînd, afirmaţiile din ipoteză cu

cea din conculzie sau întreaga ipoteză cu concluzia. Obţinem următoarele „reciproce" ale propoziţiei date:

Reciproca 1: „Dacă punctele C şi D sînt de o parte şi de alta a dreptei AB, $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ şi $[AC] \equiv [BC]$, atunci $[AD] \equiv [BD]$".

Demonstrăm cu uşurinţă că această reciprocă este adevărată, observînd că din congruenţa triunghiurilor ACD şi BCD (fig. 162), în care $[CD] = [CD]$ (latura comună) şi $[AC] \equiv [BC]$ (din ipoteză), rezultă că şi $[AD] \equiv [BD]$.

Reciproca 2: „Dacă punctele C şi D sînt de o parte şi de alta a dreptei AB, $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ şi $[AD] \equiv [BD]$, atunci $[AC] \equiv [BC]$".

Demonstraţia este asemănătoare celei precedente. Concluzia este *întotdeauna adevărată*, laturile $[AC]$ şi $[BC]$ fiind laturi omoloage în triunghiurile congruente ACD şi BCD.

Reciproca 3: „Dacă $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$, $[AC] \equiv [BC]$ şi $[AD] \equiv [BD]$, atunci punctele C şi D sînt de o parte şi de alta a dreptei AB".

Reciproca este o propoziţie falsă. Pentru a dovedi acest lucru folosim „metoda contra exemplului". Respectînd toate condiţiile din ipoteza acestei reciproce, putem construi triunghiurile congruente ACD şi BCD cu vîrfurile C şi D *în acelaşi semiplan* determinat de dreapta AB (fig. 163). Această construcţie arată că *uneori concluzia propoziţiei reciproce este falsă;* din acest motiv spunem că propoziţia reciprocă 3 nu este adevărată (este falsă).

Reciproca 4: „Dacă $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$, atunci punctele C şi D sînt de o parte şi de alta a dreptei AB, $[AC] \equiv [BC]$ şi $[AD] \equiv [BD]$".

Şi această reciprocă este o propoziţie falsă. Trebuie să spunem, de la început, că, dacă în concluzia unei propoziţii sînt mai multe afirmaţii (părţi) şi dacă *măcar una dintre ele uneori nu este adevărată*, atunci propoziţia este falsă.

În cazul acestei propoziţii reciproce, concluzia ei conţine trei afirmaţii (părţi). Afirmaţiile $[AC] \equiv [BC]$ şi $[AD] \equiv [BD]$ din concluzie sînt *întotdeauna* adevărate, deoarece laturile $[AC]$ şi $[BC]$, precum şi $[AD]$ şi $[BD]$ sînt laturi omoloage în triunghiurile ACD şi BCD, despre care ipoteza afirmă că sînt congruente. Afirmaţia din concluzie că „punctele C şi D sînt de o parte şi de alta a dreptei AB" uneori *nu este adevărată*, deoarece putem construi triunghiurile congruente ACD şi BCD cu vîrfurile C şi D în *acelaşi semiplan* determinat de dreapta AB (fig. 163).

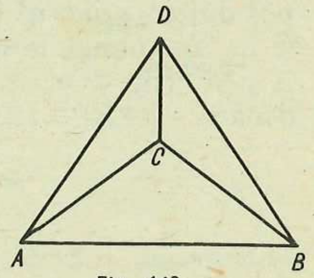


Fig. 163

● 15. Exerciţii

1. Desprindeţi, din enunţurile de mai jos, ipoteza de concluzie, scriind în caietele voastre: „ipoteza este...; concluzia este...".

a) Dacă două unghiuri ascuţite sînt congruente, atunci ele au acelaşi complement. b) Dacă două unghiuri sînt suplementare, atunci unul este ascuţit şi celălalt obtuz, sau ambele sînt drepte. c) Dacă două unghiuri sînt congruente și suplementare, atunci fiecare dintre ele este un unghi drept. d) Dacă două unghiuri, ambele diferite de unghiul nul, sînt complementare, atunci fiecare dintre ele este ascuțit. e) Unghiurile congruente au același suplement. f) Două unghiuri congruente și complementare au ca măsură fiecare cîte 45°.

2. Reformulați fiecare din enunțurile de mai jos, folosind propoziție ipotetică (condițională) („dacă..., atunci..."):

a) Două unghiuri opuse la vîrf sînt congruente. b) Suplementele unghiurilor congruente sînt congruente. c) Complementele unghiurilor ascuțite și congruente sînt congruente. d) Două unghiuri ale căror măsuri au același complement sînt congruente. e) Două unghiuri ale căror măsuri au același suplement sînt congruente. f) Două unghiuri care sînt drepte sînt congruente.

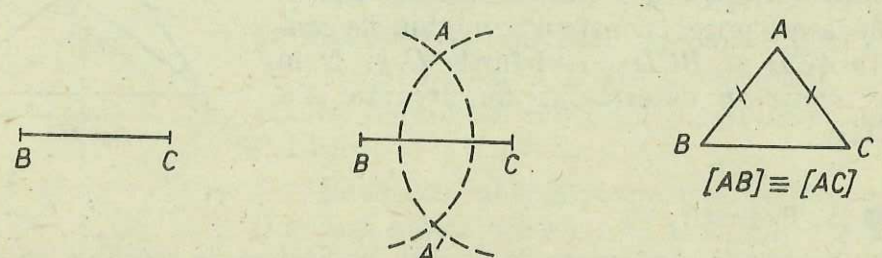
3. Fiind date propozițiile de mai jos, formulați reciprocele fiecăreia dintre ele. Stabiliți apoi, dacă propozițiile reciproce sînt adevărate sau false.

a) Dacă vizitezi Australia, vezi canguri. b) Elevul care are hepatită este grav bolnav. c) Dacă afară plouă, cînd plec de acasă îmi iau umbrela. d) Elevul silitor are succese la învățătură. e) Dacă numărul format din ultimele două cifre ale unui număr natural este divizibil cu 4, atunci numărul natural considerat este divizibil cu 4. f) Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9, atunci numărul natural considerat este divizibil cu 9. g) Dacă un număr natural diferit de 0 este divizibil prin 9, atunci el este divizibil și prin 3. h) Două drepte care au cel puțin două puncte diferite comune sînt drepte identice. i) Fie unghiurile diferite A și B congruente și complementare. Măsura lor comună este de 45°. j) Două unghiuri ascuțite și congruente au același complement.

25. PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI ISOSCEL

Am definit, la pagina 45, triunghiul isoscel. Ne propunem acum să învățăm cum se construiește un triunghi isoscel și să studiem apoi „proprietățile" lui.

Pentru a construi un triunghi isoscel putem proceda astfel: desenăm un segment oarecare $[BC]$, care va fi baza triunghiului (fig. 164,*a*). În continuare, apreciind din ochi, deschidem compasul mai mult decît jumătate din lungimea segmentului $[BC]$, fixăm acul compasului în punctul B și descriem un cerc. Apoi, mutăm acul compasului în punctul C și, cu aceeași deschidere, descriem un alt cerc și notăm punctele de intersecție a celor două cercuri — de exemplu A și A' (fig. 164, *b*). Triunghiurile ABC și $A'BC$ sînt ambele isoscele deoarece $[AB] \equiv [AC]$ și $[A'B] \equiv [A'C]$, deschiderea compasului ne-



a *b* *c*

Fig. 164

modificîndu-se în timpul efectuării construcției (cele două cercuri au aceeași rază). Iată deci că $\triangle ABC$ este un triunghi isoscel (fig. 164,*c*).

Observăm, din figura 164,*b*, că pentru a găsi punctele de intersecție a celor două cercuri cu centrele în B și C nu este nevoie să desenăm cercurile în întregime.

Să ne punem acum întrebarea: „într-un triunghi isoscel (luat la întîmplare din mulțimea tuturor triunghiurilor isoscele) există două unghiuri congruente? Dacă există, care sînt unghiurile congruente?" Sau, altfel spus: „un triunghi isoscel are „proprietatea" de a avea două unghiuri congruente?" Dacă da, atunci care sînt unghiurile congruente?

Răspunsul la această întrebare îl dă următoarea

Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile opuse laturilor congruente sînt congruente.

Ipoteza acestei teoreme ne spune că există un triunghi, pe care să-l notăm, de exemplu, $\triangle ABC$, și că acest triunghi este isoscel, de exemplu $[AB] \equiv [AC]$.

Concluzia teoremei „afirmă" că, în „condițiile date", unghiurile care se opun laturilor congruente sînt și ele „tot congruente", adică $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle B$.

Despre această afirmație nu sîntem încă siguri dacă este sau nu este adevărată.

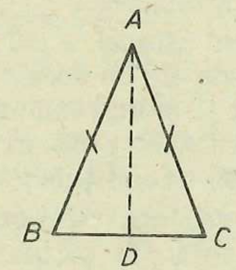
Căpătăm convingerea că unghiurile „de la baza" triunghiului isoscel sînt congruente *numai* după efectuarea unei demonstrații, (așa cum se spunea și la pagina 61), adică folosind un raționament în urma căruia se va pune în evidență această proprietate a triunghiului isoscel. De asemenea, gîndim că judecățile pe care le facem pe acest triunghi ABC sînt adevărate pentru oricare triunghi, luat la întîmplare din mulțimea triunghiurilor isoscele.

Prezentăm, mai jos, ipoteza, concluzia și demonstrația acestei teoreme, astfel:

Ipoteza

$\triangle ABC$,

$[AB] \equiv [AC]$.



Concluzia

$\sphericalangle C \equiv \sphericalangle B$.

Demonstrația

Fig. 165

Folosim o „construcție ajutătoare"*: considerăm bisectoarea unghiului A (semidreapta $[AD$), care se intersectează cu latura $[BC]$ în punctul D (fig. 165). În acest fel, la „datele cunoscute" conținute

* Uneori, pentru demonstrarea unor teoreme sau rezolvarea unor probleme de geometrie, este necesară efectuarea anumitor construcții geometrice suplimentare datelor din ipoteză, care ajută la demonstrarea teoremei sau rezolvarea problemei, din care cauză ele se numesc *construcții ajutătoare*.

în ipoteză, am adăugat, prin construcţia făcută, şi: „$D \in (BC)$ şi $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$". Cu alte cuvinte construcţia ajutătoare a completat ipoteza.

În continuare, pentru a demonstra că $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle B$, folosim „metoda triunghiurilor congruente". Ne fixăm atenţia asupra triunghiurilor ADC şi ADB, în care putem scrie:

$[AC] \equiv [AB]$ (din ipoteză);

$\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle BAD$ (din construcţia ajutătoare);

$[AD] = [AD]$ (latură comună).

Putem afirma, conform cazului întîi de congruenţă a triunghiurilor oarecare (LUL), că triunghiurile ADC şi ADB sînt congruente ($\triangle ADC \equiv \triangle ADB$) şi, ca urmare, conform observaţiei 1 de la pagina 53 (în triunghiurile congruente, *la laturi congruente se opun unghiuri respectiv congruente* şi invers, *la unghiuri congruente se opun laturi respectiv congruente*), rezultă că şi

(1) $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ADB$ (pentru că se „opun" laturilor congruente $[AC]$ şi $[AB]$);

(2) $[CD] \equiv [BD]$ (pentru că se "opun" unghiurilor congruente CAD şi BAD);

(3) $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle B$ (pentru că se „opun" laturii comune $[AD]$).

Această din urmă congruenţă reprezintă tocmai concluzia teoremei. Demonstraţia teoremei este deci terminată. Afirmaţia conţinută în concluzia teoremei a fost dovedită ca fiind adevărată.

Se obişnuieşte ca la sfîrşitul unei demonstraţii să se noteze iniţialele: „q.e.d."[1] sau „c.c.t.d."[2]

Din acest moment avem convingerea că:

a) există un triunghi care are două unghiuri congruente, şi anume triunghiul isoscel ABC, iar unghiurile congruente sînt cele care se opun laturilor congruente;

b) nu numai triunghiul isoscel ABC are această „proprietate", ci şi „toate" triunghiurile isoscele au această „proprietate". Să reţinem deci ceea ce, de fapt, am spus şi mai înainte că o teoremă afirmă ceva nu numai despre o singură figură geometrică, ci despre toate figurile geometrice care îndeplinesc „condiţiile" din ipoteză.

Observaţia 1. Din congruenţa triunghiurilor ADC şi ADB (fig. 165) a rezultat şi congruenţa (1) ($\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ADB$). Cum aceste unghiuri congruente (ADC şi ADB) sînt şi adiacente (au vîrful comun D şi o latură comună $[DA]$) şi suplementare (unghiul CDB fiind un unghi alungit), rezultă că ele sînt unghiuri drepte ($AD \perp BC$). Constatăm deci că bisectoarea $[AD$ conţine şi înălţimea. Acest adevăr constituie o nouă *proprietate* a triunghiului isoscel. Această proprietate o formulăm cu ajutorul teoremei următoare.

[1] Iniţialele „*q.e.d.*" constituie prescurtarea cuvintelor din limba latină: *quod erat demonstrandum* = ceea ce era de demonstrat (cuvîntul „quod" se pronunţă „cvod").

[2] Iniţialele „*c.c.t.d*" constituie prescurtarea expresiei româneşti: „ceea ce trebuia demonstrat".

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este isoscel şi se consideră bisectoarea unghiului de la vîrf, atunci această bisectoare este şi înălţimea corespunzătoare bazei.

Folosind triunghiul isoscel din figura 165, ipoteza şi concluzia acestei teoreme pot fi scrise:

Ipoteza	*Concluzia*
$\triangle ABC$, $[AB] \equiv [AC]$, $D \in (BC)$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.	$AD \perp BC$.

Demonstrarea teoremei s-a făcut în cadrul observaţiei 1.

Enunţul acestei teoreme mai poate fi „scurtat" astfel: „Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vîrf include şi înălţimea corespunzătoare bazei".

Observaţia 2. Tot din congruenţa triunghiurilor ADC şi ADB (fig. 165) a rezultat şi congruenţa (2) $[CD] \equiv [BD]$. Cum aceste laturi congruente ($[CD]$ şi $[BD]$) se opun unghiurilor congruente CAD şi BAD formate de bisectoarea $[AD$ a unghiului din vîrful triunghiului isoscel, rezultă că bisectoarea $[AD$ conţine şi mediana. Acest adevăr, care reprezintă o altă *proprietate* a triunghiului isoscel, îl formulăm cu ajutorul teoremei următoare.

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vîrf include şi mediana corespunzătoare bazei.

Ipoteza şi concluzia acestei teoreme se pot scrie astfel (folosind tot figura 165):

Ipoteza	*Concluzia*
$\triangle ABC$, $[AB] \equiv [AC]$, $D \in (BC)$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.	$[BD] \equiv [CD]$.

Şi această demonstraţie a fost făcută!

Observaţia 3. Cele două proprietăţi ale triunghiului isoscel, puse în evidenţă mai sus, pot fi formulate într-una singură astfel: „Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vîrf include şi înălţimea şi mediana corespunzătoare bazei". S-a obţinut o nouă *proprietate* a triunghiurilor isoscele, descrisă de teorema următoare.

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vîrf este inclusă în mediatoarea bazei.

Folosind tot figura 165, ipoteza şi concluzia teoremei pot fi scrise:

Ipoteza	*Concluzia*
$\triangle ABC$, $[AB] \equiv [AC]$, $D \in (BC)$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.	$AD \perp BC$, $[BD] \equiv [CD]$.

Demonstraţia a fost făcută!

Probleme rezolvate

Problema 1. În figura 166, punctele D, B, C, E sînt coliniare și $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle ECA$. Să demonstrăm că, în aceste condiții, triunghiul ABC este isoscel.

Ca și în cazul teoremelor, *datele cunoscute* ale problemei constituie *ipoteza* problemei, iar *cerințele* problemei constituie *concluzia* problemei.

A rezolva o problemă înseamnă *a demonstra*, pe baza datelor din ipoteză, a teoremelor anterior demonstrate, a altor adevăruri sau „construcții“ deja cunoscute, că afirmațiile din concluzia problemei sînt adevărate.

Așadar, trebuie ca mai întîi să fixăm ipoteza și concluzia.

În cazul problemei de față, afirmația din ipoteză că „punctele D, B, C, E sînt coliniare“ trebuie completată cu „informațiile“ suplimentare, ce rezultă din desen, privind poziția punctelor (B este interior segmentului (DC) și C interior segmenului (BE)). În ceea ce privește afirmația din concluzie că „triunghiul ABC este isoscel“ sîntem nevoiți să nu o explicităm în niciun fel deorece nu putem ști de la început care dintre cele trei laturi ale triunghiului este baza.

Ipoteza
$B \in (DC)$,
$C \in (BE)$,
$A \notin DE$,
$\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle ECA$

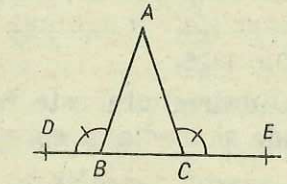


Fig. 166

Concluzia
$\triangle ABC$ este isoscel.

Rezolvarea. Punctele D, B, C fiind coliniare, unghiurile DBA și ABC sînt adiacente și suplementare (fig.166) și putem deci scrie:

(1) $m(\sphericalangle ABC) = 180° - m(\sphericalangle DBA)$.

Raționînd în mod asemănător, pentru punctele coliniare B, C, E, constatăm că și unghiurile ECA și ACB sînt adiacente și suplementare și putem deci scrie:

(2) $m(\sphericalangle ACB) = 180° - m(\sphericalangle ECA)$.

Congruența din ipoteză ($\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle ECA$) ne permite să scriem că $m(\sphericalangle DBA) = m(\sphericalangle ECA)$.

Comparînd relațiile (1) și (2) constatăm că unghiurile ABC și ACB au același suplement, deci sînt congruente ($\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$).

În concluzie putem spune că triunghul ABC, avînd două unghiuri congruente ($\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$), *conform teoremei reciproce a triunghiului isoscel*, este isoscel de bază $[BC]$ (q.e.d.)

Problema 2. Dacă D și E sînt două puncte situate pe prelungirea bazei $[BC]$ a unui triunghi isoscel ABC, astfel încît $[BD] \equiv [CE]$ și punctele D și C să fie de o parte și de alta a punctului B, iar punctele B și E să fie de o parte și de alta a punctului C, atunci triunghiul ADE este isoscel.

Ipoteza
$\triangle ABC$,
$[AB] \equiv [AC]$,
$B \in (DC)$,
$C \in (BE)$,
$[BD] \equiv [CE]$.

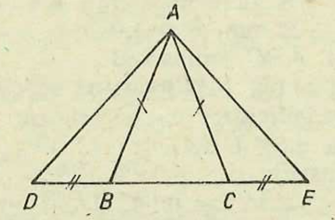


Fig. 167

Concluzia
$\triangle ADE$ este isoscel.

Rezolvarea. Folosim metoda triunghiurilor congruente. Ne fixăm atenția asupra triunghiurilor ABD și ACE (fig. 167).

Punctele D, B, C fiind coliniare, unghiurile ABD și ABC sînt adiacente și suplementare și putem deci scrie:

(1) $m(\sphericalangle ABD) = 180° - m(\sphericalangle ABC)$.

Punctele B, C, E fiind coliniare, unghiurile ACE și ACB sînt adiacente și suplementare și putem deci scrie:

(2) $m(\sphericalangle ACE) = 180° - m(\sphericalangle ACB)$.

În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), unghiurile de la bază fiind congruente, putem scrie:

(3) $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB)$.

Rezultă, din relațiile (1), (2) și (3), că unghiurile ABD și ACE au același suplement, deci sînt congruente.

(4) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$.

Constatăm că:

$[AB] \equiv [AC]$ (din ipoteză),
$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$ (s-a demonstrat mai sus (4)),
$[BD] \equiv [CE]$ (din ipoteză).

Conform cazului 1 de congruență a triunghiurilor oarecare, putem afirma că $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$.

În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente ABD și ACE li se opun laturi congruente ($[AD] \equiv [AE]$).

Conform definiției triunghiului isoscel, rezultă că $\triangle ADE$ este isoscel de bază $[DE]$ (q.e.d.).

Observați că la rezolvarea acestei probleme am folosit „toate“ adevărurile din ipoteză, dar și alte adevăruri relative la: unghiurile adiacente și suplementare, teorema reciprocă a triunghiurilor isoscele, unghiuri care au același suplement, cazurile de congruență a triunghiurilor oarecare, definiția triunghiului isoscel.

16. Exerciții și probleme

1. Justificați de ce triunghiul PQR în care: $PQ = 0{,}4$ dm și $PR = 40$ mm; b) $PQ = 5$ cm și $RQ = 0{,}05$ m; c) $RQ = 0{,}6$ m și $RP = 60$ cm; d) $RP = 101$ mm și $QP = 1{,}01$ m este isoscel.

2. Folosind, pentru laturile unui triunghi, notațiile cunoscute, spuneți dacă în triunghiul ABC există două unghiuri congruente și care sînt acelea: a) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $c = 0{,}7$ dm; b) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm; c) $a = 0{,}4$ dm, $b = 3$ cm, $c = 40$ mm; d) $a = 103$ mm, $b = 1{,}03$ dm, $c = 7$ cm.

3. Construiți triunghiul ABC cunoscînd:

1) $AB = AC = 3$ cm și m($\sphericalangle BAC$) de: a) 40°; b) 90°; c) 100°. Sînt congruente unghiurile B și C? Justificați.

2) $BC = BA = 4$ cm și m($\sphericalangle CBA$) de: a) 50°; b) 90°; c) 95°. Sînt congruente unghiurile C și A? Justificați.

3) $AB = 2{,}5$ cm și m($\sphericalangle BAC$) = m($\sphericalangle ABC$) de: a) 55°; b) 45°; c) 65. Sînt congruente laturile $[CA]$ și $[CB]$? Justificați.

4) $BC = 3$ cm și m($\sphericalangle ABC$) = m($\sphericalangle ACB$) de: a) 50°; b) 45°; c) 35°. Sînt congruente laturile $[AB]$ și $[AC]$? Justificați.

4. Un triunghi isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) are m($\sphericalangle BAC$) = 30°. Fie $D \in (BC)$, astfel încît m($\sphericalangle DAC$) = 15°. Cercetați dacă: a) m($\sphericalangle ADC$) = 90°; b) $[BD] \equiv [DC]$.

5. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), D este piciorul bisectoarei unghiului BAC. Să se calculeze: a) m($\sphericalangle B$), dacă m($\sphericalangle C$) = 38°; b) m($\sphericalangle BAC$), dacă m($\sphericalangle BAD$) = 17°50′; c) perimetrul triunghiului ABC, dacă $AB = 7$ cm și $BC = 0{,}3$ dm.

6. Se dă triunghiul isoscel MNP ($[MN] \equiv [MP]$) în care Q este piciorul bisectoarei unghiului NMP. Să se calculeze: a) lungimea segmentului $[NQ]$, dacă baza triunghiului are 9,4 cm; b) lungimea laturii $[MN]$, dacă perimetrul triunghiului este de 25 cm și lungimea segmentului $[QP]$ de 2,5 cm.

7. Se dă triunghiul PQR în care $[PQ] \equiv [PR]$ și $T \in (QR)$. a) Dacă $\sphericalangle QPT \equiv \sphericalangle RPT$ și $QR = 8$ dm, să se găsească lungimea segmentului $[TR]$. b) Dacă $\sphericalangle QPT \equiv \sphericalangle RPT$, lungimea laturii $[PQ]$ este de 12 cm și cea a segmentului $[QT]$ cît $\frac{1}{8}$ din cea a laturii $[PR]$, să se calculeze perimetrul triunghiului PQR. c) Dacă m($\sphericalangle QPR$) = 64°32′ și m($\sphericalangle TPR$) = 32°16′, să se calculeze m($\sphericalangle PTQ$).

8. Pe bisectoarea unghiului ABC se ia un punct M. Știind că $[BA] \equiv [BC]$ și că punctele A, M, C sînt colineare, cercetați dacă $BM \perp AC$.

9. În figura 168, știm că $[AB] \equiv [AC]$. Să se compare măsura unghiului B_1 cu cea a unghiului C_2.

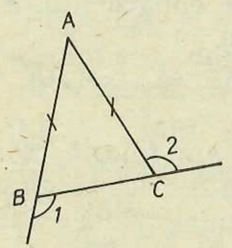


Fig. 168

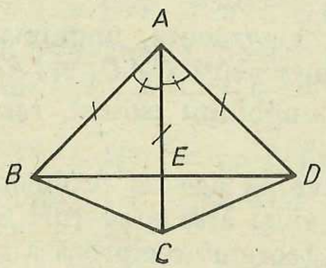


Fig. 169

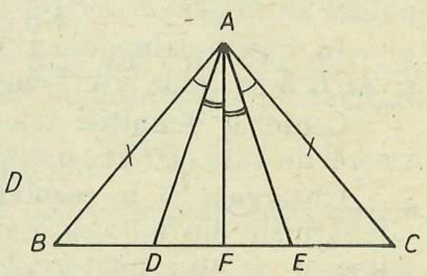


Fig. 170

10. În figura 169 se știe că $[AB] \equiv [AC] \equiv [AD]$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAD$ și $AC \cap BD = \{E\}$. Cercetați dacă: a) $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle AED$; b) $[BE] \equiv [ED]$; c) $[BC] \equiv [CD]$.

11. În figura 170 se știe că punctele B, D, F, E, C sînt colineare, că $[AB] \equiv [AC]$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$ și $\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle EAF$. Cercetați dacă: a) m($\sphericalangle AFB$) = 90°; b) $BF = \frac{1}{2} \cdot BC$; c) $[BE] \equiv [CD]$; d) $[AD] \equiv [AE]$.

12. Știm că triunghiul ABC este isoscel ($[AB] \equiv [AC]$). a) Fie $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$. Să se compare unghiul ADE cu unghiul AED, dacă $[DB] \equiv [EC]$. b) Fie $D \in (AB$ și $E \in (AC$, astfel încît $B \in (AD)$, $C \in (AE)$ și $[BD] \equiv [CE]$. Să se compare unghiul ADE cu unghiul AED. c) Fie $D \in (BA$ și $E \in (CA$, astfel încît $A \in (BD)$, $A \in (CE)$ și $[BD] \equiv [CE]$. Să se compare unghiul ADE cu unghiul AED.

13. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC = 5$ cm), $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC ($D \in (BC)$). Stabiliți dacă: a) $AD \perp BC$; b) $[BD] \equiv [DC]$; c) $BD = \frac{1}{2} \cdot BC$; d) DC este 50% din BC.

14. În figura 171 se știe că punctele B, D, F, E, C sînt colineare, că $[AB] \equiv [AC]$, $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle CAD$ și $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle CAF$. Aflați dacă: a) $\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle EAF$; b) $\sphericalangle AFB = 1$ dr; c) punctul F este mijlocul segmentului $[BC]$; d) $[AD] \equiv [AE]$.

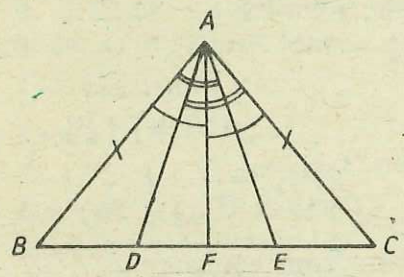


Fig. 171

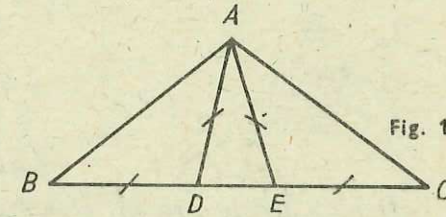


Fig. 172

15. În figura 172 punctele B, D, E, C sînt colineare și $[BD] \equiv [AD] \equiv [AE] \equiv [CE]$. Cercetați dacă triunghiul ABC este isoscel.

16. În figura 173, triunghiurile ABC și AMN sînt isoscele ($[AB] \equiv [AC]$ și $[AM] \equiv [AN]$), iar $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle MAN$. Se poate spune că $[MB] \equiv [NC]$?

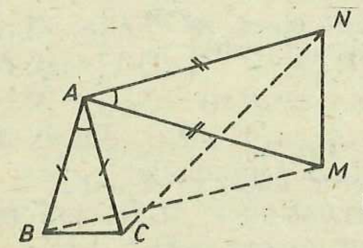


Fig. 173

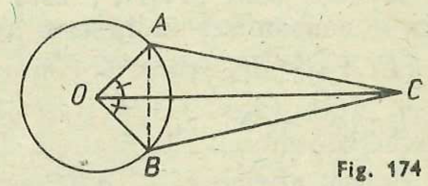


Fig. 174

17. În figura 174, punctele A și B aparțin cercului cu centrul în O, iar semidreapta $[OC$ este bisectoarea unghiului AOB și C un punct oarecare ce aparține bisectoarei unghiului AOB. Cercetați dacă triunghiul ABC este isoscel.

18. $[OA]$ și $[OB]$ sînt raze ale aceluiași cerc. Să se compare măsura unghiului OAB cu cea a unghiului OBA.

19. Fie m($\sphericalangle xOy$) = 40° și $B \in [Ox$, ($B \neq O$). Să se deseneze o dreaptă BC astfel încît punctul C să fie intersecția acestei drepte cu $[Oy$, iar $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle OCB$.

26. ALTE PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI ISOSCEL

Am demonstrat că *toate* triunghiurile isoscele au unghiurile care se opun laturilor congruente tot congruente. Este normal să ne întrebăm dacă în afară de triunghiurile isoscele, nu mai există și alte triunghiuri care să aibă două unghiuri congruente. Altfel spus: triun-

ghiurile isoscele sînt *singurele* triunghiuri care au „proprietatea" de a avea două unghiuri congruente? Vom dovedi (demonstra) că *numai* triunghiurile isoscele au această „proprietate".

Următoarea teoremă „descrie" această „nouă proprietate" a triunghiurilor isoscele:

Teoremă. Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci laturile opuse unghiurilor congruente „sînt congruente", adică este un triunghi isoscel.

De exemplu, dacă în triunghiul ABC unghiurile ABC şi ACB sînt congruente, atunci laturile $[AC]$ şi $[AB]$ sînt congruente.

Vom folosi, pentru demonstraţie, desenul din figura 175.

Ipoteza

$\triangle\, ABC$,

$\sphericalangle\, ABC \equiv \sphericalangle\, ACB$.

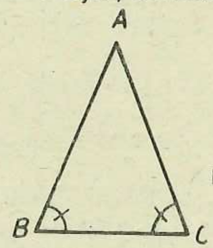


Fig. 175

Concluzia

$[AC] \equiv [AB]$.

Demonstraţia are un caracter mai special. Vom compara $\triangle\, ABC$ (cu vîrfurile în această ordine) cu $\triangle\, ACB$ (cu vîrfurile în această ordine). Este vorba, de fapt, de acelaşi triunghi ABC despre care vom spune că este „congruent cu el însuşi" (evident el este „identic" cu el însuşi). Deci:

$\sphericalangle\, ABC$ (din $\triangle\, ABC$) este congruent cu $\sphericalangle\, ACB$ (din $\triangle\, ACB$), (adevăr consemnat în ipoteza teoremei);

$[BC] = [CB]$, (latură comună);

$\sphericalangle\, ACB$ (din $\triangle\, ABC$) este congruent cu $\sphericalangle\, ABC$ (din $\triangle\, ACB$), (adevăr consemnat, de asemenea, în ipoteza teoremei).

Putem afirma că $\triangle\, ABC$ este congruent cu $\triangle\, ACB$, conform cazului al doilea de congruenţă a triunghiurilor oarecare (ULU). Triunghiurile fiind congruente, au şi celelalte trei elemente omoloage congruente, şi anume: $[AC] \equiv [AB]$, $\sphericalangle\, BAC \equiv \sphericalangle\, CAB$, $[AB] \equiv [AC]$.

Prima şi a treia dintre congruenţele demonstrate reprezintă una şi aceeaşi congruenţă şi anume congruenţa din concluzia acestei teoreme. Deci putem afirma că: $[AC] \equiv [AB]$ (q.e.d).

Vom înţelege că în afară de triunghiurile isoscele „nu mai există" triunghiuri care să aibă două unghiuri congruente (şi anume acelea care se opun laturilor congruente).

Aţi observat probabil, cu uşurinţă, că teorema demonstrată mai sus este „reciproca" teoremei enunţate la pagina 65.

Observaţie. Dacă o dată cu teorema directă este adevărată şi reciproca ei, şi dacă proprietatea descrisă de ipoteza teoremei reciproce ne conduce la figurile geometrice definite în ipoteza teoremei directe,

atunci această proprietate este *numai* a figurilor definite în ipoteza teoremei directe. O astfel de proprietate a unor figuri geometrice şi *numai* a acelor figuri geometrice se numeşte *proprietate caracteristică* a acelor figuri.

În acest sens, teorema reciprocă: „dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci laturile opuse unghiurilor congruente sînt congruente" trebuie înţeleasă astfel: „orice triunghi isoscel are proprietatea de a avea două unghiuri congruente, şi anume acelea care se opun laturilor congruente, dar numai aceste triunghiuri o au." Această proprietate este *caracteristică* triunghiurilor isoscele.

O teoremă reciprocă (a teoremei a doua de la pagina 67). **Dacă un triunghi este isoscel, atunci mediana corespunzătoare bazei este şi bisectoarea unghiului de la vîrf.**

Ipoteza

$\triangle\, ABC$, $[AB] \equiv [AC]$,

$D \in (BC)$, $[BD] \equiv [DC]$.

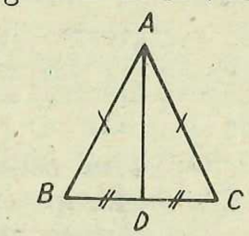


Fig. 176

Concluzia

$\sphericalangle\, BAD \equiv \sphericalangle\, CAD$.

Demonstraţia. Triunghiurile ABD şi ACD (fig. 176) sînt congruente pentru că:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [AC] \\ [BD] \equiv [DC]\end{array}\right\}\text{(din ipoteză),} \\ [AD] = [AD] \quad \text{(latură comună).}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{conform cazului 3} \\ \text{de congruenţă (LLL).}\end{array}$$

În triunghiurile congruente ABD şi ACD, laturilor congruente ($[BD]$ şi $[DC]$) li se opun unghiuri congruente: $\sphericalangle\, BAD \equiv \sphericalangle\, CAD$ (q.e.d.).

Observăm, în continuare, că, pe baza primei teoreme de la pagina 67 (într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului de la vîrf include şi înălţimea corespunzătoare bazei) putem afirma că „mediana este şi înălţime".

Această nouă „proprietate" a triunghiurilor isoscele o enunţăm cu ajutorul următoarei teoreme.

Teoremă reciprocă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci mediana corespunzătoare bazei lui include şi înălţimea corespunzătoare bazei triunghiului.

Demonstraţia a fost făcută!

Altă teoremă reciprocă (a primei teoreme de la pagina 67). **Dacă un triunghi este isoscel, atunci înălţimea corespunzătoare bazei include şi bisectoarea unghiului de la vîrf.**

Ipoteza

$\triangle ABC$,
$[AB] \equiv [AC]$,
$D \in (BC)$,
$AD \perp BC$.

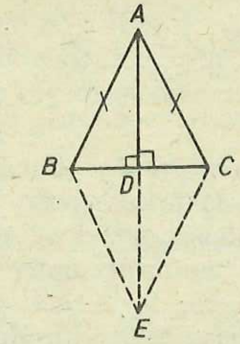


Fig. 177

Concluzia

$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.

Demonstrația. Am scris în ipoteză că triunghiul ABC este isoscel ($[AB] \equiv [AC]$). Aceasta înseamnă că, în cele ce urmează, putem folosi toate informațiile deduse direct din acest fapt, toate concluziile teoremelor demonstrate pînă acum.

Facem o „construcție" ajutătoare: „prelungim" segmentul AD cu un segment DE congruent cu el ($[AD] \equiv [DE]$) (fig. 177).

Din faptul că:

$$\left.\begin{array}{ll} [AD] \equiv [ED] & \text{(din construcție)}, \\ \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle EDC & \text{(din ipoteză } (AD \perp BC)), \\ [DC] = [DC] & \text{(latură comună).} \end{array}\right\}$$

Rezultă că $\triangle ADC \equiv \triangle EDC$ (LUL).

Din congruența triunghiurilor ADC și EDC, astfel demonstrată, rezultă că: (1) $[AC] \equiv [EC]$ (pentru că se opun unghiurilor congruente ADC și EDC).

Deci $\triangle ACE$ este isoscel.

În mod asemănător se demonstrează congruența $\triangle ADB \equiv \triangle EDB$. Din această congruență rezultă: (2) $[AB] \equiv [EB]$ (pentru că se opun unghiurilor congruente ADB și EDB). Deci $\triangle ABE$ este isoscel.

Din ipoteză ($[AB] \equiv [AC]$) și din congruențele (1) și (2) demonstrate, rezultă că $[AB] \equiv [AC] \equiv [EC] \equiv [EB]$.

Am demonstrat astfel că triunghiurile isoscele ABE și ACE sînt congruente, avînd latura $[AE]$ comună (cazul 3 de congruență — LLL) și deci unghiurile de la baze sînt congruente; deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ și deci $[AD$ este bisectoarea unghiului de la vîrful triunghiului dat, care este $\sphericalangle BAC$ (q.e.d.).

Observația 1. Toate proprietățile triunghiurilor isoscele care se referă la bisectoarea unghiului format de laturile congruente (teoreme directe și teoreme reciproce) cît și la mediana corespunzătoare bazei, pot fi enunțate într-o singură propoziție:

Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea interioară corespunzătoare unghiului de la vîrf, înălțimea corespunzătoare bazei și mediana corespunzătoare bazei se confundă.

Putem ilustra grafic această afirmație prin schema din figura 178.

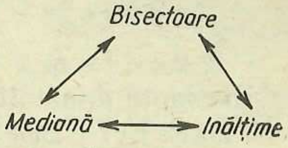


Fig. 178

Observația 2. Sîntem în măsură acum să dăm o altă metodă de a determina mijlocul unui segment. Să luăm de exemplu segmentul $[AB]$ din figura 179.

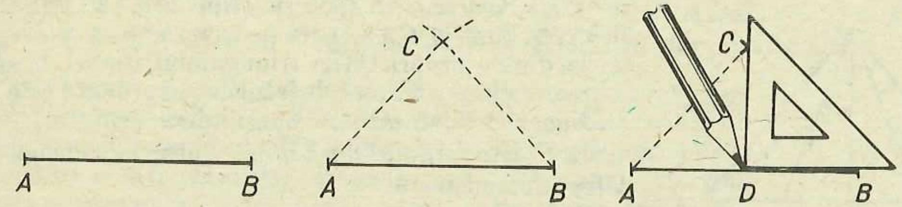


Fig. 179

Construim, cu ajutorul compasului și al riglei negradate, un triunghi isoscel de bază $[AB]$, așa cum am procedat la pagina 64 (fig. 164). Fie C vîrful opus bazei $[AB]$. Cu ajutorul echerului desenăm înălțimea CD a triunghiului ($D \in (AB)$). Triunghiul CAB fiind isoscel, înălțimea corespunzătoare bazei se confundă cu mediana corespunzătoare bazei, deci $[AD] \equiv [DB]$. În acest fel am găsit mijlocul segmentului fără a folosi măsurarea cu rigla gradată. (Mai există și alte procedee de a găsi mijlocul unui segment, fără a folosi echerul.)

* * *

Cu ajutorul teoremelor „directe" sau „reciproce" am enunțat unele din „proprietățile" triunghiurilor isoscele.

Le recapitulăm acum, formulîndu-le astfel:

1. Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile opuse laturilor congruente sînt congruente și reciproc: dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci laturile opuse unghiurilor congruente sînt congruente (proprietate caracteristică).

2. Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vîrf este și înălțimea corespunzătoare bazei și reciproc: **dacă un triunghi este isoscel, atunci înălțimea corespunzătoare bazei este și bisectoarea unghiului de la vîrf.**

3. Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vîrf este și mediana corespunzătoare bazei și reciproc: **dacă un triunghi este isoscel, atunci mediana corespunzătoare bazei este și bisectoarea unghiului de la vîrf.**

4. Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarea unghiului de la vîrf este și mediatoarea corespunzătoare bazei.

5. Teoremă. Dacă un triunghi este isoscel, atunci mediana corespunzătoare bazei este și înălțimea corespunzătoare bazei.

Probleme rezolvate

Problema 1. În figura 180, punctele D, B, C, E sînt colineare și distincte două cîte două, iar segmentele $[AB]$ și $[AC]$ sînt congruente. Dacă $[AF$, bisectoarea unghiului BAC, $(F \in (BC))$ este și bisectoarea unghiului DAE, atunci segmentele $[BC]$ și $[DE]$ au același mijloc și anume punctul F.

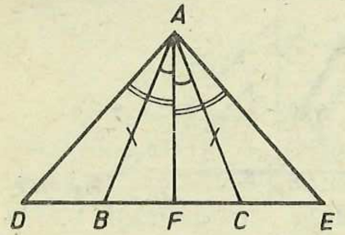


Fig. 180

Rezolvarea. Din ipoteză știm că $[AB] \equiv [AC]$ și $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle CAF$, ceea ce înseamnă că potrivit uneia dintre proprietățile triunghiului isoscel bisectoarea unghiului format de laturile congruente este și mediana corespunzătoare bazei, deci: $[BF] \equiv [FC]$, adică F este mijlocul lui $[BC]$ — prima „concluzie" a fost demonstrată.

Pentru a demonstra și a doua „concluzie" va fi nevoie să demonstrăm că și triunghiul ADE este isoscel de bază $[DE]$.

Observăm că unghiurile DAB și BAF sînt unghiuri adiacente, iar unghiul DAB este un „unghi diferență", ceea ce ne permite să scriem:

(1) $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle DAF) - m(\sphericalangle BAF)$.

Cum $[AF$ este bisectoare comună unghiurilor BAC și DAE, relația (1) poate fi scrisă: (1') $m(\sphericalangle DAB) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle DAE) - \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BAC)$.

De asemenea, unghiurile EAC și CAF sînt unghiuri adiacente și unghiul EAC tot un „unghi diferență", deci putem scrie:

(2) $m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle EAF) - m(\sphericalangle CAF)$.

Din aceleași motive, specificate mai sus ($[AF$ bisectoare comună), putem scrie: (2') $m(\sphericalangle EAC) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle DAE) - \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BAC)$.

Comparînd relațiile (1') și (2'), constatăm că: (3) $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle EAC$.

În plus, mai avem: (4) $[AB] \equiv [AC]$ (din ipoteză), (5) $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle ECA$ (fiind suplemente ale unghiurilor congruente ABC și ACB de la baza triunghiului isoscel ABC).

Congruențele (3), (4), (5) pun în evidență congruența triunghiurilor ABD și ACE (ULU), în care $[AD] \equiv [AE]$ (pentru că se opun unghiurilor congruente DBA și ECA). Rezultă deci că $\triangle ADE$ este isoscel de bază $[DE]$ și astfel și a doua „concluzie" a fost demonstrată.

Problema 2. În figura 181, știm că următoarele elemente sînt congruente: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle CDA$. Să se demonstreze că dreapta AD este mediatoarea segmentului $[BC]$.

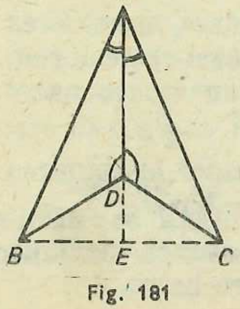


Fig. 181

Completam mai întîi desenul prelungind segmentul $[AD]$ și notînd $AD \cap BC = \{E\}$.

Rezolvarea. Observăm că în $\triangle ABC$, $[AE$ este bisectoarea unghiului BAC (din ipoteză).

Gîndim astfel: dacă triunghiul ABC ar fi isoscel de bază $[BC]$, atunci bisectoarea unghiului BAC ar fi și mediatoarea laturii $[BC]$, adică tocmai ceea ce ar trebui să demonstrăm. Rămîne deci de demonstrat că triunghiul ABC este isoscel.

Comparăm triunghiurile ADB și ADC. Ele sînt congruente conform cazului 2 de congruență (ULU) deoarece: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, (din ipoteză), $[AD] = [AD]$ (latură comună), $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle CDA$ (din ipoteză).

Unghiurilor congruente BDA și CDA li se opun laturi respectiv congruente $[AB]$ și $[AC]$. Triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$ și deci: $[BE] \equiv [EC]$, $AE \perp BC$ (AE este mediatoarea segmentului $[BC]$) (q.e.d.).

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel ($[AB] \equiv [AC]$) și $AD \perp BC$ $(D \in (BC))$. Dacă $\sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle ADR$, unde $P \in (AB)$ și $R \in (AC)$, atunci dreptele AD și PR sînt perpendiculare.

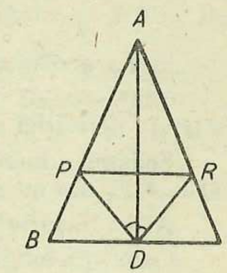


Fig. 182

Rezolvarea. a) Știm din datele problemei că triunghiul ABC este isoscel și că $[AD]$ este înălțimea acestui triunghi corespunzătoare bazei $[BC]$ (fig. 182). Conform unei proprietăți a triunghiurilor isoscele, înălțimea unui triunghi isoscel corespunzătoare bazei este și bisectoarea unghiului de la vîrf. Așadar, $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC și scriem: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. (1)

Deoarece $P \in (AB)$ și $R \in (AC)$ — din ipoteză — relația (1) poate fi scrisă: $\sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle RAD$. (1')

b) Comparăm triunghiurile ADP și ADR. Relația (1'), faptul că $[AD]$ este latură comună și $\sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle ADR$ (din ipoteză) dovedesc că cele două triunghiuri sînt congruente (ULU). În aceste triunghiuri congruente $[AP]$ și $[AR]$ sînt laturi omoloage, deci putem scrie:

$[AP] \equiv [AR]$. (2)

c) Din relația (2) deducem că triunghiul APR este isoscel (definiție). Or, în acest triunghi $[AD$ este bisectoarea unghiului de la vîrf PAR (conform relației (1) și ipotezei).

Deoarece într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului de la vîrf este și înălțimea triunghiului corespunzătoare bazei (proprietate), rezultă adevărul că $AD \perp PR$ (q.e.d.).

Problema 4. Fie ABC un triunghi isoscel ($[AB] \equiv [AC]$) și $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încît $[BD] \equiv [CE]$.

Dacă P este mijlocul lui $[BC]$, S mijlocul lui $[DE]$ și $\{R\} = BE \cap CD$, atunci:

a) Dreapta PR este bisectoarea unghiului BRC.

b) Dreapta RS este perpendiculară pe dreapta DE.

c) Punctele P, R, S sînt colineare.

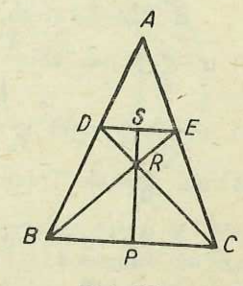


Fig. 183

Rezolvarea. Observăm că în $\triangle BRC$, $[RP]$ este mediana corespunzătoare laturii $[BC]$, iar în $\triangle DRE$, $[RS]$ este mediana corespunzătoare laturii $[DE]$ (din ipoteză) (fig. 183).

Gîndim astfel: dacă triunghiurile BRC și DRE ar fi isoscele, atunci $[RP$ ar fi bisectoarea unghiului BRC, iar $[RS]$ ar fi înălțimea triunghiului DRE corespunzătoare laturii $[DE]$, adică tocmai ceea ce ar trebui de demonstrat (a și b). Rămîne deci să demonstrăm că triunghiurile BRC și DRE sînt isoscele.

a) Ne fixăm atenția asupra triunghiurilor BDC și CEB. Ele sînt congruente deoarece: $[BD] \equiv [CE]$ (din ipoteză), unghiurile DBC și ECB sînt congruente, fiind unghiurile de la baza triunghiului isoscel dat ABC, iar $[BC]$ este latura lor comună (LUL).

În triunghiuri congruente, laturilor congruente ($[BD]$ și $[CE]$) li se opun unghiuri respectiv congruente: $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle CBE$ (1), iar unghiurilor congruente (CBD și BCE) li se opun laturi respectiv congruente $[CD] \equiv [BE]$. (2)

Din relația (1) deducem că $\triangle RBC$ este isoscel (conform teoremei reciproce a triunghiului isoscel) și anume: $[RB] \equiv [RC]$. (3)

Cum în triunghiul isoscel BRC, $[RP]$ este mediana corespunzătoare bazei $[BC]$ (din ipoteză), rezultă că $[RP$ este și bisectoarea unghiului BRC (proprietate) și astfel prima concluzie este demonstrată. De aici avem:

$$\sphericalangle BRP \equiv \sphericalangle CRP \quad (4)$$

b) În continuare, demonstrăm că și triunghiul DRE este isoscel.

Congruențele (2) și (3) le putem scrie ca egalități ale lungimilor segmentelor (potrivit definiției congruenței segmentelor): $CD = BE$ și $RC = RB$.

Scăzînd, membru cu membru, obținem: $CD - CR = BE - BR$, adică $RD = RE$, sau încă $[RD] \equiv [RE]$. (5)

Acest rezultat exprimă că triunghiul RDE este isoscel (definiție).

Cum în triunghiul RDE, $[RS]$ este mediană (din ipoteză), ea va fi și înălțimea acestui triunghi corespunzătoare laturii $[DE]$ (proprietate). Scriem acest lucru astfel: $RS \perp DE$ (6) deci, și a doua concluzie a fost demonstrată.

c) Pentru a demonstra ultima concluzie, observăm că în triunghiul isoscel RDE, mediana $[RS]$ este și bisectoarea unghiului DRE (proprietate), adică $\sphericalangle DRS \equiv \sphericalangle ERS$ (7). Observăm, de asemenea, că: $\sphericalangle DRB \equiv \sphericalangle ERC$, (8) fiind opuse la vîrf (din ipoteză).

Să considerăm sumele:

$$m(\sphericalangle SRD) + m(\sphericalangle DRB) + m(\sphericalangle BRP) \text{ și}$$
$$m(\sphericalangle SRE) + m(\sphericalangle ERC) + m(\sphericalangle CRP).$$

Conform relațiilor (4), (7) și (8), aceste sume sînt egale. Deoarece suma măsurilor tuturor acestor șase unghiuri este egală cu 360° (fiind unghiuri formate în jurul punctului R), rezultă că fiecare dintre aceste două sume este egală cu 180° și deci unghiul SRP este un unghi alungit, ceea ce este tot una cu faptul că punctele P, R, S sînt coliniare, sau că punctul R aparține dreptei PS (q.e.d.).

● 17. Exerciții și probleme

1. Justificați de ce triunghiul PQR în care: a) $m(\sphericalangle Q) = 28°35'16''$ și $m(\sphericalangle R) = 27°94'76''$, b) $m(\sphericalangle P) = 26°15'25''$ și $m(\sphericalangle R) = 25°75'25''$, c) $m(\sphericalangle P) = 45°$ și $m(\sphericalangle Q) = 43°119'60''$ este isoscel.

2. Un triunghi MNP are: a) $m(\sphericalangle M) = 40°$ și $m(\sphericalangle N) = 2 \cdot 19°59'60''$, b) $m(\sphericalangle M) = 30°$ și $m(\sphericalangle P) = \frac{1}{3} \cdot 1$ dr, c) $m(\sphericalangle P) = 45°$ și $m(\sphericalangle M) = \frac{1}{2} \cdot 1$dr, d) $m(\sphericalangle P) = 60°$ și $(m\sphericalangle N) = \frac{2}{3} \cdot 1$ dr. Este isoscel acest triunghi? Care dintre laturile lui sînt congruente?

3. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $D \in (BC)$. Dacă $BD = \frac{1}{2} \cdot BC$ și $m(\sphericalangle DAC) = 20°$, aflați: a) $m(\sphericalangle BAC)$; b) $m(\sphericalangle ADC)$.

4. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $M \in (BC)$. Dacă $BC = 8$ cm, $m(\sphericalangle AMC) = 90°$ și $m(\sphericalangle BAM) = 40°$, aflați: a) $m(\sphericalangle MAC)$; b) lungimea segmentului $[BM]$.

5. În triunghiul isoscel MNP ($[NM] \equiv [NP]$), $A \in (MP)$. Dacă $[MA] \equiv [AP]$ și $m(\sphericalangle MNA) = 35°$, aflați: a) $m(\sphericalangle MNP)$; b) $m(\sphericalangle MAN)$.

6. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), D este piciorul medianei corespunzătoare bazei. Să se calculeze: a) lungimea segmentului $[BD]$, dacă $BC = 0{,}3$ m; b) $m(\sphericalangle BAC)$, dacă $m(\sphericalangle DAC) = 18°50'$; c) perimetrul triunghiului ABC, dacă $AB = 7{,}5$ cm și $BD = 2$ cm.

7. Se dă triunghiul MNP în care $[MN] \equiv [MP]$ și $R \in (NP)$. Să se calculeze: a) $m(\sphericalangle NMR)$, dacă $m(\sphericalangle NMP) = 65°$ și $MR \perp NP$; b) $m(\sphericalangle NMP)$, dacă $m(\sphericalangle RMN) = 28°45'$ și $[NR] \equiv [RP]$; c) perimetrul triunghiului MNP, dacă $MP = 9$ cm, $MN = 3 \cdot NR$ și $[NR] \equiv [RP]$.

8. Se dă triunghiul PQR în care $[PQ] \equiv [PR]$ și $T \in (QR)$. Să se calculeze: a) $m(\sphericalangle QPR)$, dacă $QT = 5$ cm, $TR = 0{,}05$ m și $m(\sphericalangle TPR) = 32°16'25''$; b) $m(\sphericalangle PTR)$, dacă $QR = 12$ cm și $TR = 6$ cm.

9. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) din figura 184 ducem medianele $[BB']$ și $[CC']$. Stabiliți dacă: a) $\sphericalangle ABB' \equiv \sphericalangle ACC'$; b) Comparați unghiurile $B'BC$ și $C'CB$; c) Demonstrați congruența medianelor desenate. (Acest rezultat poate fi folosit și în alte probleme.); d) Notînd $\{G\} = BB' \cap CC'$, ce fel de triunghi este $\triangle GBC$? e) Comparați triunghiurile GBC' și GCB'.

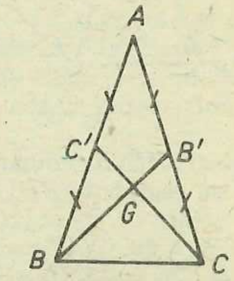


Fig. 184

10. Într-un triunghi isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se duce bisectoarea $[AD]$. Știind că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 18 cm, iar perimetrul triunghiului ABD este 12 cm, să se calculeze lungimea bisectoarei $[AD]$.

11. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) cu $AB = 14$ cm și $BC = 8$ cm. Punctul D este mijlocul laturii $[AB]$. Se construiește perpendiculara pe AB în D, care intersectează dreapta BC în E. Știind că perimetrul triunghiului AEC este de 32 cm, să se calculeze lungimea segmentului AE.

12. Fie xOy un unghi și P un punct pe bisectoarea lui. Perpendiculara din P pe bisectoarea $[OP$ intersectează laturile $[Ox$ și $[Oy$ în punctele A și B (fig. 185). Cercetați dacă $[OA] \equiv [OB]$.

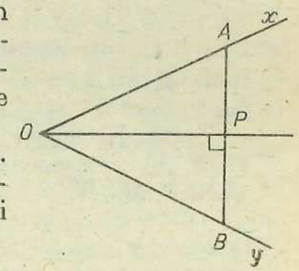


Fig. 185

13. În triunghiurile isoscele AOB și COD, $[OE$ este bisectoarea unghiurilor AOB și COD (fig. 186). Să se demonstreze că $[AC] \equiv [BD]$ și $[AD] \equiv [BC]$.

14. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), M și N sînt două puncte ce aparțin laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ astfel încît $[AM] \equiv [AN]$ și D piciorul înălțimii din A (fig. 187). Cercetați dacă triunghiul MND este isoscel.

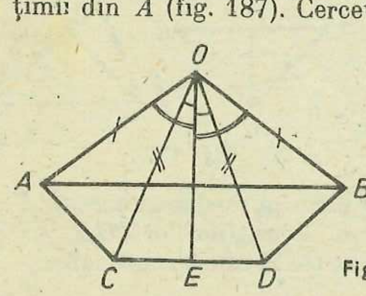


Fig. 186

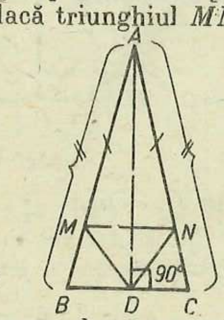


Fig. 187

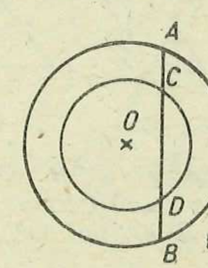


Fig. 188

15. În figura 188 sînt desenate două cercuri concentrice cu centru O. Segmentul $[AB]$ are capetele pe cercul cu raza mare și intersectează cercul cu raza mică în C și D. Să se arate că:

a) segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc; b) segmentele $[AC]$ și $[BD]$ sînt congruente.

16. Perpendiculara în A pe latura $[AB]$ a unui triunghi isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) intersectează dreapta BC în M, iar perpendiculara în A pe latura $[AC]$ intersectează pe BC în N. Să se demonstreze că $[BM] \equiv [CN]$ și că triunghiul AMN este isoscel.

17. Într-un triunghi isoscel bisectoarele interioare ale unghiurilor congruente sînt segmente congruente. (Această propoziție se poate folosi ca adevăr cunoscut în rezolvarea altor probleme.)

18. În figura 189 $\triangle ABC$ este isoscel ($[AB] \equiv [AC]$) și $\triangle ACD$, de asemenea, tot isoscel ($[AC] \equiv [AD]$). Să se demonstreze că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB$.

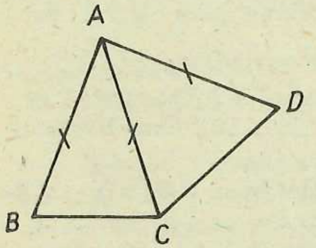


Fig. 189

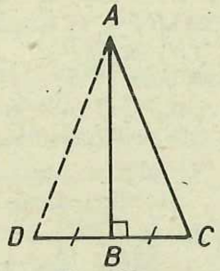


Fig. 190

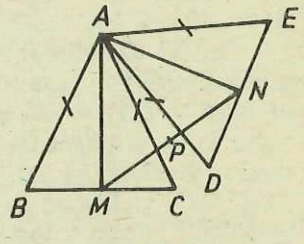


Fig. 191

19. Triunghiul ABC este dreptunghic în B. Se prelungește latura $[CB]$ cu un segment $[BD]$ congruent cu ea ($[CB] \equiv [BD]$), ca în figura 190. Să se demonstreze că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CAB$.

20. În figura 191, triunghiurile ABC și ADE sînt isoscele și congruente ($[AB] \equiv [AC] \equiv [AD] \equiv [AE]$ și $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAE$), iar $[AM$ și $[AN$ sînt bisectoarele unghiurilor de la vîrfuri ($M \in (BC)$ și $N \in (DE)$). Fie P mijlocul segmentului $[MN]$. Să se demonstreze că AP și MN sînt perpendiculare.

21. Într-un cerc cu centrul în O se duc razele $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, $[OD]$ astfel încît $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ (fig. 192). Fie M mijlocul lui $[AD]$ și N mijlocul lui $[BC]$. Să se demonstreze că punctele O, M, N sînt colineare.

22. În figura 193 $[AB] \equiv [AC]$, punctele B, A, N sînt colineare și punctele C, A, M, de asemenea, sînt colineare. Dacă $AD \perp BC$ și $[AE$ este bisectoarea unghiului MAN. Să se demonstreze că punctele D, A, E sînt colineare.

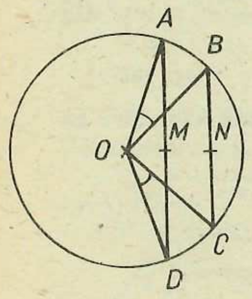


Fig. 192

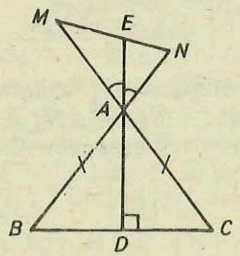


Fig. 193

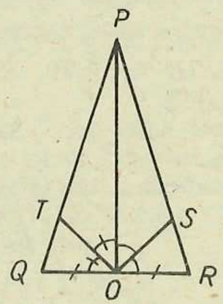


Fig. 194

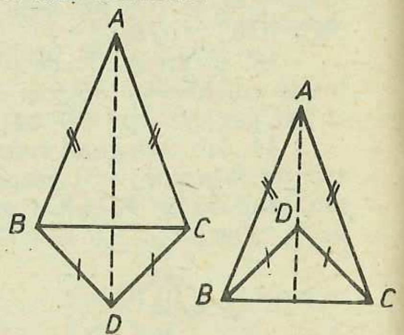


Fig. 195

23. Fie PQR un triunghi în care $[PQ] \equiv [PR]$, O piciorul medianei corespunzătoare laturii $[QR]$, iar $[OS]$ și $[OT]$ bisectoarele interioare ale unghiurilor POR, respectiv POQ (fig. 194). Să se demonstreze că triunghiul OST este dreptunghic și isoscel.

24. Două triunghiuri isoscele ABC și BCD au aceeași bază $[BC]$ ($A \neq D$). Să se demonstreze că $AD \perp BC$. (Construcția triunghiurilor poate fi realizată în două moduri (fig. 195); faceți demonstrația în ambele cazuri.)

25. Pe laturile congruente $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului isoscel ABC se iau punctele M și respectiv N, astfel încît $[AM] \equiv [AN]$. Fie $\{P\} = BN \cap CM$. Să se demonstreze că $AP \perp BC$.

26. Fie $[AD]$ înălțimea triunghiului ascuțitunghic ABC ($D \in (BC)$). Dacă $DC = 3 \cdot BD$ și M este mijlocul laturii $[BC]$, să se demonstreze că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle \equiv AMB$.

27. În triunghiul ABC, în care $AB < BC$, se consideră bisectoarea $[BD$ a unghiului ABC și perpendiculara din A pe BD, care intersectează pe BC în E. Să se demonstreze că $[AB] \equiv [BE]$.

* * *

Următoarele teoreme reciproce au demonstrații foarte simple, pe care le puteți face și singuri.

28. Dacă într-un triunghi bisectoarea unui unghi este și înălțime, triunghiul este isoscel.

29. Dacă într-un triunghi înălțimea corespunzătoare unei laturi este și mediană, triunghiul este isoscel.

30. Dacă într-un triunghi mediana, corespunzătoare unei laturi este și bisectoare a unghiului opus aceleiași laturi, triunghiul este isoscel. (Indicație: pe dreapta în care este inclusă mediana, considerați un segment congruent cu ea.)

Aceste trei probleme (teoreme reciproce) constituie proprietăți caracteristice ale triunghiurilor isoscele.

Afirmațiile din problemele 29 și 30 rămîn valabile și în cazul în care, în loc de „mediană", s-ar pune „mediatoare".

27. TRIUNGHIUL ECHILATERAL

Am definit, la pagina 45, *triunghiul echilateral*. Ne propunem acum să învățăm cum se construiește un triunghi echilateral și să studiem apoi „proprietățile" lui.

Așa cum s-a arătat în prima parte a acestui manual, triunghiul echilateral este un triunghi isoscel „particular". Particularitatea lui constă în aceea că „baza" triunghiului este și ea congruentă cu „laturile congruente". La construcția unui triunghi echilateral vom pleca deci de la construcția unui triunghi isoscel și anume: desenăm un segment oarecare $[AB]$ (fig. 196,*a*) pe care să-l considerăm „bază" a triunghiului. În continuare, luăm în deschiderea compasului o distanță egală cu lungimea segmentului AB, fixăm acul compasului în punctul A și desenăm un cerc. Apoi, mutăm acul compasului în punctul B

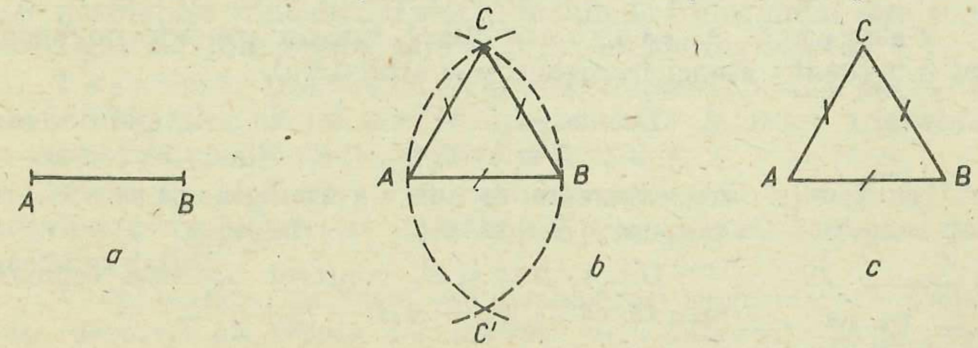


Fig. 196

și, cu aceeași deschidere, descriem un alt cerc și notăm punctele de intersecție ale celor două cercuri — de exemplu cu C și C' (fig. 196,*b*). Deoarece în timpul construcției deschiderea compasului a rămas nemodificată (cercurile desenate au aceeași rază), putem scrie: $AC = AB$ (raze în cercul de centru A) și $BA = BC$ (raze în cercul de centru B). Conform proprietății de tranzitivitate[1)] a egalității numerelor raționale (studiată în clasa a V-a), putem scrie $AC = AB = BC$. Cum egalitatea lungimilor unor segmente definește congruența segmentelor, putem scrie $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$. (Relația de congruență are proprietatea de tranzitivitate.) Deci triunghiul determinat de punctele A, B, C este un triunghi echilateral (fig. 196,*c*).

Observații

1. Oricare latură a triunghiului echilateral este o „bază" a lui.
2. Triunghiul echilateral fiind un triunghi isoscel, înseamnă că toate proprietățile triunghiului isoscel sînt și proprietăți ale triunghiului echilateral. De asemenea, proprietățile liniilor importante din triunghiul isoscel sînt și proprietăți ale liniilor importante din triunghiul echilateral.

Din compararea definiției triunghiului isoscel cu cea a triughiului echilateral observăm că în timp ce triunghiul isoscel are *numai două* laturi congruente, triunghiul echilateral are *toate laturile* congruente între ele. De aici rezultă noi proprietăți ale triunghiului echilateral. De exemplu, următoarea proprietate:

T e o r e m ă. Unghiurile unui triunghi echilateral sînt congruente.

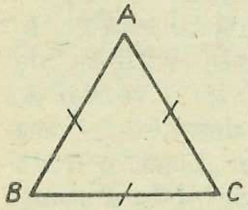


Fig. 197

Demonstrația. Fie ABC un triunghi echilateral ($[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$), (fig. 197). Din $[AB] \equiv [BC]$ rezultă, conform teoremei directe a triunghiului isoscel, că: $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A$.

Din $[BC] \equiv [CA]$, conform aceleiași teoreme, rezultă că: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

Conform proprietății de tranzitivitate a relației de congruență rezultă: $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ (q.e.d.).

T e o r e m ă r e c i p r o c ă. Dacă într-un triunghi unghiurile sînt congruente, atunci triunghiul este echilateral.

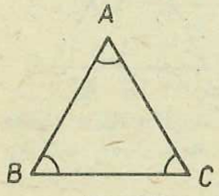


Fig. 198

Demonstrația. Fie ABC un triunghi în care $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (fig. 198). Din $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ conform teoremei reciproce a triunghiului isoscel, rezultă că: $[BC] \equiv [CA]$ (1).

Din $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, conform aceleiași teoreme, rezultă că: $[CA] \equiv [AB]$ (2).

1) Cuvîntul „*tranzitivitate*" vine din limba latină: *transitus* = trecere, schimbare.

Conform proprietății de tranzitivitate a relației de congruență, din congruențele (1) și (2) rezultă: $[BC] \equiv [CA] \equiv [AB]$ (q.e.d.).

Să reținem că proprietatea unui triunghi de a avea toate unghiurile congruente o are numai triunghiul echilateral (este o proprietate caracteristică).

28. ALTE PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Următoarele proprietăți ale triunghiurilor echilaterale sînt proprietățile liniilor importante din triunghiurile echilaterale. Vom demonstra următoarele teoreme.

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarele unghiurilor triunghiurilor sînt și medianele laturilor triunghiului (opuse unghiurilor respective).

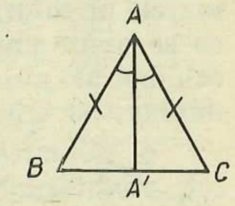


Fig. 199

Demonstrația

Fie triunghiul echilateral ABC (fig. 199) pe care îl considerăm isoscel, astfel: $[AB] \equiv [AC]$ și *repetăm* demonstrația făcută la triunghiul isoscel (la pagina 67). Deci bisectoarea unghiului BAC este și mediana laturii $[BC]$.

Apoi, considerăm triunghiul ca fiind isoscel astfel: $[BA] \equiv [BC]$ și deducem că bisectoarea unghiului B este și mediana laturii $[AC]$. În sfîrșit, considerîndu-l isoscel: $[CB] \equiv [CA]$, deducem că bisectoarea unghiului C este și mediana laturii $[AB]$.

În acest fel teorema este demonstrată.

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci medianele laturilor triunghiului sînt și bisectoarele unghiurilor triunghiului (opuse laturilor respective).

Observați că această propoziție este reciproca teoremei precedente. Pentru a dovedi că această propoziție reciprocă este o teoremă, vă propunem ca temă să dovediți, printr-o demonstrație, că ea este adevărată.

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarele unghiurilor triunghiului sînt și înălțimile triunghiului corespunzătoare laturilor triunghiului care se opun unghiurilor respective.

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarele unghiurilor triunghiului sînt și mediatoarele laturilor triunghiului care se opun unghiurilor respective.

T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci medianele laturilor triunghiului sînt și înălțimile triunghiului, corespunzătoare acelorași laturi.

Vă propunem, ca temă, să demonstrați singuri aceste proprietăți, deoarece ele repetă demonstrații deja cunoscute de la „triunghiurile isoscele".

Cu ajutorul teoremelor „directe" sau „reciproce" am enunţat unele din „proprietăţile" triunghiurilor echilaterale. Le recapitulăm acum, formulîndu-le astfel:

1. **T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci el are toate unghiurile congruente şi reciproc: dacă într-un triunghi toate unghiurile sînt congruente, atunci triunghiul este echilateral** (proprietate caracteristică).

2. **T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarele unghiurilor triunghiului sînt şi înălţimile triunghiului corespunzătoare laturilor ce se opun unghiurilor respective şi reciproc: dacă un triunghi este echilateral, atunci înălţimile triunghiului sînt şi bisectoarele unghiurilor triunghiului.**

3. **T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarele unghiurilor triunghiului sînt şi medianele laturilor triunghiului ce se opun unghiurilor respective şi reciproc: dacă un triunghi este echilateral, atunci medianele laturilor triunghiului sînt şi bisectoarele unghiurilor triunghiului ce se opun laturilor respective.**

4. **T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarele unghiurilor triunghiului sînt şi mediatoarele laturilor triunghiului ce se opun unghiurilor respective.**

5. **T e o r e m ă. Dacă un triunghi este echilateral, atunci medianele laturilor triunghiului sînt şi înălţimile triunghiului corespunzătoare aceloraşi laturi.**

* * *

Dacă notăm cu T mulţimea tuturor triunghiurilor, cu T_i mulţimea tuturor triunghiurilor isoscele şi cu T_e mulţimea tuturor triunghiurilor echilaterale, putem reprezenta într-un desen (fig. 200) următoarea incluziune: $T_e \subset T_i \subset T$.

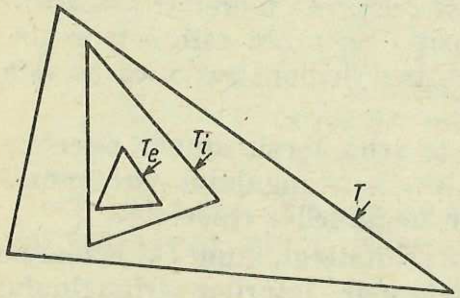


Fig. 200

Vom înţelege că oricare ar fi triunghiul echilateral T_e, el este şi triunghi isoscel T_i şi, evident, este triunghi T. Vom mai înţelege şi faptul că oricare ar fi proprietatea triunghiului isoscel T_i, ea este şi proprietate a triunghiului echilateral T_e, dar că acesta din urmă are şi alte proprietăţi pe care nu le are triunghiul isoscel.

P r o b l e m e   r e z o l v a t e

P r o b l e m a 1. Fie O un punct interior triunghiului echilateral ABC. Să se demonstreze că dacă $[OA] \equiv [OB] \equiv [OC]$, atunci bisectoarele unghiurilor AOB, BOC, COA sînt mediatoarele laturilor triunghiului ABC.

Rezolvarea. Triunghiul OAB — de exemplu — este isoscel (fig. 201) deoarece $[OA] \equiv [OB]$ (din ipoteză), iar unghiul de la vîrf este AOB. Conform unei proprietăţi a triunghiurilor isoscele, bisectoarea unghiului AOB este şi mediana şi înălţimea corespunzătoare laturii $[AB]$, deci este mediatoarea laturii $[AB]$.

În mod analog se demonstrează că bisectoarele unghiurilor BOC şi COA sînt şi mediatoarele laturilor $[BC]$, respectiv $[CA]$ (q.e.d.).

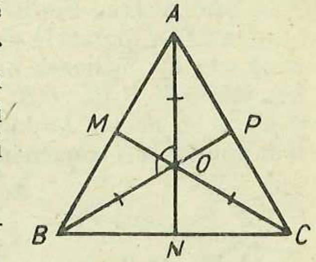


Fig. 201

P r o b l e m a 2. Fie M şi N mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[CA]$ ale unui triunghi echilateral ABC, iar O intersecţia dreptelor AM şi BN. Demonstraţi că triunghiul BOC este isoscel.

Rezolvarea. Triunghiul ABC (fig. 202) fiind echilateral (din ipoteză), conform unei proprietăţi a triunghiurilor echilaterale, mediana $[AM]$ corespunzătoare laturii $[BC]$ este şi înălţimea corespunzătoare aceleiaşi laturi $[BC]$ şi deci $m(\sphericalangle OMB) = m(\sphericalangle OMC) = 90°$.

Constatăm că triunghiurile OBM şi OCM sînt congruente pentru că: $[BM] \equiv [CM]$ (din ipoteză), $\sphericalangle OMB \equiv \sphericalangle OMC$ (s-a demonstrat mai sus) şi $[OM] = [OM]$ latură comună (LUL). În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente OMB şi OMC li se opun laturi care sînt tot congruente: $[OB] \equiv [OC]$. Deci triunghiul BOC este isoscel (q.e.d.).

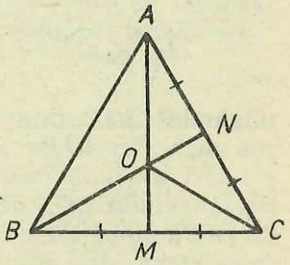


Fig. 202

Observaţie. În afară de punctul O, oricare alt punct ce aparţine dreptei AM determină împreună cu punctele B şi C tot un triunghi isoscel.

P r o b l e m a 3. Fie I intersecţia bisectoarelor unghiurilor ABC şi ACB ale triunghiului echilateral ABC. Demonstraţi că triunghiul IAB este isoscel.

Rezolvarea. Triunghiul ABC (fig. 203) fiind echilateral (din ipoteză), conform unei proprietăţi a triunghiurilor echilaterale, bisectoarea $[CC'$ a unghiului ACB este mediatoarea corespunzătoare laturii $[AB]$, adică: $[AC'] \equiv [C'B]$ şi $m(\sphericalangle AC'I) = m(\sphericalangle BC'I) = 90°$.

Triunghiurile IAC' şi IBC' sînt congruente pentru că $[AC'] \equiv [C'B]$, $\sphericalangle AC'I \equiv \sphericalangle BC'I$ (cum s-a arătat mai sus) şi $[IC']$ latură comună (LUL). În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente $AC'I$ şi $BC'I$ li se opun laturi tot congruente: $[AI] \equiv [BI]$. Deci triunghiul IAB este isoscel (q.e.d.).

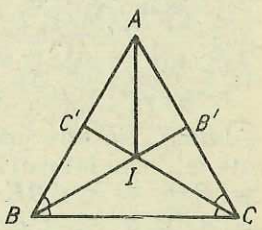


Fig. 203

P r o b l e m a 4. Semidreptele $[Ox$, $[Oy$, $[Oz$ formează unghiuri adiacente două cîte două şi toate trei congruente între ele. Fie A, B, C puncte care aparţin respectiv semidreptelor $[Ox$, $[Oy$, $[Oz$ astfel încît $OA = OB = OC$. Demonstraţi că: a) $AB = BC = CA$. b) Dreapta Ox este bisectoarea unghiurilor BAC şi BOC. c) Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci punctele C, O, M sînt colineare.

Rezolvarea. Fie $[Ox'$ semidreapta opusă semidreptei $[Ox$ (fig. 204).

a) Din ipotezele problemei rezultă că nici una din semidreptele $[Ox$, $[Oy$, $[Oz$ nu poate fi interioară unghiului format de celelalte două semidrepte. Considerăm triunghiurile OAB, OBC, OCA care sînt isoscele și constatăm că sînt congruente (LUL). În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente xOy, yOz, zOx li se opun laturi congruente $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$. Rezultă deci că $AB = BC = CA$.

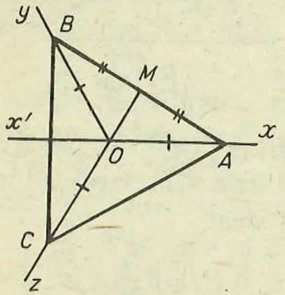


Fig. 204

b) Din congruența triunghiurilor AOB și AOC (demonstrată mai sus) rezultă că: $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle CAO$ (pentru că se opun laturilor congruente $[OB]$ și $[OC]$) și deci dreapta Ox este bisectoarea unghiului BAC.

Față de dreapta OA (sau $x'x$), suplementul unghiului BOx' este unghiul BOA, iar suplementul unghiului COx' este unghiul COA ($m(\sphericalangle BOx') = 180° - m(\sphericalangle BOA)$ și $m(\sphericalangle COx') = 180° - m(\sphericalangle COA)$). Cum unghiurile BOA și COA sînt congruente (au aceeași măsură), rezultă că $m(\sphericalangle BOx') = m(\sphericalangle COx')$, deci $\sphericalangle BOx' \equiv \sphericalangle COx'$ și dreapta Ox este bisectoarea unghiului BOC.

c) Folosind rezultatul precedent, vom putea afirma că dreapta Oz este bisectoarea unghiului ACB, dar și a unghiului AOB. Cum triunghiul AOB este isoscel (din ipoteză), rezultă că bisectoarea unghiului AOB este și mediana corespunzătoare laturii $[AB]$ (conform unei proprietăți a triunghiurilor isoscele), deci „trece“ și prin punctul M. La fel, bisectoarea unghiului ACB din triunghiul echilateral ABC „trece“ prin mijlocul segmentului $[AB]$, adică tot prin punctul M. În concluzie, punctele C, O, M aparțin aceleiași drepte Oz și deci sînt colineare (q.e.d.).

18. Exerciții și probleme

1. Justificați de ce, în următoarele cazuri, triunghiul PQR este echilateral. a) $PQ = QR = RP = 8$ cm; b) $m(\sphericalangle P) = m(\sphericalangle Q)$ și $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle R$; c) $PQ = 3$ cm, $QR = 0{,}3$ dm, $RP = 0{,}03$ m; d) $PQ = 0{,}2$ dm, $QR = 0{,}02$ m, $RP = 200$ mm; e) $PQ = 0{,}007$ km, $QR = 7$ cm, $RP = 700$ mm.

2. În triunghiul echilateral ABC, notăm cu D, E, F picioarele bisectoarelor interioare unghiurilor A, B, C (în această ordine). Să se calculeze: a) perimetrul triunghiului ABC, dacă: 1) $AB = 0{,}75$ cm; 2) $BC = 120$ mm; 3) $CA = 1{,}25$ dm. b) $BE + CF$, dacă $AD = 3$ cm; $AD - BE$, dacă $CF = 0{,}4$ dm. c) $m(\sphericalangle ADB)$, $m(\sphericalangle CFB)$, $m(\sphericalangle BEA) + m(\sphericalangle BEC)$, $m(\sphericalangle CFA) + m(\sphericalangle AEB) - m(\sphericalangle ADC)$. d) EC, dacă $AC = 5$ cm; e) AF, dacă $CD = 0{,}2$ dm; f) $BD + CE + AF$, dacă $AC = 6$ cm; g) $AF + BD - 2 \cdot EC$, dacă $AB = 100$ mm.

3. În triunghiul echilateral ABC, $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC ($D \in (BC)$), $[BE]$ este înălțimea corespunzătoare laturii $[AC]$ ($E \in (AC)$), iar punctul F este mijlocul laturii $[AB]$. Stabiliți dacă: a) $[BD] \equiv [DC]$; b) $AD \perp BC$; c) $[CE] \equiv [EA]$; d) $\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle ABE$; e) $CF \perp AB$; f) $\sphericalangle BCF \equiv \sphericalangle ACF$; g) $[BD] \equiv [AE]$; h) $\triangle DCE$ este isoscel; i) $[BE] \equiv [AD]$; j) $CF \perp AB$; k) $\triangle AFC \equiv \triangle CEB$; l) dreapta CF conține mijlocul segmentului $[DE]$; m) $\triangle DEF$ este echilateral. În fiecare caz, justificați răspunsul.

4. Triunghiul ABC din figura 205 este echilateral. Se iau punctele D, E, F respectiv pe dreptele AB, BC, CA astfel încît $[AD] \equiv [BE] \equiv [CF]$. Să se demonstreze că triunghiul DEF este tot echilateral (în ambele cazuri înfățișate în desen).

5. Se dau triunghiurile echilaterale ABC și ACD ($B \neq D$). Dacă M este mijlocul laturii $[AC]$, să se demonstreze că punctele B, M, D sînt colineare.

6. Se dă triunghiul echilateral ABC. Semidreptele $[Ax$, $[By$ și $[Cz$, exterioare triunghiului ABC, formează respectiv cu AB, BC și CA unghiuri congruente între

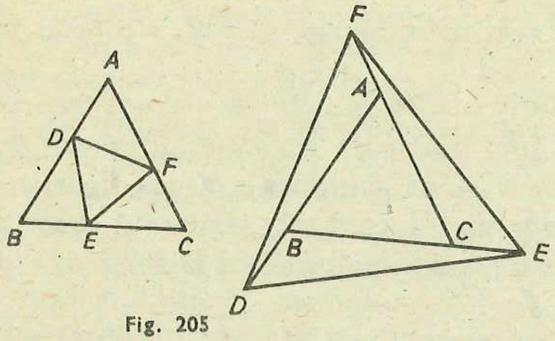


Fig. 205

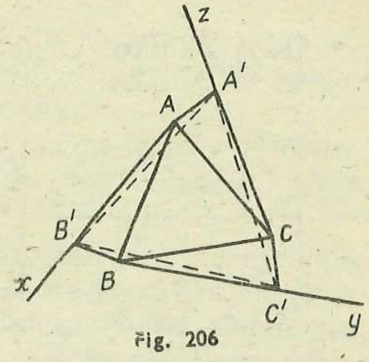


Fig. 206

ele și cu măsura mai mică de 30° (fig. 206). Dacă $A'A \perp AC$ ($A' \in [Cz$), $B'B \perp BA$ ($B' \in [Ax$) și $C'C \perp CB$ ($C' \in [By$), atunci triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

7. Fie ABC un triunghi echilateral și D, E, F puncte din exteriorul triunghiului ABC. Dacă $\triangle ADB \equiv \triangle BEC \equiv \triangle CFA$ (congruența laturilor în ordinea scrisă) (fig. 207), atunci punctele D, E, F sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

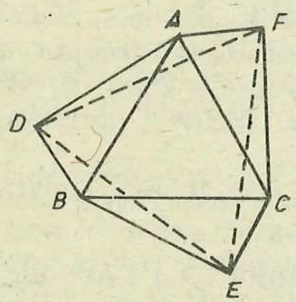


Fig. 207

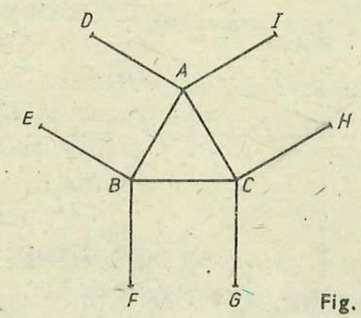


Fig. 208

8. Triunghiul ABC din figura 208 este echilateral și $[AD] \equiv [BE] \equiv [BF] \equiv [CG] \equiv [CH] \equiv [AI]$. Dacă AD și BE sînt perpendiculare pe AB; BF și CG sînt perpendiculare pe BC; CH și AI sînt perpendiculare pe CA, atunci cîte trei din punctele D, E, F, G, H, I sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. Care sînt aceste puncte?

9. Într-un triunghi echilateral ABC, punctele M, N și P sînt respectiv mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ și $[CA]$. Demonstrați că: a) Punctul P aparține medianei corespunzătoare laturii $[MN]$ din triunghiul BMN. b) Bisectoarea unghiului BAC: 1) conține mijlocul segmentului $[MP]$ și 2) este perpendiculară pe dreapta BC în punctul N. c) Punctele C, M și mijlocul segmentului $[PN]$ sînt trei puncte colineare. d) Triunghiul MNP are toate unghiurile congruente între ele.

29. SIMETRIA[1] FAȚĂ DE O DREAPTĂ

Spunem că punctele A și A' sînt simetrice față de o dreaptă d (numită axă de simetrie), dacă dreapta d este mediatoarea segmentului $[AA']$.

Punctul A' se numește simetricul punctului A față de dreapta d și punctul A', simetricul punctului A față de aceeași dreaptă d.

[1] Cuvîntul „*simetrie*“ este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *syn* = împreună și *metron* = măsură.

Dacă punctul B aparţine axei de simetrie, el este propriul lui simetric (fig. 209).

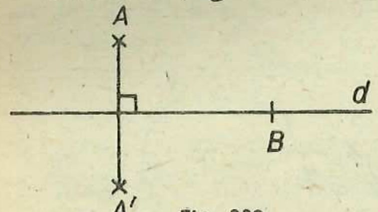


Fig. 209

O mulţime de puncte $\mathcal{M}$ (figură geometrică) admite o axă de simetrie „d" dacă oricărui punct A al mulţimii $\mathcal{M}$ (al figurii) îi corespunde un punct A' al aceleiaşi mulţimi $\mathcal{M}$ (figuri), care este simetricul lui faţă de axa de simetrie d.

Exemplul 1. Două drepte perpendiculare sînt simetrice una faţă de cealaltă.

Fie dreptele perpendiculare d_1 şi d_2 ($d_1 \cap d_2 = \{O\}$) (fig. 210). Luăm de exemplu punctul A pe dreapta d_2($A \in d_2$ şi $A \neq O$). Distanţa de la punctul A la dreapta d_1 este AO (diferită de zero). Fixăm punctul A' pe dreapta d_2 în celălalt semiplan determinat de d_1, astfel încît distanţa punctului A' la dreapta d_1 să fie egală cu AO, deci $AO = OA'$. În acest fel, segmentul $[AA']$ are ca mediatoare dreapta d_1, deoarece: $d_1 \perp [AA']$ (dreptele d_1 şi d_2 fiind perpendiculare) şi $AO = OA'$ (din construcţia făcută).

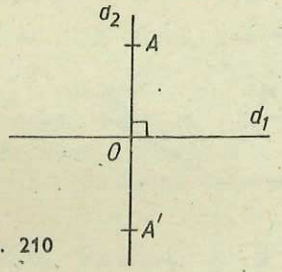


Fig. 210

Punctele A şi A' sînt deci simetrice faţă de dreaptă d_1.

Exemplul 2. Orice punct al segmentului $[AA']$ are un simetric faţă de mediatoarea segmentului. Deci, mediatoarea segmentului $[AA']$ este axa lui de simetrie. Aceasta este o urmare a faptului că două drepte perpendiculare sînt simetrice una faţă de cealaltă.

Dar segmentul $[AA']$ mai are şi o altă axă de simetrie şi anume dreapta în care este inclus segmentul.

Exemplul 3. Bisectoarea unui unghi este axa de simetrie a unghiului.

Această propoziţie o vom înţelege astfel: fie, la întîmplare, un punct A pe latura $[Ox$ a unghiului xOy (fig. 211), simetricul acestui punct faţă de bisectoarea $[Oz$ se află pe cealaltă latură a unghiului xOy, pe semidreapta $[Oy$. În figura 211 unde $A \in [Ox$, $A' \in [Oz$, $A'' \in [Oy$, punctul A'' este simetricul lui A ($AA'' \perp [Oz$ şi $AA' = A'A''$).

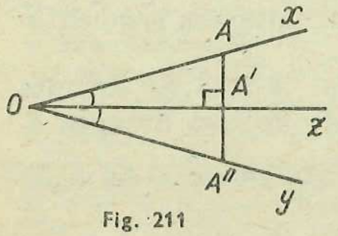


Fig. 211

Se spune că latura $[Oy$ a unghiului este simetrica laturii $[Ox$ faţă de bisectoarea $[Oz$ a unghiului şi invers, latura $[Ox$ este simetrica laturii $[Oy$ sau — mai pe scurt — că laturile unui unghi sînt una simetrica celeilalte faţă de bisectoarea unghiului.

Constatăm deci că semidreptele simetrice $[Ox$ şi $[Oy$ fac unghiuri congruente cu axa lor de simetrie $[Oz$. Astfel, putem construi un unghi cînd cunoaştem una dintre laturi şi bisectoarea lui.

Revenind la figura 211, mai spunem că segmentul $[A''A']$ este simetricul segmentului $[AA']$ faţă de Oz şi invers, segmentul $[AA']$ este simetricul segmentului $[A''A']$.

Din cele arătate mai sus, deducem că un triunghi isoscel are o axă de simetrie şi anume bisectoarea unghiului de la vîrf (ea fiind în în acelaşi timp şi mediatoarea bazei triunghiului), iar triunghiul echilateral are trei axe de simetrie, care sînt bisectoarele unghiurilor (deoarece bisectoarele sînt şi mediatoarele laturilor).

● 19. Exerciţii şi probleme

1. Desenaţi un unghi MNP a cărui măsură să fie de 50°. Construiţi apoi $[NM'$ simetrica laturii $[NM$ faţă de dreapta NP; de asemenea, construiţi $[NP'$ simetrica laturii $[NP$ faţă de dreapta NM.

2. Se dă un triunghi isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care A_1 este piciorul bisectoarei interioare unghiului de la vîrf. Dacă $[AA_2$ şi $[AA_3$ sînt simetricele bisectoarei $[AA_1$ faţă de dreptele AB şi AC, să se găsească m($\sphericalangle BAA_1$), ştiind că $AA_2 \perp AA_3$.

3. Fie $[Oz$ bisectoarea unghiului xOy şi $A \in [Oz (A \neq O)$. Demonstraţi că: a) Dacă punctul A aparţine dreptei BC şi $BC \perp Oz$, unde $B \in [Ox$ şi $C \in [Oy$, atunci B şi C sînt puncte simetrice faţă de dreapta Oz. b) Dacă $M \in [Ox$, $N \in [Oy$ şi $[OM] \equiv [ON]$, atunci M şi N sînt puncte simetrice faţă de dreapta Oz. c) Dacă P este un punct oarecare ce aparţine semidreptei $[Ox$, atunci simetricul punctului P faţă de dreapta Oz aparţine semidreptei $[Oy$ şi invers, dacă Q este un punct oarecare ce aparţine semidreptei $[Oy$, atunci simetricul punctului Q faţă de dreapta Oz aparţine semidreptei $[Ox$.

4. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $M, N \in (BC)$. Ştiind că $\sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle MAN$, demonstraţi că M şi N sînt puncte simetrice faţă de bisectoarea unghiului BAC.

30. METODA REDUCERII LA ABSURD[1]

Spuneam la începutul părţii a doua a acestui manual că „punctele de plecare ale judecăţilor pe care le vom face în viitor vor fi cele trei cazuri de congruenţă a triunghiurilor oarecare". Şi aşa a şi fost pînă acum! Aţi remarcat că de multe ori în demonstraţiile pe care le-am dat unor teoreme, precum şi la rezolvarea problemelor (propuse sau rezolvate) a fost nevoie să se recurgă la ceea ce putem numi „metoda triunghiurilor congruente", metodă ce va fi folosită foarte mult şi de acum încolo.

[1] Expresia vine din limba latină: *argumentum ab absurdum* (*argumentum* = dovadă, semn, indiciu; *ab* = prin şi *absurdum* = nelogic, absurd.

Raţionamentul geometric mai foloseşte şi alte metode, de exemplu „metoda reducerii la absurd". Această metodă constă în demonstrarea adevărului unei propoziţii prin arătarea faptului că propoziţia contrară ei este falsă. Pentru a demonstra ceva prin „reducere la absurd" procedăm astfel: presupunem, pentru un moment, că afirmaţia din concluzie ar fi falsă şi adăugăm „adevărurilor" din ipoteză afirmaţia contrară celei din concluzie şi, plecînd de la aceste premise, prin deducţii (judecăţi) logice (corecte) vom ajunge să emitem afirmaţii care sînt în totală „contradicţie" cu alte afirmaţii despre care ştim precis că sînt adevărate (axiome sau teoreme întîlnite anterior). În această situaţie gîndim astfel: Am ajuns la o situaţie absurdă (care contrazice în mod flagrant gîndirea logică), deoarece am plecat de la o ipoteză absurdă. Cum singura afirmaţie, din premisa de la care am plecat, pe care n-am verificat-o ca fiind adevărată, este aceea care a negat concuzia, rezultă că tocmai aceasta este afirmaţia falsă. Deci concluzia propoziţiei date este adevărată.

EXEMPLE DE PROBLEME REZOLVATE PRIN ACEASTĂ METODĂ

Problema 1. Să se demonstreze că dacă două drepte care sînt *distincte* (diferite) se intersectează, atunci intersecţia lor conţine *un singur* punct.

Din *ipoteza* problemei ştim că două drepte diferite se intersectează. *Concluzia* problemei afirmă că intersecţia celor două drepte este un singur punct.

Demonstraţia. Presupunînd că afirmaţia din concluzie ar fi falsă (anume că cele două drepte care se intersectează nu ar avea un singur punct de intersecţie, ci mai multe puncte — de exemplu două: A şi B ($A \neq B$)), atunci ar însemna că prin punctele distincte A şi B ar trece două drepte distincte (diferite). Dar această afirmaţie este în contradicţie cu adevărul exprimat prin axioma dreptei (de la pagina 60) potrivit căreia „Prin două puncte distincte (diferite) trece o singură dreaptă", deci, afirmaţia la care am ajuns este „absurdă". Această absurditate este determinată de presupunerea pe care am făcut-o că intersecţia a două drepte diferite ar avea mai mult de un punct. Presupunerea făcută fiind falsă, rezultă că afirmaţia din concluzie este adevărată: „intersecţia a două drepte distincte conţine un singur punct" (q.e.d.).

Problema 2. Dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură perpendiculară pe acea dreaptă.

Din *ipoteză* ştim că dintr-un punct (de exemplu A) exterior unei drepte (de exemplu d) se duce pe această dreaptă o perpendiculară. *Concluzia* problemei afirmă că se poate duce *o singură* perpendiculară pe acea dreaptă (şi nu mai multe).

Demonstraţia. Să presupunem că ar fi falsă afirmaţia din concluzie, anume aceea că perpendiculara este una singură şi să admitem că ar exista două perpendiculare distincte AM şi AN (M, $N \in d$). Vom construi un cerc cu centrul în A şi cu o rază suficient de mare ca să intersecteze dreapta d în două puncte — B şi C, de exemplu, (fig. 212). În urma acestei construcţii a rezultat un triunghi ABC care este isoscel ($[AB] \equiv [AC]$ ca raze ale aceluiaşi cerc). Perpendiculara din A pe d, despre care se vorbeşte în problema noastră, este înălţimea corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel ABC şi ştim dintr-o observaţie făcută asupra proprietăţilor triunghiurilor isoscele (pag. 74) că „într-un triunghi isoscel înălţimea şi mediana bazei se confundă".

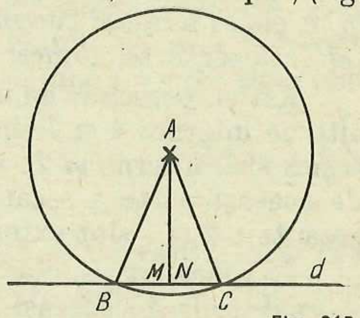


Fig. 212

Conform presupunerii făcute, piciorul înălţimii din A pe latura $[BC]$ este punctul M, dar şi punctul N; ar urma că segmentul $[BC]$ să aibă două mijloace distincte, ceea ce este imposibil. Deci $M = N$, rezultînd astfel că perpendiculara din P pe dreapta d este *unică* (una singură) (q.e.d.).

20. Probleme

Folosind metoda reducerii la absurd, demonstraţi că:

1. Dacă două unghiuri, diferite de unghiul nul sînt complementare, atunci ambele unghiuri sînt ascuţite.
2. Dacă în triunghiul ABC bisectoarea unghiului B nu este şi înălţime, atunci unghiul A nu este congruent cu unghiul C.
3. Dacă în triunghiul ABC mediana corespunzătoare laturii $[AC]$ nu este şi bisectoarea unghiului B, atunci latura $[AB]$ nu este congruentă cu latura $[BC]$.

31. UNGHIURI FORMATE DE DOUĂ DREPTE CU O SECANTĂ[1]

Dacă două drepte distincte, de exemplu a şi b sînt intersectate de o a treia dreaptă c (fig. 213), atunci aceasta din urmă dreaptă (c) se numeşte „secantă" sau „transversală".[2]

Se constată că la intersecţiile acestor trei drepte ($a \cap c = \{M\}$, $b \cap c = \{N\}$) s-au format opt unghiuri (patru în jurul punctului M — notate în desen cu numerele 1—4 şi alte patru în jurul punctului N — notate cu numerele 5—8).

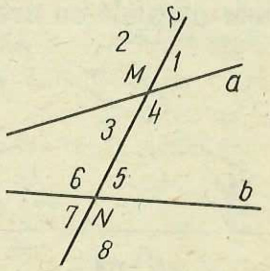


Fig. 213

Cu aceste opt unghiuri se pot constitui „perechi" de unghiuri (un unghi din primele patru şi alt unghi din ultimele patru), cărora s-a convenit a li se da anumite denumiri după cum urmează:

[1] Cuvîntul „*secantă*" vine din limba latină: *secans-tis* = care taie.
[2] Cuvîntul „*transversală*" vine din limba latină: *transversus* = aşezat de-a curmezişul.

a) Dacă față de secanta c unghiurile se găsesc unul de o parte și altul de cealaltă parte a ei, ele se numesc „unghiuri alterne"[1], iar dacă se găsesc ambele de aceeași parte se numesc pur și simplu „unghiuri de aceeași parte a secantei".

b) Dacă unghiurile se găsesc în intersecția semiplanelor $[aN$ și $[bM$, ele se numesc „unghiuri interne", iar dacă se găsesc în afara acestei intersecții se numesc „unghiuri externe".

Astfel, perechile de unghiuri: 3 și 5 sînt alterne interne; 4 și 6 sînt alterne interne; 1 și 7 sînt alterne externe; 2 și 8 sînt alterne externe; 4 și 5 sînt interne și de aceeași parte a secantei; 3 și 6 sînt interne și de aceeași parte a secantei; 1 și 8 sînt externe și de aceeași parte a secantei; 2 și 7 sînt externe și de aceeași parte a secantei.

În afara „perechilor" de unghiuri denumite mai sus, se pot grupa și unghiurile de aceeași parte a secantei, unul intern și altul extern, astfel de „perechi" se numesc „unghiuri corespondente".

Perechile de unghiuri corespondente din figura 213 sînt: 1 și 5; 2 și 6; 3 și 7; 4 și 8.

32. DREPTE PARALELE[2]

Am văzut, la începutul manualului, (pag. 4 și 5) că dacă două drepte au două puncte comune, atunci ele au toate punctele comune și se numesc drepte *identice* sau *confundate*; dacă au numai un singur punct comun ele se numesc drepte *distincte* și *concurente*, iar punctul comun se mai numește și „intersecția" celor două drepte.

Vom vedea acum că se poate întîmpla ca două drepte distincte să nu aibă nici un punct comun.

D e f i n i ț i e. Două drepte distincte (diferite) a și b conținute în același plan, care nu au nici un punct comun se numesc drepte paralele.

Scriem aceasta astfel: $a \parallel b$, spunem prin cuvinte: „dreapta a este paralelă cu dreapta b" și înțelegem că $a \cap b = \varnothing$.

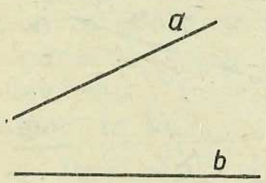


Fig. 214

Dacă două drepte distincte (c și d) nu sînt paralele, aceasta se poate scrie $c \nparallel d$.

Priviți figura 214.

Dreptele desenate în această figură sînt concurente sau paralele? Pe figură ele n-au nici un punct comun. Dar, după cum știm, dreptele le gîndim nesfîrșite în ambele părți (sensuri). Este ușor de observat că desenul nostru poate fi „completat spre stînga" în așa fel ca dreptele desenate să se „întîlnească"; în acest mod, ele vor avea un punct comun. Deci dreptele sînt concurente.

[1] Cuvîntul „*alterne*" vine din limba latină: *alternus* = de o parte și de alta.

[2] Cuvîntul „*paralele*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *para* = alături și *allelon* = unul cu altul.

Experiența de mai sus ne determină să ne abținem de la a afirma, numai pe baza privirii unui desen, că două drepte sînt paralele. Aceasta deoarece nu putem să „prelungim la nesfîrșit" desenul pentru a ne convinge că dreptele sînt sau nu sînt paralele. Numai pe calea judecății (raționamentului) putem ajunge la concluzia că două drepte date sînt paralele sau nu.

Teorema care urmează ne garantează că există drepte paralele și deci că putem vorbi despre *drepte paralele.*

T e o r e m ă. Dacă două drepte intersectate cu o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sînt paralele.

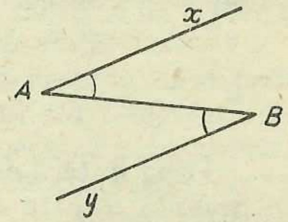


Fig. 215

Pentru a demonstra această teoremă fixăm un segment, de exemplu $[AB]$. Dacă semidreptele $[Ax$ și $[By$ sînt două semidrepte situate de o parte și de alta a dreptei AB astfel încît unghiurile alterne interne ABy și BAx să fie congruente (fig. 215), atunci vom demonstra că dreptele Ax și By sînt paralele.

Demonstrația. Pentru demonstrarea acestei teoreme vom folosi metoda reducerii la absurd. Să presupunem că dreptele Ax și By n-ar fi paralele ($Ax \nparallel By$). În această situație, dreptele s-ar intersecta într-un punct pe care să-l notăm cu C. Acest punct ar aparține fie semidreptei $(Ax$ fie semidreptei $(By$. În cele ce urmează vom presupune că $C \in (Ax$ (demonstrația se face analog și dacă $C \in (By$).

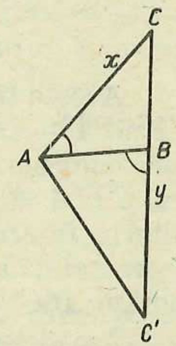


Fig. 216

Fie un punct $C' \in (By$ (fig. 216), astfel încît $[BC'] \equiv [AC]$. Cu $C \in (Ax$ și $C' \in (By$, congruența $\sphericalangle ABy \equiv \sphericalangle BAx$, din ipoteză, mai poate fi scrisă: $\sphericalangle ABC' \equiv \sphericalangle BAC$ (1).

Unghiurile ABC și ABC' sînt adiacente și suplementare; putem scriem: $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ABC') = 180°$ (2).

Conform presupunerii făcute și folosind punctul C' introdus în desen, ar urma că $\triangle ABC' \equiv \triangle BAC$ (cazul 1 — LUL), pentru că: $[AB] = [BA]$ (latură comună), $\sphericalangle ABC' \equiv \sphericalangle BAC$ (din ipoteză — relația (1)), $[BC'] \equiv [AC]$ (prin construcție).

Din congruența $\triangle ABC' \equiv \triangle BAC$ ar rezulta că:

(3) $\sphericalangle BAC' \equiv \sphericalangle ABC$ (pentru că se opun laturilor congruente $[AC]$ și $[BC']$).

Ținînd cont de congruențele (1) și (3), suma măsurilor unghiurilor adiacente BAC' și BAC ar putea fi scrisă: m($\sphericalangle$ BAC') + + m($\sphericalangle$ BAC) = m($\sphericalangle$ ABC) + m($\sphericalangle$ ABC'), care, conform relației (2), este de 180°. Deci: m($\sphericalangle$ BAC') + m($\sphericalangle$ BAC) = 180°.

Aceasta ar însemna că semidreptele $[AC$ și $[AC'$ ar fi una opusă celeilalte. Am ajuns astfel să afirmăm că prin punctele distincte C și C' ar trece două drepte diferite și anume: una care trece prin punctul B și alta care ar trece prin punctul A ($A \neq B$). Dar acest lucru este absurd, întrucît contrazice axioma dreptei, potrivit căreia:

„Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă".

Am ajuns la o concluzie absurdă, pentru că am plecat de la o presupunere absurdă, anume aceea că dreptele Ax și By ar fi concurente. Deci: $Ax \parallel By$ (q.e.d.).

Această teoremă ne asigură că *există* drepte *paralele*. S-a convenit ca ea să se numească *teorema de existență a dreptelor paralele.*

33. CONSTRUCȚIA UNEI DREPTE PARALELE CU O DREAPTĂ DATĂ

Fiind dată o dreaptă a, ne punem problema cum se poate desena o dreaptă a' care să fie paralelă cu dreapta dată a. Putem proceda astfel: desenăm după voie două drepte oarecare b și c, concurente în punctul A și care să intersecteze dreapta dată în punctele B, respectiv C (fig. 217). Desenăm apoi pe dreapta b un segment $[AB']$ congruent cu segmentul $[AB]$ și pe dreapta c un segment $[AC']$ congruent cu segmentul $[AC]$. Vom observa că: $[AB'] \equiv [AB]$ (prin construcție), $\sphericalangle B'AC' \equiv \sphericalangle BAC$ (opuse la vîrf), $[AC'] \equiv [AC]$ (prin construcție).

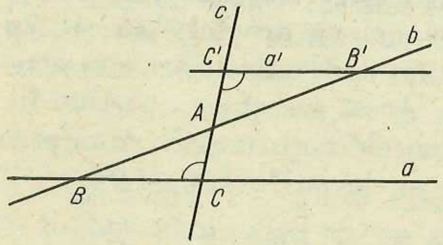


Fig. 217

Aceste trei congruențe ne permit să scriem că $\triangle AB'C' \equiv \triangle ABC$ (cazul 1 — LUL). În triunghiurile congruente $AB'C'$ și ABC, laturilor congruente $[AB']$ și $[AB]$ li se opun unghiuri congruente ($\sphericalangle B'C'A \equiv \sphericalangle BCA$). Dar aceste unghiuri au poziția de unghiuri alterne interne la intersecția secantei c cu dreptele a și $B'C'$. Conform teoremei de existență a dreptelor paralele, putem scrie $a \parallel B'C'$. (Dacă notăm $B'C' = a'$, atunci $a \parallel a'$.)

Am desenat astfel o dreaptă arbitrară a' paralelă cu o dreaptă dată a. Constatăm că se pot construi un număr nesfîrșit de mare de drepte paralele cu o dreaptă dată a, deoarece dreptele concurente b și c, cu ajutorul cărora am efectuat construcția, pot fi luate oricum.

Dacă ni se cere însă ca dreapta paralelă construită să conțină un anumit punct dat, vom putea proceda astfel: Fie a dreapta dată și

A punctul dat ($A \notin a$) (fig. 218). Considerăm dreapta AB determinată de punctul A și de un punct oarecare B (luat arbitrar) al dreptei a ($B \in a$). Alegem una dintre semidreptele conținute în dreapta a și cu originea în B, de exemplu $[By$. Construim o semidreaptă cu originea în A, situată de cealaltă parte a dreptei AB decît $[By$ (să notăm această semidreaptă cu $[Ax$), astfel încît $\sphericalangle xAB \equiv \sphericalangle yBA$. Dreapta ce conține semidreapta $[Ax$ este paralelă cu a (conform teoremei de existență a dreptelor paralele).

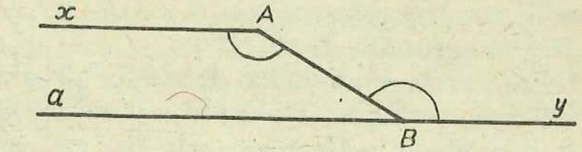


Fig. 218

34. *a)* AXIOMA LUI EUCLID[1] (AXIOMA PARALELELOR.) *b)* UNGHIURI FORMATE DE DOUĂ DREPTE PARALELE CU O SECANTĂ

a) **Axioma paralelelor. Printr-un punct dat, exterior unei drepte date, există o singură paralelă la dreapta dată.**

b) Revenind la construcția unei paralele la o dreaptă dată printr-un punct exterior ei (fig. 218), facem observația că informația pe care ne-o aduce în plus axioma paralelelor este aceea că prin punctul A nu putem duce o altă dreaptă paralelă cu a în afara dreptei Ax. Aceasta înseamnă că oriunde am lua punctul B pe dreapta a, construcția ne va conduce la aceeași dreaptă Ax paralelă cu a.

Teoremă reciprocă (a teoremei de existență a dreptelor paralele). **Dacă sînt date două drepte paralele, atunci unghiurile alterne interne pe care acestea le formează cu o secantă sînt congruente două cîte două.**

Să notăm, de exemplu, dreptele paralele cu a și b și secanta cu AB ($A \in a$, $B \in b$) (fig. 219). Ne propunem să demonstrăm că două unghiuri alterne interne sînt congruente.

Ipoteza

$a \parallel b$,
$A \in a$,
$B \in b$,
$[Ax \subset a$,
$[By \subset b$.

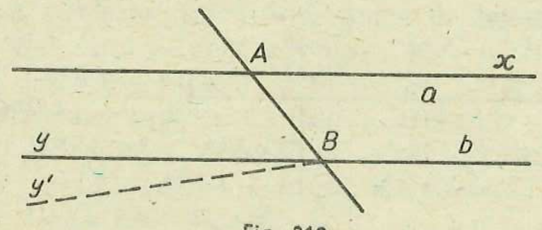


Fig. 219

Concluzia

$\sphericalangle xAB \equiv \sphericalangle yBA$.

Demonstrația. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că unghiul yBA n-ar fi congruent cu unghiul xAB ($\sphericalangle xAB \not\equiv \sphericalangle yBA$). Atunci ar exista totuși un „alt unghi" cu una dintre laturi $[BA$ și care

[1] EUCLID (EUKLEIDES) a fost un matematician grec (sec. 3 î.e.n.). El a întemeiat o „școală" în Alexandria (Egipt). Este autor al primei expuneri sistematice a cunoștințelor de geometrie acumulate pînă atunci, intitulată „Elementele".

ar fi congruent cu unghiul xAB, de exemplu unghiul $y'AB$ (fig. 219). Din congruența $\sphericalangle xAB \equiv \sphericalangle y'BA$ ar rezulta că $[By' \parallel [Ax$ (conform teoremei de existență a dreptelor paralele). Am ajuns astfel să spunem că prin punctul B, exterior dreptei a ($[Ax \subset a$), există paralela $[By'$ la dreapta a în timp ce, prin ipoteză, și $[By$ ne-a fost dată ca paralelă cu dreapta a, ceea ce este absurd, întrucît contravine axiomei paralelelor („printr-un punct exterior unei drepte există o singură paralelă la acea dreaptă"). Această absurditate este determinată de presupunerea făcută (că $\sphericalangle xAB \not\equiv \sphericalangle yBA$), care este falsă. Deci, $\sphericalangle xAB \equiv \sphericalangle yBA$ (q.e.d.).

Consecință[1]. Prin „consecință" a unei teoreme (sau axiome) se înțelege tot o teoremă a cărei demonstrație, bazată pe teorema (sau axioma) la care se referă, este extrem de simplă și rezultă imediat.

În cele ce urmează vom expune unele consecințe ale celor de mai sus.

a) *Consecințe ale teoremei de existență a dreptelor paralele.*

Consecința 1. Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne externe care sînt congruente, atunci dreptele sînt paralele.

Consecința 2. Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri corespondente care sînt congruente, atunci dreptele sînt paralele.

Consecința 3. Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri interne și de aceeași parte a secantei care sînt suplementare, atunci dreptele sînt paralele.

Consecința 4. Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri externe și de aceeași parte a secantei care sînt suplementare, atunci dreptele sînt paralele.

Demonstrarea acestor consecințe se face fără nici o dificultate, de aceea vi le propunem ca temă pentru acasă.

Consecința 5. Două drepte distincte perpendiculare pe o a treia sînt paralele între ele.

Ipoteza
$d_1 \neq d_2$,
$d_1 \perp d$,
$d_2 \perp d$.

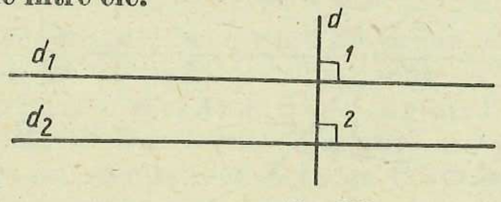


Fig. 220

Concluzia
$d_1 \parallel d_2$.

Demonstrația. Din $d_1 \perp d$ și $d_2 \perp d$ rezultă că unghiurile 1 și 2 (fig. 220) sînt unghiuri drepte și deci congruente. Cum ele au poziția de unghiuri corespondente, conform consecinței 2 a teoremei de existență a dreptelor paralele, rezultă că dreptele d_1 și d_3 sînt paralele ($d_1 \parallel d_2$) (q.e.d.).

[1] Cuvîntul „*consecință*" vine din limba latină: *consequentia* = urmare.

b) *Consecințe ale teoremei reciproce a dreptelor paralele*

Consecința 1. Dacă două drepte paralele se intersectează cu o a treia dreaptă, atunci unghiurile alterne externe care se formează sînt congruente două cîte două.

Consecința 2. Dacă două drepte paralele se intersectează cu o a treia dreaptă, atunci unghiurile corespondente care se formează sînt congruente două cîte două.

Consecința 3. Dacă două drepte paralele se intersectează cu o a treia dreaptă, atunci unghiurile interne și de aceeași parte a secantei care se formează sînt suplementare.

Consecința 4. Dacă două drepte paralele se intersectează cu o a treia dreaptă, atunci unghiurile externe și de aceeași parte a secantei care se formează sînt suplementare.

Vom demonstra, în cele ce urmează, numai consecințele 1 și 3, lăsînd pe seama elevilor, ca temă pentru acasă, demonstrarea consecințelor 2 și 4.

Demonstrația. Fie AB și CD două drepte paralele care sînt intersectate de dreapta EF în M, respectiv N (fig. 221).

Conform teoremei reciproce la care ne referim, $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle MND$ (ca unghiuri alterne interne). Aceste unghiuri sînt opuse la vîrf, și deci congurente cu unghiurile EMB și respectiv CNF. Pe baza proprietății de tranzitivitate a relației de congruență putem scrie: $\sphericalangle EMB \equiv \sphericalangle CNF$. Dar unghiurile EMB și CNF sînt unghiuri alterne externe (q.e.d.).

Analog se demonstrează că $\sphericalangle EMA \equiv \sphericalangle DNF$, considerînd unghiurile alterne interne BMN și MNC.

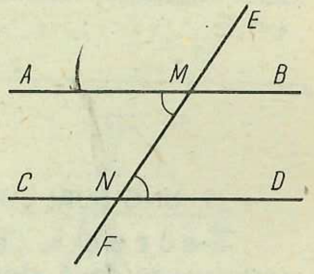


Fig. 221

Pentru a demonstra că unghiurile interne și de aceeași parte a secantei sînt suplementare, vom porni de la observația că unghiurile interne și adiacente — de exemplu AMN și BMN — sînt suplementare ($m(\sphericalangle AMN) + m(\sphericalangle BMN) = 180°$), iar oricare dintre aceste unghiuri este congruent cu un unghi intern cu vîrful în N — ca alterne interne ($\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle MND$ și $\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle MNC$). Vom putea deci scrie: $m(\sphericalangle AMN) + m(\sphericalangle MNC) = 180°$ și $m(\sphericalangle BMN) + m(\sphericalangle MND) = 180°$ (q.e.d.).

c) *Consecințe ale axiomei paralelelor*

Consecința 1. Două drepte paralele cu o a treia sînt paralele între ele.

Ipoteza
$a \neq b$, $a \parallel c$, $c \parallel b$.

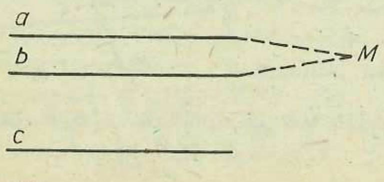


Fig. 222

Concluzia
$a \parallel b$.

Demonstrația. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că $a \nparallel b$. Atunci ar însemna că dreptele a și b ar fi concurente. (Fie $\{M\} = a \cap b$) (fig. 222). De aici ar rezulta că $M \in a$ și $M \in b$, iar în punctul M ar exista două drepte distincte (a și b) ambele paralele cu o a treia dreaptă c. Acest lucru este absurd (contravine axiomei paralelelor). Deci $a \parallel b$ (q.e.d.).

Observație. Faptul că $a \parallel c$ și $c \parallel b$ ne conduc la concluzia că $a \parallel b$ dovedește că *relația de paralelism între drepte este o relație tranzitivă.*

Consecința 2. Dacă două drepte sînt paralele, atunci orice dreaptă care se intersectează cu una dintre ele se va intersecta și cu cealaltă.

Demonstrația. Fie a și b două drepte paralele și c o a treia dreaptă, care o intersectează pe prima dintre ele în M (fig. 223).

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că $c \cap b = \varnothing$, ceea ce ar însemna că $c \parallel b$. Ar rezulta atunci că prin punctul M (care ar aparține dreptelor a și c) ar exista două drepte (distincte) paralele cu dreapta b (dreptele a și c). Or acest lucru este absurd (contravine axiomei paralelelor). Singura paralelă dusă prin punctul M la dreapta b este dreapta a (din ipoteză), iar dreapta c se va intersecta neapărat cu dreapta b (q.e.d.).

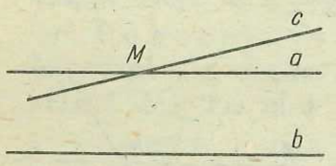


Fig. 223

35. UNGHIURI CU LATURILE RESPECTIV PARALELE

Teoremă. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt congruente dacă sînt ambele ascuțite sau ambele obtuze și sînt suplementare dacă unul este ascuțit, iar celălalt obtuz.

Demonstrația. În primul caz, cînd ambele unghiuri sînt — de exemplu — ascuțite, fie $\sphericalangle xOy$ și $\sphericalangle x'O'y'$ două unghiuri astfel încît $[Ox \parallel [O'x'$ și $[Oy \parallel [O'y'$ (fig. 224,*a*). Notînd $[Ox \cap [O'y' = \{A\}$, din $[Oy \parallel [O'y'$ intersectate de $[Ox$ rezultă că: (1) $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle xAy'$ (ca unghiuri corespondente), apoi, din $[Ox \parallel [O'x'$ intersectate de $[O'y'$ rezultă că: (2) $\sphericalangle xAy' \equiv \sphericalangle x'O'y'$ (tot ca unghiuri corespondente).

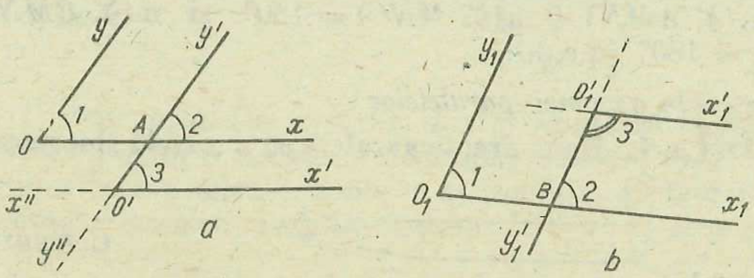


Fig. 224

Conform proprietății de tranzitivitate a relației de congruență, din (1) și (2) rezultă: $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$.

Teorema este adevărată și pentru unghiul $x''O'y''$, care este opus la vîrf cu unghiul $x'O'y'$, adică avem și $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x''O'y''$.

În al doilea caz, cînd un unghi este ascuțit și celălalt obtuz, fie $\sphericalangle x_1O_1y_1$ ($m(\sphericalangle x_1O_1y_1) < 90°$) și $\sphericalangle x_1'O_1'y_1'$ ($m(\sphericalangle x_1'O_1'y_1') > 90°$) două unghiuri astfel încît $[O_1x_1 \parallel [O_1'x_1'$ și $[O_1y_1 \parallel [O_1'y_1'$ (fig. 224,*b*). Notînd $[O_1x_1 \cap [O_1'y_1' = \{B\}$, din $[O_1y_1 \parallel [O_1'y_1'$ intersectate de $[O_1x_1$ rezultă că: $\sphericalangle x_1O_1y_1 \equiv \sphericalangle x_1BO_1'$ (ca unghiuri corespondente), apoi din $[O_1x_1 \parallel [O_1'x_1'$ intersectate de $[O_1'x_1'$ rezultă că: $m(\sphericalangle x_1BO_1') + m(\sphericalangle x_1'O_1'y_1') = 180°$ (unghiuri interne și de aceeași parte a secantei).

Cum $\sphericalangle x_1O_1y_1 \equiv \sphericalangle x_1BO_1'$, rezultă că și $m(\sphericalangle x_1O_1y_1) + m(\sphericalangle x_1'O_1'y_1') = 180°$.

Teorema este adevărată și pentru unghiul $x_1''O_1'y_1''$, care este opus la vîrf cu unghiul $x_1'O_1'y_1'$, adică avem și $m(\sphericalangle x_1O_1y_1) + m(\sphericalangle x_1''O_1'y_1'') = 180°$.

Problemă rezolvată. Fie $M \in (AC)$, $N \in (AB)$, $P \in (BC)$ și $Q \in (AC)$, unde $\triangle ABC$ este un triunghi oarecare.

a) Dacă $MN \parallel BC$, $NP \parallel AC$ și $PQ \parallel AB$, exprimați măsurile unghiurilor triunghiurilor ANM, NBP, QPC în funcție de măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) În ipoteza suplimentară că $M = Q$, unde trebuie ales punctul M pe latura (AC) pentru a avea loc relațiile $MN \parallel BC$, $NP \parallel AC$ și $MP \parallel AB$?

Rezolvarea. a) Dacă $MN \parallel BC$ (fig. 225, *a*) conform unei consecințe a teoremei reciproce a dreptelor paralele, deducem că:

$\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ABC$ (corespondente, secanta fiind dreapta AB),

$\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$ (corespondente, secanta fiind dreapta AC),

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle CAB$ (ca fiind unghiuri identice).

Așadar, unghiurile triunghiului ANM sînt congruente cu cele ale triunghiului ABC.

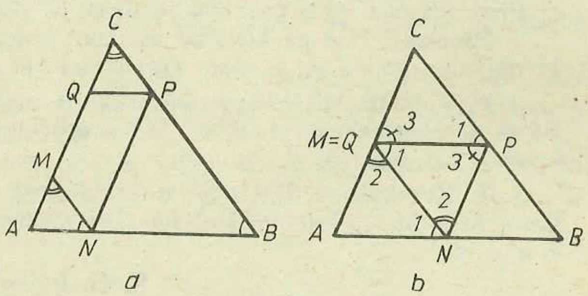


Fig. 225

Observație. Congruența unghiurilor ANM și ABC, precum și cea a unghiurilor AMN și ACB, poate fi dedusă și din faptul că aceste unghiuri pot fi privite ca „unghiuri cu laturile respectiv paralele".

Analog se demonstrează că și unghiurile triunghiurilor NBP și QPC sînt congruente cu cele ale triunghiului ABC.

b) În ipoteza suplimentară că $M = Q$ (fig. 225, *b*), $MP \parallel AB$, avem:

$\sphericalangle N_1 \equiv \sphericalangle M_1$ (alterne interne, secanta fiind dreapta NQ).

Din ipoteza $NP \parallel AC$ rezultă că:

$\sphericalangle M_2 \equiv \sphericalangle N_2$ (alterne interne, secanta fiind dreapta NQ).

De aici rezultă că triunghiurile NMA și MNP sînt congruente (ULU), latura comună fiind $[NM]$. În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente N_1 și M_1 li se opun laturi congruente $[MA] \equiv [NP]$. (1)

În continuare, deoarece $MN \parallel BC$ (din ipoteză), rezultă că: $\sphericalangle M_1 \equiv \sphericalangle P_1$ (alterne interne, secanta fiind dreapta MP).

Deoarece $NP \parallel AC$ (din ipoteză), rezultă că: $\sphericalangle P_3 \equiv \sphericalangle M_3$ (alterne interne, secanta fiind dreapta MP).

Rezultă astfel că și triunghiurile MNP și PCM sînt congruente (ULU), latura comună fiind $[MP]$. În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente M_1 și P_1 li se opun laturi congruente $[NP] \equiv [MC]$. (2)

Pe baza tranzitivității relației de congruență, din (1) și (2) deducem că $[MA] \equiv [MC]$, rezultat care exprimă că în ipoteza suplimentară, că $M = Q$, punctul M este mijlocul laturii $[AC]$.

21. Exerciții și probleme

1. Dreptele distincte a și b sînt intersectate de dreapta c. Notînd $a \cap c = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$ și numerotînd unghiurile formate ca în figura 213 de la pagina 91, numiți toate „perechile" de unghiuri formate de dreptele a și b intersectate de „secanta" c.

2. Aceleași întrebări ca la 1, dacă dreptele distincte sînt m și n, „secanta" p, iar punctele de intersecție le notăm: $m \cap p = \{P\}$, $n \cap p = \{R\}$.

3. Fie segmentul $[MN]$ și semidreptele $[Mm$ și $[Nn$ situate de o parte și de alta a dreptei MN. Demonstrați că dacă $\sphericalangle NMm \equiv \sphericalangle MNn$, atunci Mm și Nn sînt paralele.

4. Fie ABC un triunghi în care $D \in AC$ și $[AD] \equiv [AC]$, $(D \neq C)$. Folosind teorema de existență a dreptelor paralele, precum și procedeul de construcție prezentat la pagina 95, construiți prin punctul D o paralelă la latura $[BC]$.

5. Fie ABC un triunghi. Folosind teorema de existență a dreptelor paralele, precum și procedeul de construcție prezentat la pagina 95, construiți: a) Prin punctul A o paralelă la dreapta BC; b) Prin punctul B o paralelă la dreapta CA; c) Prin punctul C o paralelă la dreapta AB.

Precizați cîte paralele se mai pot construi prin punctele A, B, C respectiv la dreptele BC, CA și AB. Justificați răspunsul.

6. Fie o dreaptă a și semidreptele $[Ax$ și $[Ay$ care nu sînt incluse în dreapta a. Să se demonstreze că dacă $a \parallel [Ax$ și $a \parallel [Ay$, atunci semidreptele $[Ax$ și $[Ay$ sînt opuse sau identice.

7. Punctele A, B, C sînt diferite două cîte două și dreapta a nu le conține. Dacă dreptele AB și AC sînt paralele cu dreapta a, atunci punctele A, B, C sînt colineare.

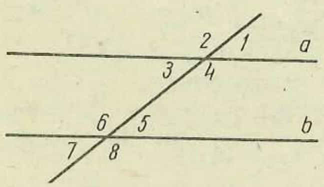


Fig. 226

8. În figura 226, dreptele a și b sînt paralele. Măsura unghiului 1 este de 40°. Calculați măsurile celorlalte șapte unghiuri marcate în desen, explicînd, în fiecare caz în parte, cum ați procedat.

9. Aceleași cerințe ca la 8, dacă se cunoaște că măsura unghiului 2 este de 135°.

10. Demonstrați consecințele 2 și 4 ale teoremei reciproce a dreptelor paralele de la pagina 97.

11. Demonstrați consecințele 1—4 ale teoremei de existență a dreptelor paralele de la pagina 96.

12. Desenați două drepte paralele și o secantă și demonstrați că:
a) Bisectoarele a două unghiuri alterne interne sînt paralele.
b) Bisectoarele a două unghiuri alterne externe sînt paralele.
c) Bisectoarele a două unghiuri corespondente sînt paralele.

13. În figura 227, punctele A și B aparțin dreptei CD, iar $m(\sphericalangle CAE) = 67°30'15''$ și $m(\sphericalangle ABF) = 112°29'45''$. Stabiliți dacă dreptele AE și BF sînt paralele sau concurente.

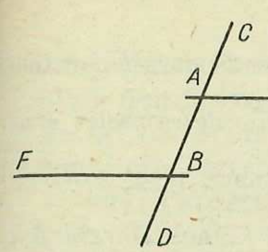


Fig. 227

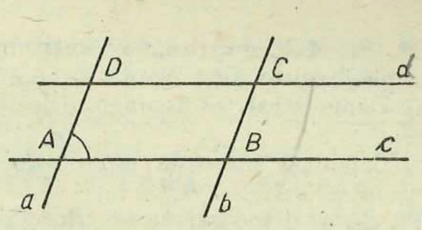


Fig. 228

14. În figura 228, dreptele a și b sînt paralele; la fel dreptele c și d sînt paralele. Dacă $m(\sphericalangle DAB) = 68°$, calculați suma: $m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D)$.

15. În triunghiul ABC (fig. 229), măsura unghiului ABC este de 50°, $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC $(D \in (AC))$, iar dreapta DE este paralelă cu dreapta BC $(E \in (AB))$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului BED. Ce fel de triunghi este BED?

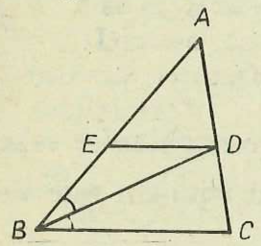


Fig. 229

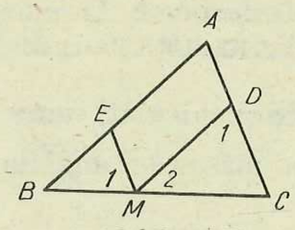


Fig. 230

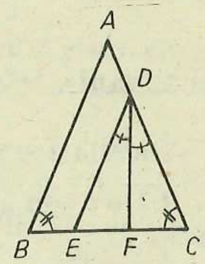


Fig. 231

16. În triunghiul ABC (fig. 230), $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, $M \in (BC)$, astfel încît $DM \parallel AB$, $EM \parallel AC$. Dacă $m(\sphericalangle M_1) = 67°$, $m(\sphericalangle M_2) = 44°$, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

17. În figura 231, punctele B, E, F, C sînt colineare, $D \in (AC)$, $DE \parallel AB$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$. Demonstrați că bisectoarea unghiului CDE ($[DF)$) împarte segmentul $[CE]$ în două părți congruente și $DF \perp BC$.

18. În figura 232 știm că segmentele $[BC]$ și $[B_1C_1]$ sînt incluse în dreapta a, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A_1C_1B_1$, $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$, iar punctele D și D_1 sînt mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[B_1C_1]$. Demonstrați că $AD \parallel A_1D_1$.

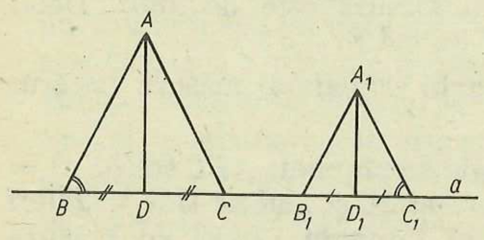


Fig. 232

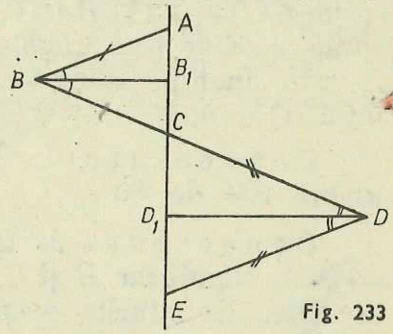


Fig. 233

19. În figura 233 știm că: $AE \cap BD = \{C\}$, $[AB] \equiv [BC]$, $[CD] \equiv [DE]$, iar punctele B_1 și D_1 sînt picioarele bisectoarelor unghiurilor ABC, respectiv $CDE (B_1 \in (AC)$ și $D_1 \in (CE))$. Demonstrați că $B_1B \parallel DD_1$.

20. Unghiul A al triunghiului ABC are măsura de 50°, iar unghiul B de 70°. Care sînt măsurile unghiurilor formate de semidreptele $[AB$ și $[AC$ cu paralela prin A la bisectoarea unghiului B?

21. Fie $a \cap b = \{B\}$, $a \cap c = \{C\}$ și $a \perp b$. Dacă $m(\sphericalangle ac) = 90°$, atunci $b \parallel c$.

22. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, b şi c drepte perpendiculare în punctele B şi C pe dreapta BC. Notăm $b \cap AC = \{M\}$, $c \cap AB = \{N\}$.

a) Demonstraţi că triunghiurile ABM şi ACN au unghiurile respectiv congruente. AMB

b) Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABM dacă $m(\sphericalangle ABC) = 30°$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 80°$.

23. Să se demonstreze că triunghiul format de o latură a unui triunghi dat şi de paralelele duse din extremităţile laturii considerate la laturile opuse unghiurilor cu vîrfurile în aceste extremităţi este congruent cu triunghiul dat.

24. Să se demonstreze că paralelele duse prin vîrfurile unui triunghi la laturile opuse unghiurilor respective determină un triunghi în care vîrfurile triunghiului dat sînt mijloace de laturi.

25. Triunghiul ABC este isoscel ($\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$) şi $[BD]$ este mediană ($D \in (AC)$). Construim $CE \parallel BD$, unde $E \in AB$. Demonstraţi că $[AB] \equiv [BE]$.

36. SUMA MĂSURILOR UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

Desenaţi un triunghi şi calculaţi suma măsurilor unghiurilor sale.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°.

Demonstraţia. Fie triunghiul oarecare ABC, în care facem o construcţie ajutătoare: printr-un vîrf al triunghiului considerăm o paralelă xy la latura opusă lui, de exemplu prin vîrful A fig.(234). Observăm că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle BAx$ (alterne interne formate de dreptele paralele xy şi BC cu secanta AB). Tot astfel, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle CAy$ (alterne interne formate de aceleaşi drepte paralele cu secanta AC).

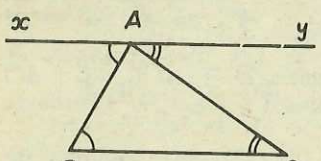


Fig. 243

Vom putea deci scrie: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle BAx) + m(\sphericalangle CAy)$. Constatăm că suma acestor trei unghiuri adiacente două cîte două cu vîrful în A este unghiul alungit xAy, a cărui măsură este de 180°. Deci: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180°$ (q.e.d.).

Consecinţa 1. Într-un triunghi echilateral măsura fiecărui unghi este de 60°.

Consecinţa 2. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), unghiurile B şi C sînt complementare şi ambele sînt unghiuri ascuţite. Unghiurile ascuţite ale unui triunghi isoscel au măsura de 45°.

Consecinţa 3. Într-un triunghi isoscel, unghiurile de la bază sînt ascuţite.

Demonstraţiile acestor trei consecinţe vor fi făcute de elevi ca temă pentru acasă.

Consecinţa 4. Un triunghi isoscel, în care măsura unuia dintre unghiuri este de 60° este triunghi echilateral.

Pentru a demonstra această consecinţă, este nevoie să facem două demonstraţii şi anume: una pentru cazul cînd unghiul cu măsura de 60° este un unghi de la baza triunghiului isoscel şi alta pentru cazul cînd unghiul de la vîrful triunghiului are măsura de 60°.

1) Să presupunem că în $\triangle ABC$ avem $[AB] \equiv [AC]$ şi, de exemplu, $m(\sphericalangle B) = 60°$. Ştim, dintr-o teoremă demonstrată anterior, că: „dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile opuse laturilor congruente sînt congruente", deci $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle B$; cum $m(\sphericalangle B) = 60°$, rezultă că $m(\sphericalangle C) = 60°$.

Am demonstrat că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°. Rezultă că $m(\sphericalangle A) = 180° - [m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)]$, deci $m(\sphericalangle A) = 180° - (60° + 60°)$, adică $m(\sphericalangle A) = 60°$; putem scrie: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

Dintr-o teoremă reciprocă demonstrată anterior ştim că „dacă într-un triunghi unghiurile sînt congruente, atunci triunghiul este echilateral".

2) Să presupunem acum că în triunghiul isoscel ABC de bază $[BC]$, $m(\sphericalangle A) = 60°$. Rezultă că $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180° - m(\sphericalangle A)$ sau $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 120°$; dar cum, triunghiul fiind isoscel, $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C)$, înseamnă că $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60°$. În concluzie $\triangle ABC$ este echilateral, avînd toate unghiurile congruente.

Aplicaţie. Într-un triunghi dreptunghic, cateta ce se opune unui unghi cu măsura de 30° are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Demonstraţia. Fie un astfel de triunghi, $\triangle ABC$ din figura 235. Conform consecinţei 2 a teoremei privind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, $m(\sphericalangle C) = 60°$. Facem o construcţie ajutătoare. Construim, de cealaltă parte a dreptei AB faţă de punctul C, unghiul ABx a cărui măsură să fie de 30°. Notăm $CA \cap Bx = \{C'\}$. Triunghiul BCC' astfel construit, avînd toate unghiurile cu măsura de 60°, este un triunghi echilateral ($[BC] \equiv [BC'] \equiv [CC']$). S-a demonstrat anterior că „dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarele unghiurilor triunghiului sînt şi mediatoarele laturilor ce se opun unghiurilor respective". Din faptul că bisectoarea $[BA$ este şi mediatoare, rezultă: $[CA] \equiv [AC']$ sau $CA = \frac{1}{2} \cdot CC'$. Cum $[CC'] \equiv [BC]$, relaţia precedentă se poate scrie $AC = \frac{1}{2} \cdot BC$ (q.e.d.).

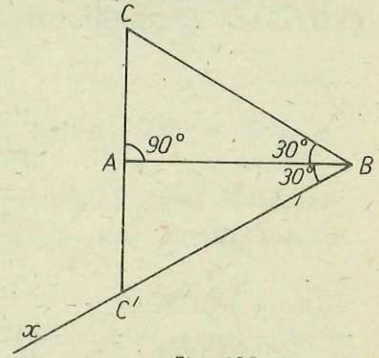


Fig. 235

Definiţie. Unghiul care este adiacent şi suplementar cu un unghi al unui triunghi se numeşte unghi exterior acelui triunghi.

De exemplu, în triunghiul ABC (fig. 236), unghiul ACD este un „unghi exterior" al triunghiului ABC, fiind adiacent și suplementar cu unghiul ACB al triunghiului. Cum în fiecare vîrf al triunghiului se pot determina cîte două unghiuri exterioare, rezultă că un triunghi are în total șase unghiuri exterioare.

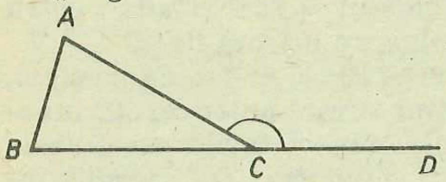


Fig. 236

A p l i c a ț i e. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului neadiacente cu el.

Demonstrația. Fie ABC un triunghi și $\sphericalangle ACD$ un unghi exterior lui (fig. 237). Folosim o construcție ajutătoare. Considerăm paralela CE prin punctul C la dreapta BA. Observăm că $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle A$ (unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele CE și BA cu secanta BD); de asemenea, $\sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle B$ (unghiuri corespondente formate de dreptele specificate mai sus).

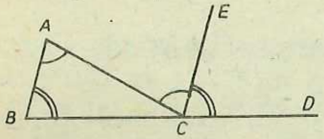


Fig. 237

Aceste congruențe ne permit să scriem:

$m(\sphericalangle ACE) = m(\sphericalangle A)$ și $m(\sphericalangle ECD) = m(\sphericalangle B)$.

Adunînd, membru cu membru, egalitățile de mai sus, obținem: $m(\sphericalangle ACE) + m(\sphericalangle ECD) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)$.

Dar, pentru că unghiurile ACE și ECD sînt adiacente, suma lor este tocmai unghiul exterior ACD, deci $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)$ (q.e.d.).

D e f i n i ț i e. Bisectoarea unui unghi exterior al unui triunghi se numește bisectoare exterioară a triunghiului corespunzătoare unghiului respectiv.

A p l i c a ț i e. Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarea unghiului ABC (interioară triunghiului ABC) și bisectoarea unghiului ABD (exterioară triunghiului ABC) sînt perpendiculare.

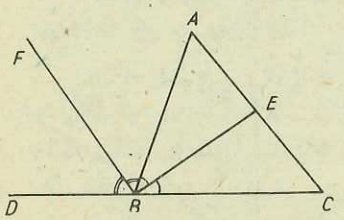


Fig. 238

Demonstrația. În figura 238, $[BE$ este bisectoarea unghiului ABC și putem scrie: $m(\sphericalangle ABE) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ABC)$ (1).

De asemenea, $[BF$ este bisectoarea unghiului ABD și putem scrie: $m(\sphericalangle ABF) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ABD)$ (2).

Unghiurile ABC și ABD sînt adiacente și suplementare, deci: $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ABD) = 180°$ (3).

Dar și unghiurile ABE și ABF sînt adiacente. Putem scrie: $m(\sphericalangle EBF) = m(\sphericalangle ABE) + m(\sphericalangle ABF)$ (4).

Ținînd seama de relațiile (1) și (2), relația (4) devine:

$$m(\sphericalangle EBF) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ABC) + \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ABD)$$

sau $m(\sphericalangle EBF) = \frac{1}{2} \cdot [m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ABD)]$, care, pe baza relației (3), devine:

$m(\sphericalangle EBF) = \frac{1}{2} \cdot 180°$. Deci $m(\sphericalangle EBF) = 90°$ sau $BE \perp BF$ (q.e.d.).

37. UNGHIURI CU LATURILE RESPECTIV PERPENDICULARE

T e o r e m ă. Două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sînt congruente dacă ambele sînt ascuțite sau obtuze și sînt suplementare dacă unul este ascuțit, iar celălalt obtuz.

Vom demonstra teorema mai întîi în cazul particular cînd unghiurile au vîrfurile în același punct.

a) Ambele unghiuri sînt ascuțite.

Fie unghiurile AOB și COD (fig. 239), unde $[OA \perp [OD$ și $[OB \perp [OC$.

Din $[OA \perp [OD$ deducem că $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOD) = 90°$ sau $m(\sphericalangle AOB) = 90° - m(\sphericalangle BOD)$, iar din $[OB \perp [OC$ deducem că $m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle COD) = 90°$ sau $m(\sphericalangle COD) = 90° - m(\sphericalangle BOD)$.

Observăm că unghiurile AOB și COD au același complement (unghiul BOD), deci sînt congruente.

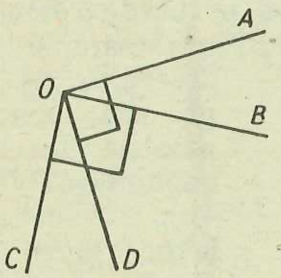


Fig. 239

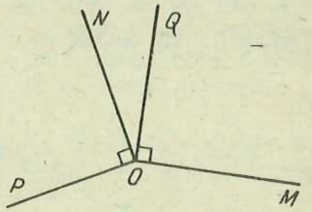


Fig.240

b) Ambele unghiuri sînt obtuze.

Fie unghiurile MON și POQ (fig. 240), unde $[OM \perp [OQ$ și $[ON \perp [OP$.

Unghiurile MOQ și QON fiind adiacente, rezultă că $m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOQ) + m(\sphericalangle QON)$ și cum $[OM \perp [OQ$, mai putem scrie $m(\sphericalangle MON) = 90° + m(\sphericalangle QON)$.

Pe de altă parte, $m(\sphericalangle POQ) = m(\sphericalangle PON) + m(\sphericalangle NOQ)$ — unghiurile PON și NOQ fiind adiacente și cum $[ON \perp [OP$, mai putem scrie: $m(\sphericalangle POQ) = 90° + m(\sphericalangle NOQ)$.

Rezultă că suma $90° + m(\sphericalangle NOQ)$ reprezintă atît măsura unghiului MON, cît și a unghiului POQ, deci $\sphericalangle MON \equiv \sphericalangle POQ$.

c) Un unghi este ascuțit, iar celălalt obtuz.

Fie unghiurile AOB și COD ($m(\sphericalangle AOB) < 90°$, $m(\sphericalangle COD) > 90°$, $[OA \perp [OD$ și $[OB \perp [OC$ – figura 241).

Observăm că unghiurile COA și AOB sînt unghiuri adiacente; la fel unghiurile AOB și BOD sînt adiacente; putem deci însuma aceste trei unghiuri, obținînd unghiul COD ($m(\sphericalangle COA) + m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle COD)$).

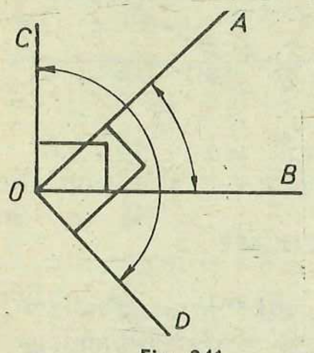


Fig. 241

Mai observăm că unghiul AOB are ca unghi complementar unghiul AOC ($OB \perp OC$ din ipoteză), deci $m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle AOB) = 90°$ (1). Dar unghiul AOB mai are ca unghi complementar și unghiul BOD ($OA \perp OD$ din ipoteză), deci $m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle AOB) = 90°$. (2)

Adunăm egalitățile (1) și (2) membru cu membru și obținem:

$$m(\sphericalangle COA) + m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle AOB) = 180°.$$

Cum suma măsurilor primelor trei unghiuri este tocmai măsura unghiului COD, rezultă că putem scrie: $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) = 180°$ (q.e.d.).

Să considerăm acum cazul, mai general, cînd cele două unghiuri nu au vîrfurile în același punct.

Fie unghiurile AOB și $CO'D$ și presupunem că $[OA \perp [O'C$ și $[OB \perp [O'D$ cu $m(\sphericalangle AOB) \leqslant 90°$ și $m(\sphericalangle CO'D) \leqslant 90°$ (fig. 242, *a*) și $m(\sphericalangle AOB) \leqslant 90°$ și $m(\sphericalangle CO'D) \geqslant 90°$ (fig. 242, *b*). Pentru a demonstra că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CO'D$ (în primul caz) și că $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle CO'D) = 180°$ (în al doilea caz) nu este nevoie de o demonstrație specială; în schimb facem niște construcții ajutătoare, și anume: desenăm, de exemplu, în punctul O paralele la laturile unghiului $CO'D$. (Conform axiomei paralelelor, pentru fiecare latură a unghiului $CO'D$ se poate construi prin O o singură paralelă.)

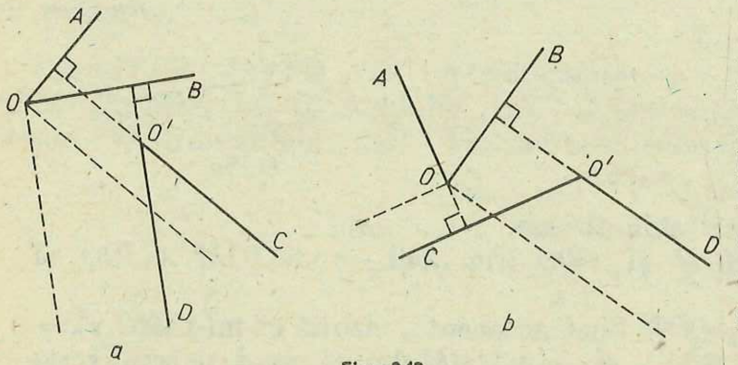


Fig. 242

Conform teoremei: „două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt congruente dacă sînt ambele ascuțite sau ambele obtuze și sînt suplementare dacă unul este ascuțit, iar celălalt obtuz“, rezultă că (și aceasta este valabilă pentru ambele figuri) unghiurile construite cu vîrfurile în punctul O sînt congruente sau suplementare cu unghiurile date.

Din acest moment (și acesta este sensul afirmației „nu este nevoie de o demonstrație specială“), *repetăm* demonstrațiile făcute în cazul particular cînd unghiurile aveau laturile perpendiculare și vîrfurile în același punct.

Probleme rezolvate

Pentru rezolvarea problemelor de mai jos, propunem cititorilor să realizeze singuri desenele, urmînd indicațiile din textul rezolvării.

Problema 1. În triunghiul isoscel ABC, înălțimea AD ($D \in BC$) formează cu latura $[AC]$ un unghi a cărui măsură este de 30°. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Rezolvare. a) Dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, atunci în $\triangle ABC$ înălțimea AD ($D \in (BC)$) este bisectoarea unghiului A și deci $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot 30° = 60°$.

Conform unei consecințe a teoremei relativă la suma unghiurilor unui triunghi, triunghiul ABC este echilateral și deci

$$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60°$$

b) Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $m(\sphericalangle C) > 90°$, atunci punctul D este exterior segmentului BC și în $\triangle$ dreptunghic ADC ($m(\sphericalangle D) = 90°$) avem $m(\sphericalangle CAD) = 30°$ (din ipoteză). Conform unei consecințe a teoremei privind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, $m(\sphericalangle ACD) = 90° - 30° = 60°$.

Deoarece unghiul ACD este un unghi exterior triunghiului ABC, urmează că $m(\sphericalangle ACB) = 180° - m(\sphericalangle ACD)$ sau $m(\sphericalangle ACB) = 180° - 60° = 120°$.

Cum, în $\triangle ABC$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, rezultă că $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 120°) = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$

Așadar $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 30°$ și $m(\sphericalangle C) = 120°$.

c) Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $m(\sphericalangle C) < 90°$, atunci punctul D este interior segmentului BC și în $\triangle$ dreptunghic ADC ($m\sphericalangle D) = 90°$) avem $m(\sphericalangle CAD) = 30°$ (din ipoteză). Conform unei consecințe a teoremei privind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, $m(\sphericalangle ACD) = 90° - 30° = 60°$.

Cum $\triangle ABC$ este isoscel (ipoteză), conform unei consecințe a teoremei privind suma unghiurilor unui triunghi, rezultă că $\triangle ABC$ este echilateral și deci $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60°$.

d) În sfîrșit, dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, punctul D este interior segmentului BC și în $\triangle$ dreptunghic ADC ($m(\sphericalangle D) = 90°$) avem, $m(\sphericalangle CAD) = 30°$ (ipoteza). Conform unei consecințe a teoremei privind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, $m(\sphericalangle ACD) = 90° - 30° = 60°$.

Și în acest caz, triunghiul isoscel ABC avînd un unghi a cărui măsură este de 60°; este triunghi echilateral și, prin urmare, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60°$.

Problema 2. Să se calculeze măsurile unghiurilor unui triunghi isoscel ABC știind că bisectoarea exterioară unghiului ACB formează cu dreapta AB un unghi CEB cu măsura de 15° ($E \in AB$).

Rezolvare. Notăm cu $[CD$ bisectoarea interioară unghiului ACB ($D \in (AB)$).

a) Presupunem $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Conform acestei noi ipoteze, $[CD$, bisectoarea interioară unghiului ACB, este și înălțimea triunghiului isoscel ACB, adică $CD \perp AB$ (o proprietate a triunghiului isoscel) (1).

Deoarece bisectoarea interioară și cea exterioară unui unghi — în cazul nostru ale unghiului ACB — sînt două semidrepte perpendiculare, rezultă că $CD \perp CE$ (2).

Din (1) și (2) deducem că dreptele AB și CE sînt paralele, $CE \parallel AB$. Acest rezultat este „absurd", contrazicînd ipoteza ($E \in AB$). Contradicția provine din ipoteza suplimentară ($\measuredangle A \equiv \measuredangle B$), deci triunghiul ABC nu poate fi isoscel avînd $\measuredangle A \equiv \measuredangle B$.

b) Presupunem $\measuredangle B \equiv \measuredangle C$. În această ipoteză, $[CD$, bisectoarea interioară a unghiului ACB, nu este și înălțimea triunghiului ABC corespunzătoare laturii AB, deci $CD \not\perp AB$, din care motiv $[CE$, bisectoarea exterioară a unghiului ACB, intersectează dreapta AB și deci punctul E există ($E \in AB$).

În triunghiul CED, m($\measuredangle CED$) = 15° (ipoteză) (1).

Deoarece $CE \perp CD$ (proprietatea bisectoarelor interioară și exterioară ale unui unghi al unui triunghi), rezultă că m($\measuredangle ECD$) = 90° (2).

Din (1) și (2), conform unei consecințe a teoremei privind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, în triunghiul ECD avem m($\measuredangle CDE$) = 90° − 15° = 75° (3).

În $\triangle CDB$, notăm m($\measuredangle BCD$) = $x°$ (4).

Pentru că triunghiul ABC este isoscel (ipoteza suplimentară) și $[CD$ este bisectoarea unghiului ACB (ipoteză), conform notației (4) avem că m($\measuredangle CBD$) = $2x°$ și, deoarece m($\measuredangle CDE$) = 75° (conform (3)), rezultă, scriind suma măsurilor unghiurilor triunghiului CBD, ecuația în x:

$$x° + 2x° + 75° = 180° \Leftrightarrow 3x° = 105° \Leftrightarrow x° = 35°.$$

Ținînd seama de notația (4), putem scrie m($\measuredangle BCD$) = 35° și deci, conform ipotezei, m($\measuredangle CBD$) = 2·35° = 70°. Cum $\measuredangle B \equiv \measuredangle C$, urmează că și m($\measuredangle C$) = 70°.

Așadar, în ipoteza suplimentară $\measuredangle B \equiv \measuredangle C$, problema are drept „soluție" triunghiul isoscel ABC în care m($\measuredangle A$) = 40° și m($\measuredangle B$) = m($\measuredangle C$) = 70°.

c) Presupunem $\measuredangle C \equiv \measuredangle A$. Să observăm că, în această nouă ipoteză, rezolvarea este analoagă cu rezolvarea precedentă, doar notațiile au fost schimbate și astfel se obține soluția m($\measuredangle A$) = m($\measuredangle C$) = 70° și m($\measuredangle B$) = 40°.

În concluzie, problema are două soluții:

I m($\measuredangle A$) = 40° și m($\measuredangle B$) = m($\measuredangle C$) = 70° sau

II m($\measuredangle A$) = m($\measuredangle C$) = 70° și m($\measuredangle B$) = 40°.

● 22. Exerciții și probleme

1. Două dintre unghiurile unui triunghi au ca măsuri: a) 80° și 65°; b) 48° și 59°; c) 46°25′30″ și 57°46′56″; d) 58°13′45″ și 100°53′27″. Care este măsura celui de-al treilea unghi?

2. Unul dintre unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic are ca măsură: a) 27°; b) 45°; c) 35°20′15″; d) 65°18′35″. Care este măsura celuilalt unghi ascuțit?

3. Cum trebuie să fie unghiurile B și C ale unui triunghi ABC, astfel încît înălțimea dusă din vîrful A al triunghiului să intersecteze dreapta BC într-un punct situat între B și C?

4. Dacă în triunghiurile ABC, $A'B'C'$ avem $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$ și $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$, atunci avem $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$.

5. Arătați că într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sînt ascuțite.

6. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare: a) nu poate exista decît cel mult un unghi obtuz; b) nu poate exista decît cel mult un unghi drept; c) cel puțin unul dintre unghiurile lui are măsura mai mare sau egală cu 60°.

7. Unul dintre unghiurile unui triunghi isoscel are ca măsură 70°. Care sînt măsurile celorlalte două unghiuri? Aceeași problemă în cazul în care unul dintre unghiuri are măsura de 130°. Dar cînd unul dintre unghiuri are ca măsură 90°?

8. Unul dintre unghiurile unui triunghi isoscel are ca măsură 40°. Care sînt măsurile celorlalte două unghiuri?

9. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au congruente următoarele elemente: $[AB] \equiv [A'B']$, $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$ și $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$. Justificați congruența triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

10. Dacă două triunghiuri isoscele au bazele respectiv congruente și unghiurile opuse lor congruente, sînt aceste triunghiuri congruente? De ce?

11. Dacă triunghiurile isoscele ABC și MNP ($[AB] \equiv [AC]$ și $[MN] \equiv [MP]$), au $[AB] \equiv [MN]$ și $\measuredangle B \equiv \measuredangle N$, sînt aceste triunghiuri congruente? Dar dacă au $[AB] \equiv [MN]$ și $\measuredangle A \equiv \measuredangle M$, sînt aceste triunghiuri congruente?

12. Dacă triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$ au $[AB] \equiv [A'B']$, sînt aceste triunghiuri congruente?

13. Două dintre unghiurile unui triunghi au măsurile de 60° și 40°. Să se determine: a) măsurile unghiurilor formate de bisectoarele triunghiului cu laturile opuse; b) măsurile unghiurilor dintre bisectoarele triunghiului; c) măsurile unghiurilor dintre înălțimile triunghiului.

14. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se calculeze: a) măsura unghiului dintre mediana din vîrful A și latura $[BC]$; b) măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului A și înălțimea din vîrful C; c) măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului A și mediana din vîrful C; d) măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului A și înălțimea din vîrful A; e) pe dreapta BC se ia un punct D ($C \in (BD)$) astfel ca $[BC] \equiv [CD]$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABD.

15. În triunghiul ABC m($\measuredangle A$) = 70°, m($\measuredangle B$) = 30°. Să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarea și înălțimea triunghiului duse din vîrful C. (În două cazuri — cu bisectoarea interioară și cu cea exterioară.)

16. Într-un triunghi un unghi are măsura de 40° și diferența măsurilor celorlalte două de 30°. Găsiți măsurile unghiurilor triunghiului.

17. Să se demonstreze că o paralelă dusă la o latură a unui triunghi isoscel (sau echilateral) formează cu celelalte două laturi un triunghi isoscel (sau echilateral).

18. Fie ABC un triunghi. Paralela prin C la bisectoarea unghiului B se intersectează cu dreapta AB în punctul D. Să se demonstreze că triunghiul BCD este isoscel.

19. În triunghiul dreptunghic BAC (m($\measuredangle A$) = 90°) se consideră înălțimea AD($D \in (BC)$).

a) Demonstrați că triunghiurile BAC, BDA și ADC au unghiurile congruente; b) Dacă m($\measuredangle B$) = 30° și AC = 3 cm, să se calculeze lungimile segmentelor $[BC]$, $[CD]$ și $[BD]$.

20. În triunghiul ABC cunoaștem m($\measuredangle A$) = 30° și m($\measuredangle B$) = 120°. Se construiesc $BD \perp AB$ ($D \in (AC)$) și $DF \perp BC$ ($F \in (BC)$). Arătați că: a) triunghiurile ABD și BFD au unghiurile congruente; b) dacă DE este mediană în triunghiul BDC ($E \in (BC)$) și $DH \parallel BC$ ($H \in (AB)$), atunci $DE \perp DH$.

21. Se consideră triunghiul oarecare ABC în care $BC < CA < AB$. Fie $D \in (CB$ și $E \in (BC$ astfel încît $[BD] \equiv [AB]$ și $[CE] \equiv [AC]$. Să se calculeze m($\measuredangle DAE$) în funcție de m($\measuredangle BAC$). Cercetați și cazul în care în $\triangle ABC$ avem $AB < AC < BC$.

22. Într-un triunghi isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), prin mijlocul D al laturii $[AC]$ se duce paralela la dreapta AB, care intersectează latura $[BC]$ în E și bisectoarea unghiului B în F. Să se demonstreze că:

a) Triunghiurile DEC și ADE sînt isoscele;

b) $AE \perp BC$; c) $[BE] \equiv [CE] \equiv [EF]$.

23. Să se demonstreze că în triunghiul ABC, dacă latura $[AC]$, bisectoarea unghiului B și mediatoarea laturii $[BC]$ sînt concurente în același punct, atunci $m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C)$ și reciproc.

24. Fie M, N, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale unui triunghi ABC. Fie D și E ($D \in CM$ și $E \in NP$) astfel încît $[MD] \equiv [CM]$ și $[PE] \equiv [PN]$. Demonstrați că: a) $AE = \frac{1}{2} \cdot BC$; b) $[AD] \equiv [BC]$; c) punctele E, A, D sînt colineare.

25. Se consideră un triunghi ABC cu $m(\sphericalangle C) = 60°$. Pe semidreptele $[AA'$, $[BB'$ ($A' \in BC$, $B' \in AC$) perpendiculare pe BC și respectiv AC se iau punctele M și respectiv N, astfel încît $[AA'] \equiv [A'M]$ și $[BB'] \equiv [B'N]$. Să se demonstreze că punctele M, C, N sînt colineare.

26. În exteriorul triunghiului isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se contruiesc triunghiurile dreptunghice isoscele ABD și ACE ($m(\sphericalangle D) = 90°$ și $m(\sphericalangle E) = 90°$).

a) Să se demonstreze că $DE \parallel BC$.

b) Să se arate că vîrful A, mijloacele segmentelor $[DE]$ și $[BC]$ și $\{M\} = DB \cap EC$ sînt colineare.

27. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) < 90°$, fie punctul $M \in (BC)$. Se construiește $MO \perp AC$ ($O \in (AC)$) și se prelungește $[MO]$ cu $[ON] \equiv [OM]$. Apoi se construiește $MQ \perp AB$ ($Q \in (AB)$) și se prelungește $[MQ]$ cu $[QP] \equiv [QM]$.

a) Să se demonstreze că $\triangle ANP$ este isoscel.

b) Să se demonstreze că unghiurile triunghiului ANP au măsuri constante, indiferent de poziția punctului M pe segmentul (BC), și să se exprime măsurile acestor unghiuri cu ajutorul măsurii unghiului A al triunghiului ABC.

c) Cîte grade trebuie să aibă măsura unghiului A, pentru ca $\triangle PAN$ să fie echilateral?

d) Dacă $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, atunci punctele P, A, N sînt colineare.

28. Dacă A și B sînt două puncte diferite și dacă $[Ax$ și $[By$ sînt două semidrepte incluse în același semiplan determinat de dreapta AB, astfel încît suma măsurilor unghiurilor xAB și yBA să fie mai mică de 180°, să se demonstreze că semidreptele $[Ay$ și $[By$ au un punct comun.

29. În triunghiul ABC, bisectoarea interioară $[BD$ ($D \in (AC)$) și bisectoarea exterioară $[BE$ ($E \in AC$) formează cu dreptele BC și respectiv AC unghiuri cu măsurile de 35° și respectiv de 15°. Dacă $AC = 8$ cm, să se calculeze BC.

30. În triunghiul MNP, bisectoarea interioară $[NO$ ($O \in (MP)$) și bisectoarea exterioară $[NR$ ($R \in MP$) formează cu dreptele NP și respectiv MP unghiuri cu măsurile de 45° și respectiv de 15°. Dacă $NP = 4$ cm, să se calculeze MN.

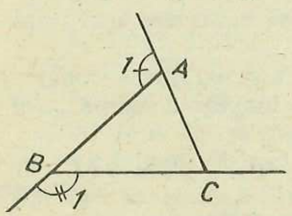


Fig. 243

31. În figura 243, măsurile a două unghiuri exterioare triunghiului ABC sînt: $m(\sphericalangle A_1) = 109°$ și $m(\sphericalangle B_1) = 138°$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

32. Măsura unui unghi exterior unui triunghi isoscel este de 130°. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului.

33. Măsura unui unghi exterior unui triunghi dreptunghic este de 150°. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului.

34. Să se demonstreze că suma măsurilor a două unghiuri exterioare ale unui triunghi este mai mare de 180°.

35. Care este suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi?

36. Un triunghi ABC are $m(\sphericalangle A) = 60°$. Bisectoarea $[AD$ ($D \in (BC)$) formează cu dreapta BC un unghi de 100°. Care sînt măsurile unghiurilor B și C ale triunghiului?

37. În triunghiul isoscel ABC ($\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$) știm că $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle BCD$ ($D \in (AC)$) și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BAD$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului.

38. Fie ABC un triunghi isoscel ($[AB] \equiv [AC]$) și fie $E \in BC$ astfel încît $[CE] \equiv [AC]$ (C între B și E).

a) Determinați măsura unghiului BAC, astfel încît $[AC$ să fie bisectoare în triunghiul ABE. b) Cercetați dacă $\triangle ABC \equiv \triangle ACE$.

39. Într-un triunghi ABC notăm cu D piciorul bisectoarei unghiului A și cu E mijlocul laturii $[AC]$. Știind că $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B)$ și că $DE \parallel AB$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

40. Cum trebuie să fie două numere, pentru ca să existe un triunghi astfel ca două dintre unghiurile sale să aibă drept măsură aceste numere?

41. Formulați o reciprocă a teoremei de la pagina 105 și demonstrați că ea este o „teoremă".

42. În triunghiul echilateral ABC, știm că AD este perpendiculară pe bisectoarea $[BB'$ a unghiului B ($B' \in (AC)$, $D \in (BB')$) și că $AE \perp AB$, unde $E \in BB'$. Demonstrați că $DE = \frac{1}{4} \cdot BE$.

43. Considerăm triunghiul ascuțitunghic ABC. Fie $AA' \perp BC$ ($A' \in (BC)$) și $CE \perp AC$, unde $E \in AA'$; $BB' \perp CA$ ($B' \in (CA)$) și $AF \perp AB$, unde $F \in BB'$; $CC' \perp AB$ ($C' \in (AB)$) și $BG \perp BC$, unde $G \in CC'$. Notînd cu M, N, P respectiv, intersecțiile dreptelor AF cu BG, BG cu CE și CE cu AF, demonstrați că triunghiurile MNP și ABC au unghiurile congruente.

44. În triunghiul ABC știm că $AD \perp AB$ și $CD \perp BC$. Să se calculeze măsura unghiului ADC știind că:

a) $\triangle ABC$ este ascuțitunghic și $m(\sphericalangle ABC) = 60°$;

b) $\triangle ABC$ este obtuzunghic și $m(\sphericalangle ABC) = 60°$.

45. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și $P \in (BC)$. Perpendiculara în P pe BC intersectează pe AC în M, iar perpendiculara din P pe AB intersectează pe AB în N.

a) Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel dacă $\sphericalangle MPN \equiv \sphericalangle ACB$.

b) Dacă $m(\sphericalangle MPN) = m(\sphericalangle ACB) = 60°$ și $\frac{BP}{PC} = 1$, atunci $NP = \frac{MP}{2}$.

38. CAZURILE DE CONGRUENȚĂ A TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE

În situația particulară a triunghiurilor dreptunghice (care au toate cîte un unghi drept), cazurile de congruență a triunghiurilor oarecare permit o formulare simplificată, în care apar numai două elemente ale triunghiurilor, cel de-al treilea fiind unghiul drept.

Astfel, pornind de la cazul 1 de congruență a triunghiurilor oarecare, putem enunța, pentru triunghiurile dreptunghice, următoarea formulare:

Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sînt congruente. (Unghiul cuprins între catete fiind un unghi drept, iar toate unghiurile drepte sînt congruente.)

Analog, cazului 2 de congruență a triunghiurilor oarecare îi corespunde, pentru triunghiurile dreptunghice, următoarea formulare: **Două triunghiuri dreptunghice care au cîte o catetă și unghiul ascuțit alăturat acesteia respectiv congruente sînt congruente.** (Al doilea unghi alăturat catetei este unghiul drept.)

În afara acestor două cazuri de congruență, deduse direct din cele ale triunghiurilor oarecare, mai există două cazuri de congruență specifice triunghiurilor dreptunghice.

Cazul 1. **Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele congruente și cîte unul din unghiurile ascuțite congruente, atunci ele sînt congruente.**

Acest caz este o consecință a teoremei asupra măsurilor unghiurilor unui triunghi și a cazului 2 de congruență a triunghiurilor oarecare.

Cazul 2. **Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și cîte o catetă respectiv congruente, atunci ele sînt congruente.**

Acest caz îl vom demonstra.

Ipoteza

$m(\sphericalangle BAC) = 90°$,
$m(\sphericalangle B'A'C') = 90°$,
$[BC] \equiv [B'C']$,
$[AB] \equiv [A'B']$.

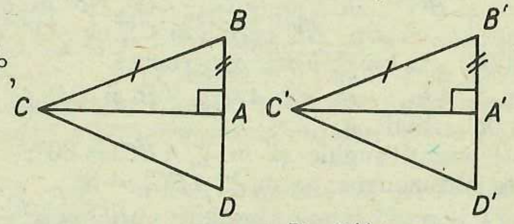


Fig. 244

Concluzia

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demonstrația. Pe dreapta BA luăm un punct D $(A \in (BD))$, astfel ca $[AD] \equiv [AB]$ (fig. 244) și pe dreapta $B'A'$ luăm, de asemenea, un punct D' $(A' \in (B'D'))$, astfel ca $[A'D'] \equiv [A'B']$.

Avem: $\triangle BAC \equiv \triangle DAC$ (cazul 1 — LUL), deoarece $[AC] = [AC]$ (segmente identice), $m(\sphericalangle DAC) = 180° - m(\sphericalangle BAC) = 90° = m(\sphericalangle BAC)$ și $[AB] \equiv [AD]$ (prin construcție). Deci $[BC] \equiv [DC]$.

La fel demonstrăm că $[B'C'] \equiv [D'C']$.

Acum observăm că $\triangle BCD \equiv \triangle B'C'D'$ (cazul 3 — LLL), deoarece $[BC] \equiv [B'C']$ (din ipoteză), $[CD] \equiv [C'D']$ (conform celor de mai sus) și $[BD] \equiv [B'D']$ $(BD = 2 \cdot AB = 2 \cdot A'B' = B'D')$. Deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$.

Deoarece: $[BC] \equiv [B'C']$ (din ipoteză), $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ (cum s-a demonstrat mai sus) și $[AB] \equiv [A'B']$ (din ipoteză), conform cazului 1 de congruență a triunghiurilor oarecare (LUL) putem scrie $\triangle BAC \equiv \triangle B'A'C'$ (q.e.d.).

Cazurile de congruență specifice triunghiurilor dreptunghice le putem rezuma astfel: **cazul 1 — IU (adică: ipotenuză-unghi) și cazul 2 — IC (adică: ipotenuză-catetă).**

23. Probleme

1. În triunghiul dreptunghic ABC $(m(\sphericalangle A) = 90°)$, lungimea catetei $[AB]$ este egală cu 5 cm și măsura unghiului C este de 30°. Notăm cu B' simetricul punctului B față de dreapta AC. Să se calculeze perimetrul triunghiului $BB'C$.

2. În triunghiul dreptunghic ABC $(m(\sphericalangle A) = 90°)$, măsura unghiului C este de 60°. Pe dreapta AC se ia un punct C' $(A \in (CC'))$ astfel ca $[AC'] \equiv [AC]$. Știind că $BC = 4$ cm, să se calculeze perimetrul triunghiului $CC'B$.

3. În triunghiul dreptunghic ABC $(m(\sphericalangle A) = 90°)$, măsura unghiului B este cît $\frac{2}{3}$ dintr-un unghi drept. Știind că înălțimea triunghiului corespunzătoare ipotenuzei $[BC]$ este de 2 cm și că punctul A' este simetricul punctului A față de dreapta BC, să se calculeze perimetrul triunghiului ACA'.

4. În triunghiul ABC, în care $AB = 3$ cm, știm că punctul C este simetricul punctului B față de înălțimea triunghiului corespunzătoare laturii $[BC]$, iar măsura unghiului B este de 60°. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

5. În triunghiul ABC, măsura unghiului A este de 60°. Înălțimea $[AD]$ $(D \in (BC))$ împarte latura $[BC]$ în două segmente congruente $(BD = DC = 6$ cm). Care este perimetrul triunghiului ABC?

6. În triunghiul ABC dreapta AD $(D \in (BC))$ împarte latura $[BC]$ în două părți congruente și formează cu dreapta BC unghiuri de 90°. Măsura unghiului C fiind de 40°, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

7. În triunghiul ABC $(m(\sphericalangle A) = 90°)$, înălțimea $[AD]$ $(D \in (BC))$ are lungimea de 6 cm. Știind că punctele B și C sînt simetrice față de înălțimea AD, să se calculeze lungimea ipotenuzei $[BC]$.

8. În triunghiul dreptunghic ABC, unghiurile B și C sînt congruente. Se cer măsurile unghiurilor pe care mediana $[AD]$ $(D \in (BC))$ le face cu laturile $[AB]$ și $[AC]$.

9. În triunghiul MNP, înălțimea $[MA]$ $(A \in (NP))$ formează cu latura $[MN]$ un unghi congruent cu unghiul N al triunghiului și cu latura $[MP]$ un unghi congruent cu unghiul P al triunghiului. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului MNP.

10. În triunghiul RST înălțimea $[RM]$ $(M \in (ST))$ este congruentă cu segmentele $[SM]$ și $[MT]$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului RST.

11. În triunghiul ABC, înălțimea $[AD]$ $(D \in (BC))$ formează cu latura $[AB]$ un unghi congruent cu unghiul C al triunghiului și cu latura $[AC]$ un unghi congruent cu unghiul B al triunghiului. Să se calculeze măsura unghiului BAC.

12. Fie M un punct situat în interiorul unghiului xOy $(m(\sphericalangle xOy) = 30°)$. Știind că $OM = 6$ cm și că punctele M_1 și M_2 sînt simetricele punctului M față de Ox și respectiv Oy, să se calculeze: a) măsura unghiului M_1OM_2; b) perimetrul triunghiului M_1OM_2.

13. În triunghiul ABC dreapta AD formează unghiuri congruente cu dreptele AB și AC. Știind că $AD \perp BC$ și că măsura unghiului BAC este de două ori mai mare decît cea a unghiului C, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

14. În triunghiul MNP măsura unghiului M este de trei ori mai mică decît măsura unghiului N și de două ori mai mică decît cea a unghiului P. Știind că $NP = 4$ cm, să se calculeze lungimea laturii $[MP]$.

15. În triunghiul dreptunghic ABC $(m(\sphericalangle B) = 90°)$, măsura unghiului C este de 60° și $BC = 3$ cm. În punctul D, mijlocul laturii $[AC]$, se ridică perpendiculara DE pe dreapta AC $(E \in BC)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ACE.

39. PATRULATERUL[1]

Să privim figurile geometrice desenate mai jos (fig. 245 și 246) fiecare determinate de cîte patru puncte distincte A, B, C, D (respectiv E, F, G, H) considerate în ordinea scrisă.

Vom observa, în fiecare dintre figuri, că:

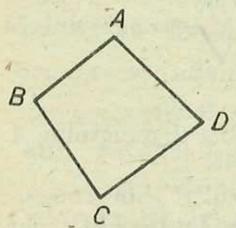


Fig. 245

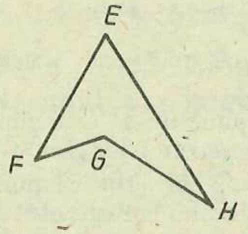


Fig. 246

a) Oricare trei puncte sînt necolineare.

b) Oricare două dintre segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sau $[BC]$ și $[DA]$, respectiv $[EF]$ și $[GH]$ sau $[FG]$ și $[HE]$, n-au nici un punct interior comun.

Figura formată de reuniunea $[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$ (ca și cea formată de $[EF] \cup [FG] \cup [GH] \cup [HE]$), care îndeplinește condițiile a) și b) de mai sus, este un *patrulater* și se notează $ABCD$, respectiv $EFGH$.

În figurile 247, 248 și 249, $ABCD$, $OPQR$ și $KLMN$ nu sînt patrulatere pentru că nu se îndeplinește fie condiția a) — ca în cazul figurilor 247 și 249 — (punctele A, B și C, respectiv K, L și M fiind colineare), fie condiția b) — ca în cazul figurii 248 — ($[OP] \cap [QR] \neq \neq \varnothing$).

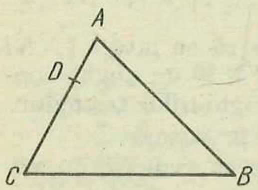


Fig. 247

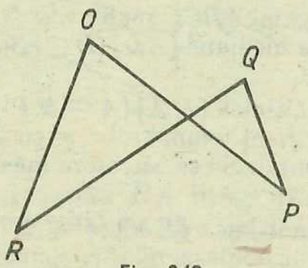


Fig. 248

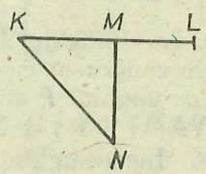


Fig. 249

Observație. Dacă în figura 248, în loc de ordinea O, P, Q, R, punctele ar fi luate în ordinea O, R, P, Q, atunci am putea vorbi de patrulaterul $ORPQ$.

Într-un patrulater $ABCD$, punctele A, B, C și D se numesc *vîrfurile patrulaterului*, segmentele $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$ se numesc *laturile patrulaterului*, iar unghiurile ABC, BCD, CDA și DAB se numesc *unghiurile patrulaterului.*

Vîrful A se spune că este *alăturat* vîrfurilor B și D și că este *opus* vîrfului C etc.

Laturile $[AB]$ și $[BC]$ se numesc *laturi consecutive* (la fel $[BC]$ și $[CD]$ sau $[CD]$ și $[DA]$ sau $[DA]$ și $[AB]$). Două laturi care nu sînt

[1] cuvîntul „*patrulater*" este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *quattuor* = patru și *latus-eris* = latură.

consecutive se numesc *laturi opuse* (laturile $[AB]$ și $[CD]$ sau $[BC]$ și $[DA]$ sînt opuse).

Unghiurile ABC și BCD, care au comună o latură a patrulaterului (latura $[BC]$), se numesc *unghiuri consecutive* (la fel $\measuredangle BCD$ și $\measuredangle CDA$ sau $\measuredangle CDA$ și $\measuredangle DAB$ sau $\measuredangle DAB$ și $\measuredangle ABC$ sînt unghiuri consecutive). Două unghiuri care nu au comună o latură a patrulaterului se numesc *unghiuri opuse* (unghiurile ABC și CDA sau $\measuredangle BCD$ și $\measuredangle DAB$ sînt unghiuri opuse).

Segmentele $[AC]$ și $[BD]$, care unesc două vîrfuri opuse ale patrulaterului, se numesc *diagonalele*[1] *patrulaterului.*

Suma lungimilor laturilor patrulaterului este *perimetrul patrulaterului.*

Vom considera patrulaterul $ABCD$ (fig. 245) identic cu patrulaterele $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, precum și cu patrulaterele $ADCB$ $DCBA$, $CBAD$, $BADC$.

D e f i n i ț i e. Un patrulater se numește patrulater convex[2] **dacă, oricare ar fi o latură a sa, cele două vîrfuri, nesituate pe latura considerată, se află de aceeași parte a dreptei în care este inclusă latura respectivă** (în același semiplan determinat de dreapta în care este inclusă latura respectivă).

În figura 245, patrulaterul $ABCD$ este un patrulater convex. Patrulaterul $EFGH$ din figura 246 nu este convex, deoarece — spre exemplu — punctele E și F se găsesc de o parte și de alta a dreptei GH. Patrulaterul $EFGH$ se numește *patrulater neconvex* sau *patrulater concav*[3].

24. Exerciții

1. Desenați în caietele voastre un patrulater $ABCD$, ca cel din figura 245. Care este vîrful opus lui D? Dar vîrfurile alăturate lui C? Care este latura opusă lui $[DA]$? Dar laturile consecutive ei? Care este unghiul opus lui CAD? Dar unghiurile consecutive lui?

2. Cîte patrulatere distincte puteți forma cu vîrfurile în punctele din figura 250? Scrieți-le, pe fiecare din ele, în toate modurile posibile. În cîte moduri diferite se poate nota același patrulater?

3. Cîte patrulatere distincte se pot forma cu vîrfurile în punctele din figura 251? Scrieți-le, pe fiecare din ele, în toate modurile posibile.

4. Care dintre patrulatere de la exercițiile 2 și 3 sînt convexe și care nu?

5. Un patrulater care are două laturi opuse paralele este totdeauna convex sau poate fi neconvex?

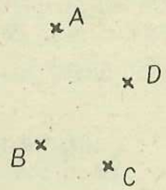


Fig. 250

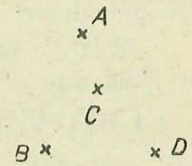


Fig. 251

[1] cuvîntul „*diagonală*" este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *dia* = prin și *gonia* = unghi.

[2] cuvîntul „*convex*" vine din limba latină: *convexus* = bombat.

[3] cuvîntul „*concav*" vine din limba latină: *concavus* = scobit.

40. SUMA MĂSURILOR UNGHIURILOR UNUI PATRULATER CONVEX

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360°.

Demonstrația. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Considerăm una dintre diagonalele patrulaterului — spre exemplu diagonala $[AC]$ (fig. 252). S-au format două triunghiuri ($\triangle ABC$ și $\triangle ADC$). Știm că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°. Scriem acest lucru pentru fiecare triunghi în parte:

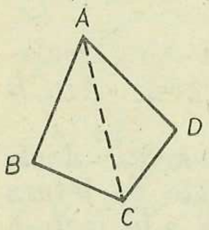


Fig. 252

$m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCA) + m(\sphericalangle CAB) = 180°$ (în $\triangle ABC$) și $m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle CDA) + m(\sphericalangle DAC) = 180°$ (în $\triangle ADC$).

Adunăm cele două egalități, membru cu membru. $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCA) + m(\sphericalangle CAB) + m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle CDA) + m(\sphericalangle DAC) = 360°$.

Folosim proprietatea de comutativitate a sumei: $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCA) + m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle + CDA) + m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle BAC) = 360°$.

Proprietatea de asociativitate a sumei ne permite să scriem: $m(\sphericalangle ABC) + [m(\sphericalangle BCA) + m(\sphericalangle ACD)] + m(\sphericalangle CDA) + [m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle BAC)] = 360°$ sau $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCD) + m(\sphericalangle CDA) + m(\sphericalangle DAB) = 360°$ (q.e.d.).

25. Probleme

1. Desenați un patrulater convex $ABCD$ în care $m(\sphericalangle A) = 50°$, $m(\sphericalangle B) = 70°$, $m(\sphericalangle C) = 140°$. Care este măsura unghiului D?

2. Aceeași problemă, pentru $m(\sphericalangle A) = 40°$, $m(\sphericalangle B) = 30°$, $m(\sphericalangle C) = 100°$.

3. Aceeași problemă, pentru $m(\sphericalangle A) = 120°$, $m(\sphericalangle B) = 150°$, $m(\sphericalangle C) = 100°$.

4. Cîte unghiuri cu măsurile mai mici de 90° poate avea un triunghi? Dar un patrulater convex? Analizați la fiecare întrebare toate posibilitățile.

5. Cum este unghiul din C al patrulaterului $ABCD$ din figura 253 față de unghiul din A?

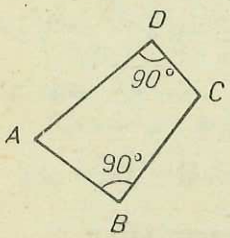


Fig. 253

6. Care sînt măsurile unghiurilor unui patrulater convex, dacă toate unghiurile lui sînt congruente? Desenați un astfel de patrulater. Are el neapărat și toate laturile congruente?

7. Să se construiască un patrulater $ABCD$ cunoscînd lungimile a trei dintre laturi ($AB = 3$ cm, $BC = 3{,}8$ cm, $CD = 4{,}5$ cm) și ale diagonalelor ($AC = 5{,}3$ cm, $BD = 6{,}1$cm).

8. Un patrulater este împărțit de una din diagonale în două triunghiuri, dintre care unul are perimetrul de 25 cm, iar celălalt de 27 cm. Dacă perimetrul patrulaterului este de 32 cm, să se determine lungimea acelei diagonale.

9. Să se construiască un patrulater $ABCD$ știind că $AB = 18$ mm, $BC = 24$ mm, $AD = 12$ mm, $CD = 30$ mm și $m(\sphericalangle ABC) = 120°$.

41. PARALELOGRAMUL[1)]

Din mulțimea patrulaterelor, vom studia numai cîteva tipuri speciale. Paralelogramul este unul dintre ele.

Definiție. Se numește paralelogram patrulaterul convex care are laturile opuse paralele.

Deci patrulaterul $ABCD$ (fig. 254) este paralelogram atunci și numai atunci cînd $AB \parallel DC$ și $AD \parallel BC$ (definiția paralelogramului).

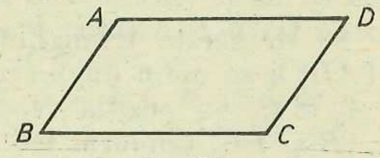


Fig. 254

Proprietățile paralelogramului

a) *Proprietăți referitoare la laturi*

Teoremă. Într-un paralelogram laturile opuse sînt congruente două cîte două.

Demonstrația. În paralelogramul $ABCD$, ducem o diagonală — de exemplu diagonala $[AC]$ — (fig. 255). S-au format două triunghiuri ($\triangle ABC$ și $\triangle CDA$) în care avem: $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle C_2$ (ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AB și DC cu secanta AC), $[AC] = [CA]$ (latură comună), $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle A_1$ (ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AD și BC cu secanta AC).

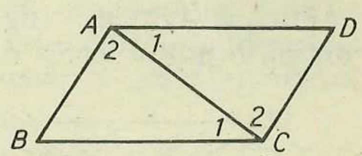


Fig. 255

Conform cazului 2 de congruență a triunghiurilor oarecare (ULU): $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$.

În triunghiuri congruente, unghiurilor congruente li se opun laturi congruente: $[BC] \equiv [AD]$ și $[AB] \equiv [DC]$ (q.e.d.).

Observație. Ipoteza teoremei se compune din două părți: 1) $AB \parallel DC$ și 2) $AD \parallel BC$.

Concluzia se compune tot din două părți: 1) $[AB] \equiv [DC]$ și 2) $[AD] \equiv [BC]$.

Deoarece în propoziția reciprocă putem forma concluzia, în întregime sau în parte, din ipoteza propoziției directe și invers, teorema precedentă are *două reciproce*.

[1)] Cuvîntul „*paralelogram*" este compus din cuvintele, provenite din limba greacă: *para-allelon* = paralel și *gramma* = scriere, desen.

Teorema reciprocă 1. Dacă într-un patrulater convex laturile opuse sînt congruente două cîte două, atunci patrulaterul este paralelogram.

Demmonstrația. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $[AB] \equiv [DC]$ și $[AD] \equiv [BC]$ (fig. 256). Diagonala $[AC]$ determină două triunghiuri ($\triangle ABC$ și $\triangle CDA$) în care avem:

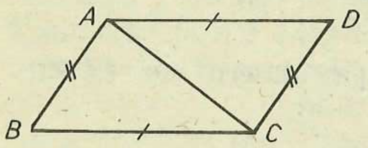


Fig. 256

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [DC] \\ [BC] \equiv [AD]\end{array}\right\} \text{(din ipoteză)},$$
$[CA] = [CA]$ (latură comună).

Conform cazului 3 de congruență a triunghiurilor oarecare (LLL): $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$.

În aceste triunghiuri congruente, laturilor congruente $[BC]$ și $[AD]$ li se opun unghiuri congruente: $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle C_2$. Dar unghiurile A_2 și C_2 au poziția de unghiuri alterne interne formate de dreptele AB și DC. Conform teoremei de existență a dreptelor paralele, congruența unghiurilor alterne interne $\sphericalangle A_2$ și $\sphericalangle C_2$ implică paralelismul dreptelor AB și DC. Deci $AB \parallel DC$.

De asemenea, laturilor congruente $[AB]$ și $[DC]$ li se opun unghiurile congruente: $\sphericalangle C_1$ și $\sphericalangle A_1$ și deci $AD \parallel BC$ (q.e.d.).

Teorema reciprocă 2. Dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sînt congruente și paralele, atunci patrulaterul este paralelogram.

Demonstrația. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $[AB] \equiv [DC]$ și $AB \parallel DC$ (fig. 257). Considerăm triunghiurile ABC și CDA obținute prin ducerea diagonalei $[AC]$.

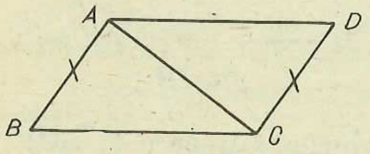


Fig. 257

În aceste triunghiuri avem: $[AB] \equiv [CD]$ (din ipoteză), $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle C_2$ (ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AB și DC cu secanta AC), $[AC] = [CA]$ (latură comună).

Conform cazului 1 de congruență a triunghiurilor oarecare (LUL), $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$. În aceste triunghiuri congruente laturilor congruente $[AB]$ și $[CD]$ li se opun unghiuri congruente: $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle A_1$. Dar aceste unghiuri au poziția de unghiuri alterne interne formate de dreptele AD și BC intersectate de secanta AC. Congruența acestor unghiuri implică paralelismul dreptelor AD și BC ($AD \parallel BC$). Această din urmă relație de paralelism ($AD \parallel BC$) împreună cu relația $AB \parallel DC$ (din ipoteză) exprimă faptul că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram (q.e.d.).

Prima teoremă reciprocă fiind demonstrată, rezultă că proprietatea: Într-un patrulater convex laturile opuse sînt congruente este o *proprietate caracteristică* tuturor paralelogramelor (și *numai a paralelogramelor*).

b) *Proprietăți referitoare la unghiuri*

Teoremă. Într-un paralelogram oricare două unghiuri opuse sînt congruente și oricare două unghiuri consecutive sînt suplementare.

Demonstrarea acestei teoreme se face folosind teorema relativă la unghiurile cu laturile respectiv paralele și o lăsăm pe seama elevilor, ca temă pentru acasă.

Observație. Se vede că este *suficient* să cunoaștem măsura unui unghi al unui paralelogram, pentru a cunoaște măsurile tuturor unghiurilor lui.

Teoremă reciprocă. Dacă într-un patrulater convex unghiurile opuse sînt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Demonstrația. Se știe, dintr-o teoremă demonstrată anterior, că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° (4 unghiuri drepte). Atunci, în patrulaterul convex $ABCD$, putem scrie: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 4$ dr.

Dar, cum din ipoteză mai știm că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$, suma de mai sus se poate scrie: $2 \cdot m(\sphericalangle A) + 2 \cdot m(\sphericalangle D) = 4$ dr sau $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle D) = 2$ dr.

Unghiurile A și D au poziția de unghiuri interne și de aceeași parte a secantei, formate de dreptele AB și DC intersectate de secanta AD. Dacă aceste unghiuri sînt suplementare, rezultă că dreptele AB și DC sînt paralele (consecința 3 a teoremei de existență a dreptelor paralele), deci $AB \parallel DC$. În același mod se demonstrează că $AD \parallel BC$ (q.e.d.).

Reciproca fiind demonstrată, rezultă că proprietatea: Într-un patrulater convex unghiurile opuse sînt congruente este o *proprietate caracteristică* tuturor paralelogramelor (și *numai a paralelogramelor)*.

c) *Proprietăți referitoare la diagonale*

Teoremă. Într-un paralelogram diagonalele se intersectează una pe alta în părți congruente.

Fie $ABCD$ un paralelogram (fig. 258) și O punctul de intersecție a diagonalelor.

Demonstrația. Triunghiurile AOB și COD sînt congruente (conform cazului 2 de congruență a triunghiurilor oarecare — ULU), deoarece: (1) $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle DCO$ (alterne interne formate de dreptele paralele AB și CD intersectate de AC), (2) $[AB] \equiv [CD]$ (ca laturi opuse ale paralelogramului), (3) $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$ (alterne interne formate de dreptele paralele AB și CD intersectate de BD).

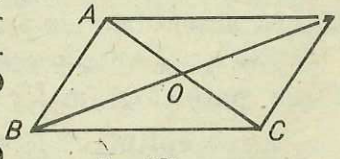


Fig. 258

În triunghiurile congruente AOB și COD unghiurilor congruente li se opun laturi congruente:

$[AO] \equiv [OC]$ (se opun unghiurilor congruente (3)),
$[BO] \equiv [OD]$ (se opun unghiurilor congruente (1)) (q.e.d.).

Punctul de intersecţie a diagonalelor unui paralelogram este *centrul paralelogramului.*

Teoremă reciprocă. Dacă într-un patrulater convex diagonalele se intersectează una pe alta în părţi congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Pentru demonstraţie vom folosi tot figura 258.

Demonstraţia. Triunghiurile AOB şi COD sînt congruente (conform cazului 1 de congruenţă a triunghiurilor oarecare — LUL), deoarece: (1) $[AO] \equiv [CO]$ (din ipoteză), (2) $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ (ca unghiuri opuse la vîrf), (3) $[BO] \equiv [DO]$ (din ipoteză).

În triunghiurile congruente AOB şi COD, laturilor congruente li se opun unghiuri congruente: $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$ (se opun laturilor congruente (1)).

Dar unghiurile ABO şi CDO au poziţia de unghiuri alterne interne formate de dreptele AB şi DC. Conform teoremei de existenţă a dreptelor paralele, congruenţa unghiurilor alterne interne ABO şi CDO implică paralelismul dreptelor AB şi DC. Deci $AB \parallel DC$.

În acelaşi mod se demonstrează congurenţa triunghiurilor AOD şi COB, care implică paralelismul dreptelor AD şi BC.

Din $AB \parallel DC$ şi $AD \parallel BC$ rezultă că $ABCD$ este paralelogram (q.e.d.).

Reciproca fiind demonstrată, rezultă că proprietatea: Diagonalele unui patrulater convex se intersectează una pe alta în părţi congruente este o *proprietate caracteristică* a tuturor paralelogramelor (şi *numai a paralelogramelor).*

Pentru conciziunea enunţului, teorema directă şi teorema reciprocă referitoare la diagonalele paralelogramului pot fi formulate astfel:

Teorema directă. Într-un paralelogram diagonalele au acelaşi mijloc.

Teorema reciprocă. Dacă într-un patrulater convex diagonalele au acelaşi mijloc, atunci patrulaterul este paralelogram.

Observaţie. Toate propoziţiile prin care sînt exprimate proprietăţi caracteristice ale paralelogramului pot fi folosite ca definiţii ale lui.

Cu ajutorul teoremelor *directe* sau *reciproce*, a menunţat proprietăţile paralelogramelor.

Le recapitulăm, formulîndu-le astfel:

Teoremă. În orice paralelogram laturile opuse sînt congruente şi reciprocele: orice patrulater convex în care laturile opuse sînt congruente este paralelogram, şi orice patrulater convex în care două laturi opuse sînt congruente şi paralele este paralelogram.

Teoremă. În orice paralelogram unghiurile opuse sînt congruente şi reciproc, orice patrulater convex în care unghiurile opuse sînt congruente este paralelogram.

Teoremă. În orice paralelogram diagonalele se intersectează una pe alta în părţi congruente şi reciproc, orice patrulater convex în care diagonalele se intersectează una pe alta în părţi congruente este paralelogram.

Construcţia paralelogramelor

Putem construi un paralelogram astfel:

a) Desenăm două drepte paralele pe care le intersectăm cu alte două drepte paralele. Punctele de intersecţie (patru) vor reprezenta vîrfurile unui paralelogram (conform definiţiei paralelogramului).

b) Desenăm două segmente paralele şi congruente. Capetele (extremităţile) acestor segmente vor fi vîrfurile unui paralelogram (proprietatea caracteristică a paralelogramului de a avea două laturi paralele şi congruente).

c) Intersectăm două segmente necongruente, dar care au acelaşi mijloc. Capetele (extremităţile) acestor segmente vor fi vîrfurile unui paralelogram (proprietatea caracteristică a paralelogramului de a avea diagonalele cu acelaşi mijloc).

● 26. Exerciţii şi probleme

1. În paralelogramul $ABCD$, notăm cu O intersecţia dreptelor AC şi BD. Să se calculeze:
a) perimetrul paralelogramului, dacă $AB = 3$ cm şi $BC = 0{,}4$ dm;
b) $AC + BD$, dacă $AO = 2$ cm şi $OB = 30$ mm;
c) măsurile unghiurilor ABC, BCD şi CDA, dacă $m(\sphericalangle DAB) = 50°$;

2. Precizaţi dacă, în următoarele cazuri, patrulaterul $MNPQ$ (notăm cu O intersecţia dreptelor NP şi NQ) este paralelogram şi de ce?
a) $MN \parallel QP$ şi $MQ \parallel NP$; b) $MN = QP = 4$ cm şi $MQ = NP = 6$ cm: c) $m(\sphericalangle QMN) = m(\sphericalangle NPQ) = 30°$ şi $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle PQM$; d) $m(\sphericalangle QMN) = m(\sphericalangle NPQ) = 40°$ şi $m(\sphericalangle QMN) + m(\sphericalangle MNP) = 180°$; e) $m(\sphericalangle OMN) = m(\sphericalangle MPQ) = 25°$ şi $QM \parallel PN$; f) $MN = QP = 4$ cm şi $MN \parallel QP$; g) $MO = OP = 2$ cm şi $m(\sphericalangle QMO) = m(\sphericalangle NPO) = 30°$; h) $MO = OP = 3$ cm şi $NO = OQ = 2$ cm.

3. Să se calculeze măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$ (A şi C sînt vîrfuri opuse) în fiecare din următoarele cazuri: a) $m(\sphericalangle A) = 40°$; b) $m(\sphericalangle B) = 120°15'$; c) $m(\sphericalangle C) = 56°15'45''$; d) $m(\sphericalangle D) = 75°$.

4. În paralelogramul $ABCD$ ştim că $m(\sphericalangle ABD) = 20°$, $m(\sphericalangle ACB) = 80°$ şi că unghiul dintre diagonalele paralelogramului are măsura de 120°. Care sînt măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$?

5. Să se calculeze lungimile laturilor paralelogramului $ABCD$, ştiind că
$$AB + BC + CD + DA = 18 \text{ cm} \text{ şi } BC = \frac{1}{2} \cdot AB.$$

6. Să se calculeze lungimile laturilor paralelogramului $ABCD$, ştiind că
$$DC - BC = 6 \text{ cm} \text{ şi } AD = \frac{1}{3} \cdot AB.$$

7. Să se „construiască" un paralelogram $ABCD$, cunoscînd că:
a) $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm. Cîte soluţii are problema?
b) $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm şi $m(\sphericalangle BAD) = 40°$. Cîte soluţii are problema?

8. Să se „construiască" un paralelogram $ABCD$, știind că lungimile diagonalelor lui sînt de 6 cm și 12 cm, iar cea a laturii $[AB]$ de 7 cm.

9. Să se „construiască" un paralelogram știind că diagonalele formează un unghi cu măsura de 130°, iar lungimile acestor diagonale sînt de 8 cm și 14 cm.

10. Printr-un punct oarecare M, care aparține bazei unui triunghi isoscel ABC ($AB = AC = a$ cm) se duc paralele la laturile congruente. Să se demonstreze că perimetrul paralelogramului astfel format (construit) este egal cu $2a$ cm.

11. Se dă paralelogramul $ABCD$ cu laturile $AB = 7{,}5$ cm și $AD = 2{,}5$ cm. a) Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor ADC și BCD împart latura $[AB]$ în trei segmente congruente. b) Să se determine măsura unghiului format de aceste bisectoare. c) Să se afle cu cît trebuie „mărite" laturile $[AB]$ și $[AD]$ pentru ca bisectoarele de mai sus să se intersecteze pe latura $[AB]$ a paralelogramului.

12. Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor din vîrfurile unui paralelogram pe diagonale sînt vîrfurile unui paralelogram care are același centru cu paralelogramul dat.

13. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\sphericalangle A) = 90°$) și E un punct care aparține înălțimii $[AD]$ ($D \in (BC)$). Perpendiculara în E pe CE intersectează dreapta AB în F. Paralela prin E la AB intersectează pe BC în G. Să se demonstreze că $AGEF$ este paralelogram.

14. În paralelogramul $PQRS$, bisectoarea unghiului P intersectează latura $[RS]$ în punctul M, iar bisectoarea unghiului R intersectează latura $[PQ]$ în punctul N. Să se demonstreze că:

a) patrulaterul $MRNP$ este paralelogram;

b) patrulaterul $NSMQ$ este paralelogram.

15. În exteriorul paralelogramului $ABCD$, din figura 259, s-au „construit" pe laturile lui triunghiurile dreptunghice isoscele ABE și ADG cu unghiurile drepte în A. Să se demonstreze că triunghiurile AEG și ABC sînt congruente.

16. În paralelogramul $ABCD$ se iau pe laturile $[BC]$ și $[DA]$ segmentele $[BE] \equiv [DG]$ (fig. 260). Să se demonstreze că $BEDG$ este paralelogram și că punctul de intersecție a diagonalelor lui este același cu cel de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD$.

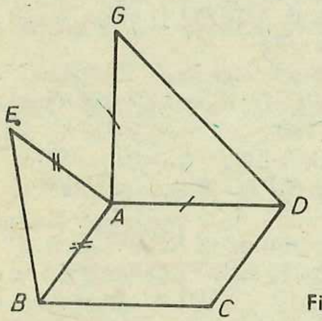


Fig. 259

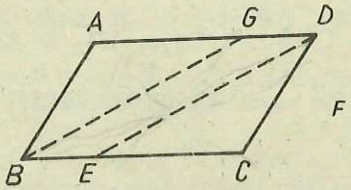


Fig. 260

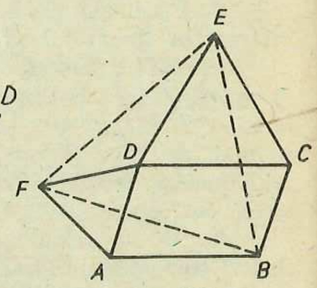


Fig. 261

17. Pe laturile paralelogramului $ABCD$ (cu unghiul A ascuțit și cu măsura diferită de 60°) se „construiesc", în exteriorul paralelogramului, triunghiurile echilaterale DCE și ADF (fig. 261). Să se demonstreze că triunghiul EBF este echilateral.

18. Paralelogramele $ABCD$ și $ABEF$ au o latură comună și dreptele DC și FE sînt diferite. Să se demonstreze că $DCEF$ este paralelogram.

19. Paralelogramele $ABCD$, $BCEF$ și $CDGE$ au două cîte două o latură comună. Să se demonstreze că BG, AE, DF au toate un punct comun (sînt concurente în același punct).

20. În patrulaterul convex $ABCD$ distanțele de la punctele A și C la diagonala $[BD]$ sînt egale. De asemenea, distanțele de la punctele B și D la diagonala $[AC]$ sînt egale. Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

42. LINIA MIJLOCIE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Definiție. Într-un triunghi, segmentul ale cărui extremități sînt mijloacele a două laturi se numește linie mijlocie.

De exemplu, considerăm $\triangle ABC$ și mijloacele D și E ale laturilor $[AB]$ și $[AC]$ (fig. 262). Segmentul $[DE]$ este o linie mijlocie. Conform figurii, putem scrie $[AD] \equiv [DB]$ și $[AE] \equiv [EC]$.

Teoremă (asupra liniei mijlocii într-un triunghi). **Într-un triunghi segmentul care unește mijloacele a două laturi (linia mijlocie) este paralel cu cea de-a treia latură și are ca lungime jumătate din lungimea acesteia.**

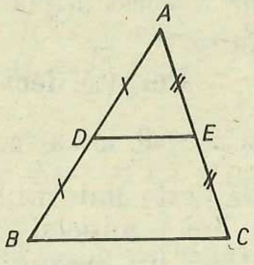


Fig. 262

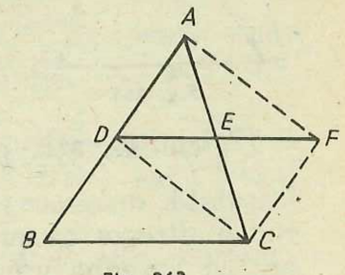


Fig. 263

Demonstrația. Fie ABC un triunghi și $[DE]$ linie mijlocie. Facem o „construcție ajutătoare". Pe dreapta DE luăm un punct F astfel ca $[DE] \equiv [EF]$ (fig. 263) și unim pe A cu F și pe D cu C.

În patrulaterul $ADCF$ diagonalele $[AC]$ și $[DF]$ au proprietățile: $[AE] \equiv [EC]$ (din ipoteză) și $[DE] \equiv [EF]$ (din construcția făcută).

Conform teoremei reciproce: „Dacă într-un patrulater convex diagonalele au același mijloc, atunci patrulaterul este un paralelogram", rezultă că patrulaterul $ADCF$ este paralelogram. Deci $AD \parallel FC$ și $[AD] \equiv [FC]$. Cum AD este una și aceeași dreaptă cu DB și $[AD] \equiv [BD]$ (din ipoteză), putem scrie $DB \parallel FC$ și $[DB] \equiv [FC]$. Rezultă că patrulaterul $DBCF$ este la rîndul său un paralelogram (conform teoremei reciproce: „Dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sînt congruente și paralele, atunci patrulaterul este paralelogram").

Prin urmare, $DE \parallel BC$ (laturile opuse într-un paralelogram sînt paralele) și $DE = \frac{1}{2} \cdot BC$ (laturile opuse într-un paralelogram sînt congruente ($[DF] \equiv [BC]$), iar $DE = \frac{1}{2} \cdot DF$ (din construcție)) (q.e.d.).

Observație. Într-un triunghi există trei linii mijlocii.

Teoremă reciprocă. Într-un triunghi ABC, paralela prin mijlocul D al laturii $[AB]$ la latura $[BC]$ conține mijlocul E al laturii $[AC]$ și avem $DE = \frac{1}{2} \cdot BC$.

Demonstrația. Demonstrăm mai întîi că $[AE] \equiv [EC]$. Folosim metoda „reducerii la absurd".

Presupunem că E nu ar fi mijlocul laturii $[AC]$, adică $[AE] \not\equiv [EC]$. În acest caz ar exista un alt punct, E' (fig. 264), care să fie mijlocul laturii $[AC]$ ($[AE'] \equiv [E'C]$). Atunci, ar însemna că segmentul $[DE']$ ar fi linie mijlocie în triunghiul ABC și conform teoremei directe asupra liniei mijlocii într-un triunghi, ar însemna că $DE' \parallel BC$.

Dar cum din ipoteză știm că $DE \parallel BC$, ar însemna că prin punctul D ar exista două paralele (DE și DE') la dreapta BC. Acest rezultat la care am ajuns contrazice axioma lui Euclid (axioma paralelelor), deci este absurd. Absurditatea se datorește presupunerii făcute, că *nu punctul E* este mijlocul laturii AC, ci punctul E' ar fi acest mijloc. Presupunerea făcută *este deci falsă.*

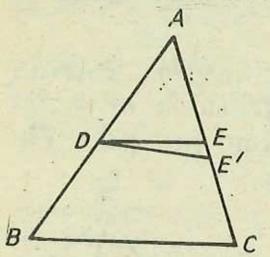


Fig. 264

Rezultă deci că $[AE] \equiv [EC]$.

Demonstrația părții a doua a concluziei $\left(DE = \frac{1}{2} \cdot BC\right)$ este imediată, deoarece $[DE]$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$ și, conform teoremei directe asupra liniei mijlocii într-un triunghi, linia mijlocie are ca lungime jumătate din lungimea laturii cu care este paralelă. Deci $DE = \frac{1}{2} \cdot BC$ (q.e.d.).

Aplicație

Cu cunoștințele dobîndite asupra paralelogramului și cele despre linia mijlocie în triunghi, putem demonstra următoarea teoremă:

Dacă într-un triunghi două mediane sînt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

Ipoteza

$\triangle ABC$,
$D \in (AB)$, $[AD] \equiv [DB]$,
$E \in (AC)$, $[AE] \equiv [EC]$,
$[EB] \equiv [DC]$.

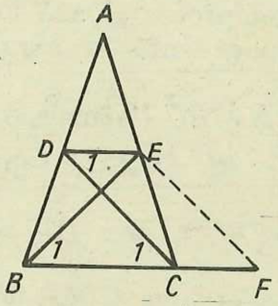


Fig. 265

Concluzia

$\triangle ABC$ isoscel.

Demonstrația. Folosim o „construcție ajutătoare". Construim paralela prin E la DC și notăm cu F punctul de intersecție a acestei paralele cu dreapta BC (fig. 265). Deci $EF \parallel DC$.

Patrulaterul $CFED$ este paralelogram, conform definiției, deoarece $DE \parallel CF$ ($[DE]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC) și $EF \parallel DC$ (prin construcția efectuată).

Rezultă că: (1) $[DC] \equiv [EF]$ (ca laturi opuse în paralelogram),
(2) $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle D_1$ (ca unghiuri opuse în paralelogram).

Cum $[EB] \equiv [DC]$ (din ipoteză) și $[DC] \equiv [EF]$ (s-a dovedit mai sus (1)), rezultă, prin „tranzitivitatea relației de congruență", că $[EB] \equiv [EF]$ și deci că triunghiul EBF este isoscel, iar de aici că:

(3) $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle F$ (ca unghiuri de la baza triunghiului isoscel).

Din (3) și (2) deducem că (4) $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle D_1$ (tranzitivitatea relației de congruență).

Pe de altă parte, (5) $\sphericalangle D_1 \equiv \sphericalangle C_1$ (alterne interne $DE \parallel CF$, secanta fiind DC).

Din (4) și (5) rezultă că (6) $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle C_1$ (tranzitivitatea relației de congruență).

Afirmăm că $\triangle EBC \equiv \triangle DCB$ (cazul 1 — LUL), pentru că: $[EB] \equiv [DC]$ (din ipoteză), $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle C_1$ (s-a arătat mai sus (6)), $[BC] = [BC]$ (latură comună).

În aceste triunghiuri congruente laturilor congruente $[BE]$ și $[CD]$ li se opun unghiuri congruente: $\sphericalangle ECB \equiv \sphericalangle DBC$. Deci triunghiul ABC este isoscel (q.e.d.).

Observație. Această teoremă este reciprocă unei alte teoreme: **Dacă un triunghi este isoscel, atunci medianele corespunzătoare laturilor congruente sînt congruente.**

Din cele două teoreme de mai sus (directa și reciproca) rezultă că proprietatea: *Într-un triunghi două mediane sînt congruente este o proprietate caracteristică triunghiurilor isoscele* (în sensul că numai aceste triunghiuri o au).

27. Exerciții și probleme

1. În triunghiul ABC, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Știind că:

a) $AM = 3$ cm, $MB = 30$ mm, $AN = 7$ cm, $NC = 0{,}7$ dm. Justificați de ce $MN \parallel BC$. b) $AB = 16$ dm, $AM = 80$ cm, $AC = 24$ dm, $AN = 120$ cm. Justificați de ce $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$.

2. În triunghiul ABC punctele M, N, P sînt respectiv mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Calculați, pentru fiecare caz în parte, lungimile laturilor:

a) triunghiului MNP, dacă $AB = 68$ mm, $BC = 76$ mm, $CA = 102$ mm.

b) triunghiului ABC, dacă $MN = 29$ mm, $NP = 25$ mm, $MP = 24$ mm. Ce legătură există între perimetrele triunghiurilor ABC și MNP?

3. Fie ABC un triunghi și $[EF]$ o „linie mijlocie" în acest triunghi ($E \in (AB)$, $F \in (AC)$). Calculați lungimile segmentelor: a) $[AB]$ și $[AC]$, dacă $AE = 4$ cm și $FC = 7$ cm; b) $[AB]$ și $[AC]$, dacă $EB = 7$ cm și $AF = 2$ cm; c) $[AE]$ și $[AC]$, dacă $AB = 13$ cm și $FC = 4{,}3$ cm; d) $[FC]$ și $[AB]$, dacă $AC = 12{,}4$ dm și $AE = 4{,}2$ dm.

4. Punctele M și N sînt mijloacele a două laturi ale triunghiului echilateral ABC. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că: a) $MN = 4$ cm; b) $MN = 0{,}7$ dm.

5. Triunghiul ABC este isoscel ($[AB] \equiv [AC]$), iar $[CD]$ și $[BE]$ sînt mediane ale acestui triunghi ($D \in (AB)$, $E \in (AC)$). Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, dacă:

a) $DE = 2$ cm și $AB = 2 \cdot BC$; b) $DE = 1{,}5$ cm și $AC = 3 \cdot BC$.

6. În triunghiul MNP, $[MN] \equiv [MP]$ și $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle PMQ$ ($Q \in (NP)$). Știind că $QR \parallel NM$ ($R \in (MP)$), să se calculeze perimetrul triunghiului MNP, dacă: a) $PQ = 3$ cm și $QR = 2$ cm; b) $NQ = 4$ cm și $QR = 3$ cm; c) $PQ = 5$ cm și $QR = 500$ mm. În acest caz, care este măsura unghiului M al triunghiului MNP? d) $NQ = 4{,}5$ cm și $QR = 45$ mm. În acest caz care este măsura unghiului P?

7. Fie $[EF]$ „linie mijlocie" în triunghiul ABC ($E \in (AB)$). Calculați lungimile laturilor $[BC]$ și $[CA]$, pentru fiecare caz în parte, dacă: a) $AB = 6$ cm, $EF = 3{,}5$ cm și perimetrul triunghiului ABC de 22 cm; b) $AB = 7{,}8$ cm, $EF = 2{,}3$ cm și perimetrul triunghiului ABC de 23 cm; c) $AB = 8$ cm, $EF = 4$ cm și perimetrul triunghiului ABC de 23 cm; d) $AB = 10$ cm, $EF = 5$ cm și perimetrul triunghiului ABC de 30 cm.

8. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 23 cm. Să se calculeze lungimile liniilor mijlocii dacă: a) $AB + AC = 18$ cm; b) $AB + BC = 14$ cm. Problema admite mai multe soluții?

9. În triunghiul ABC se știe că $EF \parallel BC$ ($E \in (AB)$, $F \in (AC)$). În următoarele situații, justificați de ce $AF = FC$: a) $AE = 3$ cm, $AB = 6$ cm; b) $AE = 0{,}4$ dm, $EB = 400$ mm; c) $AB = 1{,}8$ cm, $EB = 9$ mm; d) $FC = 7$ cm, $AC = 14$ cm.

10. Fie B' și C' mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$ ale unui triunghi ABC. Să se demonstreze că mijloacele înălțimii, bisectoarei și medianei din vîrful A aparțin dreptei $B'C'$.

11. În triunghiul ABC se știe că $[AN]$, $[BP]$ și $[CM]$ sînt mediane ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$). Să se demonstreze că: a) Triunghiurile AMP, MBN, PNC au unghiurile congruente cu cele ale triunghiului ABC. b) Triunghiurile NPM și ABC au unghiurile respectiv congruente. (Triunghiul NPM se numește *triunghi median* sau *triunghi complementar* triunghiului ABC, deoarece M, N, P sînt „picioarele" medianelor triunghiului ABC.)

12. Același enunț ca la problema precedentă. Să se demonstreze că: a) Patrulaterul $AMNP$ este paralelogram. Indicați încă două paralelograme de acest fel (determinate de „picioarele" medianelor M, N, P și vîrfurile A, B, C). b) Linia mijlocie $[MP]$ împarte mediana $[AN]$ în două părți congruente și, invers, mediana $[AN]$ împarte linia mijlocie $[MP]$ în două părți congruente.

13. Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram.

14. Să se demonstreze că segmentele care au extremitățile în mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater se intersectează în părți congruente.

15. Să se demonstreze că punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram aparține dreptei determinată de mijloacele a două laturi opuse ale paralelogramului.

16. În triunghiul ABC punctele D și E sînt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[BC]$. Dacă G este punctul de intersecție a dreptelor AE și CD, demonstrați că $2 \cdot DG = GC$ și $2 \cdot EG = GA$.

17. Să se demonstreze că dreapta determinată de vîrful A al unui triunghi ABC și mijlocul medianei din B intersectează latura $[BC]$ într-un punct E, astfel ca $BE = \frac{1}{3} \cdot BC$.

43. PARALELOGRAME PARTICULARE

43.1. DREPTUNGHIUL[1]

D e f i n i ț i e. Se numește dreptunghi un paralelogram care are un unghi drept.

Un dreptunghi se desenează ca cel din figura 266. Faptul că $ABCD$ este un dreptunghi poate fi scris, spre exemplu, astfel: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $m(\sphericalangle B) = 90°$.

Dreptunghiul fiind un paralelogram, proprietățile paralelogramului (teoremele directe) sînt adevărate și în cazul dreptunghiului. Le vom enunța (de fapt le repetăm) fără a le mai demonstra (deoarece au fost demonstrate la studiul paralelogramului). Deci:

1) Într-un dreptunghi laturile opuse sînt congruente.

2) Într-un dreptunghi unghiurile opuse sînt congruente.

3) Într-un dreptunghi două unghiuri consecutive sînt suplementare.

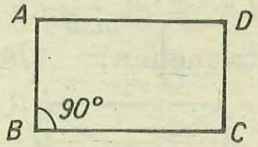


Fig. 266

4) Într-un dreptunghi diagonalele au același mijloc.

Fiind un paralelogram *particular* (care are o proprietate în plus: un unghi cu măsura de 90°) dreptunghiul, pe lîngă proprietățile paralelogramului, are și alte proprietăți (care sînt *numai* ale dreptunghiului). Deci:

T e o r e m ă. Dreptunghiul are toate unghiurile congruente și deci toate sînt unghiuri drepte (consecință a definiției dreptunghiului).

(Această teoremă mai poate fi enunțată astfel: **Dacă un patrulater convex este dreptunghi, atunci toate unghiurile lui sînt congruente și deci toate sînt unghiuri drepte.)**

Demonstrația. Vom folosi figura 266. Fiind paralelogram, dreptunghiul are unghiurile opuse congruente: $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$, ($m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle D) = 90°$), dar și două unghiuri consecutive suplementare: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = 180°$, ceea ce implică: $m(\sphericalangle A) = 90°$. Cum $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle A)$ — ca unghiuri opuse, rezultă că și $m(\sphericalangle C) = 90°$.

Așadar, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle D) = 90°$ (q.e.d.)

Teoremă reciprocă. Dacă un patrulater are toate unghiurile congruente și deci sînt drepte, atunci el este dreptunghi.

Demonstrația. Vom folosi tot figura 266. Este suficient să demonstrăm că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, deoarece, avînd un unghi drept (din ipoteză), el va fi dreptunghi.

[1] Denumirea „*dreptunghi*" a fost introdusă în terminologia matematică românească, în anul 1814, de omul de cultură Gheorghe A. Asachi (1788—1869), întemeietorul învățămîntului în Moldova.

Considerăm dreptele AD și BC intersectate de secanta AB. Din ipoteză: $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90°$, deci $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = 180°$. Rezultă că unghiurile DAB și ABC, care sînt unghiuri interne și de aceeași parte a secantei AB, sînt suplementare, deci $AD \parallel BC$.

Analog se demonstrează că $AB \parallel DC$.

Așadar, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Avînd un unghi drept (ipoteză), patrulaterul este dreptunghi (q.e.d.).

Proprietatea descrisă de teorema reciprocă este o *proprietate caracteristică dreptunghiurilor.*

O altă proprietate a dreptunghiului este dată de următoarea:

T e o r e m ă. Diagonalele unui dreptunghi sînt congruente.

Demonstrația. În dreptunghiul $ABCD$ din figura 267, considerînd triunghiurile ABC și BAD, avem: $[BC] \equiv [AD]$ (ca laturi opuse în paralelogramul $ABCD$), $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$ ($m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle BAD) = 90°$, din ipoteză și consecința definiției dreptunghiului), $[AB] = [BA]$ (latură comună).

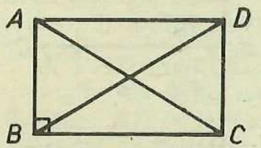


Fig. 267

Fiind dreptunghice și avînd catetele respectiv congruente, cele două triunghiuri dreptunghice sînt congruente. De aici rezultă și congurența ipotenuzelor $[AC] \equiv [BD]$ (q.e.d.).

Teoremă reciprocă. Dacă diagonalele unui paralelogram sînt congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.

Demonstrația. Fie paralelogramul $ABCD$ cu diagonalele congruente ($[BD] \equiv [AC]$) din figura 268. Considerînd triunghiurile ABD și BAC, avem: $[AB] = [BA]$ (latură comună); $[BD] \equiv [AC]$ (ipoteză), $[AD] \equiv [BC]$ (ca laturi opuse în paralelogramul $ABCD$).

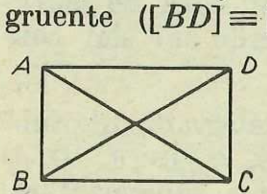


Fig. 268

Conform cazului 3 de congruență a triunghiurilor oarecare (LLL), $\triangle ABD \equiv \triangle BAC$.

În aceste triunghiuri congruente, laturilor congruente $[BD]$ și $[AC]$ li se opun unghiuri congruente: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$.

Dar aceste două unghiuri sînt unghiuri ale paralelogramului de aceeași parte a secantei AB, adică sînt unghiuri suplementare; deci $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle ABC) = 90°$.

Așadar, paralelogramul $ABCD$, avînd un unghi drept, este dreptunghi (q.e.d.).

Proprietatea descrisă de această teoremă reciprocă este o *proprietate caracteristică dreptunghiurilor:*

Cu ajutorul teoremelor directe sau reciproce am enunțat proprietățile dreptunghiului. Le recapitulăm, formulîndu-le astfel:

T e o r e m ă. În orice dreptunghi toate unghiurile sînt congruente și deci sînt unghiuri drepte și — reciproc — orice patrulater convex în care toate unghiurile sînt congruente și deci sînt unghiuri drepte este dreptunghi.

T e o r e m ă. În orice dreptunghi diagonalele sînt congruente și — reciproc — orice paralelogram cu diagonalele congruente este dreptunghi.

Dreptunghiul admite două axe de simetrie și anume: mediatoarele laturilor lui. În figura 269 axele de simetrie ale dreptunghiului $ABCD$ sînt dreptele MN și PQ (M — mijlocul lui $[AB]$, N — mijlocul lui $[CD]$, P — mijlocul lui $[AD]$, Q — mijlocul lui $[BC]$).

Se observă că axele de simetrie ale dreptunghiului sînt perpendiculare între ele, sînt paralele cu laturile dreptunghiului și conțin punctul de intersecție a diagonalelor lui.

Dacă E este un punct ce aparține figurii, simetricul lui față de axa de simetrie MN (punctul E') aparține, de asemenea, figurii; tot așa simetricul lui E față de axa de simetrie PQ (punctul E'') aparține, de asemenea, figurii.

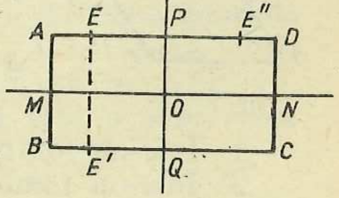


Fig. 269

Construcția dreptunghiului

Putem desena un dreptunghi astfel:

a) Desenăm un triunghi dreptunghic (vîrfurile lui vor fi trei dintre vîrfurile unui dreptunghi) și apoi, prin vîrfurile unghiurilor ascuțite, desenăm paralelele la catetele triunghiului. Intersecția paralelelor reprezintă cel de-al patrulea vîrf al dreptunghiului.

b) Desenăm două segmente congruente care să aibă același mijloc. Capetele (extremitățile) celor două segmente sînt vîrfurile unui dreptunghi.

c) Desenăm două drepte paralele și apoi desenăm o perpendiculară pe una dintre aceste drepte. Această perpendiculară, împreună cu o altă dreaptă paralelă cu ea, determină la intersecțiile cu primele două drepte, vîrfurile unui dreptunghi.

28. Exerciții

1. În dreptunghiul $ABCD$, notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Să se calculeze: a) perimetrul dreptunghiului, dacă: $AB = 2{,}5$ cm și $BC = 0{,}2$ dm; b) $AC + BD$, dacă $AO = 7{,}5$ cm; c) $m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle DCB)$.

2. Justificați de ce, în următoarele cazuri, patrulaterul convex $MNPQ$ ($MP \cap QN = \{O\}$) este dreptunghi.
a) $MN \parallel QP$ și $NP \parallel MQ$ și $m(\sphericalangle M) = 90°$; b) $MN = QP = 3$ cm și $NP = MQ = 4$ cm și $m(\sphericalangle P) = 90°$; c) $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle N$ și $m(\sphericalangle N) = m(\sphericalangle P)$; d) $\sphericalangle QMN \equiv \sphericalangle NPQ$ și $MQ \parallel NP$ și $m(\sphericalangle MNP) = 90°$; e) $MN = QP = 6$ cm și $MN \parallel QP$ și $m(\sphericalangle Q) = 90°$; f) $MO = OP = 3$ cm și $ON = OQ = 30$ mm.

D e f i n i ț i e. Se numește romb un paralelogram care are două laturi consecutive congruente.

Un romb se desenează ca cel din figura 270. Faptul că $ABCD$ este un romb poate fi scris, spre exemplu, astfel: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $[AB] \equiv [BC]$.

Obișnuim să numim diagonalele rombului: *diagonala mare* și *diagonala mică*.

Lungimea segmentului perpendicularei comune a două laturi opuse se numește *înălțimea* rombului (fig. 271).

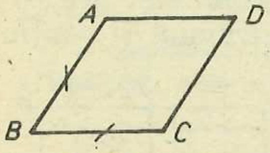


Fig. 270

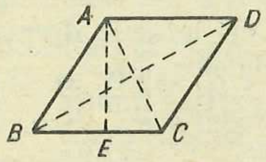


Fig. 271

Rombul fiind un paralelogram, proprietățile paralelogramului (teoremele directe) sînt adevărate și în cazul rombului. Le vom enunța, fără a le mai demonstra:

1) Într-un romb laturile opuse sînt congruente.
2) Într-un romb unghiurile opuse sînt congruente.
3) Într-un romb două unghiuri consecutive sînt suplementare.
4) Într-un romb diagonalele au același mijloc.

Fiind un paralelogram particular (care are o proprietate în plus: două laturi consecutive congruente) rombul, pe lîngă proprietățile paralelogramului, are și alte proprietăți (care sînt *numai* ale rombului). Deci:

T e o r e m ă. Toate laturile rombului sînt congruente (consecință a definiției rombului).

(Această teoremă mai poate fi enunțată astfel: **Dacă un patrulater convex este un romb, atunci toate laturile lui sînt congruente.**)

Demonstrația. În rombul din figura 270 avem: $[AB] \equiv [BC]$ (ipoteză),

$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [CD] \\ [BC] \equiv [DA]\end{array}\right\}$ (ca laturi opuse în romb).

Rezultă că $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DA]$ (folosind tranzitivitatea relației de congruență) (q.e.d.).

Teoremă reciprocă. Dacă un patrulater convex are toate laturile congruente, atunci el este romb.

Demonstrația. Este suficient să demonstrăm că patrulaterul $ABCD$ (fig. 272) este paralelogram, deoarece, avînd două laturi consecutive congruente (din ipoteză), el va fi romb.

[1] Cuvîntul „*romb*“ vine din limba greacă: *rhombos* = sfîrlează.

Diagonala $[AC]$ determină în patrulaterul dat triunghiurile ABC și CDA, care sînt congruente — cazul 3 (LLL) — pentru că:

$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [CD] \\ [BC] \equiv [DA]\end{array}\right\}$ (ipoteză),

$[AC] = [CA]$ (latură comună).

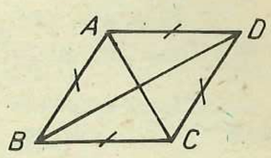


Fig. 272

În triunghiurile congruente ABC și CDA avem: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CDA$ (1).

Diagonala $[BD]$ determină triunghiurile BAD și DCB, care sînt, de asemenea, congruente — cazul 3 (LLL) — pentru că:

$\left.\begin{array}{l}[BA] \equiv [DC] \\ [AD] \equiv [CB]\end{array}\right\}$ (ipoteză), $[BD] = [DB]$ (latură comună).

În triunghiurile congruente BAD și DCB avem: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DCB$ (2).

Relațiile (1) și (2) exprimă că în patrulaterul $ABCD$ unghiurile opuse sînt congruente, deci el este paralelogram. Avînd două laturi consecutive congruente (ipoteză) acest paralelogram este romb (q.e.d.).

Proprietatea descrisă de teorema reciprocă este o *proprietate caracteristică romburilor.*

Alte proprietăți ale rombului

T e o r e m ă. Într-un romb diagonalele sînt perpendiculare între ele și sînt bisectoarele unghiurilor lui.

Teorema descrie *două* proprietăți și anume:

1) diagonalele sînt perpendiculare între ele;

2) diagonalele sînt bisectoarele unghiurilor lui.

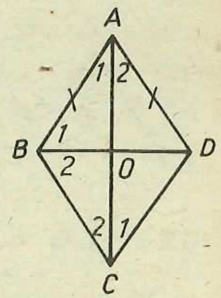


Fig. 273

Demonstrația. În rombul $ABCD$ din figura 273, fie $AC \cap BD = \{O\}$. Triunghiul ABD este isoscel ($[AB] \equiv [AD]$ — ipoteză), iar punctul O este mijlocul lui $[BD]$ (diagonalele paralelogramului au același mijloc). Deci $[AO]$, mediana corespunzătoare bazei triunghiului este înălțime ($AO \perp BD$) și bisectoare ($\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$).

Asemănător se demonstrează că în triunghiul CBD segmentul $[CO]$ este mediană, înălțime și bisectoare.

Așadar, $AC \perp BD$ și diagonala $[AC]$ este bisectoarea unghiurilor BAD și BCD.

În triunghiul isoscel BAC, mediana $[BO]$ este bisectoarea unghiului ABC (demonstrația este asemănătoare cu precedenta). Reținem deci: $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$.

Considerînd și triunghiul isoscel ADC, mediana $[DO]$ este bisectoarea unghiului ADC ($\sphericalangle D_1 \equiv \sphericalangle D_2$).

Așadar, diagonala $[BD]$ este bisectoarea unghiurilor ABC și ADC (q.e.d.).

Teorema precedentă are două reciproce.

Teorema reciprocă 1. Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci el este romb.

Demonstrația. În paralelogramul $ABCD$ din figura 274, fie $AC \cap BD = \{O\}$. Triunghiurile AOB și AOD sînt dreptunghice ($AO \perp BD$ ipoteză). Aceste două triunghiuri sînt congruente avînd catetele respectiv congruente: $[AO] \equiv [AO]$ (catetă comună) și $[BO] \equiv [OD]$ (într-un paralelogram diagonalele au același mijloc).

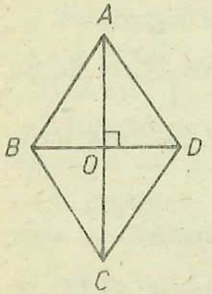


Fig. 274

Din congruența triunghiurilor AOB și AOD rezultă $[AB] \equiv [AD]$. Cum $[AB]$ și $[AD]$ sînt laturi consecutive ale paralelogramului $ABCD$ rezultă că el este romb (q.e.d.).

Teorema reciprocă 2. Dacă într-un paralelogram o diagonală este bisectoarea unui unghi, atunci paralelogramul este romb.

Demonstrația. În paralelogramul $ABCD$ (fig. 275) avem:

(1) $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$ (ipoteză), (2) $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$ (alterne interne formate de dreptele paralele AD și BC — ipoteză — cu secanta AC).

Din (1) și (2) deducem că: (3) $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$ (tranzitivitatea relației de congruență).

Triunghiul ABC este deci isoscel și $[AB] \equiv [BC]$. Cum laturile $[AB]$ și $[BC]$ sînt laturi consecutive ale paralelogramului, rezultă că acesta este romb (q.e.d.).

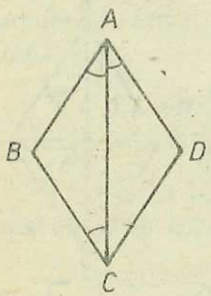


Fig. 275

Proprietățile descrise de teoremele reciproce de mai sus sînt proprietăți caracteristice romburilor.

Cu ajutorul teoremelor directe sau reciproce am enunțat proprietățile rombului. Le recapitulăm, formulîndu-le astfel:

Teoremă. În orice romb toate laturile sînt congruente și — reciproc — orice patrulater cu toate laturile congruente este romb.

T e o r e m ă. În orice romb diagonalele sînt perpendiculare și — reciproc — orice paralelogram cu diagonalele perpendiculare este romb.

Teoremă. În orice romb diagonalele sînt bisectoarele unghiurilor și — reciproc — orice paralelogram în care o diagonală este și bisectoarea unui unghi este romb.

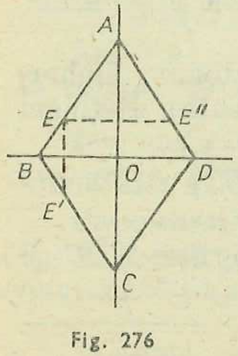


Fig. 276

Rombul admite două axe de simetrie și anume: dreptele care includ diagonalele rombului. Ca și la dreptunghi, axele de simetrie ale rombului sînt perpendiculare între ele.

Fie rombul $ABCD$ (fig. 276) și dreptele BD și AC axele lui de simetrie. Dacă E este un punct ce aparține figurii, simetricul lui față de axa de simetrie BD (punctul E') aparține, de asemenea, figurii; tot așa simetricul lui E față de axa de simetrie AC (punctul E'') aparține, de asemenea, figurii.

Construcția rombului

Putem desena un romb astfel:

a) Desenăm un unghi a cărui măsură să fie diferită de 90°. Pe fiecare din laturile acestui unghi fixăm cîte un punct care, împreună cu vîrful unghiului, să determine segmente congruente (cele două puncte și vîrful unghiului vor fi trei dintre vîrfurile unui romb). Prin cele două puncte alese desenăm paralelele la laturile unghiului. Intersecția paralelelor reprezintă cel de-al patrulea vîrf al rombului.

b) Desenăm două drepte perpendiculare. Fixăm pe prima dreaptă două puncte simetrice față de a doua dreaptă. La fel, pe dreapta a doua fixam două puncte simetrice față de prima dreaptă, astfel încît segmentele formate pe prima dreaptă să nu fie congruente cu cele de pe dreapta a doua. Cele patru puncte astfel „fixate“ sînt vîrfurile unui romb.

c) Desenăm un triunghi isoscel (vîrfurile lui vor fi trei dintre vîrfurile unui romb). Apoi desenăm simetricul vîrfului triunghiului față de bază. Acesta va fi cel de-al patrulea vîrf al rombului.

29. Exerciții

1. În rombul $ABCD$ notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Să se calculeze:

a) Perimetrul rombului, dacă: 1) $AB = 0{,}03$ m, 2) $CD = 0{,}003$ hm; b) m($\sphericalangle OAB$), dacă m($\sphericalangle ABO$) = 20°; c) m($\sphericalangle ABC$) dacă m($\sphericalangle OAB$) = 40°; d) m($\sphericalangle AOD$); e) m($\sphericalangle COD$); f) lungimea diagonalei $[AC]$, dacă m($\sphericalangle ABC$) = 60° și $AB = 2$ cm; g) lungimea diagonalei $[DB]$, dacă m($\sphericalangle DCO$) = 30° și $DC = 4$ cm.

2. Justificați de ce, în următoarele cazuri, patrulaterul $MNPQ$ ($MP \cap QN = \{O\}$) este romb.

a) $MN \parallel QP$ și $NP \parallel MQ$ și $MN = NP = 3$ cm; b) $MN \parallel QP$ și $NP \parallel MQ$ și $MP \perp NQ$; c) $MN \parallel QP$ și $NP \parallel MQ$ și m($\sphericalangle MNO$) = m($\sphericalangle ONP$) = 15°; d) $MN \parallel QP$ și $[MN] \equiv [QP]$ și m($\sphericalangle MON$) = 90°; e) $MO = OP = 1$ cm și $NO = OQ = 3$ cm și $[MN] \equiv [NP]$; f) $MO = OP = 2$ cm și $NO = OQ = 3$ cm și $MQ \perp ON$.

43.3. PĂTRATUL[1)]

D e f i n i ț i e. Se numește pătrat un dreptunghi care are două laturi consecutive congruente.

Un pătrat se desenează ca cel din figura 277. Faptul că $ABCD$ este un pătrat poate fi scris, spre exemplu, astfel: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, m($\sphericalangle A$) = 90° și $[AB] \equiv [AD]$.

[1)] Cuvîntul „*pătrat*“ este format din numeralul *patru*. Denumirea *pătrat* a fost introdusă în terminologia matematică românească, în anul 1821, de către cărturarul iluminist român Gheorghe Lazăr (1779—1823), fondatorul învățămîntului în limba națională în Țara Românească (Muntenia).

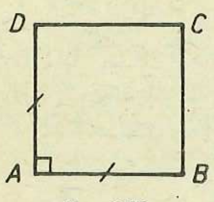


Fig. 277

Avînd două laturi consecutive congruente și fiind un dreptunghi, deci un paralelogram, pătratul poate fi considerat și un „romb particular“, anume: un *romb care are un unghi drept.*

Pătratul, fiind dreptunghi și romb, are toate proprietățile dreptunghiului și toate proprietățile rombului (teoremele directe). Vom enunța aceste proprietăți, fără a le mai demonstra (deoarece au fost demonstrate anterior). Deci:

1) Într-un pătrat toate laturile sînt congruente (romb).

2) Într-un pătrat toate unghiurile sînt congruente și deci sînt ungiuri drepte (dreptunghi).

3) Într-un pătrat diagonalele au același mijloc (paralelogram).

4) Într-un pătrat diagonalele sînt congruente (dreptunghi).

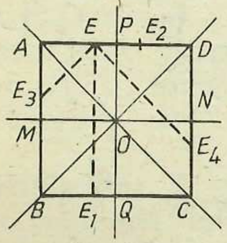


Fig. 278

5) Într-un pătrat diagonalele sînt perpendiculare între ele (romb).

6) Într-un pătrat diagonalele sînt bisectoarele unghiurilor lui (romb).

Pătratul admite patru axe de simetrie și anume: două sînt mediatoarele laturilor lui (ca la dreptunghi) și două sînt dreptele care includ diagonalele lui (ca la romb).

Fie pătratul $ABCD$ (fig. 278) și dreptele MN, PQ, AC și BD axele lui de simetrie. Dacă E este un punct ce aparține figurii, simetrice lui față de cele patru axe de simetrie (punctele E_1, E_2, E_3, E_4) aparțin, de asemenea, figurii.

Construcția pătratului

Putem desena un pătrat astfel:

a) Desenăm un unghi drept și pe laturile lui luăm două segmente congruente, ambele avînd unul dintre capete în vîrful unghiului (extremitățile segmentelor vor fi trei dintre vîrfurile unui pătrat). Prin capetele segmentelor, diferite de vîrful unghiului, desenăm paralelele la laturile unghiului. Intersecția paralelelor constituie cel de-al patrulea vîrf al pătratului.

b) Desenăm două drepte perpendiculare. Cu centrul în punctul de intersecție a celor două perpendiculare, desenăm un cerc. Intersecțiile cercului cu cele două drepte perpendiculare vor fi cele patru vîrfuri ale unui pătrat.

c) Desenăm un triunghi dreptunghic isoscel (vîrfurile lui vor fi trei dintre vîrfurile unui pătrat). Apoi desenăm simetricul vîrfului unghiului drept față de ipotenuză. Acesta va fi cel de-al patrulea vîrf al pătratului.

30. Exerciții

1. În pătratul $ABCD$, notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Să se calculeze:

a) perimetrul pătratului dacă: 1) $AB = 2{,}4$ cm; 2) $CD = 36$ mm; b) lungimea diagonalei $[AC]$, știind că $BO = 0{,}7$ dm; c) $m(\sphericalangle OAB)$; d) $m(\sphericalangle COB)$; e) $m(\sphericalangle OAB) + m(\sphericalangle ODC)$; f) $m(\sphericalangle ODA) + m(\sphericalangle OCB)$.

2. Justificați de ce, în următoarele cazuri, patrulaterul $MNPQ$ ($MP \cap QN = \{O\}$) este pătrat:

a) $MN \parallel QP$, $NP \parallel QM$, $m(\sphericalangle M) = 90°$ și $MN = NP = 3$ cm; b) $MN = NP = PQ = QM = 3$ cm și $QM \perp MN$; c) $OM = ON = OP = OQ = 1$ cm și $MP \perp NQ$; d) $MN = NP = PQ = QM = 2$ cm și $[MP] \equiv [NQ]$; e) $\sphericalangle QMO \equiv \sphericalangle OMN \equiv \sphericalangle MNO \equiv \sphericalangle ONP \equiv \sphericalangle NPO$.

* * *

Dacă notăm cu P_1 mulțimea tuturor patrulaterelor, cu P_2 mulțimea tuturor paralelogramelor, cu P_3 mulțimea tuturor dreptunghiurilor, cu P_4 mulțimea tuturor romburilor și cu P_5 mulțimea tuturor pătratelor, putem reprezenta în două desene (fig. 279) următoarele incluziuni:

$$P_5 \subset P_3 \subset P_2 \subset P_1; \qquad P_5 \subset P_4 \subset P_2 \subset P_1.$$

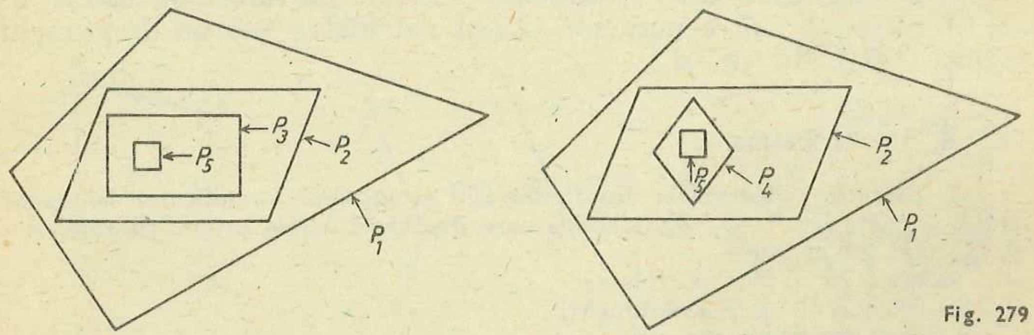


Fig. 279

Vom înțelege că oricare ar fi pătratul P_5, el este și dreptunghi P_3 și paralelogram P_2 și, evident, este patrulater P_1. Oricare ar fi dreptunghiul P_3, el este și paralelogram P_2 și, evident, este patrulater P_1 (primul desen). De asemenea, oricare ar fi pătratul P_5, el este și romb P_4 etc. Oricare ar fi rombul P_4, el este și paralelogram P_2 etc (al doilea desen).

Vom mai înțelege și faptul că oricare ar fi proprietatea paralelogramului P_2, ea este și proprietate a dreptunghiului P_5, dar că acesta din urmă are și alte proprietăți pe care nu le are paralelogramul. Că oricare ar fi proprietatea dreptunghiului P_3, ea este și proprietate a pătratului P_5, dar că pătratul are și alte proprietăți pe care nu le are dreptunghiul.

P r o b l e m ă   r e z o l v a t ă (teoremă). **Într-un triunghi dreptunghic, mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.**

Rezolvarea. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($AB \perp AC$) și O mijlocul ipotenuzei (fig. 280). Ne propunem să demonstrăm că $AO = \frac{1}{2} \cdot BC$.

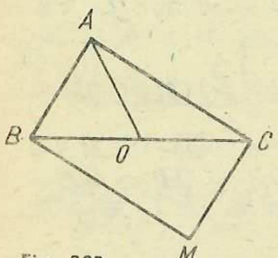


Fig. 280

Paralelele prin B și C la catetele triunghiului dreptunghic se intersectează în M. Patrulaterul $ABMC$, avînd laturile opuse paralele și un unghi drept, este dreptunghi. În acest dreptunghi, $[BC]$ este diagonală și O mijlocul ei. Cum într-un dreptunghi diagonalele au același mijloc și sînt congruente, rezultă că $AO = \frac{1}{2} \cdot BC$ (q.e.d.).

Reciproc, dacă într-un triunghi o mediană are lungimea cît jumătatea lungimii laturii care-i corespunde, atunci triunghiul este dreptunghic.

Pentru a demonstra reciproca, vom folosi aceeași figură 280. În triunghiul ABC se cunoaște că O este mijlocul laturii $[BC]$ și că $AO = \frac{1}{2} \cdot BC$; se cere să se demonstreze că $AB \perp AC$.

Pe dreapta ce include mediana luăm un punct M astfel că $[AO] \equiv [OM]$. Se formează un patrulater $ABMC$ în care diagonalele au același mijloc și sînt congruente. Acest patrulater este un dreptunghi și deci $AB \perp AC$ (q.e.d.)

31. Probleme

1. Cercetînd diagramele din figura 279 și folosind semnificația notațiilor mulțimilor P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, stabiliți care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false:
a) orice romb este patrulater;
b) orice romb este dreptunghi;
c) orice romb este pătrat;
d) orice dreptunghi este pătrat;
e) orice paralelogram este romb;
f) orice paralelogram este pătrat;
g) orice dreptunghi este paralelogram.

2. Să se deseneze un dreptunghi $ABCD$, avînd $AB = 4$ cm și $AC = 6$ cm.

3. Să se deseneze un dreptunghi $ABCD$, știind că diagonala $AC = 6$ cm și $m(\sphericalangle CAB) = 20°$.

4. Să se deseneze un dreptunghi cu diagonala în lungime de 64 mm și unghiul dintre diagonale cu măsura de 60°.

5. Să se deseneze un dreptunghi cu o latură cu lungimea de 6 cm, iar unghiul dintre această latură și diagonala alăturată cu măsura de 30°.

6. Să se deseneze un dreptunghi, cunoscînd că lungimea unei laturi este de 5 cm și unghiul dintre diagonale are măsura de 30°.

7. Să se deseneze un romb cu lungimea laturii de 5 cm și lungimea diagonalei mari de 8 cm.

8. Să se deseneze un romb, avînd diagonalele cu lungimile de 5 cm și 6 cm.

9. Să se deseneze un romb, avînd lungimea laturii de 6 cm și măsura unui unghi de 60°.

10. Să se deseneze un pătrat cu lungimea diagonalei de 6 cm.

11. Se unesc, unul după altul, mijloacele laturilor unui romb. Să se arate că patrulaterul format este dreptunghi.

12. Se unesc mijloacele laturilor unui dreptunghi. Să se arate că patrulaterul format este romb.

13. Să se arate că picioarele perpendicularelor din punctul de intersecție a diagonalelor unui romb pe laturile rombului sînt vîrfurile unui dreptunghi.

14. Să se arate că picioarele perpendicularelor din vîrfurile unui dreptunghi pe diagonale sînt vîrfurile unui dreptunghi.

15. Să se arate că intersecțiile bisectoarelor unghiurilor unui paralelogram sînt vîrfurile unui dreptunghi.

16. Se dă un pătrat $MNPQ$ ($MN \parallel QP$). Pe dreapta MP se ia, în exteriorul pătratului, un punct E astfel ca $[PE] \equiv [MN]$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului MNE.

17. Pe diagonala $[AC]$ a pătratului $ABCD$ se fixează un punct M, între A și C, astfel ca $[AM] \equiv [AB]$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului BCM.

18. Romburile $ABCD$ și $ADEF$ sînt diferite și au pe $[AD]$ latură comună (fig. 281). Să se arate că punctele B, D, F nu pot fi colineare.

19. Un romb $ABCD$ are $m(\sphericalangle D) = 135°$ și latura $[AD]$ comună cu pătratul $ADEF$, construit în exteriorul lui, ca în figura 282. Să se demonstreze că triunghiul ACE este isoscel.

20. Pe laturile rombului $ABCD$ se construiesc, în afara lui, pătratele $ABEF$ și $ADGH$ (fig. 283). Să se demonstreze că triunghiurile ABC și AHF sînt congruente.

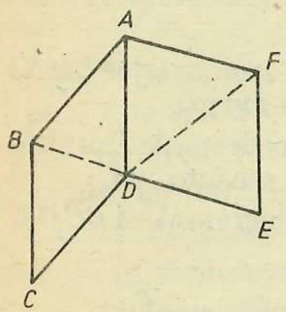


Fig. 281

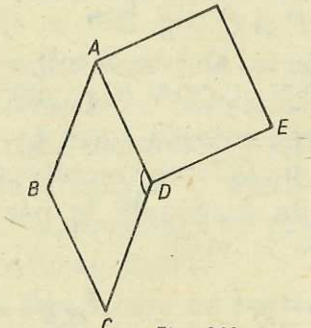


Fig. 282

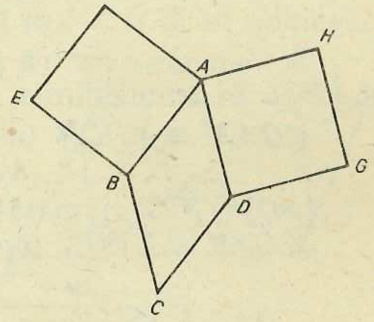


Fig. 283

21. Romburile $ABCD$, $CBFE$ și $CEGD$ au, două cîte două, o latură comună (fig. 284). Pe dreapta AH, paralelă cu DG, se ia $[AH] \equiv [DG]$ (H și G de aceeași parte a dreptei AD). Să se demonstreze că $[HG] \equiv [EG]$.

22. În figura 285, $AMNP$ și $ABCD$ sînt pătrate. Să se demonstreze că $[MB] \equiv [DP]$ și că $MB \perp DP$ (în ambele cazuri).

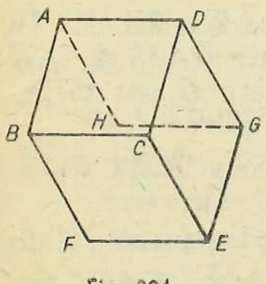


Fig. 284

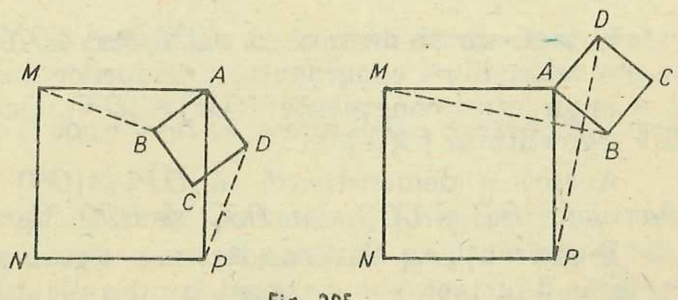


Fig. 285

23. Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ ale pătratului $ABCD$ se iau punctele M, respectiv N, astfel încît $[AM] \equiv [BN]$ (fig. 286). Să se demonstreze că $[AN] \equiv [DM]$ şi $AN \perp DM$.

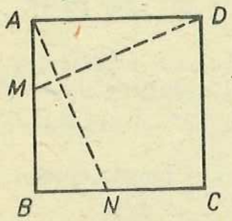


Fig. 286

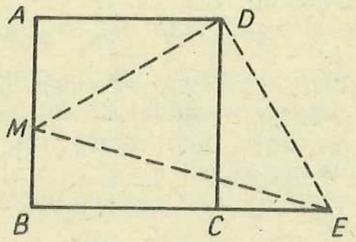


Fig. 287

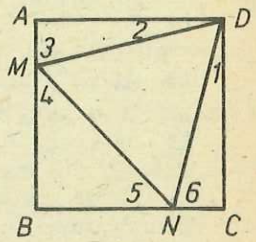


Fig. 288

24. Fie pătratul $ABCD$. Pe latura $[AB]$ se ia punctul M şi pe dreapta ce include latura $[BC]$ se ia punctul E, în exteriorul pătratului, astfel ca $[AM] \equiv [CE]$ (fig. 287). Să se demonstreze că triunghiul DME este dreptunghic şi isoscel.

25. În figura 288, $ABCD$ este pătrat şi DMN triunghi echilateral. Să se calculeze măsurile unghiurilor D_1, D_2, M_3, M_4, N_5, N_6.

44. SIMETRIA FAŢĂ DE UN PUNCT

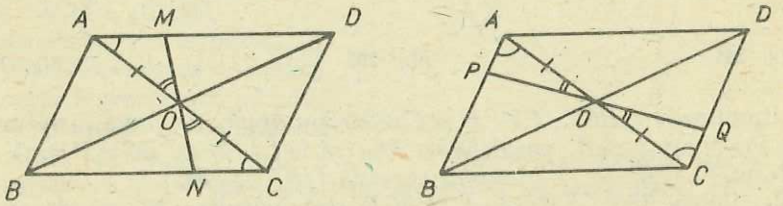
Fie un paralelogram $ABCD$ şi O punctul de intersecţie a diagonalelor sale. O dreaptă din planul paralelogramului căreia îi aparţine punctul O intersectează două laturi opuse ale paralelogramului, de exemplu, în M şi N sau în P şi Q (fig. 289, *a*, *b*).

Se demonstrează că punctul O este şi mijlocul segmentelor $[MN]$ şi $[PQ]$. În triunghiurile AOM şi CON (fig. 289, *a*) avem:

$\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OCN$ (alterne interne formate de dreptele paralele AB şi DC intersectate de secanta AC),

$[AO] \equiv [OC]$ (jumătăţi de diagonală în paralelogramul $ABCD$),

$\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle CON$ (opuse la vîrf).



a Fig. 289 *b*

Putem afirma deci că $\triangle AOM \equiv \triangle CON$ (cazul 2 — ULU). În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente OAM şi OCN li se opun laturi congruente: $[OM] \equiv [ON]$. Deci punctul O este mijlocul segmentului $[MN]$.

Analog se demonstrează că $[OP] \equiv [OQ]$ (din congruenţa triunghiurilor AOP şi COQ sau BOP şi DOQ, figura 289, *b*).

Definiţie. Să considerăm o figură geometrică plană $\mathcal{F}$ (o mulţime de puncte) şi un punct fix (din planul figurii $\mathcal{F}$), pe care să-l

notăm, de exemplu, cu O. Dacă orice dreaptă determinată de un punct oarecare A al figurii geometrice considerate ($A \in \mathcal{F}$) şi punctul O intersectează a doua oară figura într-un punct A', astfel încît O să fie mijlocul segmentului $[AA']$, *se spune că figura notată $\mathcal{F}$ are un centru de simetrie.* Punctul O se numeşte *centrul de simetrie.* Punctul A' se zice că este simetricul lui A faţă de O şi, invers, punctul A este simetricul lui A' faţă de acelaşi centru de simetrie.

Observăm că paralelogramul are un centru de simetrie şi anume punctul de intersecţie a diagonalelor, pe care obişnuim să-l notăm cu O.

Se poate demonstra că, într-o figură geometrică cu un centru de simetrie, dacă punctelor M şi P le corespund — ca simetrice — punctele N şi respectiv Q, atunci $[MP] \equiv [NQ]$. De exemplu, în figura 290, figura care admite centru de simetrie este paralelogramul $ABCD$ cu O centrul de simetrie. Congruenţa $[MP] \equiv [NQ]$ rezultă din congruenţa triunghiurilor OMP şi ONQ, a cărei demonstrare o lăsăm pe seama cititorilor.

Segmentele $[MP]$ şi $[NQ]$ din figura 290 sînt simetrice faţă punctul O.

Se spune că *prin simetria faţă de un centru de simetrie distanţele se păstrează.*

Evident, toate paralelogramele particulare au centru de simetrie şi anume punctul de intersecţie a diagonalelor, care obişnuit se numeşte *centrul figurii.*

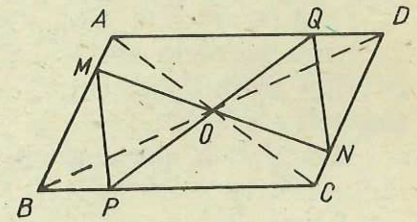


Fig. 290

Alte exemple de figuri care au centru de simetrie:

a) Un segment, pentru că segmentul are ca centru de simetrie mijlocul său.

b) O dreaptă, pentru că dreapta are ca centru de simetrie orice punct al său.

c) Un cerc, pentru că cercul are ca centru de simetrie centrul cercului.

d) Un punct poate fi considerat ca propriul său simetric în raport cu el însuşi.

Observaţie. La paralelogramele particulare (dreptunghiul, rombul, pătratul), figuri cu axe de simetrie care sînt perpendiculare între ele, punctul de intersecţie a axelor de simetrie este centrul de simetrie al figurii.

● 32. Probleme

1. Fie triunghiul ABC și D piciorul medianei corespunzătoare laturii $[BC]$. Să se deseneze simetricele B' și C' ale punctelor B și C, față de punctul A considerat centru de simetrie. Să se arate că punctul în care dreapta AD intersectează $B'C'$ este piciorul unei mediane a triunghiului $AB'C'$.

2. Se dă un triunghi ABC și E simetricul lui A față de mijlocul laturii $[BC]$. Să se demonstreze că patrulaterul $ABEC$ este un paralelogram.

3. Se dau: segmentul $[AB]$ și O_1, O_2 două puncte distincte, care nu aparțin dreptei AB și $O_1O_2 \nparallel AB$. Fie $[A_1B_1]$ și $[A_2B_2]$ simetricele lui $[AB]$ față de O_1, respectiv O_2. Să se stabilească natura patrulaterului $A_1B_1B_2A_2$.

4. Fie xOy un unghi propriu și M un punct în interiorul lui. Să se deseneze un segment ale cărui extremități să aparțină semidreptelor $[Ox$, respectiv $[Oy$, iar punctul M să fie mijlocul lui. (Indicație: se desenează simetrica uneia dintre laturile unghiului — de exemplu a lui $[Ox$ față de M, considerat centru de simetrie.)

5. Fie un triunghi ABC, o dreaptă d și un punct fixat F ($F \notin d$). Să se deseneze un segment ale cărui extremități să aparțină una dreptei d și alta uneia dintre dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC, iar M să fie mijlocul lui. Discuție. (Aceeași indicație ca la problema precedentă.)

45. TRAPEZUL[1]

Definiție. Se numește trapez un patrulater care are două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele.

În figura 291 sînt desenate două trapeze: $ABCD$ și $MNPQ$. Laturile paralele ale trapezului obișnuim să le numim bazele trapezului și anume *baza mică* ($[AD]$, respectiv $[MQ]$) și *baza mare* ($[BC]$, respectiv $[NP]$).

Lungimea perpendicularei comune celor două baze se numește *înălțimea* trapezului ($[AE]$ și respectiv $[QR]$ sînt înălțimile trapezelor din figura 291).

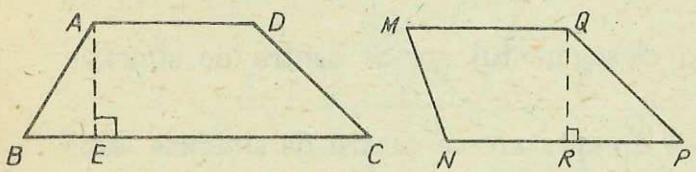


Fig. 291

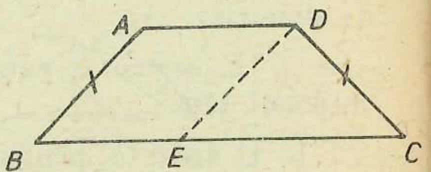


Fig. 292

Dacă una din laturile neparalele este perpendiculară pe baze, atunci trapezul se numește *trapez dreptunghic*. În figura 291 trapezele $AECD$ și $MNRQ$ sînt trapeze dreptunghice.

Dacă laturile neparalele sînt congruente, atunci trapezul se numește *trapez isoscel*. În figura 292 trapezul $ABCD$ este isoscel ($AD \parallel BC$ și $[AB] \equiv [DC]$).

[1] Cuvîntul „*trapez*" vine din limba greacă: *trapezion*. Denumirea de *trapez* a fost folosită pentru prima dată în sec. 4 î.e.n.

Teoremă. Într-un trapez isoscel unghiurile alăturate unei baze sînt congruente.

Demonstrația. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AD \parallel BC$ și $[AB] \equiv [DC]$ (fig. 292). Vom folosi o „construcție ajutătoare". Desenăm, spre exemplu, paralela prin D la AB și notăm cu E intersecția acesteia cu baza mare $[BC]$ ($E \in (BC)$ și $DE \parallel AB$).

Patrulaterul $ABED$ este paralelogram deoarece $AD \parallel BE$ (ipoteză) și $DE \parallel AB$ (construcție). Rezultă că $[DE] \equiv [AB]$ (laturi opuse în paralelogram), dar $[AB] \equiv [DC]$ (ipoteză), deci $[DE] \equiv [DC]$ (tranzitivitatea relației de congruență).

Așadar, triunghiul DEC este isoscel, deci $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle DEC$ (unghiuri de la baza triunghiului isoscel). Dar $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle ABC$ (corespondente formate de dreptele paralele AB și DE cu secanta BC). Rezultă că $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle ABC$ (tranzitivitatea relației de congruență).

Am demonstrat că unghiurile de la baza mare sînt congruente. Congruența unghiurilor de la baza mică ($\sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle CDA$) rezultă din faptul că ele sînt suplemente ale unghiurilor de la baza mare (interne și de aceeași parte a secantei). Se știe că două unghiuri care au ca suplemente unghiuri congruente sînt congruente. Deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA$ (q.e.d.).

Teoremă reciprocă. Dacă într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sînt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Demonstrația. Fie $ABCD$ un trapez cu $AD \parallel BC$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$ (fig. 293). Vom folosi „construcția ajutătoare" precedentă ($DE \parallel AB$). Avem: $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle ABC$ (corespondente), $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$ (ipoteză).

Pe baza tranzitivității relației de congruență deducem că $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle DCE$ și deci că triunghiul DEC este isoscel, adică $[DE] \equiv [DC]$ (1). Dar, patrulaterul $ABED$ fiind paralelogram ($AD \parallel BC$ — ipoteză și $DE \parallel AB$ — construcție), laturile opuse sînt congruente: $[AB] \equiv [DE]$ (2).

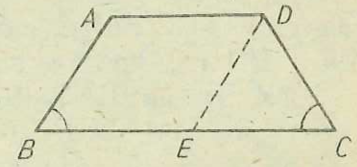


Fig. 293

Din (2) și (1) rezultă că $[AB] \equiv [DC]$ (q.e.d.)

Propunem, ca temă pentru acasă, demonstrarea acestei teoreme reciproce în cazul cînd se cunoaște congruența unghiurilor de la baza mică.

Proprietatea descrisă de teorema reciprocă și anume: **trapezul isoscel are două unghiuri congruente** este o *proprietate caracteristică* trapezelor isoscele.

Teoremă. Dacă un trapez este isoscel, atunci diagonalele lui sînt congruente.

Demonstrația. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AD \parallel BC$ și $[AB] \equiv [DC]$, în care am desenat și diagonalele $[AC]$ și $[DB]$ (fig. 294).

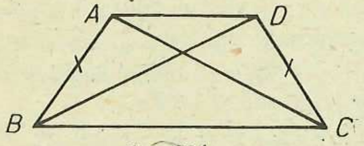


Fig. 294

Considerăm triunghiurile ABC și DCB, în care: $[AB] \equiv [DC]$ (ipoteză), $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$ (conform teoremei relative la unghiurile de la baza unui trapez isoscel), $[BC] = [CB]$ (latură comună).

Conform cazului 1 (LUL) de congruență a triunghiurilor oarecare, $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$. În aceste triunghiuri congruente, unghiurilor congruente li se opun laturi congruente, deci $[AC] \equiv [DB]$ (q.e.d.).

Teoremă reciprocă. Dacă într-un trapez diagonalele sînt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Demonstrația. Fie $ABCD$ un trapez cu $AD \parallel BC$, în care $[AC] \equiv [DB]$ (fig. 295).

Vom folosi o „construcție ajutătoare" și anume: paralela din D la diagonala $[AC]$ — de exemplu —, care intersectează dreapta BC în E. S-a obținut astfel patrulaterul $ACED$, care este un paralelogram, avînd laturile opuse paralele (pe de o parte bazele trapezului sînt paralele, iar pe de altă parte $DE \parallel AC$ — prin construcție). Rezultă că $[DE] \equiv [AC]$ (laturile opuse într-un paralelogram sînt congruente). Din ipoteză știm că $[AC] \equiv [DB]$. Pe baza proprietății de tranzitivitate a relației de paralelism, deducem că $[DE] \equiv [DB]$ și deci că triunghiul DBE este isoscel. De aici și congruența $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DEB$ (1).

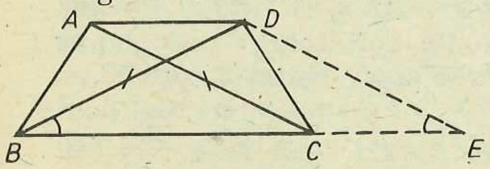


Fig. 295

Dar, $\sphericalangle DEB \equiv \sphericalangle ACB$ (2) (unghiuri corespondente formate de dreptele paralele DE și AC cu secanta BE). Din (1) și (2) rezultă $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ACB$ (3).

Considerăm triunghiurile ABC și DCB care afirmăm că sînt triunghiuri congruente, conform cazului 1 de congruență a triunghiurilor oarecare (LUL), pentru că:

$[AC] \equiv [DB]$ (ipoteză),

$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DBC$ (cum s-a demonstrat mai sus (3)),

$[CB] = [BC]$ (latură comună).

Din congruența triunghiurilor ABC și DCB, rezultă că $[AB] \equiv [DC]$ (se opun unghiurilor congruente ACB și DBC).

Deci, trapezul $ABCD$ este isoscel (q.e.d.).

Proprietatea că: **trapezul isoscel are diagonalele congruente** este o *proprietate caracteristică* trapezelor isoscele.

46. LINIA MIJLOCIE ÎNTR-UN TRAPEZ

D e f i n i ț i e. Segmentul care are ca extremități mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește linia mijlocie a trapezului.

În figura 296 este desenată linia mijlocie $[EF]$ a trapezului $ABCD$. Faptul că $[EF]$ este linie mijlocie poate fi scris astfel: $E \in (AB)$, $[AE] \equiv [EB]$, $F \in (DC)$, $[DF] \equiv [FC]$.

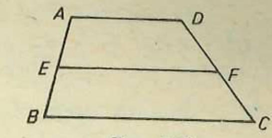


Fig. 296

T e o r e m ă. Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele și are ca lungime jumătate din suma lungimilor bazelor.

(Obișnuim să spunem mai pe scurt că: linia mijlocie este paralelă cu bazele și egală cu semisuma lor.)

Demonstrația. În trapezul $ABCD$, $[AD]$ și $[BC]$ sînt bazele, E mijlocul laturii $[AB]$ și F mijlocul laturii $[DC]$ (fig. 297). Vrem să dovedim că dreptele EF și BC sînt paralele și că $EF = \frac{BC + AD}{2}$.

Ne folosim de o „construcție ajutătoare". Considerăm dreapta determinată de punctele A și F care intersectează dreapta BC în punctul G ($AF \cap BC = \{G\}$). Afirmăm că triunghiurile ADF și GCF sînt congruente, conform cazului 2 de congruență a triunghiurilor oarecare (ULU), pentru că:

$\sphericalangle F_1 \equiv \sphericalangle F_2$ (opuse la vîrf),

$[DF] \equiv [CF]$ (ipoteză),

$\sphericalangle D_3 \equiv \sphericalangle C_3$ (alterne interne formate de $AD \parallel BC$ intersectate de secanta DC).

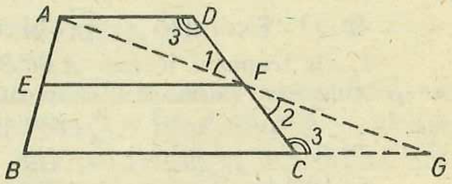


Fig. 297

Din $\triangle ADF \equiv \triangle GCF$, rezultă că:

(1) $[AF] \equiv [GF]$ (se opun unghiurilor congruente D_3 și C_3),

(2) $[AD] \equiv [CG]$ (se opun unghiurilor congruente F_1 și F_2).

Relația (1) exprimă faptul că F este mijlocul laturii $[AG]$ (a triunghiului ABG). Cum E este mijlocul laturii $[AB]$ (ipoteză), rezultă că segmentul $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul ABG și deci $EF \parallel BG$. Dar BC și BG sînt una și aceeași dreaptă, deci $EF \parallel BC$.

Din teorema asupra liniei mijlocii într-un triunghi mai știm că $EF = \frac{BG}{2}$. Cum BG este o sumă de segmente, putem scrie: $EF = \frac{BC + CG}{2}$.

Ținînd seama de (2) putem scrie: $EF = \frac{BC + AD}{2}$.

Rezumînd: $EF \parallel BC$ și $EF = \frac{BC + AD}{2}$ constituie tocmai concluzia teoremei noastre (q.e.d.).

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Să se demonstreze că lungimea segmentului inclus în linia mijlocie a unui trapez cuprins între intersecțiile sale cu diagonalele este egală cu semidiferența lungimilor bazelor.

Rezolvarea. Fie $ABCD$ un trapez în care $[AD]$ și $[BC]$ sînt bazele, $[EF]$ linia mijlocie ($E \in (AB)$, $[AE] \equiv [EB]$, $F \in (DC)$, $[DF] \equiv [FC]$) și M și N intersecțiile diagonalelor cu linia mijlocie ($EF \cap BD = \{M\}$, $EF \cap AC = \{N\}$) (fig. 298). Va trebui să demonstrăm că $MN = \dfrac{BC - AD}{2}$.

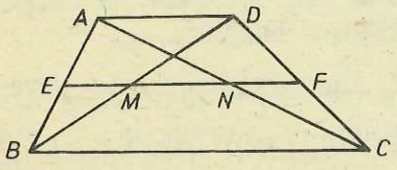


Fig. 298

Considerăm, pe rînd, triunghiurile ABC și ABD. Deoarece EF este linie mijlocie în trapez, avem $EF \parallel BC$ și $EF \parallel AD$. Conform reciprocei teoremei asupra liniei mijlocii într-un triunghi, în triunghiul ABC, paralela prin mijlocul E al laturii $[AB]$ la latura $[BC]$ conține mijlocul N al laturii $[AC]$ și avem: $EN = \dfrac{BC}{2}$ (1).

Aplicînd aceeași teoremă reciprocă în triunghiul ABD, paralela prin E la latura $[AD]$ conține mijlocul M al laturii $[DB]$ și avem: $EM = \dfrac{AD}{2}$. (2).

Scăzînd relațiile (1) și (2), membru cu membru, obținem:

$$EN - EM = \frac{BC}{2} - \frac{AD}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{BC - AD}{2} \text{ (q.e.d.).}$$

33. Exerciții și probleme

1. În trapezul isoscel $ABCD$ ($AD \parallel BC$), se notează $AC \cap BD = \{O\}$. Să se calculeze: a) perimetrul trapezului, dacă $AD = DC = 3$ cm și $BC = 2 \cdot AD$; b) $AC + BD$, dacă $AO = 0{,}2$ dm și $OC = 4$ cm; c) măsurile unghiurilor A, B, C, dacă m($\sphericalangle D$) = 130°.

2. Justificați de ce, în următoarele cazuri, patrulaterul convex $MNPQ$ ($[MP]$ diagonală și $MP \cap NQ = \{O\}$) este trapez isoscel.
a) $MQ \parallel NP$ și m($\sphericalangle N$) = m($\sphericalangle P$) = 36°; b) $MQ \parallel NP$, $MP = NQ = 6$ cm și m($\sphericalangle QNP$) = 15°; c) $NO = OP = 4$ cm, $OQ = OM = 2$ cm și m($\sphericalangle QNP$) = m($\sphericalangle MQN$) = 27°; d) $NQ = MP = 7$ cm, m($\sphericalangle QNP$) = m($\sphericalangle MPN$) = 41° și $OQ = 2$ cm.

3. Într-un trapez, baza mică are lungimea de 5 cm, iar distanța dintre mijloacele laturilor neparalele este de 8 cm. Care este lungimea bazei mari?

4. Să se calculeze lungimea bazei mari a unui trapez, știind că lungimea liniei mijlocii este de 24 cm, iar cea a bazei mici cît jumătate din cea a bazei mari.

5. Într-un trapez lungimea uneia dintre baze este de 6 cm, iar distanța dintre mijloacele diagonalelor de 2 cm. Care este lungimea celeilalte baze?

6. Bazele unui trapez au lungimile de 6 cm și 10 cm. Să se afle lungimile celor trei segmente determinate pe linia mijlocie de diagonale.

7. Un trapez isoscel are unghiul alăturat bazei mari de 45°, baza mică cu lungimea de 4 cm și înălțimea cu lungimea de 6 cm. Să se calculeze: a) măsura unghiurilor alăturate bazei mici; b) lungimea bazei mari.

8. În trapezul isoscel $ABCD$ ($AD \parallel BC$ și $[AB] \equiv [DC]$), paralela din D la AB intersectează dreapta BC în E și perpendiculara din D pe BC în F.
a) Să se demonstreze că $[CF] \equiv [FE]$; b) Se poate construi trapezul isoscel $ABCD$ dacă $AD = 5$ cm, $BC = 8$ cm și $DF = 4$ cm?

9. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mică $AD = 3$ cm, m($\sphericalangle C$) = 60° și latura neparalelă $CD = 6$ cm. a) Să se calculeze lungimea bazei mari ($[BC]$), precum și cea a diagonalei $[BD]$ a trapezului; b) Se poate construi trapezul dreptunghic $ABCD$?

10. În trapezul $ABCD$ ($AD \parallel BC$), cu $AD = 4$ cm și $BC = 8$ cm, diagonala $[AC]$ este perpendiculară pe cealaltă diagonală și face cu baza mare un unghi cu măsura de 30°. Să se calculeze lungimea diagonalei $[BD]$.

11. În trapezul dreptunghic $ABCD$ (m($\sphericalangle B$) = 90°), diagonala $AC = 8$ cm formează cu baza mare ($[BC]$) un unghi cu măsura de 30° și este bisectoarea unghiului BCD. a) Să se calculeze înălțimea trapezului. b) Să se arate că $[AD] \equiv [DC]$. c) Se poate construi trapezul $ABCD$?

12. Demonstrați că într-un trapez în care baza mică este $[AD]$, baza mare $[BC]$ și linia mijlocie $[EF]$, are loc relația: $BC - EF = EF - AD$.

13. Paralelogramele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ au laturile $[AB]$ și $[A'B']$ cu lungimile de 3 cm și respectiv 7 cm și $AB \parallel CD \parallel A'B' \parallel C'D'$. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele segmentelor $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$. a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[A_1B_1]$, $[C_1D_1]$. b) Ce fel de patrulater este $A_1B_1C_1D_1$? Justificați răspunsul.

14. Două puncte, A și B, sînt situate în interiorul unui unghi propriu xOy. Distanțele de la punctul A la laturile $[Ox$, $[Oy$ sînt de 4 cm și respectiv 6 cm, iar distanțele de la punctul B la aceste laturi de 8 cm și respectiv 2 cm. Care sînt distanțele de la mijlocul segmentului $[AB]$ la laturile unghiului?

15. Cercetînd diagramele din figura 279, indicați în ce loc al diagramelor putem desena un trapez? Dar un trapez isoscel? Dar un trapez dreptunghic?

47. INEGALITĂȚI ÎNTRE ELEMENTELE TRIUNGHIULUI

Și pînă acum am întîlnit în judecățile noastre inegalități. Un exemplu îl constituie următoarea consecință a teoremei asupra sumei măsurilor unghiurilor unui triunghi: **într-un triunghi isoscel, unghiurile de la baza lui sînt ascuțite** (pag. 102).

Cînd spunem, de exemplu, că un segment este „mai mare“ decît altul, vom înțelege că lungimea sa este mai mare decît lungimea celuilalt. În același mod ne vom exprima și referitor la unghiuri.

Teoremă. Într-un triunghi, unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare.

Demonstrația. Fie ABC un triunghi în care $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$ (fig. 299). Va trebui să demonstrăm că $[AC] > [AB]$. Vom folosi o „construcție ajutătoare“ ce constă în a considera pe semidreapta $[AC$ un punct D astfel ca $[AD] \equiv [AB]$. În triunghiul isoscel ABD, avem: $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB$, deci m($\sphericalangle ABD$) $= \dfrac{1}{2} \cdot [180° -$ m($\sphericalangle A$)] $=$

$= \dfrac{1}{2} \cdot$[m($\sphericalangle ABC$) + m($\sphericalangle ACB$)] $< \dfrac{1}{2} \cdot$[m($\sphericalangle ABC$) + m($\sphericalangle ABC$)] $=$

= m($\sphericalangle ABC$). Rezultă că semidreapra $[BD$ este interioară unghiului ABC, deci că D este un punct interior segmentului $[AC]$, deci $[AC] > [AD]$. Cum $[AD] \equiv [AB]$ (construcție), rezultă că $[AC] > [AB]$ (q.e.d.).

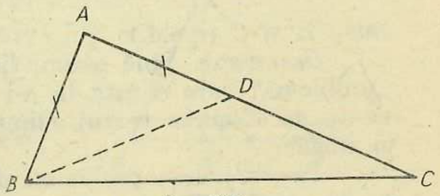


Fig. 299

C o n s e c i n ț a 1. Într-un triunghi, unei laturi mai mari i se opune un unghi mai mare.

C o n s e c i n ț a 2. Într-un triunghi dreptunghic, ipotenuza este mai mare decît fiecare dintre catete.

Această consecință se poate enunța și astfel: **Perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă este mai scurtă decît orice oblică din același punct pe aceeași dreaptă.**

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Într-un triunghi ABC în care $m(\sphericalangle C) < m(\sphericalangle B) < 90°$, considerăm înălțimea $[AD]$, bisectoarea $[AE]$ și mediana $[AF]$ $(D, E, F \in (BC))$. Să se demonstreze că D se află între B și E, iar F între E și C.

Rezolvarea. Folosim figura 300. Punctul D aparține semidreptei $[BC$, deoarece, în caz contrar, unghiul adiacent și suplementar lui ABC (care este un unghi obtuz) ar fi un unghi al triunghiului dreptunghic ABD. Măsura acestui unghi împreună cu cea a unghiului drept al acestui triunghi ar da o sumă mai mare de 180°, ceea ce ar contraveni teoremei asupra sumei măsurilor unghiurilor unui triunghi.

În triunghiul ABD avem: $m(\sphericalangle BAD) = 90° - m(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot [180° - 2 \cdot m(\sphericalangle ABC)]$.

Cum $m(\sphericalangle ABC) > m(\sphericalangle ACB)$ (ipoteză), se poate scrie în continuare: $m(\sphericalangle BAD) < \frac{1}{2} \cdot [180° - (m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB))] = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle BAE)$. Deci D se află între B și E.

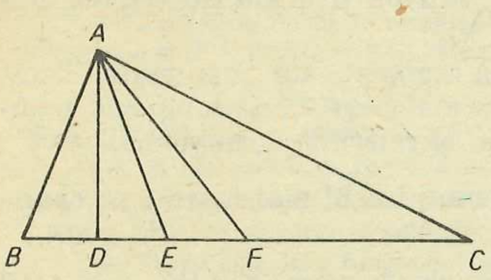


Fig. 300

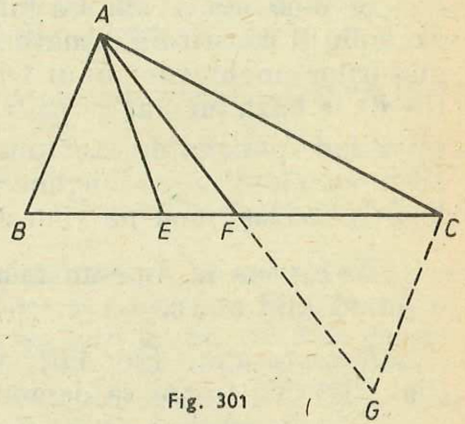


Fig. 301

Pentru a dovedi a doua parte a concluziei, folosim o „construcție ajutătoare": pe semidreapta $[AF$ considerăm un punct G astfel ca $[AF] \equiv [FG]$ (fig. 301).

Vom avea: $[GC] \equiv [AB]$ și $[AB] < [AC]$. În triunghiul ACG avem deci $[GC] < [AC]$ și $\sphericalangle CAG < \sphericalangle AGC$. Cum $\sphericalangle CGA \equiv \sphericalangle BAF$, rezultă că $\sphericalangle CAF < \sphericalangle BAF$. Suma măsurilor celor două unghiuri fiind egală cu măsura unghiului BAC, rezultă că $m(\sphericalangle CAF) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle CAE)$, deci F se află între E și C (q.e.d.).

Observație. Pînă acum, fiecare *consecință* din text reprezenta pentru noi o „problemă" care consta în a-i găsi demonstrația. Aceasta reprezintă și un procedeu de a scurta textul, eliminînd unele judecăți pe care cititorul le poate face și singur.

În rezolvarea problemei de mai sus a apărut și un alt mod de a prescurta textul: unele afirmații, și anume $[GC] \equiv [AB]$ și $\sphericalangle CGA \equiv \sphericalangle BAF$, nu au mai fost demonstrate, considerînd că cititorul este capabil de a reconstitui, cu ușurință, demonstrațiile lor. Aceasta se face pentru a nu lungi demonstrațiile, pentru a scoate în evidență numai ceea ce o demonstrație aduce nou în comparație cu cele cunoscute anterior.

T e o r e m ă (asupra oblicelor și perpendicularei dintr-un punct la o dreaptă). **Dintre două oblice duse dintr-un punct spre aceeași dreaptă, cea „mai depărtată" de piciorul perpendicularei din același punct pe aceeași dreaptă este „cea mai lungă".**

Demonstrația. Fie $[MA]$ și $[MB]$ cele două oblice din punctul M la dreapta AB și N piciorul perpendicularei din M pe AB $([NB] > [NA])$. Există două cazuri:

Cazul 1: A între B și N (fig. 302).

În acest caz, unghiul MAB este unghi exterior triunghiului MNA și deci $m(\sphericalangle MAB) = 90° + m(\sphericalangle NMA) > 90° > m(\sphericalangle MBA)$.

În triunghiul MAB, inegalitatea $\sphericalangle MAB > \sphericalangle MBA$ (mai sus demonstrată) implică $[MB] > [MA]$.

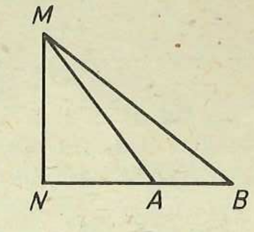


Fig. 302

Cazul 2: N între A și B (fig. 303).

În acest caz, folosim o „construcție ajutătoare" și anume luăm pe semidreapta $[NB$ un punct A', astfel încît $[NA'] \equiv [NA]$.

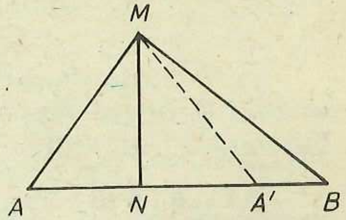


Fig. 303

Deoarece $[NB] > [NA]$, rezultă și $[NB] > [NA']$ și deci: A' este între B și N. Conform cazului 1, $[MB] > [MA']$. Dar, din congruența triunghiurilor dreptunghice MNA și MNA' deducem că $[MA] \equiv [MA']$. Rezultă că avem și $[MB] > [MA]$ (q.e.d.).

Observație. Această teoremă se completează cu: **două oblice din același punct pe aceeași dreaptă, cu picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei sînt congruente.**

T e o r e m ă. Într-un triunghi lungimea unei laturi este mai mică decît suma lungimilor celorlalte două.

Demonstrația. Fie ABC un triunghi. Ne propunem să arătăm, de exemplu, că $BC < AB + AC$.

Considerăm înălțimea $[AD]$ a triunghiului. Deosebim trei cazuri:

Cazul 1. Punctul D se găsește între B și C (fig. 304).

Considerăm punctul D ca picior al perpendicularelor din B și C pe AD. Avem:

$$\left.\begin{array}{l} BD < AB \\ DC < AC \end{array}\right\}$$ (perpendiculara este „mai scurtă" decît orice oblică).

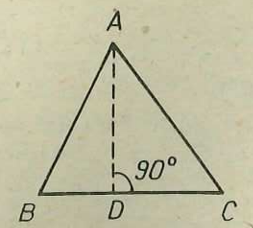


Fig. 304

Adunăm aceste inegalități, membru cu membru; obținem: $BD + DC < AB + AC$ sau $BC < AB + AC$.

Cazul 2. Punctul D coincide cu unul dintre vîrfurile triunghiului, de exemplu cu C (fig. 305).

În acest caz, avem $BC < AB$ (perpendiculara este „mai scurtă" decît oblica), deci și $BC < AB + AC$.

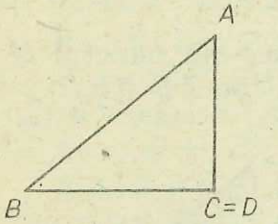


Fig. 305

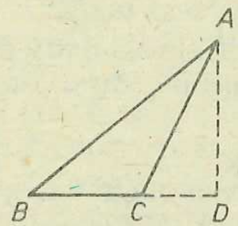


Fig. 306

Cazul 3. Punctul D se găsește „în afara" laturii $[BC]$, de exemplu C între B și D (fig. 306). În acest caz, $BC < BD < AB < AB + AC$.

Observație. Teorema se poate aplica „fiecăreia dintre cele trei laturi ale triunghiului ABC". Se obțin astfel inegalitățile: $AB < BC + CA, BC < CA + AB, CA < AB + BC$.

Inegalitățile se pot transcrie astfel: $BC > CA - AB$, $CA > AB - BC$, $AB > BC - CA$. Dacă folosim noțiunea de valoare absolută a unui număr, putem folosi o nouă transcriere:

$$|BC - CA| < AB < BC + CA.$$

În cuvinte aceasta se poate exprima astfel: **lungimea unei laturi a unui triunghi este mai mare decît valoarea absolută a diferenței lungimilor celorlalte două și mai mică decît suma lungimilor lor.**

Probleme rezolvate

Problema 1. Dacă ABG și $A'B'G'$ sînt două triunghiuri în care $[AB] \equiv [A'B']$, $[AG] \equiv [A'G']$ și $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$, atunci $BG > B'G'$.

Rezolvarea. Putem presupune $A = A'$ și $B = B'$ (fig. 307). Figura conține și ipoteza $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$.

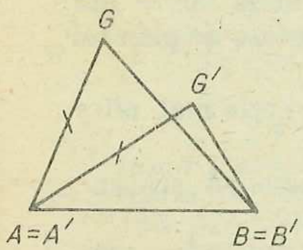


Fig. 307

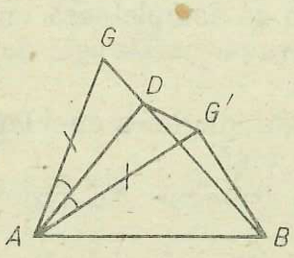


Fig. 308

Considerăm bisectoarea unghiului GAG'. Ea intersectează dreapta BG într-un punct D situat în interiorul segmentului $[BG]$, ca în figura 308.

Din congruența triunghiurilor AGD și $AG'D$ (LUL), deducem că $[GD] \equiv [G'D]$. Deci $BG = BD + DG = BD + DG' > BG'$. Cum $B = B'$, rezultă că $BG > B'G'$. (q.e.d.).

Problema 2. Să se demonstreze că dacă bisectoarele a două unghiuri ale unui triunghi sînt congruente, atunci laturile care se opun unghiurilor respective sînt congruente (triunghiul este isoscel).

Rezolvarea. Fie ABC triunghiul în care $[BD$ și $[CE$ sînt bisectoarele unghiurilor ABC ($\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBC$) și respectiv ACB ($\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle ECB$) și $[BD] \equiv [CE]$ (fig. 309). Trebuie să demonstrăm că $[AC] \equiv [AB]$.

Folosim metoda reducerii la absurd.

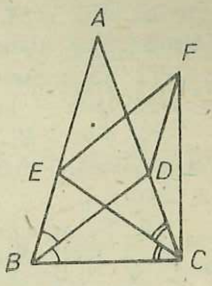


Fig. 309

Presupunem că $[AC] \not\equiv [AB]$. Ar însemna, de exemplu, că $AC < AB$. Ar rezulta că $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACB$, deci că $\sphericalangle DBC < \sphericalangle ECB$ (1) și s-ar obține $DC < EB$ (2).

Dacă vom considera paralela prin D la BE și paralela prin E la BD și vom nota cu F intersecția acestor paralele, vom constata că s-a obținut patrulaterul $BDFE$ care este un paralelogram și deci $[BE] \equiv [DF]$ (laturi opuse în paralelogram). Inegalitatea (2) s-ar putea scrie $DC < DF$. Atunci, în $\triangle CDF$, am avea: $\sphericalangle DFC < \sphericalangle DCF$ (3).

Pe de altă parte, $\sphericalangle EFD \equiv \sphericalangle EBD$ (unghiuri opuse în paralelogram), dar și $\sphericalangle EFD \equiv \sphericalangle DBC$. Ținînd seama de (1) am putea scrie: $\sphericalangle EFD < \sphericalangle ECB$ sau $\sphericalangle EFD < \sphericalangle ECD$ (4).

Adunînd, membru cu membru, inegalitățile (3) și (4) am obține:

$$m(\sphericalangle DFC) + m(\sphericalangle EFD) < m(\sphericalangle DCF) + m(\sphericalangle ECD) \text{ sau}$$
$$\sphericalangle EFC < \sphericalangle ECF.$$

Ar însemna că în triunghiul ECF: $EC < EF$ (unghiului mai mic i se opune o latură mai mică). Dar cum $[EC] \equiv [BD]$ (ipoteză), ar însemna că $BD < EF$, ceea ce este absurd ($[BD]$ și $[EF]$ sînt laturi opuse ale paralelogramului $BDFE$).

Am ajuns la un rezultat absurd pentru că am pornit de la o presupunere falsă anume aceea că $[AC] \not\equiv [AB]$. Deci triunghiul ABC este isoscel (q.e.d.).

34. Exerciții și probleme

1. Verificați, prin calcul, existența triunghiului ABC, dacă:
1) $a = 3{,}8$ cm, $b = 4$ cm, $c = 7$ cm; 2) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 7$ cm; 3) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 2$ cm; 4) $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm.

2. Într-un triunghi dreptunghic, care latură este mai mare: cateta sau ipotenuza?

3. Se dau trei segmente ale căror lungimi sînt a, b, c. Ce calcule trebuie să facem cu aceste lungimi pentru a putea ști dacă se poate „construi" un triunghi cu aceste segmente? Să se spună dacă se poate construi un triunghi cu segmentele care au lungimile de: a) 5, 8, 11; b) 7, 10, 18; c) 7, 7, 5; d) 5, 5, 13; e) 4, 4, 4.

4. Considerăm două segmente: $AB = 7$ m și $CD = 12$ m. Care este cea mai mare și cea mai mică lungime a segmentului $[EF]$ ca să putem construi un triunghi cu aceste segmente?

5. Notăm lungimile laturilor unui triunghi cu a, b, c. Stabiliți ce relații există între numerele a, b, c pentru ca triunghiul să fie oarecare, isoscel, echilateral.

6. Folosind aceleași notații pentru lungimile laturilor unui triunghi oarecare (a, b, c), să se compare lungimea unei laturi a triunghiului cu jumătate din perimetrul triunghiului, apoi să se compare suma lungimilor a două laturi cu jumătate din perimetrul triunghiului.

7. Să se demonstreze că în orice patrulater convex, suma lungimilor diagonalelor este: a) mai mică decît suma lungimilor laturilor patrulaterului; b) mai mare decît jumătatea acestei sume.

8. În triunghiul ABC știm că: $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 9$. Să se scrie, în ordinea crescătoare a măsurilor lor, unghiurile triunghiului ABC.

9. În triunghiul ABC știm că: $m(\sphericalangle A) = 30°$, $m(\sphericalangle B) = 80°$. Să se scrie, în ordinea crescătoare a lungimilor lor, laturile triunghiului ABC.

10. În triunghiul MNP, latura $[MN]$ este cea mai mică dintre laturi. a) Unghiul P poate fi ascuțit sau obtuz sau drept? b) Dacă unghiul M este obtuz, să se compare latura $[NP]$ cu celelalte două laturi ale triunghiului.

11. Să se compare baza cu înălțimea unui triunghi isoscel, dacă triunghiul este: a) ascuțitunghic; b) dreptunghic; c) obtuzunghic.
Să se demonstreze reciprocele.

12. Fie ABC un triunghi oarecare cu $AB < AC$ și $[AD]$ înălțime. Să se compare unghiurile BAD și DAC.

13. În triunghiul oarecare ABC, $BC = 2 \cdot AB$. Să se compare unghiul C cu unghiurile A și B.

14. Fie ABC un triunghi în care $[AB] \not\equiv [AC]$. Pe care dintre aceste laturi o intersectează mediatoarea segmentului $[BC]$? (Punctul de intersecție să fie interior laturii.)

15. Să se demonstreze că lungimea oricărei mediane dintr-un triunghi este mai mică decît media aritmetică a lungimilor laturilor care pleacă din același vîrf cu ea.

16. Fie xOy un unghi și $[Oz$ bisectoarea lui. Considerăm un punct M în interiorul unghiului xOy. Notăm cu M_1 și M_2 picioarele perpendicularelor din M pe $[Ox$ și respectiv $[Oy$. Să se compare segmentele $[MM_1]$ și $[MM_2]$, dacă:

a) Punctul M aparține bisectoarei $[Oz$; b) Punctul M nu aparține bisectoarei $[Oz$.

Există în interiorul unghiului xOy cel puțin un punct sau cel mult un punct care să fie egal depărtat de laturile unghiului xOy?

17. Fie D piciorul bisectoarei unghiului A din triunghiul ascuțitunghic ABC. Notăm cu A_1 și A_2 picioarele perpendicularelor din D pe laturile $[AB]$ și respectiv $[AC]$. Să se compare segmentele $[AA_1]$ și $[AA_2]$.

18. Fie $[AB]$ un segment și M un punct exterior segmentului. Să se compare $[MA]$ și $[MB]$, dacă:

a) Punctul M aparține mediatoarei segmentului $[AB]$;

b) Punctul M nu aparține mediatoarei segmentului $[AB]$.

Există cel puțin un punct sau cel mult un punct care să fie egal depărtat de punctele A și B?

48. MEDIATOAREA UNUI SEGMENT ȘI BISECTOAREA UNUI UNGHI CA LOCURI GEOMETRICE[1]

În cele expuse pînă acum în acest manual am vorbit despre proprietățile unor figuri geometrice, independent de poziția lor în plan.

Ne propunem acum să studiem unele proprietăți determinate de poziția unei figuri geometrice în raport cu altele. Vom începe cu cele mai simple figuri geometrice, cu punctele.

De exemplu, să studiem poziția punctelor care au distanțe egale față de două puncte date A și B.

Dacă vom considera punctele date A și B ca extremități ale unui segment ($[AB]$) și dacă notăm cu O mijlocul segmentului, atunci putem scrie: $AO = OB = \frac{1}{2} \cdot AB$ (vezi pagina 16). Deci, mijlocul unui segment are distanțe egale „la capetele segmentului". Perpendiculara în O pe segmentul $[AB]$ (mediatoarea segmentului) conține puncte M care au „proprietatea" de a avea distanțe egale față de capetele segmentului.

[1]) Primele referiri asupra noțiunii de „loc geometric" aparțin filozofului grec Platon (427—347 î.e.n.), unul dintre cei mai mari gînditori ai antichității.

Se pun două întrebări: 1) Oare toate punctele mediatoarei segmentului au distanțe egale față de extremitățile lui? 2) Nu există cumva și alte puncte, care să nu aparțină mediatoarei segmentului, dar care să aibă (totuși) distanțe egale față de extremitățile segmentului?

Răspunsul la aceste două întrebări ne este dat de următoarele două teoreme:

Teoremă. Dacă un punct aparține mediatoarei unui segment, atunci el are distanțe egale față de extremitățile acestui segment.

Teoremă reciprocă. Dacă un punct are distanțe egale față de extremitățile unui segment, atunci el aparține mediatoarei acestui segment.

Demonstrarea primei teoreme se face cu ușurință (din congruența triunghiurilor dreptunghice MOA și MOB — figura 310).

Demonstrarea teoremei reciproce se face prin metoda reducerii la absurd.

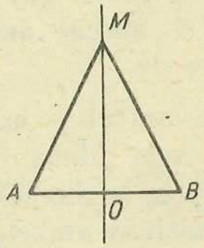


Fig. 310

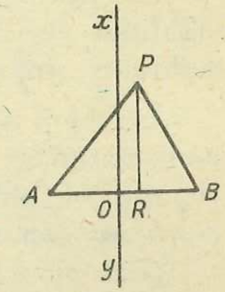


Fig. 311

Fie $[AB]$ un segment, O mijlocul lui și xy mediatoarea acestui segment (fig. 311). Presupunem că ar exista un punct P ale cărui distanțe la extremitățile segmentului sînt egale ($PA = PB$ — conform ipotezei), dar care n-ar aparține mediatoarei xy ($P \notin xy$). Fie R piciorul perpendicularei din P pe $[AB]$. Cum $P \notin xy$ (conform presupunerii făcute), ar însemna că $R \neq O$.

Triunghiul PAB este isoscel ($[PA] \equiv [PB]$ — din ipoteză), iar $[PR]$ ar fi înălțime. În triunghiurile dreptunghice PRA și PRB am avea: $[PA] \equiv [PB]$ (din ipoteză) și $[PR] = [PR]$ (latură comună). În baza cazului 2 de congruență a triunghiurilor dreptunghice (*IC*), $\triangle PRA \equiv \triangle PRB$. Ar rezulta că și celelalte două catete ar fi congruente $[AR] \equiv [RB]$. Ar însemna că R este mijlocul segmentului $[AB]$. Dar cum din ipoteză știm că O este mijlocul segmentului $[AB]$ și $R \neq O$, ar însemna că segmentul $[AB]$ ar avea „două mijloace", ceea ce este absurd (q.e.d.).

Aceste două teoreme (cea directă și cea reciprocă) pot fi reunite într-o singură propoziție matematică: **„Un punct are distanțe egale la două puncte date, dacă și numai dacă el aparține mediatoarei segmentului determinat de cele două puncte date".**

O altă formulare a aceluiași adevăr ar putea fi aceasta: „Mediatoarea unui segment conține *toate* punctele care au distanțe egale față de extremitățile segmentului și *numai* aceste puncte.

Această *proprietate remarcabilă* a mediatoarei unui segment de dreaptă se mai poate exprima și astfel: **Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date este mediatoarea segmentului determinat de punctele date.**

Am introdus astfel o noțiune nouă, noțiunea de *loc geometric*, pe care o vom defini astfel:

Locul geometric al punctelor care au o anumită proprietate este figura care conține toate punctele avînd proprietatea dată și numai acele puncte (în sensul că nu conține nici un punct care să nu aibă această proprietate).

Noțiunea de *loc geometric* este folosită frecvent la definirea unor figuri geometrice.

Un alt exemplu: să studiem poziția punctelor din interiorul unui unghi propriu care au distanțe egale la laturile unghiului.

Vom demonstra următoarea propoziție:

Un punct din interiorul unui unghi propriu aparține bisectoarei unghiului dacă și numai dacă distanțele de la punct la laturile unghiului sînt egale.

Așa cum s-a arătat și la pagina 62, o propoziție în formularea căreia există expresia „dacă și numai dacă" conține, de fapt, două propoziții: o propoziție directă și reciproca ei. În această situație, trebuie să demonstrăm ambele propoziții.

Vom folosi figura 312 în care ipoteza comună este $m(\sphericalangle MAO) = m(\sphericalangle MBO) = 90°$.

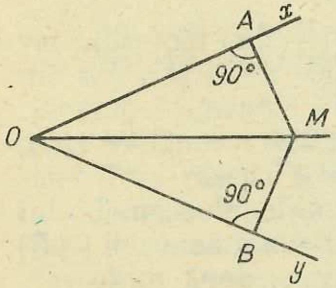


Fig. 312

Pentru prima demonstrație, completăm ipoteza cu $\sphericalangle xOM \equiv \sphericalangle yOM$, iar concluzia va fi: $[MA] \equiv [MB]$.

Avem: $[OM] = [OM]$ (ipotenuză comună) și $\sphericalangle xOM \equiv \sphericalangle yOM$ (ipoteză). Rezultă că $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ (cazul 1 triunghiuri dreptunghice). Deci, $[MA] \equiv [MB]$.

Pentru a doua demonstrație, completăm ipoteza cu $[MA] \equiv [MB]$, iar concluzia va fi: $\sphericalangle xOM \equiv \sphericalangle yOM$.

Avem: $[OM] = [OM]$ (ipotenuză comună) și $[MA] \equiv [MB]$ (ipoteză). Rezultă că $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ (cazul 2 triunghiuri dreptunghice). Deci, $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$ sau $\sphericalangle xOM \equiv \sphericalangle yOM$.

Vom putea spune deci că: **locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi propriu pentru care distanțele la cele două laturi ale unghiului sînt egale este bisectoarea acelui unghi.**

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Două laturi ale unui triunghi isoscel au lungimile de 10 cm și 20 cm. Care este lungimea laturii a treia?

2. În figura 313, triunghiurile ABC și ACD sînt isoscele ($[AB] \equiv [AC]$, $[AC] \equiv [AD]$). Demonstrați că unghiurile ABD și ADB sînt congruente.

3. Fie ABC un triunghi isoscel ($[AB] \equiv [AC]$) și fie M și N două puncte pe (BC), astfel încît $[BM] \equiv [NC]$. Arătați că $[AM] \equiv [AN]$.

4. Determinați toate punctele M care aparțin dreptei BC știind că măsura unghiului dintre dreapta AM și dreapta BC este mai mică decît cea a unghiului B al triunghiului ABC.

5. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), avem $[BM] \equiv [CN]$ ($M \in (AB)$, $N \in (AC)$) și $[BP] \equiv [QC]$ ($P, Q \in (BC)$). Să se demonstreze că $[MP] \equiv [NQ]$.

6. Într-un triunghi ascuțitunghic isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), considerăm perpendiculara din B pe BC și înălțimea $[CP]$ a triunghiului ($P \in (AB)$), care se intersectează în M (fig. 314). Știind că N este piciorul înălțimii din B, să se demonstreze că unghiurile MBP și NBC sînt congruente.

7. Există un triunghi isoscel ABC astfel încît $[AM$ și $[AN$, care împart unghiul A în trei părți congruente, să intersecteze latura $[BC]$ în punctele M și N, astfel încît $[BM] \equiv [MN] \equiv [NC]$?

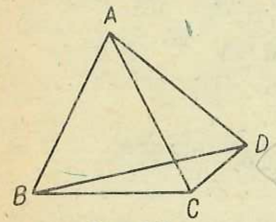


Fig. 313

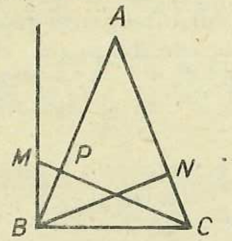


Fig. 314

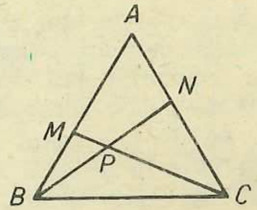


Fig. 315

8. În triunghiul echilateral ABC punctele M și N aparțin laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, astfel încît $[BM] \equiv [AN]$ (fig. 315). Dreptele BN și CM se intersectează în P. Care este măsura unghiului NPC?

9. Într-un triunghi ABC, punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Fie P și Q picioarele perpendicularelor din B, respectiv din C pe dreapta AM. Să se demonstreze că $[BP] \equiv [CQ]$.

10. Aceeași problemă, dacă BP și CQ nu sînt perpendiculare pe AM, ci numai paralele între ele.

11. În figura 316, $AM \parallel BN$ și $[AM] \equiv [BN]$. Punctele P și Q aparțin segmentului $[AB]$, astfel încît $MP \parallel NQ$. Să se arate că $[AQ] \equiv [BP]$.

12. În figura 317, $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, iar $BE \parallel CF$. Să se arate că $\triangle ABC \equiv \triangle AEF$. || AD

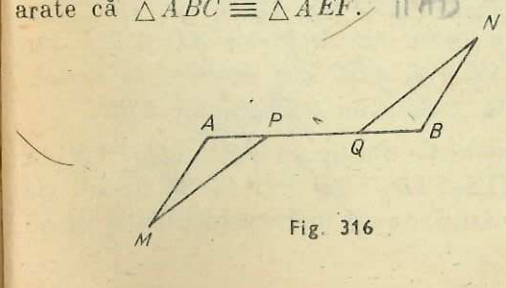


Fig. 316

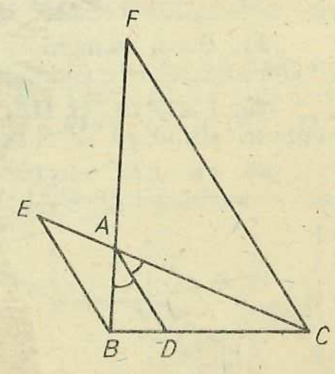


Fig. 317

13. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), punctele M și N aparțin laturilor congruente ($M \in (AB)$ și $N \in (AC)$) astfel ca $MN \parallel BC$. Să se demonstreze că $[CM] \equiv [BN]$.

14. Fie ABC un triunghi isoscel ($[AB] \equiv [AC]$). Fie M și N două puncte astfel încît M și C sînt de o parte și de alta a dreptei AB, B și N sînt de o parte și de alta a dreptei AC și astfel încît $[AM] \equiv [CN]$ și $[AN] \equiv [BM]$. Să se arate că AN nu poate fi paralelă cu BM.

15. Rămîne adevărată afirmația din problema precedentă atunci cînd $[AM] \equiv [AN]$ și $[BM] \equiv [CN]$?

16. Se dă triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$). Perpendiculara din B pe AC intersectează perpendiculara din C pe BC în N, iar perpendiculara din C pe AB intersectează perpendiculara din B pe BC în M. Să se arate că $[BM] \equiv [CN]$.

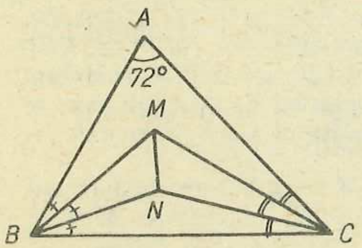


Fig. 318

17. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 72°$, $[BM$ și $[BN$ împart unghiul B în trei părți congruente; la fel, $[CM$ și $[CN$ împart unghiul C în trei părți congruente (fig. 318). Care este măsura unghiului CMN?

18. Fie unghiurile adiacente suplementare $x'Oy$ și yOx, iar $[OA$ și $[OB$ bisectoarele lor. Știind că $[OA] \equiv [OB]$, să se calculeze măsura unghiului ABO.

19. În triunghiul ABC, punctul D este piciorul bisectoarei interioare a unghiului A. Picioarele perpendicularelor din D pe dreptele AB și AC sînt punctele M și N. a) Calculați, în funcție de măsura unghiului A, pe cea a unghiului MDN. b) Demonstrați că dacă triunghiul ABC nu este isoscel și nici dreptunghic, triunghiurile MBD și NCD nu pot fi congruente.

20. În triunghiul ABC bisectoarele interioare ale unghiurilor B și C se intersectează în punctul I. a) Demonstrați că măsura unghiului BIC nu poate fi de 90°. b) Poate fi $m(\sphericalangle BIC) < 90°$?

21. Două segmente congruente ($[AB] \equiv [CD]$) au mediatoarele concurente (MP, respectiv NP). Să se demonstreze că:

a) Dacă $[MP] \equiv [NP]$, atunci $[AP] \equiv [BP] \equiv [CP] \equiv [DP]$.

b) Dacă $[AP] \equiv [CP]$, atunci $[BP] \equiv [DP]$ și $[MP] \equiv [NP]$.

22. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Semidreptele $[BI$ și $[CI$ sînt bisectoarele unghiurilor B și C. a) Care este măsura unghiului BIC? b) Dacă triunghiul ABC este un triunghi oarecare, exprimați măsura unghiului BIC în funcție de cea a unghiului BAC.

23. Triunghiul ABC are $m(\sphericalangle B) = 15°$, $m(\sphericalangle C) = 30°$. Pe segmentul $[AB]$ se ia $[AD] \equiv [AC]$ și pe segmentul $[BC]$ se ia $[BE] \equiv [AB]$. Să se calculeze măsurile unghiurilor formate de $[CD]$ și $[AE]$ (care se intersectează în M).

24. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ au unghiurile B și B', respectiv C și C' complementare. Cum sînt unghiurile A și A'?

25. Fie ABC și DEF două triunghiuri. Ce puteți spune despre aceste triunghiuri știind că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$ și $[BC] \equiv [EF]$?

26. Fie ABC un triunghi, $[AD]$ înălțimea din A ($D \in (BC)$) și $[BE$ bisectoarea unghiului B ($E \in (AC)$). Dacă M este intersecția dreptelor AD și BE, iar triunghiurile ABM și ADC sînt isoscele, să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

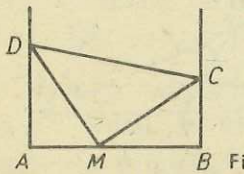


Fig. 319

27. Cu notațiile din figura 319, avem $[AM] \equiv [BC]$, $[BM] \equiv [AD]$, $AD \perp AB$, $BC \perp AB$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului CDM.

28. În triunghiul ABC, punctele E și F aparțin medianei $[AD]$, astfel încît $[AE] \equiv [EF] \equiv [FD]$, iar T este mijlocul lui $[BD]$ și S al lui $[DC]$. Latura $[AB]$ este intersectată de $[CE]$ în M și de $[SF]$ în N, iar paralelele din D și T la $[SN]$ o intersectează în P și Q.

a) Arătați că $[AM] \equiv [MN] \equiv [NP] \equiv [PQ] \equiv [QB]$.

b) Dacă $CM = 4$ cm, care sînt lungimile segmentelor $[TQ]$, $[DP]$ și $[SN]$?

29. Fie M un punct în interiorul unui triunghi oarecare ABC. Arătați că $m(\sphericalangle BMC) > m(\sphericalangle A)$.

30. Fie $ABCD$ un patrulater convex astfel încît $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$. Bisectoarea unghiului D intersectează dreptele AB și BC în M, respectiv N. Să se demonstreze că triunghiul BMN este isoscel.

31. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se calculeze măsurile unghiurilor acestui patrulater știind că:

a) $\dfrac{3 \cdot m(\sphericalangle A)}{11} = \dfrac{2 \cdot m(\sphericalangle B)}{7} = \dfrac{6 \cdot m(\sphericalangle C)}{35} = \dfrac{m(\sphericalangle D)}{2}$;

b) $\dfrac{2 \cdot m(\sphericalangle A)}{7} = \dfrac{m(\sphericalangle B)}{6} = \dfrac{2 \cdot m(\sphericalangle C)}{5}$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$.

32. Într-un patrulater convex $ABCD$ avem $m(\sphericalangle A) = 120°$, iar măsurile unghiurilor B, C și D sînt direct proporționale cu numerele 4, 5 și 9. Să se calculeze măsurile unghiurilor B, C, D.

33. Măsurile unghiurilor A, B, C, D ale unui patrulater convex sînt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5, 3. a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$. b) Dacă triunghiul BCD este isoscel, care sînt măsurile unghiurilor triunghiului ABD?

34. Să se demonstreze că dacă măsura unuia dintre unghiurile unui patrulater convex este egală cu media aritmetică a măsurilor celorlalte unghiuri ale patrulaterului, atunci acel unghi este drept.

35. Măsurile unghiurilor unui patrulater convex sînt direct proporționale cu numerele 2, 3, 6, 7. Să se calculeze măsurile unghiurilor acestui patrulater.

36. În figura 320, triunghiul ABC este echilateral, triunghiul ABD este isoscel ($[AB] \equiv [AD]$), iar segmentul $[CE]$ este paralel și congruent cu $[BD]$. Se știe că $m(\sphericalangle BAD) = 30°$. a) Demonstrați că triunghiul DAE este isoscel. b) Calculați măsura unghiului ECD. c) Demonstrați că triunghiurile DAE și ABD sînt congruente.

37. Se dau paralelogramele $ABCD$ și $DCEF$, iar O_1 și O_2 sînt centrele lor. Dacă $BE = a$, cît este lungimea segmentului $[O_1O_2]$?

38. Se dau paralelogramele $ABCD$ de centru O și $BOEF$ de centru A. Dacă $DE = 6$ cm, calculați lungimea segmentului $[CF]$.

39. În dreptunghiul $ABCD$, latura $[AD]$ are lungimea cît dublul lungimii laturii $[AB]$, iar M și N sînt mijloacele laturilor opuse $[BC]$ și $[AD]$. În exteriorul dreptunghiului se construiesc triunghiurile echilaterale APB și QCM (fig. 321). Să se arate că NPQ este triunghi dreptunghic isoscel.

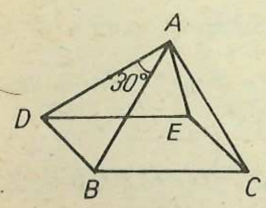


Fig. 320

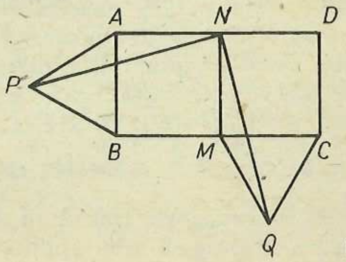


Fig. 321

40. Să se arate că punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor unui paralelogram sînt vîrfurile unui dreptunghi, dacă aceste bisectoare nu sînt toate concurente. Cînd sînt ele concurente?

41. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, punctul D este piciorul bisectoarei interioare unghiului A. Fie M și N picioarele perpendicularelor din D pe AB, respectiv AC. Arătați că $AMDN$ este pătrat.

42. Se dă pătratul $ABCD$ și în exteriorul lui se contruiesc triunghiurile echilaterale MAD și NDC (fig. 322). a) Arătați că $[MN] \equiv [BN]$. b) Care este măsura unghiului MNB? c) Ce fel de triunghi este MNB?

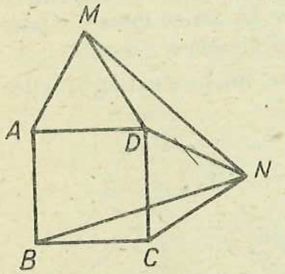


Fig. 322

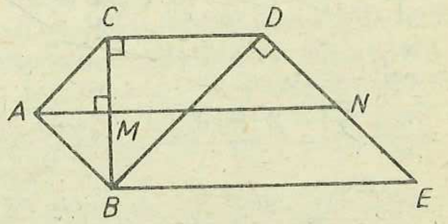


Fig. 323

43. Triunghiurile ABC, BCD, BDE sînt dreptunghice și isoscele (fig. 323). Dacă $m(\sphericalangle AMC) = 90°$ și $CD = 5$ cm, se cere lungimea segmentului $[AN]$ (A, M, N sînt puncte colineare).

44. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu toate laturile congruente și astfel încît $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Să se arate că acest patrulater are toate unghiurile congruente (adică este pătrat).

45. Aceeași problemă numai că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$.

46. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale unui triunghi oarecare se construiesc, în exteriorul triunghiului, pătratele $ABDE$ și $ACFG$. a) Să se arate că segmentele $[CE]$ și $[BG]$ sînt congruente și perpendiculare. b) Să se arate că mediana $[AM]$ a triunghiului ABC ($M \in (BC)$) și înălțimea $[AN]$ a triunghiului AEG ($N \in (EG)$) sînt incluse în aceeași dreaptă.

47. În figura 324, pătratele $ABCD$, $CDEF$, $FCGH$ au laturile congruente. Să se demonstrez că: a) Dreptele AF și EG sînt perpendiculare; b) Unghiurile AFG și EGF sînt congruente.

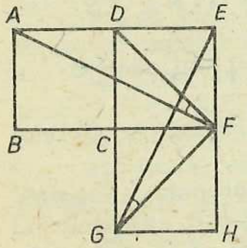


Fig. 324

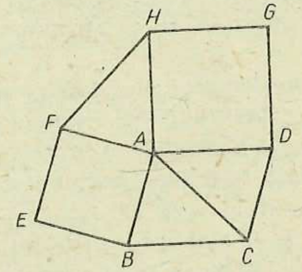


Fig. 325

48. În figura 325, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, iar $ABEF$ și $ADGH$ sînt pătrate. Să se demonstreze că $[AC] \equiv [FH]$.

49. Se dă triunghiul echilateral ABC și se construiesc în exteriorul lui pătratele $ABMN$ și $BCQP$. Să se arate că:

a) $[AP] \equiv [MC]$; b) $AP \perp MC$; c) Dacă punctele S și T sînt intersecțiile dreptei MC cu AP, respectiv AQ, atunci $ST = \frac{1}{2} \cdot AT$.

50. În exteriorul rombului $ABCD$ se construiesc pătratele $AMQB$ și $ADPN$. Ce măsură trebuie să aibă unghiul ACD pentru ca $[MN] \equiv [DP]$?

28 (pag. 129) **1.** Aplicați, după caz, proprietățile relative la laturile sau la unghiurile unui dreptunghi. **2.** De exemplu, folosind congruențe de triunghiuri, convenabil alese, în toate cazurile se poate demonstra că patrulaterul convex $MNPQ$ este un paralelogram cu un unghi drept.

29 (pag. 133) **1.** Aplicați, după caz, proprietățile relative la laturile, unghiurile sau diagonalele unui romb. **2.** De exemplu, folosind congruențe de triunghiuri, convenabil alese, demonstrați că patrulaterul convex $MNPQ$ este un paralelogram cu două laturi consecutive congruente.

30 (pag. 135) **1.** Aplicați, după caz, proprietățile relative la laturile, unghiurile sau diagonalele unui pătrat. **2.** De exemplu, folosind congruențe de triunghiuri, convenabil alese, demonstrați că patrulaterul convex $MNPQ$ este un dreptunghi cu două laturi consecutive congruente.

31 (pag. 136) **11.** Aplicație a liniei mijlocii intr-un triunghi. **12.** Asemănător cu **11.** **13.** Fie $ABCD$ un romb și O intersecția diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$. Fie O_1, O_2, O_3, O_4 picioarele perpendicularelor din O pe respectiv OB, BC, CD, DA. De exemplu, demonstrați că punctele O_1, O, O_3 sînt colineare, că $[O_1O] \equiv [OO_3]$ și apoi că $[O_1O_3] \equiv [O_2O_4]$ etc. **14.** Asemănător cu **13.** **15.** Într-un paralelogram unghiurile alăturate unei laturi sînt suplementare. **16.** $45°$; $22°30'$; $112°30'$. **18.** Unghiurile ADB și ADF, fiind unghiuri de la baza unor triunghiuri isoscele, sînt unghiuri ascuțite, iar ca unghiuri adiacente nu pot fi deci suplementare. **19.** Rezultă din congruența $\triangle DAC \equiv \triangle DCE$. **20.** Unghiurile ABC și FAH au același suplement (unghiul BAD), deci sînt congruente. Congruența cerută este evidentă. **21.** Și $AHED$ este romb. Se folosește transzitivitatea relației de congruență. **22.** Se demonstrează congruența unor unghiuri (cu laturile respectiv perpendiculare) și apoi congruența triunghiurilor ABM și ADP. **23.** Din congruența unor triunghiuri dreptunghice se demonstrează că $\sphericalangle ANB \equiv \sphericalangle AMD$. Cum $AB \perp AD$, rezultă că și $AN \perp DM$. **24.** Se folosește indicația de la problema precedentă. **25.** Se demonstrează că $\triangle BMN$ este isoscel. Apoi rezultă $m(\sphericalangle M_4) = m(\sphericalangle N_5) = 45°$, $m(\sphericalangle M_3) = m(\sphericalangle N_6) = 75°$ și $m(\sphericalangle D_2) = m(\sphericalangle D_1) = 15°$.

32 (pag. 140). **1.** Din congruența $\triangle ABC \equiv \triangle AB'C'$ rezultă că $B'C' \parallel BC$. Apoi din $\triangle ABD \equiv \triangle AB'D'$ (D' fiind simetricul lui D față de A) rezultă că $[BD] \equiv [B'D']$ și deci $B'D' = \frac{1}{2} \cdot B'C'$. **2.** În patrulaterul $ABEC$ diagonalele se intersectează una pe alta în părți congruente. **3.** Patrulaterele ABA_1B_1 și ABA_2B_2 sînt paralelograme. De aici deducem că $A_1B_1 \parallel A_1B_2$ și $[A_1B_1] \equiv [A_2B_2]$.

33 (pag. 144). **1.** Aplicați, după caz, proprietățile relative laturilor, unghiurilor sau diagonalelor unui trapez isoscel. **2.** De exemplu, folosind congruențe de triunghiuri, convenabil alese, se poate demonstra că patrulaterul $MNPQ$ are două laturi paralele și alte două laturi neparalele, dar congruente. **3.** 11 cm. **4.** 32 cm. **5.** De exemplu, notăm trapezul $ABCD$ ($AD \parallel BC$), M și N mijloacele diagonalelor $[BD]$, respectiv $[CA]$, $[EF]$ linia mijlocie în trapez ($E \in (AB)$). În triunghiul ABC, $[EN]$ este linie mijlocie etc. Problema are două soluții, după cum lungimea dată este a bazei mici sau a celei mari (10 cm sau 2 cm). **6.** Asemănător cu **5.** Se găsesc lungimile 3 cm, 2 cm, 3 cm. **7.** a) $135°$; b) 16 cm. **8.** a) Proprietăți într-un triunghi isoscel; b) Desenăm două drepte a și b paralele la distanța de 4 cm. Fixăm, de exemplu, pe dreapta a un punct, A și ducem $AA_1 \perp b$ ($A_1 \in b$). Construim triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) cu $B, C \in b$, $BC = 3$ cm și înălțimea $AA_1 = 4$ cm etc. **9.** a) 6 cm; b) Da. Se construiește întîi triunghiul dreptunghic DEC, unde $DE \perp BC$ și $E \in (BC)$, apoi dreptunghiul $ABED$. **10.** 8 cm. **11.** a) 4 cm; b) triunghiul ADC este isoscel, avînd două unghiuri cu măsura de $30°$; c) Da. Se

construiește triunghiul dreptunghic ABC, apoi mediatoarea segmentului $[AC]$ intersectează paralela AD la BC în punctul D. **12.** Paralela prin D la AB (spre exemplu) intersectează pe EF în M, iar paralela prin F la AB intersectează pe BC în N. Se demonstrează că $\triangle DMF \equiv \triangle FNC$ și apoi din $ME = EF - AD$ și $NC = BC - EF$, rezultă relația cerută. **13.** $ABA'B'$ este un trapez (ipoteză) și $[MB_1]$ este linie mijlocie (ipoteză) etc. $A_1B_1 = C_1D_1 = 5$ cm. **14.** Distanțele sînt egale cu $\frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (cm) și $\frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (cm).

34 (pag. 149) **4.** $CD - AB < EF < CD + AB$, adică $5 < EF < 19$. **6.** Scriem: $\frac{a+b+c}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b+c}{2}$ și apoi se compară a cu $\frac{a}{2} + \frac{b+c}{2}$ etc. **7.** Se folosesc inegalități între laturile unui triunghi. **8.** $\sphericalangle B > \sphericalangle A > \sphericalangle C$. **9.** $a < c < b$. **10.** a) Celei mai mici laturi i se opune cel mai mic unghi. Unghiul P nu poate fi decît ascuțit; b) $NP > MP > MN$. **11.** Dacă se notează cu b baza și cu h înălțimea avem: a) $b < 2h$; b) $b = 2h$; c) $b > 2h$. **12.** Se ia un punct E interior segmentului (DC) astfel ca $[AB] \equiv [AE]$ și se compară unghiurile DAE, DAC și BAD. **13.** În orice triunghi ABC avem $AC > BC - AB$. În cazul de față, $AC > 2 \cdot AB - AB = AB$. Dar și $BC = 2 \cdot AB > AB$. Fiind cea mai „mică" latură a triunghiului, i se opune unghiul „cel mai mic"... . **14.** Pe cea mai „mare" dintre laturile $[AB]$ și $[AC]$. **15.** Fie ABC un triunghi și M mijlocul laturii $[BC]$. Trebuie de demonstrat că $AM < \frac{AB + AC}{2}$. Se consideră paralelogramul $ABA'C$ unde A' este simetricul lui A față de M și se scrie una dintre inegalitățile laturilor în $\triangle ABA'$... . **16.** a) Se compară triunghiurile MOM_1 și MOM_2; b) Fie M' simetricul lui M față de bisectoare și M_1', M_2' picioarele perpendicularelor din M' pe $[Ox$, respectiv $[Oy$. Din congruența $\triangle MOM_1 \equiv \triangle M'OM_2'$, rezultă $[MM_1] \equiv [M'M_2']$. Rămîn de comparat bazele unui trapez dreptunghic.

Probleme recapitulative (pag. 153)

1. 20 cm. **2.** Rezultă că $\triangle ABD$ este isoscel... . **3.** Se demonstrează că $\triangle ABM \equiv \triangle ACN$. **4.** În $\triangle ABC$, presupunînd că $AB < AC$, se găsește pe (BC) poziția unui punct D pentru care $[AB] \equiv [AD]$. Se compară $m(\sphericalangle ABC)$ cu $m(\sphericalangle AMB)$ pentru diferite poziții ale lui M și se găsește că $M \in (DC$. **5.** Se demonstrează că $\triangle MBP \equiv \triangle NCQ$. **6.** Se demonstrează că au complemente congruente. **7.** Nu! Argumentați de ce nu pot fi congruente triunghiurile ABM, AMN și ANC. **8.** 60°. **9.** Se demonstrează că $\triangle BMP \equiv \triangle CMQ$. **10.** Aceeași indicație ca la **9. 11.** Se demonstrează că $\triangle AMP \equiv \triangle BNQ$. **13.** Se demonstrează mai întîi că triunghiul AMN este isoscel, apoi congruența unor triunghiuri, de exemplu, $\triangle ABN \equiv \triangle ACM$ sau $\triangle BMC \equiv \triangle CNB$. Se aplică teorema relativă la două drepte paralele intersectate de o secantă și apoi, ținînd seama de faptul că triunghiurile ABE și ACF sînt isoscele, se aplică în final cazul 1 de congruență a triunghiurilor (LUL). **14.** Se arată că din $\triangle ABM \equiv \triangle CAN$ (LLL), rezultă $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle CAN$. Dacă AN ar fi paralelă cu BM, ar însemna că $m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAN)$ — (unghiurile alterne interne au măsurile egale). Adică, ar însemna că unghiul de la vîrful triunghiului isoscel este un unghi nul!! **15.** Afirmația nu mai rămîne valabilă. Cînd $\sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle ACN$, AN este paralelă cu BM. **16.** Se demonstrează că $\triangle BMC \equiv \triangle CNB$. **17.** 54°. **18.** Se justifică de ce $[OA \perp [OB$. Triunghiul AOB este dreptunghic isoscel. Deci $m(\sphericalangle ABO) = 45°$. **19.** a) $m(\sphericalangle MDA) = 90° - \frac{1}{2}\, m(\sphericalangle BAC)$, $m(\sphericalangle NDA) = 90° - \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ABC)$; b) Se arată că numai cînd D este mijlocul laturii $[BC]$ triunghiurile dreptunghice MBD și NCD pot fi congruente. **20.** a) Dacă $m(\sphericalangle BIC)$ ar fi de 90°, ar însemna că $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)$ ar fi de 180°, ceea ce este absurd!; b) Dacă $m(\sphericalangle BIC)$ ar fi mai mică de 90°, ar însemna că $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)$ ar fi mai mare de 180° și deci ar rezulta că punctul A se găsește în celălalt semiplan determinat de dreapta BC. **21.** a), b). Rezultă imediat din congruențe de triunghiuri. **22.** a) 135°; b) $90° + \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle A)$. **23.** 75° și 105°. **24.** Sînt congruente. **26.** 75°, 60°, 45°. **27.** $m(\sphericalangle M) = 90°$, $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle D) = 45°$. **28.** a) Se demonstrează că dreptele CM, SN, DP, TQ sînt drepte suport ale liniilor mijlocii din unele triunghiuri sau trapeze ce s-au format; b) 1 cm, 2 cm, 3 cm. **29.** $m(\sphericalangle BMC) = m(\sphericalangle ABM) + m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle ACM) > m(\sphericalangle A)$. **30.** Unghiurile M și N sînt congruente. **31.** a) 88°, 84°, 140°, 48°; b) 70°, 120°, 50°, 120°. **32.** 53°20′, 60°40′, 120°. **33.** a) 72°, 96°, 120°, 72°; b) 72°, 42°, 66°. **34.** Evident. **35.** 40°, 60°, 120°, 140°. **36.** a) Patrulaterul $BCED$ este paralelogram și rezultă că $[DE] \equiv [BC] \equiv [AB] \equiv [AD]$; b) Se arată că $\triangle ACD$ este triunghi isoscel, $m(\sphericalangle ECD) = 45°$; c) Din $m(\sphericalangle BCD) = m(\sphericalangle BCA) - m(\sphericalangle DCA)$, rezultă că $m(\sphericalangle BCD) = 15°$ și apoi din $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle EDC$ (alterne interne) și din $m(\sphericalangle ADE) = m(\sphericalangle ADC) - m(\sphericalangle EDC)$, rezultă că $m(\sphericalangle ADE) = 30°$. Congruența $\triangle DAE \equiv \triangle ABD$ este evidentă (LUL). **37.** $O_1O_2 = \frac{a}{2}$. **38.** Din $[FA] \equiv [FO] \equiv [OC]$ și $FO = AC = ED = 6$ cm, rezultă $FC = 9$ cm. **39.** Se demonstrează că $\triangle APN \equiv \triangle MQN$. **40** Se demonstrează că bisectoarele a două unghiuri alăturate ale unui paralelogram sînt perpendiculare. **41.** Se demonstrează că $AMDN$ este un dreptunghi în care o diagonală formează cu latura un unghi cu măsura de 45°. **42.** a) Rezultă din $\triangle BCN \equiv \triangle MDN$; b) $m(\sphericalangle MNB) = 60°$; c) echilateral. **43.** $AN = 10$ cm. **44.** Avînd toate laturile congruente, patrulaterul este romb, deci $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = 180°$. Cum $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, rezultă că $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90°$. **45.** Congruența a două unghiuri opuse ($\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$) nu conține nici o informație suplimentară față de congruența tuturor laturilor, deci patrulaterul este un romb oarecare. **46.** a) Congruența segmentelor $[CE]$ și $[BG]$ rezultă din congruența triunghiurilor AEC și ABG, iar perpendicularitatea lor din faptul că unghiul dintre ele este cel de-al patrulea unghi al unui patrulater în care două unghiuri opuse sînt suplementare și un al treilea este drept; b) se „completează" paralelogramul care are „ca jumătate" triunghiul ABC ($ABLC$). Se demonstrează că $\sphericalangle ACL \equiv \sphericalangle EAG$ și apoi că $\triangle ACL \equiv \triangle GAE$, de unde rezultă că $\sphericalangle CAL \equiv \sphericalangle AGE$. Se arată că unghiul ascuțit dintre dreptele LA și AG este complementar cu unghiul CAL și deci și cu unghiul AGE. Este evident că $LA \perp EG$. **47.** a) Se demonstrează că $\triangle AEF \equiv \triangle EHG$ (LUL), rezultă $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle HEG$. Cum $AE \perp HE$, înseamnă că și $AF \perp EG$; b) Rezultă din congruența $\triangle ADF \equiv \triangle EFG$. **48.** Se demonstrează congruența $\triangle ABC \equiv \triangle AFH$. **49.** Din $\triangle BMC \equiv \triangle BPA$; b) $m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle BCM) = 15°$ și $m(\sphericalangle PAC) = m(\sphericalangle MCA) = 45°$; c) $m(\sphericalangle SAT) = 30°$. **50.** Triunghiul AMN este echilateral și $\triangle AMN \equiv \triangle DAC$, deci $m(\sphericalangle ACD) = 60°$.

Cuprins