

Lei 12,60

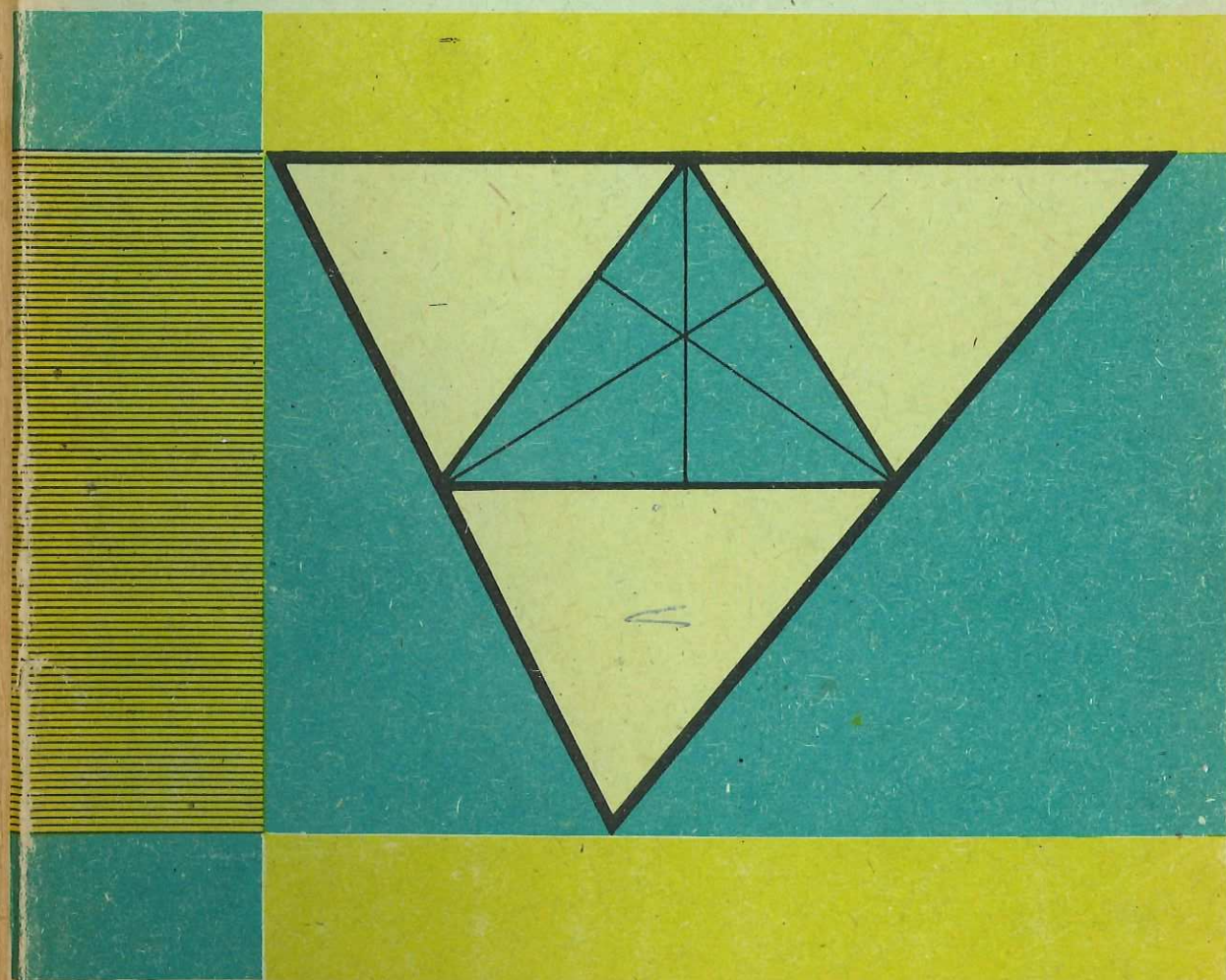
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

# IX Matematică

Geometrie și trigonometrie

Manual pentru clasa a IX-a

Matematica – Manual pentru clasa a IX-a



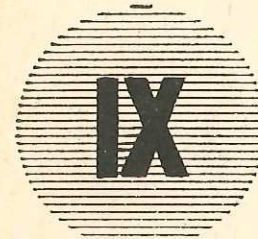
Editura Didactică și Pedagogică, București – 1988



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Augustin Coța  
Mariana Răduțiu

Marta Radó  
Florica Vornicescu



# Matematică

Geometrie și trigonometrie

Manual pentru clasa a IX-a



Editura Didactică și Pedagogică  
București



Manualul a fost elaborat în anul 1981 pe baza programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39438/1980.

*Referenți:* Prof. univ. Gheorghe Galbură  
Prof. univ. Dan Papuc  
Prof. Ioan Maftai  
Prof. Liliana Niculescu  
Prof. Marcel Țena  
Prof. Viorel Zaharia

La definiția manualului s-a ținut seamă și de propunerile unor colective de cadre didactice din orașele Alexandria, Craiova și Timișoara, care au analizat proiectul de manual.

#### Notății folosite în acest manual

Puncte:  $A, B, C, \dots$   
Drepte:  $a, b, c, \dots$   
Segmentul deschis  $(AB)$   
Segmentul închis  $[AB]$   
Semidreapta deschisă  $(AB$   
Semidreapta închisă  $[AB$   
Distanța de la  $A$  la  $B$  }  $AB$   
Lungimea segmentului  $AB$  }  
Planul determinat de o dreaptă  $d$   
și de un punct  $A$  nesituat pe  $d$  ( $dA$ ) sau  $(Ad)$   
Semiplan deschis  $(dA$   
Semiplan închis  $[dA$   
Plane  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Redactor: Prof. Valentin Radu  
Tehnoredactor: Iliea Prosan  
Coperta: Nicolae Sîrbu

## Prefață

În multe țări, printre care și în țara noastră, s-a trecut la predarea axiomatică a geometriei în liceu.

Se pune întrebarea: ce fel de axiome să stea la baza manualului de Geometrie pentru clasa a IX-a?

Ținând seama de dificultățile conceptuale și tehnice legate de axiomatica lui Hilbert, s-au propus și s-au pus în aplicare, în diferite țări, variate sisteme de axiome, mai accesibile pentru elevi. Avem la dispoziție, în limba română: traducerea manualului Alef zero, care prezintă de fapt un model algebric al geometriei (definind succesiv structurile vectoriale, afine și metrice) și care are la bază axiomaticile lui H. Weyl, respectiv J. Dieudonné; traducerea din limba rusă a manualului de geometrie pentru clasele VI—VIII, redactat de un colectiv condus de academicianul A.N. Kolmogorov; traducerea din limba engleză a cărții lui E. Moise „Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior“, în care se expune într-o formă modificată sistemul de axiome propus de G.D. Birkhoff (în 1932) și care stă la baza noilor manuale de geometrie în S.U.A. Menționăm că se folosesc și sisteme de axiome care modelează grupul generat de simetriile axiale plane, de exemplu cel al lui G. Pickert. În axiomatica lui Kolmogorov simetriile axiale ocupă de asemenea un loc central.

Dintre toate acestea am adoptat axiomele lui G.D. Birkhoff în varianta lui E. Moise cu mici modificări, criteriile noastre fiind următoarele:

- a) menținerea unui paralelism între nivelul abstract și cel concret al gândirii;
- b) reflectarea și posibilitatea interpretării cunoștințelor cit mai direct în realitatea fizică;
- c) asigurarea unui grad sporit de accesibilitate;
- d) posibilitatea participării active a elevilor la lecții;
- e) integrarea cunoștințelor de geometrie în ansamblul învățămîntului matematic;
- f) valorificarea tradițiilor învățămîntului de geometrie din țara noastră.

La redactarea manualului ne-am bazat pe unele cunoștințe de logică matematică, mulțimi, funcții, numere reale pe care elevii le au din clasele anterioare sau le obțin în primele lecții de la cursul de algebră.

Simplificarea realizată prin axiomatica lui Birkhoff, ca de altfel și prin aceea a lui Kolmogorov, rezidă în acceptarea distanței dintre noțiunile fundamentale ale geometriei și în atragerea în acest mod a numerelor reale în tratarea geometriei.

Menționăm că în acest mod geometria unidimensională va fi algebrizată, tratarea aspectelor bidimensionale rămînînd sintetică, apropiată de cea tradițională. Capitolul cu privire la puținele elemente de geometrie analitică se leagă organic de tratarea sintetică prin punerea în prim plan a teoremei directe și reciproce a lui Pitagora.



Este clar că pentru începători problema independenței axiomelor se situează pe un ultim plan. Totuși menționăm că axiomele noastre sînt independente, ceea ce nu înseamnă însă că nu pot fi înlocuite cu axiome mai slabe. Din axioma riglei, ultima parte poate fi eliminată, axioma de separare a planului poate fi înlocuită cu axioma lui Pasch, iar axioma L.U.L. poate fi restrînsă la formularea lui Hilbert, dar nu fără a cauza unele complicații tehnice. Măsura unghiurilor poate fi scoasă dintre noțiunile fundamentale și atunci axioma U.3. devine superfluă, dar acest lucru creează dificultăți mai mari.

Credem că este un avantaj că noțiunile delicate de „a fi între“ și „congruență“ au primit definiții directe, proprietățile de ordonare devenind exerciții cu module. De asemenea, s-au eliminat dificultățile legate de aspectul dublu al proprietăților de continuitate (pe dreaptă și în  $\mathbb{R}$ ).

Cu privire la capitolul IV dorim să observăm că instrumentul principal este formula distanței între două puncte. Din această formulă decurge imediat condiția de perpendicularitate, iar de aici ecuația dreptei. Cu aceleași mijloace stabilim formula  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ , fără a fi necesar să se deosebească mai multe cazuri.

În legătură cu folosirea materialelor bibliografice tradiționale trebuie să arătăm că în geometrie avem proprietăți de: incidență (coliniarități și concurențe), congruență, paralelism și ordonare (poziția unui punct pe un segment, pe o semidreaptă, într-un semiplan sau a unei semidrepte în interiorul unui unghi etc.); soluția tradițională a unei probleme mai complexe constă în rezolvarea riguroasă a aspectelor de incidență, congruență și paralelism și admiterea unor situații de ordonare pe bază intuitivă. De regulă, o asemenea soluție poate fi completată (uneori cu ușurință, alteori mai greu, eventual cu analiza mai multor cazuri posibile). Dacă s-a atins un anumit nivel de pregătire și elevul a înțeles legătura dintre intuiție și deducție, și soluția tradițională poate fi acceptată (sub rezerva posibilității de completare).

De aceste considerații se leagă și o observație cu privire la rezolvarea problemelor de geometrie cu un grad de dificultate mai ridicat. După ce problema a fost abordată la nivel concret, în mod intuitiv, pe baza desenului, soluția întrezărită va fi controlată în mod riguros mai întâi sub aspectul proprietăților de incidență, congruență și paralelism (deci în mod tradițional) și abia după aceea în privința ordonărilor. Într-o ultimă fază rezolvarea se redactează la nivel abstract. Acest procedeu se motivează prin faptul că momentul decisiv în găsirea soluției este cel tradițional, în timp ce aspectele de ordonare sînt mai tehnice.

Părțile din text însemnate cu o linie laterală nu sînt obligatorii.

Teoremele trebuie să fie reținute întocmai, chiar dacă demonstrațiile sînt facultative, căci problemele nu pot fi abordate cu succes decît pe temeiul cunoașterii sigure a teoremelor.

Unele dintre exercițiile și problemele din manual au fost preluate din alte manuale, culegeri de probleme și Gazeta matematică, fără a mai indica sursa.

Ne face o deosebită plăcere să mulțumim profesorului universitar Radó Francisc pentru sprijinul acordat și sugestiile sale la elaborarea acestui manual.

Mulțumim de asemenea colectivului de cadre didactice din Timișoara, Alexandria, Craiova, Constanța, Galați, referenților și colegilor pentru observațiile făcute, care ne-au fost de un real folos în definitivarea acestui manual.

Autorii

## Capitolul

### I

## Incidență, ordonare, congruență

### § 1. Studiul axiomatic al geometriei

Cunoștințele de geometrie le obținem în două moduri: *intuitiv* și *deductiv*. Cunoștințele intuitive sînt extrase din observații și experiențe. Din anumite cunoștințe geometrice putem deduce cu ajutorul logicii alte cunoștințe; acestea din urmă sînt obținute pe cale deductivă, prin *demonstrație*, fără a se recurge la intuiție.

În tratarea modernă a geometriei se caută a se prezenta cît mai multe proprietăți pe cale deductivă. Bineînțeles, cunoștințele intuitive nu pot fi eliminate complet, căci geometria prin ele se ancorează în lumea reală, obiectivă. Pe de altă parte noi trebuie să avem la dispoziție de la început o colecție de proprietăți geometrice, din care apoi să putem deduce altele. Această colecție se limitează la un minim de propoziții, care se numesc *axiome*. Axiomele sînt admise fără demonstrație și reprezintă punctul de plecare în tratarea geometriei.

În axiome și în consecințele lor intervin noțiuni de logică și de teoria mulțimilor și noțiunea de număr real, pe care le presupunem cunoscute. Afară de acestea, în axiome apar cîteva noțiuni specifice geometriei, numite *noțiuni geometrice fundamentale*. Aceste noțiuni, extrase din lumea obiectivă, nu primesc în geometrie o definiție directă, însuși sistemul de axiome constituind definiția lor. Celelalte noțiuni geometrice sînt introduse cu ajutorul noțiunilor fundamentale prin definiții directe. Proprietățile geometrice demonstrate cu ajutorul axiomelor și definițiilor se numesc *teoreme* (cele de importanță mai mică sau care pregătesc alte teoreme se mai numesc *leme* sau *propoziții*).

Așadar, la baza unui studiu modern al geometriei stau noțiunile fundamentale și axiomele care exprimă proprietăți ale acestor noțiuni. Există diverse posibilități de a alege din multitudinea de noțiuni și proprietăți geometrice noțiunile fundamentale și axiomele. Noi vom considera următoarele noțiuni fundamentale: *punct, dreaptă, plan, distanță și măsura unghiurilor*\*

\* În axiomatica lui Hilbert noțiunile fundamentale sînt: punctul, dreapta, planul, incidența, relația „între“ și congruența.



În acest manual vom studia *geometria în plan* în care se consideră existența unui singur plan. Axiomele acestei geometrii le grupăm în axiome de incidență, axioma riglei, axioma de separare a planului, axiomele unghiului, axioma de congruență și axioma paralelelor. Treptat, după ce vom introduce cite o axiomă, vom defini imediat unele noțiuni și vom demonstra un număr de teoreme. Se recomandă să reținem care dintre teoreme se bazează numai pe o parte dintre axiome, căci astfel vom înțelege mai profund legătura logică dintre proprietățile geometrice și ne vom însuși esența metodei axiomatică în matematică.

Prima prezentare axiomatică a geometriei a fost dată de Euclid (365—300 î.e.n.), care a servit ca model pentru cărțile de geometrie până la sfârșitul secolului trecut. Axiomatica lui Euclid nu este perfectă; în axiome nu se vorbește de pildă despre proprietăți de ordonare și din această cauză în demonstrații se face uz de intuiție în mod tacit. Primul sistem axiomatic complet al geometriei a fost dat de D. Hilbert în 1899. În acest manual, așa cum am arătat și în prefață, se pleacă de la axiomele lui G.D. Birkhoff\*, într-o formă ușor modificată.

În țara noastră geometria a stat în atenția multor savanți iluștri, care pe lângă cercetările lor originale au realizat și valoroase lucrări didactice, impulsivând învățământul geometric românesc. Dintre ei amintim pe Gheorghe Țițeica (1873—1939), Alexandru Myller (1879—1965), Gheorghe Vrâncianu (1900—1979), care au întemeiat o renumită școală de geometrie diferențială, pe Traian Lalescu (1882—1929), Dimitrie Pompeiu (1873—1954), care odată cu cercetările lor de analiză matematică au adus o remarcabilă contribuție și în geometrie. Cu studii de axiomatica geometriei s-a preocupat renumitul algebrist Dan Barbilian (1895—1961), cunoscut și ca poet sub pseudonimul Ion Barbu. Gazeta Matematică (înființată în 1895) antrenează și stimulează tineretul în studiul geometriei.

## § 2. Axiomele de incidență ale geometriei în plan

Primul grup de axiome se enunță astfel:

I.1. Planul este o mulțime de puncte, pe care o notăm cu  $\mathcal{P}$ .

I.2. Orice dreaptă este o submulțime a lui  $\mathcal{P}$ .

I.3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. În plan există trei puncte care nu sînt situate pe aceeași dreaptă.

I.4. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Dacă  $A$  este un punct și  $d$  o dreaptă, relația  $A \in d$  se citește astfel: punctul  $A$  aparține dreptei  $d$  sau  $A$  este situat pe  $d$  sau  $d$  conține pe  $A$  sau  $d$  trece prin  $A$  sau punctul  $A$  și dreapta  $d$  sînt incidente. Punctele  $A, B, C$  se zic *coliniare*, dacă există o dreaptă  $d$  astfel ca  $A \in d, B \in d, C \in d$ .

Fie  $A$  și  $B$  două puncte diferite. Potrivit axiomei I.4 există o singură dreaptă  $d$  astfel încît  $A \in d$  și  $B \in d$ ; această dreaptă  $d$  va fi notată cu  $AB$ .

**T e o r e m ă.** Două drepte diferite au cel mult un punct comun.

*Demonstrație.* Să presupunem că teorema nu este adevărată. Atunci există două drepte  $d_1, d_2$  și două puncte  $P, Q$  astfel încît  $d_1 \neq d_2, P \neq Q$ ,

\* George David Birkhoff (1884—1944) matematician american.

$P, Q \in d_1, P, Q \in d_2$ . Conform axiomei I.4  $d_1 = PQ, d_2 = PQ$ , deci  $d_1 = d_2$ , în contradicție cu  $d_1 \neq d_2$ . Așadar presupunerea noastră ne-a condus la o contradicție. Rezultă că teorema este adevărată.

*Observație.* Metoda folosită în această demonstrație se numește *metoda reducerii la absurd*. Ea constă în a arăta că negarea concluziei teoremei conduce la o contradicție.

## Exerciții

1. Oricare ar fi dreapta  $d$ , putem găsi în planul  $\mathcal{P}$  un punct nesituat pe  $d$ .

*Rezolvare.* Presupunînd contrariul, toate punctele planului sînt situate pe dreapta  $d$ , ceea ce este în contradicție cu axioma I.3.

2. Dacă  $A, B, C$  sînt trei puncte necoliniare, dreptele  $AB, BC, CA$  sînt distincte două cite două.

3. Presupunînd că există în  $\mathcal{P}$  punctele  $A, B, C, D$  dintre care nu avem trei coliniare, să se arate că dreptele  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  sînt distincte două cite două.

4\*. Să presupunem că  $A, B, C, D, E$  sînt cinci puncte diferite,  $A, B, C$  sînt coliniare și  $D, E \notin AB$ . Dintre dreptele  $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$  cite pot fi distincte cel mult? Arătați o situație în care avem mai puține drepte distincte.

5\*. Pot exista 5 puncte în  $\mathcal{P}$  astfel încît unite două cite două, să obținem exact 7 drepte distincte?

## § 3. Distanța și axioma riglei

Știm din experiență că fixînd o „unitate de măsură“ (un „segment etalon“) și folosînd procedeul de măsurare, fiecărei perechi de puncte putem face să-i corespundă un număr real (nenegativ) unic, „distanța între cele două puncte“.

În tratarea noastră, *distanța este o noțiune fundamentală*. Admitem deci că oricare ar fi punctele  $A, B \in \mathcal{P}$  există un număr real unic, notat cu  $AB$  sau  $d(A, B)$ , care se numește *distanța între  $A$  și  $B$* .

Pentru două puncte oarecare  $A$  și  $B$ , distanța  $AB$  este un număr real unic.

*Observație.* În aplicațiile practice se folosesc mai multe unități de măsură, de exemplu 1 m, 1 km, 1 cm etc.; în aceste cazuri trebuie să se indice unitatea respectivă. Spre deosebire de această situație, la noi distanța este un număr real. De exemplu  $d(A, B) = AB = 5$  și nu 5 cm.

Noțiunea fundamentală este de fapt o funcție  $\delta : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , numită *funcție-distanță*. Într-adevăr, știm că un element oarecare al produsului cartesian  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  este o pereche de puncte  $(A, B)$  și deoarece acesteia îi corespunde numărul real  $AB$  determinat în mod unic, avem o funcție definită pe mulțimea  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  cu valori în  $\mathbb{R}$ .

În clasa a VII-a s-a învățat despre reprezentarea numerelor reale pe o dreaptă, ceea ce permite să definim o funcție bijectivă  $f$  între mulțimea punctelor unei drepte  $d$  și mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$ . Intuitiv, punem în evidență această funcție însemnînd unele puncte de pe dreapta  $d$  și scriînd sub ele numerele care le corespund, de exemplu punctului  $A$  îi corespunde 2, punctului

\* Problemele prevăzute cu steluță se adresează cercurilor de elevi.



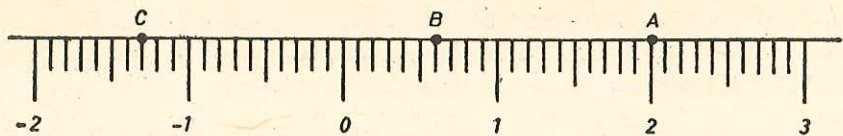


Fig. I.1

$B$  0,6 punctului  $C$   $-1,3$  (fig. I.1). În acest fel dreapta  $d$  apare ca o „riglă gradată infinită”. Cu ajutorul ei putem cunoaște distanța dintre două puncte situate pe dreapta  $d$ . Pe figura I.1 avem  $AB = BA = 1,4$ ,  $AC = CA = 3,3$ ,  $BC = CB = 1,9$ . Observați că distanțele sînt pozitive, în timp ce gradațiile (valorile funcției  $f$ ) pot fi pozitive sau negative.

Prin axioma următoare admitem existența și precizăm proprietățile acestei funcții  $f$ .

**R. (Axioma riglei.)**—Fie  $d$  o dreaptă oarecare și  $A, B \in d$  două puncte distincte. Fiecărui punct  $M \in d$  îi putem face să-i corespundă un număr real unic  $x_M$  astfel încît să fie satisfăcute următoarele condiții:

- 1) Pentru fiecare număr real  $a$  există un singur punct  $P \in d$  cu  $x_P = a$ .
- 2)  $x_A = 0$ ,  $x_B > 0$ .
- 3) Oricare ar fi punctele  $P, Q \in d$ , avem

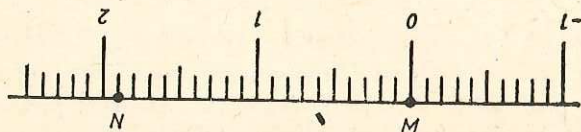
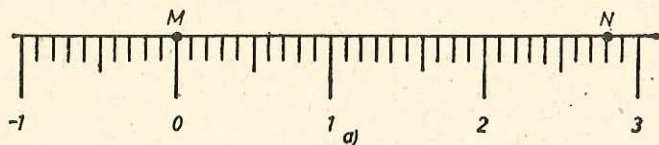
$$(1) \quad PQ = |x_Q - x_P|.$$

Prin această axiomă se mai precizează că funcția  $f: d \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(M) = x_M$ , este determinată în mod unic de condițiile 1), 2) și 3).

**Definiție.** Funcția  $f: d \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *sistem de coordonate pentru dreapta  $d$*  (sau *pe dreapta  $d$* ), punctul  $A$  originea lui, iar numărul  $x_M$  abscisa sau coordonata punctului  $M$  (în sistemul de coordonate considerat).

**Observații.** Condiția 1) arată că funcția  $f: d \rightarrow \mathbb{R}$  este bijectivă.

Condiția 2) arată că oricum s-ar da două puncte  $M$  și  $N$  pe o dreaptă  $d$ , există un sistem de coordonate pentru care abscisa lui  $M$  este 0, iar abscisa lui  $N$  este pozitivă ( $M$  reprezintă originea sistemului de coordonate, iar rolul lui  $N$  este de a preciza un sens de parcurgere pe dreaptă) (fig. I.2, a și b). Dacă s-ar permite și modificarea „unității de măsură” am putea



b)  
Fig. I.2

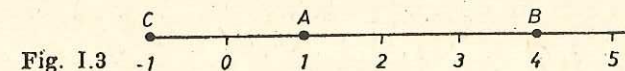


Fig. I.3

asocia punctului dat  $N$  abscisa 1, lucru care în teoria noastră nu este posibil, deoarece — precum s-a precizat — funcția distanță este fixată.

Condiția 3) indică o legătură între distanțe și abscise. Dacă cunoaștem abscisele a două puncte, putem calcula distanța dintre ele cu ajutorul formulei (1). De exemplu, în cazul figurii I.3  $x_A = 1$ ,  $x_B = 4$  și  $AB = 3 = |x_B - x_A|$ ; sau  $x_A = 1$ ,  $x_C = -1$  și  $AC = 2 = |x_C - x_A| = |-1 - 1| = |-2|$ .

**Teoremă.** Oricare ar fi punctele  $P$  și  $Q$ , au loc următoarele proprietăți:

- (2)  $PQ \geq 0$ ,
- (3)  $PQ = 0 \Leftrightarrow P = Q$ ,
- (4)  $PQ = QP$ .

Oricare ar fi punctele  $P, Q, R$  pe o dreaptă  $d$ , avem

$$(5) \quad PR \leq PQ + QR.$$

**Demonstrație.** Fie  $d$  o dreaptă ce conține punctele date  $P$  și  $Q$ . Conform axiomei riglei există un sistem de coordonate pe  $d$  și avem

$$PQ = |x_Q - x_P| \geq 0;$$

$$PQ = |x_Q - x_P| = |x_P - x_Q| = QP;$$

$$PQ = 0 \Leftrightarrow |x_Q - x_P| = 0 \Leftrightarrow x_P = x_Q \Leftrightarrow P = Q,$$

ultima echivalență rezultînd din condiția 1) (sau altfel spus din faptul că funcția  $f: d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(M) = x_M$  este injectivă). În cazul  $R \in d$  putem scrie

$$\begin{aligned} PR &= |x_R - x_P| = |(x_R - x_Q) + (x_Q - x_P)| \leq \\ &\leq |x_R - x_Q| + |x_Q - x_P| = QR + PQ. \end{aligned}$$

**Observație.** Deoarece la baza noțiunii de distanță stă procedeul de măsurare, s-ar părea că ar fi fost mai natural să definim distanța ca un număr pozitiv, și nu ca un număr real. Atragem din nou atenția asupra faptului că în axiome postulăm cît se poate de puțin; presupunînd numai  $PQ \in \mathbb{R}$ , din teoremă rezultă  $PQ \geq 0$ .

### Exerciții

1. Fie  $AB = 4$ . Există un sistem de coordonate pe  $AB$  cu  $x_A = 5$ ,  $x_B = 3$ ?
2.  $x_A = -2$ ,  $x_B = 3$ ,  $x_C = 10$ . Să se afle  $AB$ ,  $AC$  și  $BC$ .
3. Într-un sistem de coordonate pe dreapta  $AB$ ,  $x_A = 3$ ,  $AB = 5$ ,  $x_B < 0$ . a) Să se afle  $x_B$ . b) Să se determine  $x_C$  știind că  $C \in AB$ ,  $BC = 7$  și  $AC < BC$ .

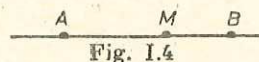


4\*.  $x_A = -2$ ,  $x_B = 5$ ; să se determine punctele  $M, N \in AB$ , știind că  $AM = 4$ ,  $MN = 1$ ,  $NB = 2$ .

5\*.  $x_A = 1$ ,  $x_B = 4$ . Să se afle  $M, N \in AB$ , știind că  $AM = 1$ ,  $MN = 4$ ,  $NB = 2$ .

#### § 4. Segmente, semidrepte și unghiuri

Intuitiv, pe figura I.4 punctul  $M$  este „între  $A$  și  $B$ “. Dăm definiția acestei noțiuni.



**Definiții.** Fie  $A$  și  $B$  puncte diferite. Zicem că punctul  $M$  este între  $A$  și  $B$  (sau  $M$  separă punctele  $A$  și  $B$ ) dacă

$$(1) \quad A, M, B \text{ sînt puncte coliniare diferite}$$

și

$$(2) \quad AM + MB = AB.$$

Prin *segmentul deschis*  $(AB)$  înțelegem mulțimea punctelor între  $A$  și  $B$ , iar *segmentul închis*  $[AB]$  este mulțimea  $(AB) \cup \{A, B\}$ .

Așadar

$$(3) \quad [AB] = \{M \in AB \mid AM + MB = AB\},$$

$$(4) \quad (AB) = [AB] - \{A, B\}.$$

Notățiile  $(AB)$  și  $[AB]$  pot fi folosite și în cazul  $A = B$ , dar atunci nu înseamnă segmente:  $(AA) = \emptyset$ ,  $[AA] = \{A\}$ .

Prin *lungimea* segmentului  $[AB]$  se înțelege distanța  $AB$ .

#### Exerciții

1. Arătați că egalitatea (2) este satisfăcută dacă  $M = A$  și dacă  $M = B$ .

2. Demonstrați: dacă  $C$  este între  $A$  și  $B$ , atunci  $C$  este și între  $B$  și  $A$ .

*Indicație.* Se admit condițiile (1) și (2). Trebuie să demonstrăm (1) și (2) cu literele  $A$  și  $B$  schimbate între ele. Se ține seama de formula (4) de la § 3.

3. Să se arate că  $[AB] = [BA]$ .

4. Fie  $C \in AB$ ,  $x_A = 2$ ,  $x_B = 10$ ,  $x_C = 4$ .  $B$  este între  $A$  și  $C$ ? dar  $C$  între  $A$  și  $B$ ? dar  $A$  între  $A$  și  $B$ ?

*Indicație.* Deoarece  $AB = |x_B - x_A| = 8$ ,  $BC = |4 - 10| = 6$  și  $AC = |4 - 2| = 2$ , condiția (2) nu este satisfăcută, deci  $B$  nu este între  $A$  și  $C$ .  $C$  este între  $A$  și  $B$ . Punctul  $A$  nu este între  $A$  și  $B$ , căci condiția (1) nu este satisfăcută.

Segmentele pot fi caracterizate cu ajutorul absciselor:

**Teorema 1.** Oricare ar fi sistemul de coordonate pe dreapta  $AB$ , dacă  $x_A < x_B$ , avem

$$(5) \quad [AB] = \{M \in AB \mid x_A \leq x_M \leq x_B\},$$

$$(6) \quad (AB) = \{M \in AB \mid x_A < x_M < x_B\},$$

iar dacă  $x_A > x_B$

$$(7) \quad [AB] = \{M \in AB \mid x_B \leq x_M \leq x_A\},$$

$$(8) \quad (AB) = \{M \in AB \mid x_B < x_M < x_A\}.$$

*Demonstrație.* Fie  $x_A < x_B$ . Deoarece (5) este o egalitate între două mulțimi, va trebui să luăm un element din membrul I și să arătăm că el aparține și membrului II, și invers.

Fie  $P \in [AB]$ . Ținând cont de (2) avem  $AP + PB = AB$ , prin urmare

$$(9) \quad |x_P - x_A| + |x_B - x_P| = x_B - x_A,$$

(căci  $x_B > x_A$ ). Considerăm următoarele cazuri:

a)  $x_P < x_A$ ; atunci din  $x_A < x_B$  deducem  $x_P < x_B$  și egalitatea (9) devine

$$x_A - x_P + x_B - x_P = x_B - x_A.$$

Reducînd termenii asemenea, obținem  $2x_A = 2x_P$ , deci  $x_A = x_P$ , în contradicție cu  $x_P < x_A$ . Așadar, acest caz nu este posibil.

b)  $x_P > x_B$ ; acum relația (9) se scrie

$$x_P - x_A + x_P - x_B = x_B - x_A$$

sau  $x_P = x_B$ . Nici acest caz nu este posibil.

Rezultă că  $x_A \leq x_P \leq x_B$ , deci  $P \in \{M \in AB \mid x_A \leq x_M \leq x_B\}$ .

Fie acum  $M$  un punct din membrul II al egalității (5). Atunci  $M \in AB$  și

$$(10) \quad x_A \leq x_M \leq x_B.$$

Din (10) rezultă  $x_M - x_A \geq 0$  și  $x_B - x_M \geq 0$ , deci

$$\begin{aligned} AM + MB &= |x_M - x_A| + |x_B - x_M| = x_M - x_A + x_B - x_M = \\ &= x_B - x_A = |x_B - x_A| = AB. \end{aligned}$$

Prin urmare  $M \in [AB]$ .

Ținînd seama de (4), formula (6) rezultă imediat din (5). Formulele (7) și (8) se obțin din (5) și (6) observînd că  $[AB] = [BA]$  și  $(AB) = (BA)$ .



**Corolar.**  $Punctul M \in AB$  este între  $A$  și  $B$  dacă și numai dacă

$$(11) \quad x_A < x_M < x_B \text{ sau } x_B < x_M < x_A.$$

**Exerciții**

5. Care dintre următoarele relații sînt adevărate, dacă punctele  $A, B, C$  au abscisele 8, 2, 7:

$$A \in [BC], B \in (AC), C \in (AB), C \in [AB]?$$

6. Punctele coliniare  $A, B, C$  au abscisele 6, -3, -2. Unul dintre punctele  $A, B, C$  este situat între celelalte două?

Afirmațiile teoremei următoare, numite *proprietăți de ordonare* ale punctelor pe o dreaptă, sînt evidente sub aspect intuitiv. Totuși trebuie să le demonstrăm, deoarece numai axiomele sînt admise fără demonstrație.

**Teorema 2.** Dacă  $B$  este între  $A$  și  $C$ , atunci  $A$  nu este între  $B$  și  $C$  și nici  $C$  între  $A$  și  $B$ .

*Demonstrație.* Alegem un sistem de coordonate astfel ca  $x_B = 0, x_C > 0$ .

Din relația (11) rezultă că  $x_A < 0$ . Deoarece  $x_B < x_C$ ,  $A$  între  $B$  și  $C$  ne-ar conduce la  $0 = x_B < x_A < x_C$ , adică  $x_A > 0$ , în contradicție cu  $x_A < 0$ . Faptul că  $C$  nu este între  $A$  și  $B$  se arată în mod analog.

**Exerciții**

7.  $M \in AB, A \notin [MB], B \notin [MA] \Rightarrow M \in (AB)$ .
8.  $M \in AB, A \notin (MB), B \notin (MA) \Rightarrow M \in [AB]$ .
9.  $C \in (AB), D \in (AC) \Rightarrow D \in (AB)$ .
10.  $C \in (AB) \Rightarrow (AC) \subset (AB)$ .
11.  $C, D \in (AB) \Rightarrow [CD] \subset (AB)$ .
12.  $C \in (AB), B \in (CD) \Rightarrow C, B \in (AD)$ .
13. Orice segment conține o infinitate de puncte.
14. Fie  $m$  un număr real  $> 1$ . Arătați că există un punct  $M \in (AB)$  astfel încît  $AM = \frac{AB}{m}$ .

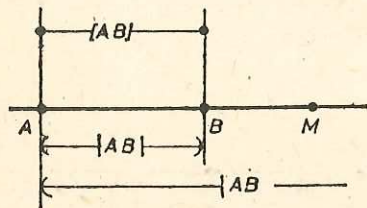


Fig. 1.5

**Definiție.** Fiind date punctele distincte  $A$  și  $B$ , *semidreapta închisă*  $[AB$  și *semidreapta deschisă*  $(AB$  se definesc astfel (fig. 1.5):

$$[AB \stackrel{\text{def}}{=} \{M \mid M \in [AB] \text{ sau } B \in (AM)\},$$

$$(AB \stackrel{\text{def}}{=} [AB - \{A\}.$$

Dreapta  $AB$  este *suportul* semidreptelor  $[AB$  și  $(AB$ , iar punctul  $A$  *originea* lor.

Dacă  $B \in (AC)$ , semidreptele  $[BA$  și  $[BC$  se zic *opuse*, la fel  $(BA$  și  $(BC$ . Semidreptele pot fi precizate cu ajutorul absciselor:

**Teorema 3.** Oricare ar fi sistemul de coordonate pe dreapta  $AB$ , dacă  $x_A < x_B$

$$(12) \quad [AB = \{M \in AB \mid x_M \geq x_A\}$$

$$(13) \quad (AB = \{M \in AB \mid x_M > x_A\},$$

iar dacă  $x_A > x_B$

$$(14) \quad [AB = \{M \in AB \mid x_M \leq x_A\}$$

$$(15) \quad (AB = \{M \in AB \mid x_M < x_A\}.$$

*Demonstrație.* Presupunind  $x_A < x_B$ , din teorema 1 obținem

$$M \in [AB] \Leftrightarrow x_A \leq x_M \leq x_B,$$

$$B \in (AM) \Leftrightarrow x_A < x_B < x_M.$$

Așadar  $M \in [AB \Leftrightarrow x_A \leq x_M \leq x_B$  sau  $x_B < x_M$ , ceea ce se scrie mai simplu:  $M \in [AB \Leftrightarrow x_A \leq x_M$ , deci are loc egalitatea (12). Egalitățile (13), (14) și (15) rezultă în mod analog.

**Corolar.** Dacă  $C \in (AB$ , atunci  $(AB = (AC$ ; în notația  $(AB$ , punctul  $B$  poate fi înlocuit cu oricare punct al semidreptei  $(AB$ .

**Definiție.** Un *unghi* este reuniunea a două semidrepte închise avînd aceeași origine (fig. 1.6).

Dacă cele două semidrepte sînt  $h = [AB$  și  $k = [AC$ , unghiul va fi notat  $\widehat{hk}$  sau  $\widehat{BAC}$  sau  $\widehat{A}$  (dacă nu e pericol de confuzie). Punctul  $A$  se numește *vîrf*ul, iar semidreptele  $h, k$  se numesc *laturile* unghiului  $\widehat{hk}$ .

Dacă  $h = k, \widehat{hk}$  se numește *unghi nul*, iar dacă  $h$  și  $k$  sînt semidrepte opuse, atunci  $\widehat{hk}$  este un *unghi alungit*. Un unghi care nu este nici nul, nici alungit, se numește *unghi propriu*.

**Definiție.** Dacă punctele  $A, B, C$  nu sînt coliniare, mulțimea

$$ABC \stackrel{\text{def}}{=} [AB] \cup [BC] \cup [CA]$$

se numește *triunghi*. Punctele  $A, B, C$  sînt *vîrfurile*, segmentele  $[AB], [BC], [CA]$  sînt *laturile*, iar unghiurile  $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$  sînt *unghiurile* triunghiului.

Dacă două (respectiv trei) laturi au lungimi egale, triunghiul se numește *isoscel* (respectiv *echilateral*).

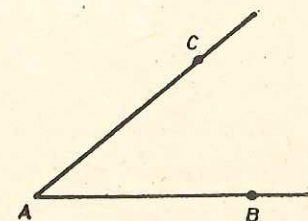


Fig. 1.6



### Exerciții

15. Fie  $x_A = 2$ ,  $x_B = 10$ ,  $x_C = 14$ . Care dintre următoarele egalități sînt adevărate:  $[AB] = [AC]$ ,  $(AB) = (AC)$ ,  $(BA) = (BC)$ ,  $(CA) = (CB)$ ;  $(AC) = (BC)$ ?
16. Fie  $x_A = -1$ ,  $x_B = 3$ ,  $x_C = 5$ ,  $x_D = 8$ . Să se arate că  $B \in (AC)$ ,  $[BC] \subset (AD)$ ,  $B \in (AD)$ ,  $D \notin (CA)$ .
17. Se dau  $x_A = -3$ ,  $x_B = 0$ ,  $x_C = 5$ ,  $x_D = 9$ . Să se afle  $(CA) \cap [BD]$  și  $[CA] \cap (BD)$ .
18. Să se arate:  $[AB] \subset [AB]$  ( $A \neq B$ ).
19. Dacă  $A \neq B$ , atunci: a)  $(AB) \cap (BA) = (AB)$ , b)  $[AB] \cap [BA] = [AB]$ , c)  $(AB) \cup (BA) = AB$ .

### § 5. Axioma de separare a planului

**Definiție.** Fie  $d$  o dreaptă și  $A, B$  două puncte ale planului  $\mathcal{P}$ , nesituate pe  $d$ . Dacă segmentul  $[AB]$  are un punct comun cu  $d$ , spunem că dreapta  $d$  *separă* punctele  $A$  și  $B$  sau că  $A$  și  $B$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $d$ . În caz contrar se spune că  $A$  și  $B$  sînt de aceeași parte a lui  $d$ . Pe figura 1.7 dreapta  $d$  separă punctele  $A$  și  $B$ , de asemenea punctele  $A$  și  $C$ , dar nu separă pe  $B$  și  $C$ . Expresiile „ $d$  separă  $A$  și  $B$ ” și „ $d$  nu separă  $A$  și  $B$ ” au sens numai dacă  $A$  și  $B$  nu se află pe  $d$ .

Admitem următoarea *axiomă de separare a planului*:

**S.** Fie  $d$  o dreaptă ce separă punctele  $A$  și  $B$ . Dacă  $d$  nu separă punctele  $B$  și  $C$ , atunci  $d$  separă  $A$  și  $C$  (fig. 1.7).

**Observație.** Pentru puncte coliniare  $A, B, C$  afirmația S face parte din teorema 2 de la § 4 (punctul 5). Așadar este suficient să se considere în axiomă numai puncte necoliniare. Sub această formă mai slabă axiomă S se numește *axiomă lui Pasch*. Pentru a simplifica referirile, am cuprins în axiomă ambele situații.

### Exerciții

1\*. Oricare ar fi dreapta  $d$  și punctul  $A$  nesituat pe  $d$ , arătați că există un punct  $B \in \mathcal{P} - d$  astfel ca  $d$  să nu separe  $A$  și  $B$  și există un punct  $C$  astfel ca  $d$  să separe  $A$  și  $C$ .

**Rezolvare.** Luăm un punct  $P$  pe dreapta  $d$ . Știm că există  $B$  și  $C$  astfel ca  $A \in (PB)$  și  $P \in (CA)$  (§ 4, teorema 2,3). Atunci  $d$  nu separă pe  $A, B$  și separă pe  $A, C$ .

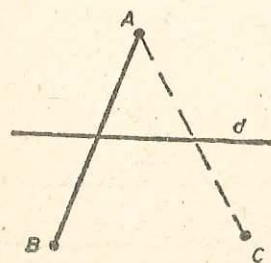


Fig. 1.7

2. Dacă dreapta  $d$  nu separă  $A$  și  $B$  și nici  $B$  și  $C$ , atunci  $d$  nu separă punctele  $A$  și  $C$ .

**Rezolvare.** Într-adevăr, în caz contrar  $d$  ar separa  $A$  și  $C$  și atunci din axiomă S ar rezulta că  $d$  separă  $A$  și  $B$  (căci nu separă  $C$  și  $B$ ), în contradicție cu ipoteza.

**Teorema 1.** Dacă o dreaptă  $d$  separă atât punctele  $B$  și  $A$  cît și punctele  $A$  și  $C$ , atunci  $d$  nu separă  $B$  și  $C$  (fig. 1.7).

**Demonstrație.** Dacă punctele  $A, B, C$  sînt coliniare, teorema revine la punctul 4) din teorema 2, § 4. Vom admite deci că punctele  $A, B, C$  nu sînt coliniare. Să presupunem că teorema nu e adevărată. Atunci există pe dreapta  $d$  punctele  $M, N, P$  astfel încît  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  și  $P \in (BC)$  (fig. 1.8). Cum punctele  $M, N, P$  sînt coliniare, unul din aceste puncte va fi situat între celelalte două (teorema 2, § 4 punctul 1). Pentru a face o alegere, să presupunem că  $M$  este între  $N$  și  $P$ .

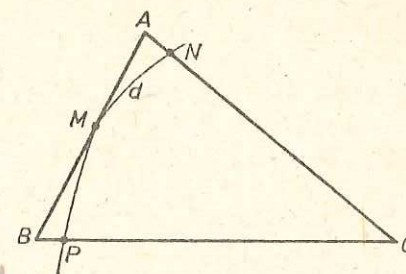


Fig. 1.8

Așadar dreapta  $AB$  separă  $N$  și  $P$ ; pe de altă parte  $AB$  nu separă  $N$  și  $C$  (căci conform teoremei 2.2), § 4 din  $N \in (AC)$  rezultă că  $A$  nu este între  $N$  și  $C$ ), deci din axiomă S deducem că  $AB$  separă punctele  $P$  și  $C$ , adică  $B \in (PC)$ . Dar avem și  $P \in (BC)$  în contradicție cu punctul 2) al teoremei amintite.

**Corolar.** O dreaptă care intersectează un triunghi, dar nu trece printr-un vîrf al său, intersectează exact două din laturile triunghiului.

### Exerciții

3. Dacă dreapta  $d$  separă  $A$  și  $B$  și de asemenea  $C$  și  $D$ , dar nu separă  $A$  și  $C$ , atunci  $d$  nu separă punctele  $B$  și  $D$ .

4. Fie  $A, B, C, D$  puncte distincte. Dacă  $A$  și  $B$  sînt de aceeași parte a lui  $CD$ , putem afirma că  $C$  și  $D$  sînt de aceeași parte a lui  $AB$ ?

**Definiție.** Fie  $A$  un punct nesituat pe dreapta  $d$  (fig. 1.9). Considerăm toate punctele  $M$  de aceeași parte a lui  $d$ , ca și  $A$ . Mulțimea formată din aceste puncte și punctul  $A$  se notează cu  $(dA)$  și se numește *semiplan (deschis)*. Spunem că dreapta  $d$  este *frontiera* lui și că semiplanul  $(dA)$  este *limitat* de dreapta  $d$ .

Avem

$$(1) \quad (dA = \{M \in \mathcal{P} \mid [AM] \cap d = \emptyset\}.$$

Într-adevăr, pentru  $M \neq A$ , relația  $[AM] \cap d = \emptyset$  înseamnă că  $A$  și  $M$  sînt de aceeași parte a lui  $d$ ; iar pentru  $M = A$  relația  $[AA] \cap d = \emptyset$  este verificată, căci  $[AA] = \{A\} \not\subset d$ .

În notația  $(dA)$  punctul  $A$  poate fi înlocuit cu orice punct al semiplanului  $(dA)$ :

$$(2) \quad B \in (dA) \Rightarrow (dA = (dB).$$

Într-adevăr, cum  $[AB] \cap d = \emptyset$ , exercițiul 2 ne arată că  $[AM] \cap d = \emptyset$  și  $[BM] \cap d = \emptyset$  sînt condiții echivalente, deci mulțimile de puncte, care le verifică, coincid.

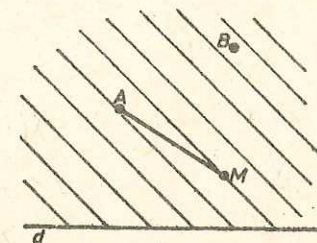


Fig. 1.9



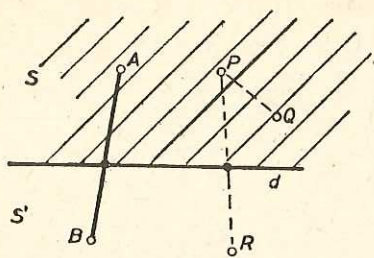


Fig. I.10

**Teorema 2. (Teorema de separare a planului).** Fie dat în planul  $\mathcal{P}$  o dreaptă oarecare  $d$ , au loc următoarele proprietăți:

- 1) Există exact două semiplane limitate de dreapta  $d$ , pe care le notăm cu  $S$  și  $S'$ .
- 2)  $\mathcal{P} - d = S \cup S'$  și  $S \cap S' = \emptyset$ .
- 3) Dacă  $P, Q \in S$  sau  $P, Q \in S'$ , segmentul  $(PQ)$  nu taie dreapta  $d$ . Dacă  $P \in S$

și  $R \in S'$ , segmentul  $(PR)$  și dreapta  $d$  au un punct comun (fig. I.10).

Semiplanele  $S$  și  $S'$  se numesc *opuse*.

*Demonstrație.* Luăm un punct  $A$  nesituat pe  $d$ ; știm că există un punct  $B$  astfel ca  $d$  să separe  $A$  și  $B$  (exerc. 1). Să considerăm semiplanele  $S = (dA$  și  $S' = (dB$ . Luând  $M \in \mathcal{P} - d$ , să arătăm că  $M \in S \cup S'$ . Dacă  $M \in S$  afirmația este evidentă. Dacă  $M \notin S$  dreapta  $d$  separă  $A$  și  $M$ , deci conform teoremei 1 dreapta  $d$  nu separă  $B$  și  $M$ , adică  $M \in S'$ . Așadar  $\mathcal{P} - d \subset S \cup S'$  și deoarece incluziunea inversă este evidentă,  $\mathcal{P} - d = S \cup S'$ .

Să presupunem că  $P \in S \cap S'$ ; atunci  $d$  nu separă  $A$  și  $P$  și nici  $B$  și  $P$ . Cum  $d$  separă  $A$  și  $B$  și nu separă  $A$  și  $P$  deducem din axioma  $S$  că  $d$  separă  $B$  și  $P$ . Contradicția dovedește că nu există nici un punct în  $S \cap S'$  și astfel am demonstrat afirmația 2).

Un semiplan oarecare  $S^*$  limitat de dreapta  $d$  se scrie sub forma  $S^* = (dQ$ , unde  $Q \in \mathcal{P} - d$ . Am demonstrat mai sus că  $Q \in S$ , sau  $Q \in S'$ . În primul caz  $(dQ = (dA = S$  (vezi (2)), iar în al doilea caz  $(dQ = (dB = S'$ . Așadar  $S^* = S$  sau  $S^* = S'$  și afirmația 1) este demonstrată.

Fie  $P, Q \in S$ . Atunci  $S = (dP$  și din definiția semiplanului urmează că  $[PQ] \cap d = \emptyset$ . Dacă  $P \in S$ ,  $R \in S'$ , avem  $S = (dP$  și  $[PR] \cap d \neq \emptyset$ , deci și afirmația 3) este demonstrată.

**Definiție.** Reuniunea unui semiplan cu frontiera sa se numește *semiplan închis*. Simbolul  $[dA \stackrel{\text{def}}{=} (dA \cup d$  se citește „semiplanul închis limitat de dreapta  $d$  și conținând punctul  $A$ “.

**Exerciții**

5. Dacă punctele  $A$  și  $B$  aparțin semiplanului  $S$  (deschis sau închis), atunci  $[AB] \subset S$ .

6\*. Dacă  $A \notin d$  și  $B \in d$ , atunci  $(BA) \subset (dA$  (fig. I.11).

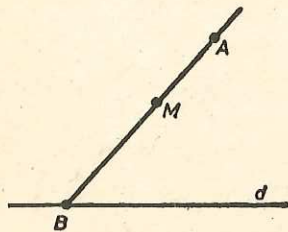


Fig. I.11

*Indicație.* Se va arăta:  $M \in (BA) \Rightarrow B \notin [AM] \Rightarrow M \in (dA$ .

7\*. Dacă  $A \notin d$  și  $B \in d$ , atunci  $(BA) \subset (dA$ .

*Indicație.* Se ia un punct  $M \in (BA$  și se disting cazurile:

- 1°  $M \in (BA)$ ; atunci  $M \in (dA$  conform exercițiului 6;
- 2°  $M = A$ ; 3°  $A \in (BM)$ .

8\*. Să se arate că intersecția dintre o dreaptă  $d$  și un semiplan deschis este sau dreapta  $d$  sau o semidreaptă deschisă sau mulțimea vidă.

9\*. Dacă  $M$  este un punct pe latura  $[AB]$  a unui triunghi  $ABC$ , iar  $P$  un punct ce se găsește de aceeași parte a dreptei  $AB$ , ca și  $C$ , atunci semidreapta  $(MP$  intersectează latura  $[BC]$  sau  $[CA]$  a triunghiului (fig. I.12).

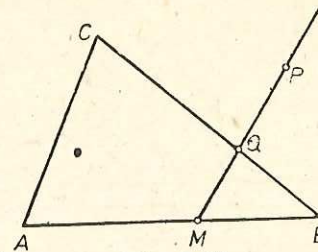


Fig. I.12

*Indicație.* Conform axiomei  $S$ , dreapta  $MP$  taie segmentul  $[BC]$  sau  $[CA]$  într-un punct  $Q$ . Trebuie să se demonstreze că punctul  $Q$  este situat pe *semidreapta*  $(MP$ . În acest scop se va arăta că  $P$  și  $Q$  sînt de aceeași parte a lui  $AB$ , ceea ce implică  $[PQ] \cap AB = \emptyset$ .

10. Fie  $ABC$  un triunghi,  $B' \in (AC)$  și  $C' \in (AB)$ . Să se arate că segmentele  $(BB')$  și  $(CC')$  au un punct comun.

11. Folosind notațiile exercițiului 10, fie  $D \in (BC)$ . Să se arate că  $(AD) \cap (B'C') \neq \emptyset$ .

**§ 6. Mulțimi convexe**

**Definiție.** Se numește *mulțime convexă* o mulțime  $\mathcal{M}$  de puncte, care are următoarea proprietate: dacă  $P, Q$  sînt două puncte distincte oarecare ale mulțimii  $\mathcal{M}$  (fig. I.13), atunci  $\mathcal{M}$  conține toate punctele segmentului  $(PQ)$ :

$$(1) \quad P, Q \in \mathcal{M} \Rightarrow (PQ) \subset \mathcal{M}.$$

Mulțimea vidă și mulțimile formate dintr-un singur punct se consideră convexe, deoarece pentru ele nu se pune nici o condiție.

O mulțime formată din două puncte nu este convexă. Mulțimea din figura I.13 este convexă, cea din figura I.14 nu este convexă.

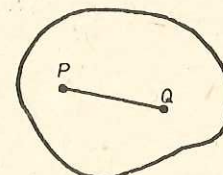


Fig. I.13

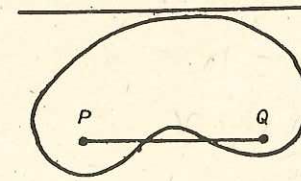


Fig. I.14

**Exerciții**

1. Arătați că planul  $\mathcal{P}$  și orice dreaptă sînt mulțimi convexe.
2. Orice segment și orice semidreaptă sînt mulțimi convexe.

*Indicație.* Fie de exemplu  $(AB)$  un segment deschis. Dacă  $P$  și  $Q \in (AB)$ , atunci  $(PQ) \subset (AB)$  (§ 4, exerc. 11).

3. Arătați că semiplanele deschise și semiplanele închise sînt mulțimi convexe.

Din mulțimi convexe putem forma alte mulțimi convexe cu ajutorul teoremei următoare.



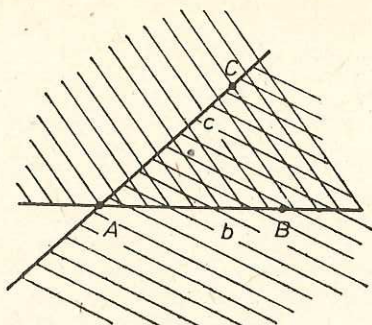


Fig. I.15

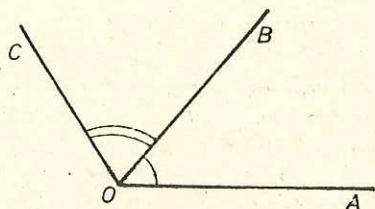


Fig. I.16

**Teorema 1. Orice intersecție de mulțimi convexe este convexă.**

*Demonstrație.* Demonstrăm teorema pentru două mulțimi convexe  $M_1$  și  $M_2$  (în cazul mai multor mulțimi convexe se raționează la fel). Trebuie să arătăm că  $M_1 \cap M_2$  este o mulțime convexă. Fie  $P, Q \in M_1 \cap M_2$ . Atunci  $P, Q \in M_1$  și  $P, Q \in M_2$ . Cum  $M_1$  și  $M_2$  sînt mulțimi convexe,  $(PQ) \subset M_1$  și  $(PQ) \subset M_2$ . Dar atunci  $(PQ) \subset M_1 \cap M_2$ .

*Definiție.* Interiorul unghiului propriu  $\widehat{BAC}$  este mulțimea de puncte  $\text{Int } \widehat{BAC} \stackrel{\text{def}}{=} (bC \cap cB)$ , unde  $b = AB$ ,  $c = AC$  (fig. I.15).

$\text{Int } \widehat{BAC}$  fiind intersecția a două semiplane deschise, adică a două mulțimi convexe, este o mulțime convexă.

*Definiții.* Două unghiuri proprii cu același vîrf și cu o latură comună se numesc *adiacente*, dacă interioarele lor nu au nici un punct comun (unghiurile  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{BOC}$  pe figurile I.16 și 17).

Unghiurile  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{BOC}$  se numesc *unghiuri adiacente suplementare* dacă  $(OA$  și  $OC$  sînt semidrepte opuse (fig. I.18).

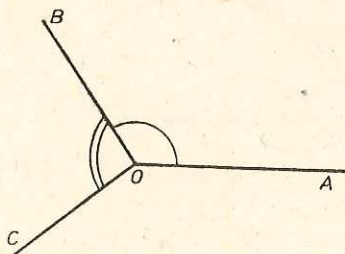


Fig. I.17

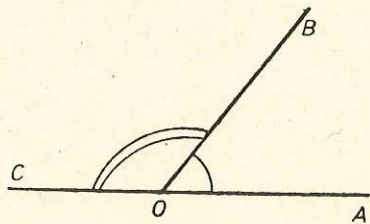


Fig. I.18

**Exerciții**

4\*. Fie  $BAC$  un unghi propriu. Să se arate:

a)  $(BC) \subset \text{Int } \widehat{BAC}$ ; b)  $D \in \text{Int } \widehat{BAC} \Rightarrow (AD) \subset \text{Int } \widehat{BAC}$ .

5\*. Interiorul unui triunghi  $ABC$  se definește astfel

$$\text{Int } ABC \stackrel{\text{def}}{=} (aA \cap bB \cap cC,$$

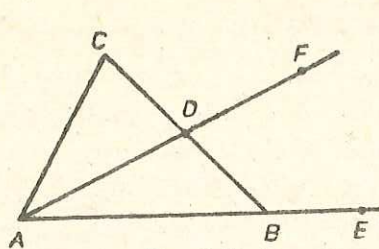


Fig. I.19

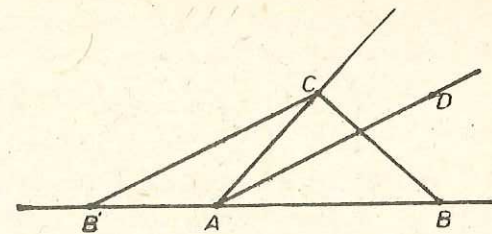


Fig. I.20

unde  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ . Să se arate:

1)  $\text{Int } ABC$  este o mulțime convexă.

2)  $\text{Int } ABC = \text{Int } \widehat{ABC} \cap \text{Int } \widehat{BCA} \cap \text{Int } \widehat{CAB}$ .

3)  $\text{Int } ABC = (aA \cap \text{Int } \widehat{BAC}$ .

6. Fie  $ABC$  un triunghi și  $D \in (BC)$ . Se iau punctele  $E$  și  $F$  în așa fel ca  $B \in (AE)$  și  $D \in (AF)$  (fig. I.19). Să se arate ca  $F \in \text{Int } \widehat{CBE}$ .

*Indicație.* Se va arăta că  $C, F$  sînt de aceeași parte a lui  $BE$  și  $E, F$  de aceeași parte a lui  $BC$ .

7\*. Fi  $\widehat{BAC}$  un unghi propriu și  $D \in \text{Int } \widehat{BAC}$ . Să se arate că  $\text{Int } \widehat{BAD} \subset \text{Int } \widehat{BAC}$ .

**Teorema 2. (Teorema transversalei.)** Dacă punctul  $D$  aparține interiorului unghiului propriu  $\widehat{BAC}$ , atunci semidreapta  $(AD$  și segmentul  $(BC)$  au un punct comun:

$$(AD \cap (BC) \neq \emptyset.$$

*Demonstrație.* Fie  $(AB'$  semidreapta opusă lui  $(AB$  (fig. I.20). Semidreapta  $(AD$  intersectează segmentul  $(B'C)$  sau segmentul  $(BC)$  (§ 5, exerc. 9). Dar  $(AD$  nu poate intersecta pe  $(B'C)$ , deoarece aceste mulțimi sînt de o parte și de alta a dreptei  $AC$  (§ 5, exerc. 6 și 7).

**Exerciții**

8. Fie  $\widehat{BAC}$  un unghi propriu și  $D \in \text{Int } \widehat{BAC}$ . Să se arate că punctele  $B$  și  $C$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $AD$ .

*Indicație.* Se aplică teorema transversalei.

9\*. Fie punctele  $B$  și  $C$  situate de aceeași parte a dreptei  $OA$ . Să se arate că

$$C \in \text{Int } \widehat{AOB} \text{ sau } B \in \text{Int } \widehat{AOC} \text{ sau } \widehat{AOB} = \widehat{AOC}.$$

*Indicație.* E suficient să considerăm cazul  $B \notin \text{Int } \widehat{AOC}$  și  $B \notin (OC$ , căci altfel afirmația este evidentă. Dacă am avea  $(AB) \cap (OC) = \emptyset$ , ar rezulta că  $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$  sau  $B \in (OC$ , deci  $A$  și  $B$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $OC$ . Așadar  $(AB) \cap (OC) = \{P\}$ . Arătați că  $P \in (OC$ , de unde va rezulta  $(OP) \subset \text{Int } \widehat{AOB}$  și  $C \in \text{Int } \widehat{AOB}$ .



10. Dacă punctul  $P$  aparține interiorului triunghiului  $ABC$ , atunci dreapta  $AP$  intersectează segmentul  $[BC]$  într-un punct  $A'$  și  $P \in (AA')$ .

11\*. Dacă dreapta  $d$  trece printr-un punct  $P$ , situat în interiorul triunghiului  $ABC$ , atunci dreapta  $d$  intersectează triunghiul. În câte puncte?

12\*. Fie  $A$  și  $C$  de o parte și de alta a dreptei  $BB'$ , iar  $O \in (BB')$ ,  $O \notin AC$ . Să se arate că dintre semidreptele  $(OB$  și  $(OB'$  exact una este situată în interiorul unghiului  $\widehat{AOC}$ .

13\*. Fie  $P$  un punct în interiorul unghiului propriu  $\widehat{AOB}$ , iar  $Q$  un punct în exteriorul lui (adică  $Q \notin \text{Int } \widehat{AOB} \cup [OA \cup [OB]$ ). Să se arate că segmentul  $(PQ)$  intersectează o latură a unghiului  $\widehat{AOB}$ .

**Definiție.** O linie poligonală este o mulțime de forma

$$L = [P_1P_2] \cup [P_2P_3] \cup \dots \cup [P_nP_{n+1}].$$

Punctele  $P_1, \dots, P_{n+1}$  se numesc *vîrfurile* liniei  $L$ , iar segmentele  $[P_1P_2], \dots, [P_nP_{n+1}]$  se numesc *laturile* ei; laturile  $[P_{k-1}P_k]$  și  $[P_kP_{k+1}]$  se zic *vecine* (fig. I.21, a).

Linia poligonală  $L$  se numește *închisă*, dacă  $P_1 = P_{n+1}$  (fig. I.21, b și c) și *simplu închisă* dacă în plus oricare două laturi nevecine nu au punct comun și două laturi vecine au suporturi diferite. O linie poligonală simplă închisă se mai numește *poligon*. Linia poligonală din figura I.21, b) nu este poligon; *un poligon nu se autointersectează!* Un poligon cu trei laturi este un triunghi. Un poligon cu 4, 5, 6, ... laturi se numește *patrulater*, *pentagon*, *exagon* etc. Poligonul cu vîrfurile  $P_1, P_2, \dots, P_n$  va fi notat cu  $P_1P_2\dots P_n$ . Segmentele  $[P_iP_k]$ , care nu sînt laturi, se numesc *diagonale*.

Poligonul  $P_1P_2\dots P_n$  se numește *poligon convex*, dacă, pentru fiecare latură  $[P_kP_{k+1}]$ , toate vîrfurile diferite de  $P_k$  și  $P_{k+1}$  se găsesc de aceeași parte a dreptei  $P_kP_{k+1}$  (pentru  $k = n, P_{n+1} = P_1$ ) (fig. I.21, c).

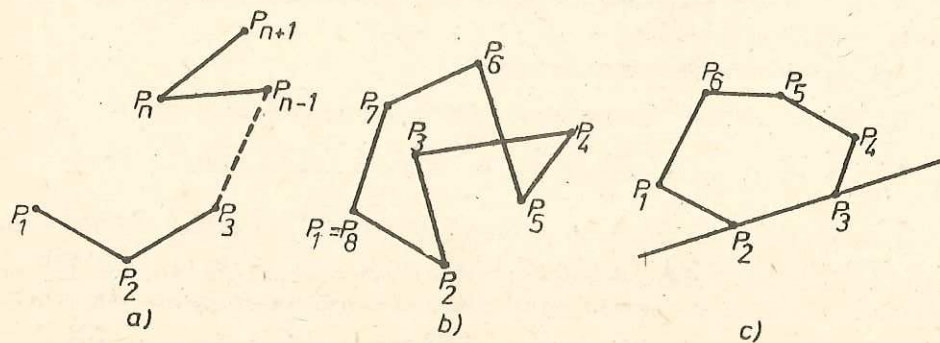


Fig. I.21

Un poligon convex  $P_1P_2\dots P_n$  nu este o mulțime convexă, dar *interiorul* său (care se definește precum urmează) este o mulțime convexă. *Interiorul* unui poligon convex este intersecția semiplanelor deschise limitate de suporturile laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe laturile respective (fig. I.22): dacă notăm  $d_k = P_kP_{k+1}$  pentru  $k=1, \dots, n-1$  și  $d_n = P_nP_1$ , atunci  $\text{Int } P_1P_2\dots P_n = (d_1P_n \cap (d_2P_1 \cap \dots \cap (d_nP_n$ .

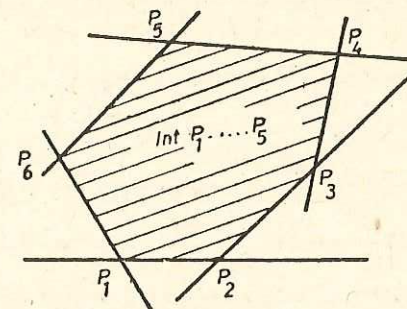


Fig. I.22

Reuniunea dintre un poligon convex  $P_1P_2\dots P_n$  și interiorul său se numește *suprafață poligonală convexă*, care se notează prin  $[P_1P_2\dots P_n]$

$$[P_1P_2\dots P_n] = P_1P_2\dots P_n \cup \text{Int } P_1P_2\dots P_n.$$

În cazul unui triunghi  $ABC$  mulțimea  $[ABC]$  se numește *suprafață triunghiulară*.

### Exerciții

14. Să se arate că diagonalele  $[AC]$  și  $[BD]$  ale unui patrulater convex  $ABCD$  au un punct comun (fig. I.23).

15. Dacă diagonalele  $[AC]$  și  $[BD]$  ale patrulaterului  $ABCD$  au un punct comun, atunci patrulaterul este convex.

16\*. Intersecția semiplanelor închise, limitate de suporturile laturilor unui poligon convex  $P$  coincide cu mulțimea  $\text{Int } P \cup P$ .

17\*. Reuniunea unui poligon convex cu interiorul său este o mulțime convexă.

18\*. Fie  $P_1P_2\dots P_{n+1}$  o linie poligonală. Dacă  $P_1$  și  $P_{n+1}$  sînt de o parte și de alta a unei drepte  $d$ , atunci această dreaptă intersectează linia poligonală.

19\*. Dacă o dreaptă  $d$  nu este suportul unei laturi a unui poligon convex, atunci  $d$  are cel mult 2 puncte comune cu poligonul dat.

20\*. Dacă  $P_1P_2\dots P_n$  este un poligon convex, unde  $n \geq 4$ , atunci  $P_2P_3\dots P_n$  este de asemenea un poligon convex.

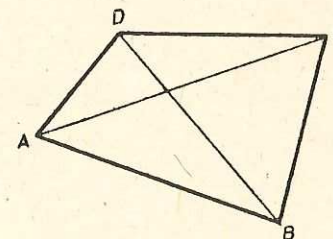


Fig. I.23

### § 7. Axiomele unghiului

Vom nota cu  $\mathcal{U}$  mulțimea unghiurilor.

Măsurînd unghiurile cu raportorul (fig. I.24), fiecărui unghi  $i$  se asociază un număr real. Astfel se obține o funcție definită pe  $\mathcal{U}$  cu valori în intervalul închis  $[0, 180]$ .



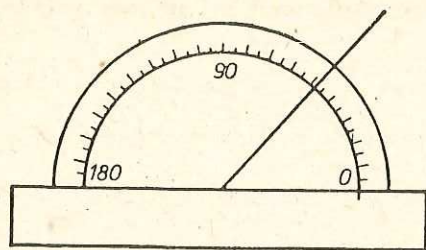


Fig. I.24

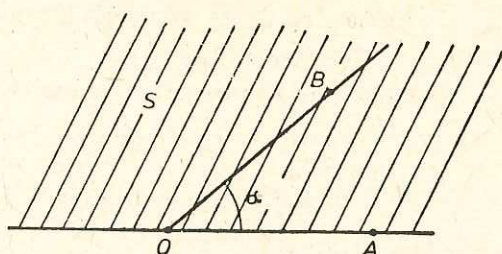


Fig. I.25

Ultima noțiune fundamentală, pe care o introducem în geometrie, este inspirată de procedeul de măsurare cu raportorul.

Admitem existența unei funcții  $m: \mathcal{U} \rightarrow [0, 180]$ , numită *funcția măsura unghiurilor (în grade)*, care satisface următoarele axiome (evidente sub aspect intuitiv):

U.1.  $m(\widehat{AOB}) = 0$  dacă și numai dacă  $\widehat{AOB}$  este un unghi nul;  $m(\widehat{AOB}) = 180$  dacă și numai dacă  $\widehat{AOB}$  este un unghi alungit.

U.2 (Axioma de construcție a unghiurilor.) Fie  $(OA$  o semidreaptă și  $S$  un semiplan limitat de dreapta  $OA$ . Pentru orice număr  $\alpha \in (0, 180)$  există o semidreaptă unică  $(OB$ , inclusă în  $S$ , astfel ca  $m(\widehat{AOB}) = \alpha$  (fig. I.25).

Din U.2 rezultă imediat

**Teorema 1.** Dacă  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOB'})$  și punctele  $B, B'$  sînt de aceeași parte a dreptei  $OA$ , atunci  $(OB = (OB'$  (deci  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{AOB'}$ ) (fig. I.26).

U.3. (Axioma adunării unghiurilor.) Dacă  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{BOC}$  sînt unghiuri adiacente cu  $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$  sau unghiuri adiacente suplementare (fig. I.27, a) respectiv b)), atunci

$$(1) \quad m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC}).$$

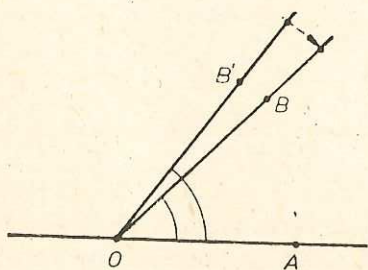


Fig. I.26

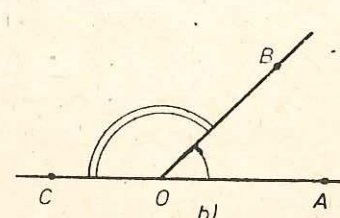
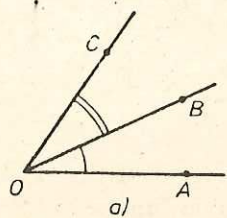


Fig. I.27

În particular, suma măsurilor unghiurilor a două unghiuri adiacente suplementare este egală cu 180.

Deoarece în capitolul III se mai introduce o măsură (în radiani) pentru unghiuri, pentru a distinge cele două măsuri, în loc de  $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ ,  $\alpha \in [0, 180]$  vom adopta notația  $m(\widehat{AOB}) = \alpha^\circ$ . Menționăm că în numeroase cărți se utilizează și notația  $\widehat{AOB} = \alpha^\circ$ .

**Definiții.** Două unghiuri se numesc *suplementare* dacă suma măsurilor lor este egală cu 180°. Atunci fiecare este un *suplement* al celuilalt.

Două unghiuri cu același vîrf se numesc *opuse la vîrf* dacă laturile lor sînt semidrepte opuse ( $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{COD}$ , pe fig. I.28).

**Teorema 2.** Două unghiuri opuse la vîrf au măsuri egale.

*Demonstrație.* Fie  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{COD}$  două unghiuri opuse la vîrf. Avem

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{AOD}) = 180^\circ,$$

$$m(\widehat{COD}) + m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{COB}) = 180^\circ,$$

deci  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$ .

Teorema 2 are și o reciprocă:

**Teorema 3.** Fie  $O \in (AA')$  și  $B, B'$  două puncte de o parte și de alta a dreptei  $AA'$ . Dacă  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$ , atunci semidreptele  $(OB$  și  $(OB'$  sînt opuse (fig. I.29).

*Demonstrație.* Fie  $(OC$  semidreapta opusă lui  $(OB'$ . Conform teoremei 2,  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{A'OB'})$ ; dar  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$ , deci  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOB})$ . Din teorema 1 obținem că  $(OB = (OC$ , așadar  $(OB$  și  $(OB'$  sînt opuse.

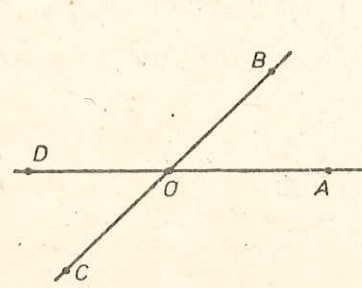


Fig. I.28

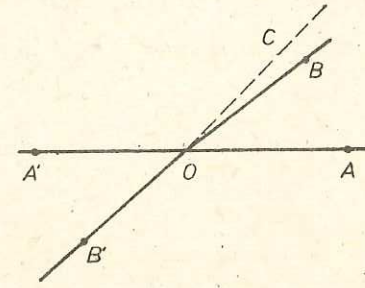


Fig. I.29



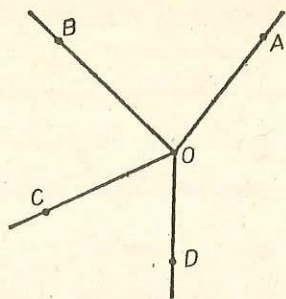


Fig. I.30

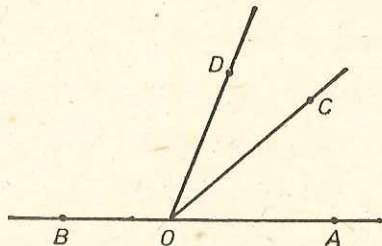


Fig. I.31

### Exerciții

1. Fie  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ$ . Rezultă că  $A, O, C$  sînt coliniare?
2. Care dintre următoarele egalități sînt valabile în cazul figurii I.30:
  - a)  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA})$ , b)  $m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) = m(\widehat{BOD})$ ,
  - c)  $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOA}) = m(\widehat{COA})$ ?
3. Știind că  $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$ ,  $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$  și  $m(\widehat{AOB}) = 23^\circ$ , să se afle  $m(\widehat{BOC})$ .
4. Pe figura I.31  $m(\widehat{COD}) = 30^\circ$ . Să se afle  $m(\widehat{AOC})$  și  $m(\widehat{DOB})$ , știind că  $m(\widehat{DOB}) = 2 m(\widehat{AOC})$ .
5. Fie  $\widehat{AOC}$  un unghi propriu,  $A$  și  $C$  de o parte și de alta a dreptei  $OB$  și  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) < 180^\circ$ ; atunci  $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC})$ .

*Indicație.* Fie  $(OB')$  opusă cu  $(OB)$ . Presupunind că  $(OB \not\subset \text{Int } \widehat{AOC})$ , avem  $(OB' \subset \text{Int } \widehat{AOC})$  (§ 6, exerc. 12), deci  $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) = m(\widehat{AOC}) < 180^\circ$ , din care se va deduce o contradicție.

## § 8. Proprietăți de congruență

**Definiție.** Spunem că segmentele  $(AB)$  și  $(A'B')$  sînt *congruente* și scriem  $(AB) \equiv (A'B')$  dacă  $AB = A'B'$ . Analog, unghiurile  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{A'O'B'}$  se numesc *congruente* și se notează  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$  dacă  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'O'B'})$ .

**Teorema 1.** Au loc următoarele proprietăți:

- (1)  $\forall (AB) : (AB) \equiv (AB)$  (reflexivitate),
- (2)  $(AB) \equiv (CD) \Rightarrow (CD) \equiv (AB)$  (simetrie),
- (3)  $(AB) \equiv (CD), (CD) \equiv (EF) \Rightarrow (AB) \equiv (EF)$  (tranzitivitate).



Fig. I.32

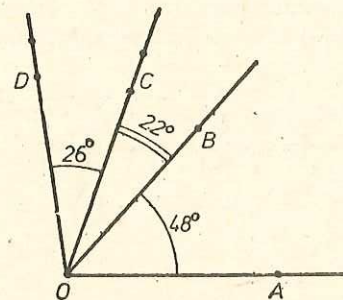


Fig. I.33

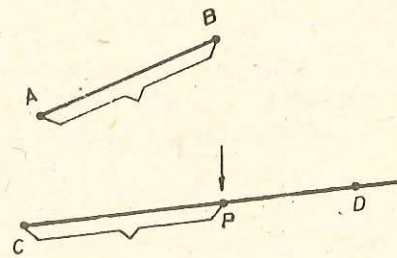


Fig. I.34

*Demonstrație.* Arătăm proprietatea (3). Din ipoteză rezultă  $AB = CD$  și  $CD = EF$ , deci  $AB = EF$ , ceea ce înseamnă că  $(AB) \equiv (EF)$ . Proprietățile (1) și (2) se arată la fel.

Enunțați, în analogie cu teorema 1, o teoremă pentru unghiuri!

### Exerciții

1. Punctele  $A, B, C, D, E$ , situate pe o dreaptă, au abscisele  $x_A = 1, x_B = 4, x_C = 9, x_D = 11, x_E = 12$ . Găsiți segmente congruente determinate de aceste puncte (fig. I.32).
2. Găsiți unghiuri congruente pe figura I.33.

**Teorema 2. (Teorema de construcție a unui segment.)** Fie  $(AB)$  un segment și  $(CD)$  o semidreaptă. Există un singur punct  $P \in (CD)$  astfel ca  $(AB) \equiv (CP)$  (fig. I.34).

*Demonstrație.* Alegem sistemul de coordonate pentru dreapta  $CD$  astfel ca  $x_C = 0$  și  $x_D > 0$ . Punctul  $P$  trebuie să satisfacă două condiții:

- a)  $P \in (CD)$ , ceea ce înseamnă  $x_P > 0$  (vezi § 4 formula (13)), și b)  $CP = AB$ , adică  $|x_P - 0| = AB$ . Așadar  $x_P = AB$  și astfel punctul  $P$  este determinat în mod unic.

**Teorema 3. (Teorema de adunare și de scădere a segmentelor.)** Fie  $B \in (AC)$  și  $B' \in (A'C')$  (fig. I.35). Atunci

- (4)  $(AB) \equiv (A'B'), (BC) \equiv (B'C') \Rightarrow (AC) \equiv (A'C')$ ,
- (5)  $(AC) \equiv (A'C'), (AB) \equiv (A'B') \Rightarrow (BC) \equiv (B'C')$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $B$  este între  $A$  și  $C$  și  $B'$  între  $A'$  și  $C'$

- (6)  $AC = AB + BC$  și  $A'C' = A'B' + B'C'$ .

Din ipotezele implicației (4) rezultă

$$AB = A'B' \text{ și } BC = B'C'.$$

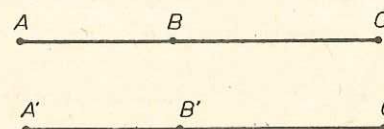


Fig. I.35



Folosind egalitățile (6) obținem că  $AC = A'C'$ , deci  $(AC) \equiv (A'C')$ . — Din ipotezele lui (5) deducem  $AC = A'C'$ ,  $AB = A'B'$ , ceea ce împreună cu (6) ne dă  $BC = B'C'$ , adică  $(BC) \equiv (B'C')$ .

*Observație.* Dacă  $B \in (AC)$ , segmentul  $(AC)$  este numit uneori „suma“ segmentelor  $(AB)$  și  $(BC)$ , iar segmentul  $(BC)$  „diferența“ lui  $(AB)$  și  $(AC)$ . De aici provine denumirea teoremei 3.

**Definiție.** Spunem că segmentul  $(AB)$  este *mai mare* decât segmentul  $(CD)$  și scriem  $(AB) > (CD)$ , dacă  $AB > CD$ . În acest caz se mai spune că  $(CD)$  este *mai mic* decât  $(AB)$  ( $(CD) < (AB)$ ).

### Exerciții

3. Arătați că  $(AB) > (CD)$  dacă și numai dacă există un punct  $M \in (AB)$  astfel ca  $(AM) \equiv (CD)$ .

4\*.  $(AB) > (CD)$ ,  $(CD) > (EF) \Rightarrow (AB) > (EF)$ .

5\*.  $(AB) \equiv (A'B')$ ,  $(CD) \equiv (C'D')$ ,  $(AB) > (CD) \Rightarrow (A'B') > (C'D')$ .

6\*. Fie  $B \in (AC)$  și  $B' \in (A'C')$ . Arătați că atunci a)  $(AB) > (A'B')$ ,  $(BC) > (B'C')$  implică  $(AC) > (A'C')$ .

b)  $(AC) > (A'C')$ ,  $(BC) < (B'C')$  implică  $(AB) > (A'B')$ .

**Definiție.** Spunem că punctul  $M$  este *mijlocul* segmentului  $(AB)$  dacă  $M \in AB$  și  $(AM) \equiv (MB)$ .

*Observație.* Dacă un obiect matematic se definește printr-o condiție, atunci se pun în mod necesar două întrebări: 1) condiția poate fi satisfăcută? (adică există cel puțin un asemenea obiect?), și 2) câte obiecte satisfac condiția? Definiția respectivă este corectă, dacă condiția este satisfăcută de un singur obiect. Vom demonstra acum că definiția de mai sus este corectă.

**Teorema 4.** Orice segment  $(AB)$  are un singur mijloc  $M$  și  $M \in (AB)$ .

*Demonstrație.* Fie  $x_A = a$ ,  $x_B = b$  și  $a < b$ . Punctul  $M \in AB$  este mijlocul lui  $(AB)$  dacă și numai dacă  $AM = MB$ , ceea ce este echivalent cu

$$|x_M - a| = |b - x_M|.$$

Deosebim cazurile: 1)  $x_M < a$ , 2)  $x_M > b$ , 3)  $a \leq x_M \leq b$ . Cazul  $x_M < a$  ne conduce la  $a - x_M = b - x_M$  și  $a = b$ , în contradicție cu  $a < b$ ; la fel, nici cazul  $x_M > b$  nu este posibil. Prin urmare numai cazul 3) este posibil. Dar atunci  $x_M - a = b - x_M$ , de unde

$$(7) \quad x_M = \frac{a+b}{2}.$$

Așadar abscisa  $x_M$  este determinată în mod unic, și împreună cu ea și punctul  $M$ , mijlocul lui  $(AB)$ . Cum

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

rezultă  $M \in (AB)$ .

### Exerciții

7. Fie  $C$  mijlocul segmentului  $(AB)$  și  $D$  un punct cu proprietatea că  $B$  este mijlocul lui  $(CD)$ . Să se arate că  $B \in (AD)$ . Să se calculeze  $x_C$  și  $x_D$ , știind că  $x_A = 2$ ,  $x_B = 7$ .

8. Se consideră trei puncte coliniare  $A, B, C$  și mijloacele  $D, E, F$  ale segmentelor  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(AC)$ . Să se arate că  $(DE)$  și  $(BF)$  au același mijloc.

Din axioma U.2 rezultă imediat

**Teorema 5.** (Teorema de construcție a unui unghi.) Fie  $(OA)$  o semidreaptă,  $S$  un semiplan limitat de dreapta  $OA$  și  $\widehat{hk}$  un unghi propriu oarecare. Atunci există o semidreaptă unică  $(OB)$ , inclusă în  $S$ , astfel ca  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{hk}$ .

**Teorema 6.** (Teorema de adunare și scădere a unghiurilor.) Fie  $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB})$ ,  $(O'C' \subset \text{Int } \widehat{A'O'B'})$  (fig. I. 36). Atunci

$$(8) \quad \widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}, \widehat{COB} \equiv \widehat{C'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'},$$

$$(9) \quad \widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}, \widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'} \Rightarrow \widehat{COB} \equiv \widehat{C'O'B'}.$$

*Demonstrație.* Folosind axioma U.3 putem scrie

$$(10) \quad \begin{aligned} m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) &= m(\widehat{AOB}) \\ m(\widehat{A'O'C'}) + m(\widehat{C'O'B'}) &= m(\widehat{A'O'B'}). \end{aligned}$$

Din ipotezele implicației (8) rezultă  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{A'O'C'})$ ,  $m(\widehat{COB}) = m(\widehat{C'O'B'})$ , ceea ce împreună cu (10) ne conduce la  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'O'B'})$ , deci  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ . Analog, din ipotezele lui (9) și egalitățile (10) obținem  $m(\widehat{COB}) = m(\widehat{C'O'B'})$ ; de unde  $\widehat{COB} \equiv \widehat{C'O'B'}$ .

*Observație.* Dacă  $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB})$ , unghiul  $\widehat{AOB}$  este uneori numit „suma“ unghiurilor  $\widehat{AOC}$  și  $\widehat{COB}$ , iar unghiul  $\widehat{COB}$  este numit „diferența“ unghiurilor  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{AOC}$ .

**Definiție.** Spunem că unghiul  $\widehat{hk}$  este *mai mare* decât  $\widehat{lm}$  și scriem  $\widehat{hk} > \widehat{lm}$  dacă  $m(\widehat{hk}) > m(\widehat{lm})$ .

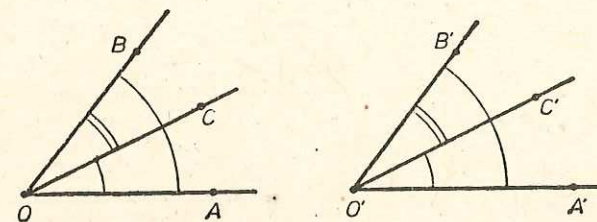


Fig. I.36



**Teorema 7.** (Teorema semidreptei interioare unui unghi.)

- a) Dacă semidreapta  $(OB$  este interioară unghiului  $\widehat{AOC}$  ( $OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$ ), atunci  $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$ .  
 b) Dacă punctele  $B$  și  $C$  sînt situate de aceeași parte a dreptei  $OA$  și  $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$ , atunci  $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$  (fig. I.37).

*Demonstrație.* a) Dacă  $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$ , atunci folosind axioma adunării unghiurilor, avem  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC})$ . Deci  $m(\widehat{AOB}) < m(\widehat{AOC})$  de unde  $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$ .

b) Conform exercitiului 9 de la § 6, unul dintre următoarele cazuri are loc:  $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ , sau  $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC}$ , sau  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{AOC}$ . Este clar că ultimul caz nu este posibil. Nici primul nu este posibil, deoarece din  $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB}$  rezultă în virtutea axiomei U.3:  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) > m(\widehat{AOC})$ . Dar atunci  $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$ , în contradicție cu ipoteza.

**Exerciții**

9. Arătați:  $\widehat{hk} > \widehat{k'k'}$ ,  $\widehat{k'k'} > \widehat{k''k''} \Rightarrow \widehat{hk} > \widehat{k''k''}$ .  
 10.  $\widehat{hk} \equiv \widehat{k'k'}$ ,  $\widehat{lm} \equiv \widehat{l'm'}$ ,  $\widehat{hk} > \widehat{lm} \Rightarrow \widehat{k'k'} > \widehat{l'm'}$ .  
 11. Fie  $C \in \text{Int } \widehat{AOB}$ ,  $C' \in \text{Int } \widehat{A'O'B'}$ . Să se arate:  
 a)  $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'}$ ,  $\widehat{COB} > \widehat{C'O'B'}$   $\Rightarrow$   $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$ .  
 b)  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ ,  $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'}$   $\Rightarrow$   $\widehat{COB} < \widehat{C'O'B'}$ .  
 12. Arătați că  $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$  dacă și numai dacă există o semidreaptă  $(OM \subset \text{Int } \widehat{AOB}$  astfel încît  $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$ .

**Definiție.** Semidreapta  $[OC$  se numește *bisectoarea* unghiului propriu  $\widehat{AOB}$  dacă  $(OC \subset \text{Int } \widehat{AOB}$  și  $\widehat{AOC} \equiv \widehat{COB}$  (fig. I.38).

**Teorema 8.** Orice unghi propriu are o singură bisectoare.

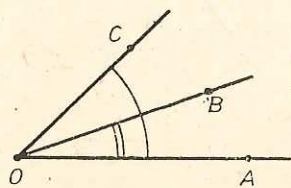


Fig. I.37

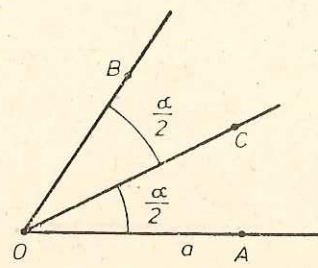


Fig. I.38

*Demonstrație.* Fie  $\widehat{AOB}$  un unghi dat,  $m(\widehat{AOB}) = \alpha^\circ$ ,  $0 < \alpha^\circ < 180^\circ$  și  $a = AO$  (fig. I.38). Să presupunem că  $[OC$  este o bisectoare a unghiului  $\widehat{AOB}$ ; atunci  $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = m(\widehat{AOB}) = \alpha^\circ$  și  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB})$ , deci  $m(\widehat{AOC}) = \frac{\alpha^\circ}{2}$ . Ținînd seama și de faptul că  $(OC \subset (aB$ , din axioma U.2 deducem că semidreapta  $(OC$  este determinată în mod unic. Așadar, din ipoteza că  $\widehat{AOB}$  are o bisectoare rezultă că aceasta este unică. Rămîne să arătăm existența bisectoarei. Construim conform axiomei U.2 semidreapta  $(OC'$  astfel ca  $m(\widehat{AOC'}) = \frac{\alpha^\circ}{2}$  și  $B, C'$  să fie de aceeași parte a dreptei  $OA$ . Din teorema 7 b rezultă că  $(OC' \subset \text{Int } \widehat{AOB}$  și astfel  $m(\widehat{AOC'}) + m(\widehat{C'OB}) = m(\widehat{AOB})$ ; deci  $m(\widehat{C'OB}) = \frac{\alpha^\circ}{2}$ . Prin urmare  $[OC'$  este bisectoarea lui  $\widehat{AOB}$ .

**Definiție.** Se numește *unghi drept* orice unghi, care este congruent cu un suplement al său (fig. I.39).

Din axioma U.3 rezultă imediat:

*Un unghi este drept dacă și numai dacă măsura lui este  $90^\circ$ . De aici obținem: Un unghi congruent cu un unghi drept este un unghi drept.*

**Definiții.** Spunem că semidreptele  $[OA$  și  $[OB$  sînt *perpendiculare* și scriem  $[OA \perp [OB$  dacă  $\widehat{AOB}$  este un unghi drept. În acest caz vom spune că  $OA$  și  $OB$  sînt *drepte perpendiculare* sau *drepte ortogonale* și vom scrie  $OA \perp OB$  (și  $[OA] \perp [OB]$ ).

Un unghi propriu mai mic (mare) decît un unghi drept se numește *ascuțit* (*obtus*).

Demonstrați cu ajutorul axiomei U.2:

**Teorema 9.** Fie  $d$  o dreaptă și  $O \in d$ . Prin punctul  $O$  trece o singură dreaptă perpendiculară pe  $d$ .

(Existența și unicitatea perpendicularei ridicate pe o dreaptă, într-un punct al ei.)

**Exerciții**

13. Dacă  $\widehat{hk} \equiv \widehat{lm}$ , atunci un suplement al lui  $\widehat{hk}$  este congruent cu orice suplement al lui  $\widehat{lm}$ .

14. Fie  $[OC$  bisectoarea unghiului propriu  $\widehat{AOB}$ , iar  $[OD, [OE$  bisectoarele unghiurilor  $\widehat{AOC}$  și  $\widehat{COB}$ . Să se arate că  $[OC$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{DOE}$ .

15. Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt semidrepte opuse.

16. Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare sînt perpendiculare.

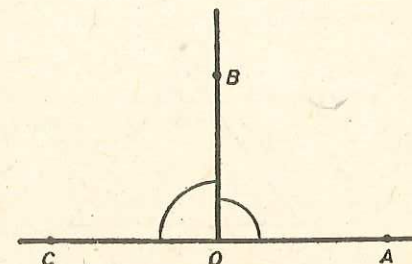


Fig. I.39



17. Dacă semidreptele  $(OA)$ ,  $(OB)$ ,  $(OC)$  sînt distincte două cîte două și  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COA}$ , atunci bisectoarea unghiului  $\widehat{BOC}$  este semidreapta opusă cu  $[OA]$ .

18. Fie  $[OA] \perp [OA']$  și  $[OB] \perp [OB']$ . Să se arate că unghiurile  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{A'OB'}$  sînt congruente sau suplementare.

## § 9. Congruența triunghiurilor

**Definiție.** Fie  $ABC$  și  $A'B'C'$  două triunghiuri. Dacă

$$(1) \quad (AB) \equiv (A'B'), (AC) \equiv (A'C'), (BC) \equiv (B'C'),$$

$$(2) \quad \hat{A} \equiv \hat{A'}, \hat{B} \equiv \hat{B'}, \hat{C} \equiv \hat{C'},$$

atunci spunem că există o *congruență* între triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  și scriem

$$(3) \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

**Observație.** Relația  $\triangle EFG \equiv \triangle LMN$  implică  $\hat{E} \equiv \hat{L}$ ,  $\hat{F} \equiv \hat{M}$ ,  $\hat{G} \equiv \hat{N}$ , deci nu este indiferentă ordinea în care sînt scrise vîrfurile triunghiurilor. Pentru a scoate în evidență acest lucru, folosim simbolul  $\triangle$  care atrage atenția asupra faptului că ordinea literelor este determinată. Perechile de vîrfuri  $E$  și  $L$ ,  $F$  și  $M$ ,  $G$  și  $N$  se numesc vîrfuri *omoloage* (sau *correspondente*). Perechile de laturi congruente  $[EF]$  și  $[LM]$ ;  $[EG]$  și  $[LN]$ ;  $[FG]$  și  $[MN]$  se numesc *laturi omoloage*.

**Exemple.** Pe figura I.40, între triunghiurile  $LMN$  și  $XYZ$  există congruența  $\triangle LMN \equiv \triangle XYZ$ ; între  $PQR$  și  $LMN$  nu există nici o congruență; între  $PQR$  și  $UVW$  avem chiar două congruențe:  $\triangle PQR \equiv \triangle UVW$  și  $\triangle PQR \equiv \triangle UWV$ . Comparînd triunghiul  $PQR$  cu el însuși, pe lângă congruența trivială  $\triangle PQR \equiv \triangle PQR$  observăm și  $\triangle PQR \equiv \triangle PRQ$ .

**Definiție.** Triunghiurile  $ABC$  și  $DEF$  se numesc *congruente* dacă există (cel puțin) o congruență între ele.

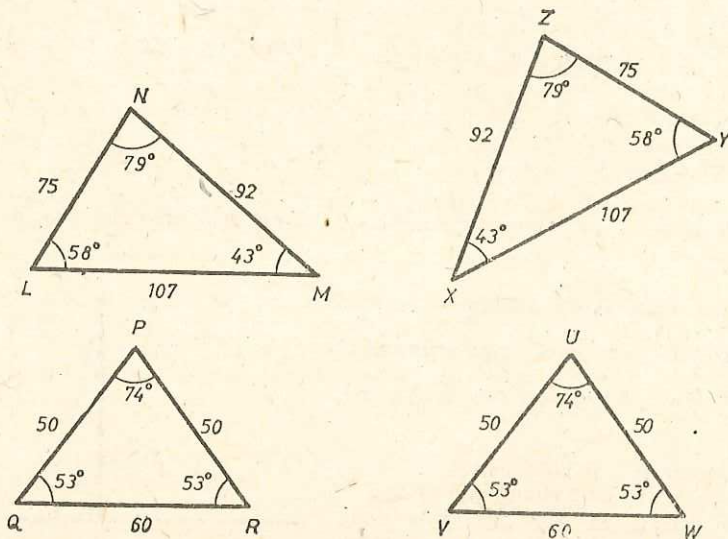


Fig. I.40

## Exerciții

1. Care dintre următoarele relații sînt adevărate în cazul figurii I.41:

$$\triangle ADE \equiv \triangle BCE, \quad \triangle ADE \equiv \triangle EDC,$$

$$\triangle ADE \equiv \triangle DAE, \quad \triangle ADE \equiv \triangle EDA?$$

2. Aflați și alte perechi de triunghiuri congruente pe figura I.41.

3. Demonstrați

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \text{ și } \triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C'' \Rightarrow \\ \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''.$$

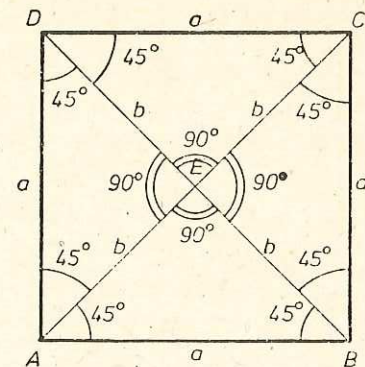


Fig. I.41

Admitem următoarea *axiomă de congruență*:

**I.U.L.** Fie  $ABC$  și  $A'B'C'$  două triunghiuri (fig. I.42). Dacă

$$(5) \quad (AB) \equiv (A'B'), (AC) \equiv (A'C') \text{ și } \hat{A} \equiv \hat{A}'$$

atunci

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

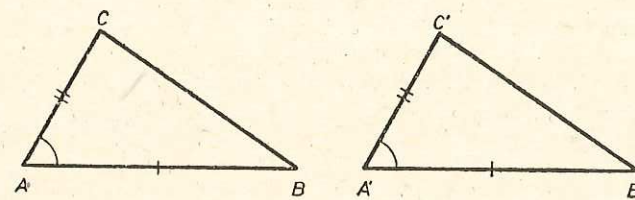


Fig. I.42

**Observație.** Intuitiv, această axiomă se justifică cu ajutorul ideii de „mişcare” („a unui rigid”). În cursul unei astfel de mișcări lungimile segmentelor și măsurile unghiurilor nu se schimbă, deci prin mișcare un segment se transformă într-un segment congruent, la fel un unghi într-un unghi congruent. Să ne imaginăm că triunghiul  $A'B'C'$  este o placă cu o față neagră și cealaltă roșie. Ea se poate deplasa liber pe un plan cu fața roșie în sus, și poate fi și întoarsă cu fața neagră în sus. Fie triunghiul  $ABC$  fixat în planul considerat și să presupunem că au loc relațiile (5). Deplasăm placa  $A'B'C'$  cu fața roșie în sus în așa fel ca  $A'$  să acopere pe  $A$ , iar  $B'$  pe  $B$  (ceea ce este posibil căci  $[AB]$  și  $[A'B']$  au lungimi egale). Deosebim două cazuri: 1) Placa se găsește acum în acel semiplan limitat de  $AB$ , în care se află  $C$ . Atunci: unghiul  $\widehat{B'A'C'}$  va acoperi unghiul  $\widehat{BAC}$ , prin urmare semidreapta  $[A'C'$  va acoperi pe  $[AC$  și punctul  $C'$  pe  $C$ . Rezultă  $(BC) \equiv (B'C')$ .  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$  și  $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ , deci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ . 2) Placa se găsește în semiplanul opus. Întorcîndu-l, ajungem la aceeași situație ca și în cazul 1) cu deosebirea că fața neagră este sus.

**Teorema 1. (Teorema de congruență U.L.U.)** Dacă triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  au

$$(AB) \equiv (A'B'), \hat{A} \equiv \hat{A'}, \hat{B} \equiv \hat{B}'$$



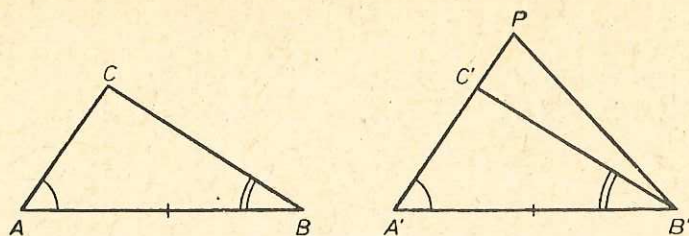


Fig. I.43

atunci

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \text{ (fig. I.43).}$$

*Demonstrație.* Determinăm conform teoremei de construcție a unui segment punctul  $P \in (A'C')$  astfel ca  $(AC) \equiv (A'P)$ . Folosind axioma L.U.L. rezultă

$$(6) \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'P,$$

deci  $\hat{B} \equiv \hat{A'B'P}$ . Pe de altă parte  $\hat{B} \equiv \hat{A'B'C'}$  (din ipoteză) și  $P, C'$  sînt de aceeași parte a lui  $A'B'$ , prin urmare  $[B'C' = [B'P$  în virtutea axiomei U.2. Rezultă  $C' = P$  și astfel relația (6) devine  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

**Teorema 2. (Teorema triunghiului isoscel.)** Dacă pentru un triunghi  $ABC$  avem  $(AB) \equiv (AC)$ , atunci  $\hat{B} \equiv \hat{C}$ , și reciproc (fig. I.44).

*Demonstrație.* Aplicînd axioma L.U.L., din  $(AB) \equiv (AC)$  rezultă  $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ , deci  $\hat{B} \equiv \hat{C}$ . Teorema U.L.U. ne arată că  $\hat{B} \equiv \hat{C}$  implică  $(AB) \equiv (AC)$ .

**L e m ă.** Dacă punctele  $C$  și  $C'$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $AB$ ,  $(CA) \equiv (C'A)$  și  $(CB) \equiv (C'B)$ , atunci  $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$ .

*Demonstrație.* Din ipoteză rezultă că segmentul  $(CC')$  intersectează dreapta  $AB$  într-un punct  $O$ . Deosebim următoarele cazuri:

a)  $O \in (AB)$  (fig. I.45, a). Triunghiurile  $ACC'$  și  $BCC'$  sînt isoscele, deci conform teoremei 2

$$(7) \quad \triangle ACC' \equiv \triangle AC'C \text{ și } \triangle BCC' \equiv \triangle BC'C.$$

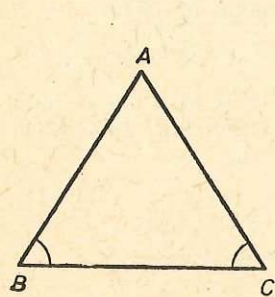


Fig. I.44

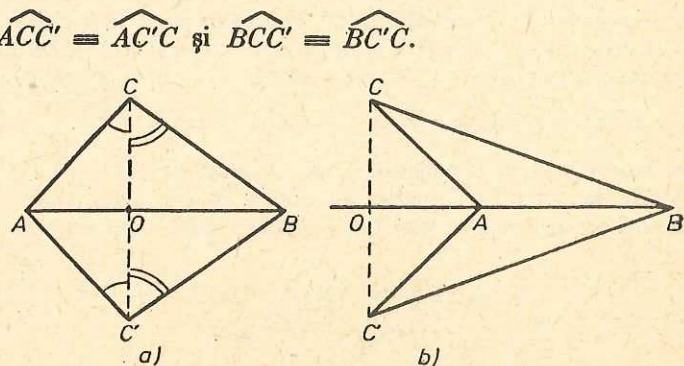


Fig. I.45

Cum  $(CC' \subset \text{Int } \widehat{ACB})$ , putem aplica teorema de adunare a unghiurilor (§ 8, teorema 6), deci  $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$ . Din axioma L.U.L. rezultă  $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$ .

b)  $A \in (OB)$  (fig. I.45, b). Relațiile (7) se deduc ca la punctul a). Din teorema 8 de la § 6 obținem  $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$ . Așadar și în acest caz  $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$ .

c)  $B \in (OA)$ . Demonstrație ca la punctul b).

d)  $O = A$  sau  $O = B$ . Lema rezultă imediat din teorema 2 și axioma L.U.L.

**Teorema 3. (Teorema de congruență L.L.L.)** Dacă triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  au

$$(8) \quad (AB) \equiv (A'B'), (AC) \equiv (A'C'), (BC) \equiv (B'C'),$$

atunci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

*Demonstrație.* În semiplanul limitat de  $BC$  care nu conține punctul  $A$ , ducem în conformitate cu teorema de construcție a unui unghi, semidreapta  $(BP$  astfel ca  $\widehat{CBP} \equiv \hat{B}'$ , apoi determinăm pe  $(BP$  punctul  $P$  astfel ca  $(BP) \equiv (B'A')$  (fig. I.46). Atunci  $\triangle PBC \equiv \triangle A'B'C'$  în virtutea axiomei L.U.L. Din  $(PB) \equiv (A'B')$ ,  $(PC) \equiv (A'C')$  și relațiile (8) obținem:  $(AB) \equiv (PB)$ ,  $(AC) \equiv (PC)$ . Conform lemei avem  $\triangle ABC \equiv \triangle PBC$ . Cum  $\triangle PBC \equiv \triangle A'B'C'$ , rezultă că  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

#### Exerciții

4. Fie  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ . Se iau punctele  $D \in (BC)$  și  $D' \in (B'C')$  astfel ca  $(BD) \equiv (B'D')$ . Să se arate că  $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$  și  $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'A'C'}$ .

5. Fie  $ABC$  un triunghi isoscel ( $(AB) \equiv (AC)$ ). Să se arate că bisectoarea unghiului  $\hat{A}$  taie segmentul  $(BC)$  într-un punct  $A'$  și să se arate că  $A'$  este mijlocul lui  $(BC)$  și  $AA' \perp BC$ .

6. În triunghiul  $ABC$  avem  $(AB) \equiv (AC)$ ; bisectoarele unghiurilor  $\hat{B}, \hat{C}$  taie laturile  $[AC], [AB]$  în  $B', C'$ . Să se arate că  $(BB') \equiv (CC')$ .

7. Fie  $ABCDE$  un pentagon convex cu următoarele proprietăți:  $(BC) \equiv (ED)$ ,  $(AC) \equiv (AD)$ ,  $\widehat{BCD} \equiv \widehat{CDE}$ . Să se arate că  $\widehat{ABE} \equiv \widehat{AEB}$ .

8. Pe laturile unui triunghi echilateral  $ABC$  se consideră punctele  $P \in (BC)$ ,  $Q \in (CA)$ ,  $R \in (AB)$  astfel ca  $(BP) \equiv (CQ) \equiv (AR)$ . Demonstrați că triunghiul  $PQR$  este echilateral.

9. Se ia un punct  $M$  în interiorul triunghiului isoscel  $ABC$  ( $(AB) \equiv (AC)$ ) astfel ca  $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$ . Să se arate că  $M$  se găsește pe bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ .

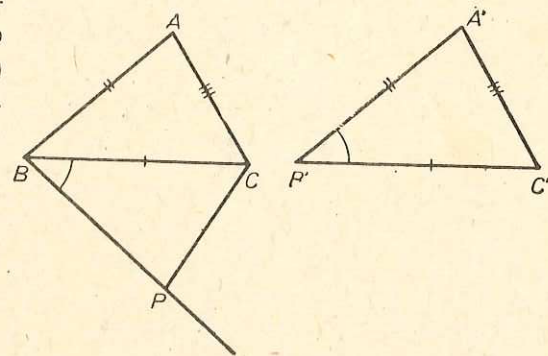


Fig. I.46



*Indicație.* Se va arăta că  $BMC$  este un triunghi isoscel, apoi  $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$  (L.L.L.).

10. Pe laturile congruente  $[AB], [AC]$  ale unui triunghi isoscel se iau punctele  $D$  și  $E$  astfel ca  $(AD) \equiv (AE)$ . Să se arate că segmentele  $(BE)$  și  $(CD)$  au un punct comun și că acesta este situat pe bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ .

11. De o parte și de alta a unei drepte  $AB$  se duc semidreptele  $[AM]$  și  $[BN]$  care formează cu  $[AB]$  respectiv  $[BA]$  unghiuri congruente. Pe aceste semidrepte se iau segmentele congruente  $(AC)$  și  $(BD)$ . Să se arate: a)  $(CD)$  și  $(AB)$  se intersectează într-un punct  $O$ ; b)  $O$  este mijlocul segmentului  $(AB)$ .

12. Fie punctul  $B$  interior unghiului  $AOC$  și  $A', B', C'$  cîte un punct pe semidreptele opuse lui  $(OA), (OB), (OC)$  astfel ca  $(OA) \equiv (OA'), (OB) \equiv (OB'), (OC) \equiv (OC')$ . Se presupune că punctele  $A, B, C$  nu sînt coliniare. Să se arate că nici  $A', B', C'$  nu sînt coliniare și  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

## § 10. Inegalități geometrice

### Unghiul exterior al unui triunghi

**Definiție.** Un unghi se numește *unghi exterior* al unui triunghi dacă este adiacent cu unul din unghiurile triunghiului și suplimentar cu el.

În figura I.47,  $(BM)$  și  $(BC)$  sînt semidrepte opuse, unghiurile  $\widehat{ABC}$  și  $\widehat{ABM}$  sînt adiacente și suplimentare, iar  $\widehat{ABC}$  este unghi al triunghiului, deci  $\widehat{ABM}$  este un unghi exterior al triunghiului  $ABC$ .

Un triunghi are șase unghiuri exterioare, cîte două cu același vîrf. Unghiurile exterioare cu același vîrf sînt congruente fiind și opuse la vîrf. Un unghi exterior al triunghiului  $ABC$ , cu vîrf în  $A$ , este neadiacent cu unghiurile  $\widehat{B}$  și  $\widehat{C}$  ale triunghiului (fig. I.48).

**Teorema 1. (Teorema unghiului exterior.)** Un unghi exterior al unui triunghi este mai mare decît oricare din unghiurile triunghiului, neadiacent cu acel unghi.

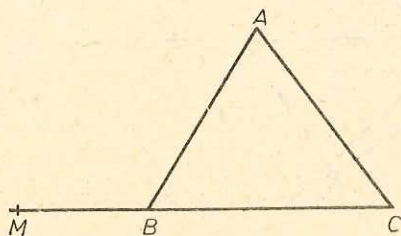


Fig. I.47

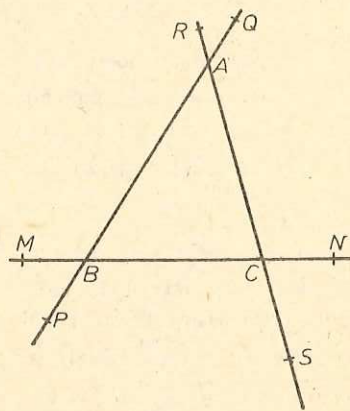


Fig. I.48

**Demonstrație.** Fie triunghiul  $ABC$  și  $\widehat{CAM}$  un unghi exterior (fig. I.49). Se va arăta că  $m(\widehat{CAM}) > m(\widehat{ACB})$ .  $D$  fiind mijlocul segmentului  $(AC)$ , pe semidreapta opusă semidreptei  $(DB)$  se consideră punctul  $E$  astfel încît  $(BD) \equiv (DE)$ .

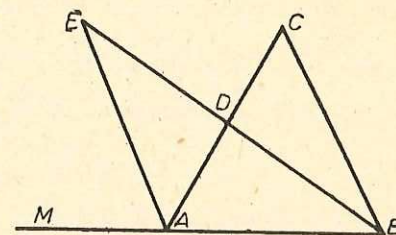


Fig. I.49

Deoarece  $E \in \text{Int } \widehat{CAM}$ , (ex. 6, §.6),

din teorema semidreptei interioare unui unghi rezultă că  $\widehat{CAE} < \widehat{CAM}$ ; pe de altă parte  $\triangle DAE \equiv \triangle DCB$  (din L.U.L.), deci  $m(\widehat{ACB}) \equiv m(\widehat{DAE}) < m(\widehat{CAM})$ . Pentru a arăta că  $m(\widehat{CAM}) > m(\widehat{ACB})$  se face un raționament analog, folosind însă compararea cu celălalt unghi exterior cu vîrf în  $A$ .

**Aplicație.** Într-un triunghi cu două laturi necongruente, laturii cu lungimea mai mare i se opune unghiul mai mare și reciproc.

**Demonstrație.** În triunghiul  $ABC$  cu  $AC > AB$  (fig. I.50), se consideră  $D \in (AC)$  astfel încît  $(AD) \equiv (AB)$ . Atunci  $\triangle ABD$  este un triunghi isoscel și  $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB} > \widehat{ACB}$ ,  $\widehat{ADB}$  fiind unghi exterior triunghiului  $BDC$ . Pentru că  $D \in (AC)$ ,  $(BD \subset \text{Int } \widehat{ABC})$ , deci  $\widehat{ABC} > \widehat{ABD} > \widehat{ACB}$ . Demonstrația afirmației reciproce se face prin reducere la absurd.

**Teorema 2. Suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decît lungimea celei de a treia laturi.**

**Demonstrație.**  $ABC$  fiind un triunghi (fig. I.51), ne propunem să demonstrăm de exemplu că

$$AB + BC > AC.$$

Fie  $M \in AB$ , astfel încît  $B \in (AM)$  și  $(BC) \equiv (BM)$ . Inegalitatea care trebuie demonstrată revine la:

$$AB + BM = AM > AC.$$

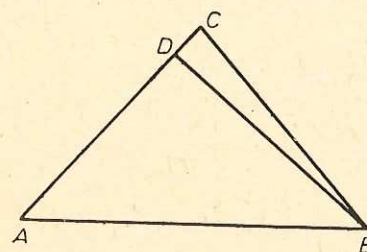


Fig. I.50

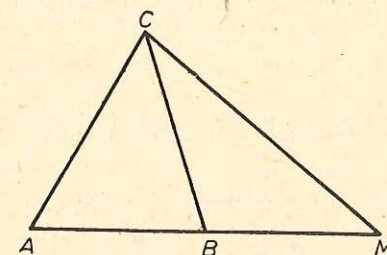


Fig. I.51



Pentru a demonstra că  $AM > AC$  este suficient să se demonstreze că  $m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{AMC})$ . Prin construcție, triunghiul  $CBM$  este isoscel deci  $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BCM}$ . Deoarece  $B \in \text{Int } \widehat{ACM}$ ,

$$m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{BCM}) = m(\widehat{AMC}),$$

ceea ce demonstrează teorema.

*Observație.* Pentru un triunghi  $ABC$  au loc inegalitățile

$$AB + BC > AC,$$

$$AC + BC > AB,$$

care sînt echivalente cu

$$BC > AC - AB,$$

$$BC > AB - AC = -(AC - AB).$$

Deci

$$BC > |AC - AB|$$

sau: lungimea oricărei laturi a unui triunghi este mai mare decît valoarea absolută a diferenței lungimilor celorlalte două laturi.

Vom reaminti următoarele noțiuni: triunghiul cu un unghi drept se numește *triunghi dreptunghic*. Laturile care formează unghiul drept se numesc *catele*, iar latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*.

*Perimetrul* unui poligon este suma lungimilor laturilor sale.

### Exerciții

1. Două drepte distincte, perpendiculare pe aceeași dreaptă, nu sînt concurente.
2. Dacă un triunghi are un unghi drept (sau obtuz), celelalte două unghiuri sînt ascuțite.
3. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decît lungimea oricărei cate.

4. Fie triunghiul  $ABC$  și  $M, N$  două puncte astfel încît  $B \in (MC)$ ,  $C \in (BN)$ . Să se demonstreze că  $m(\widehat{MAN}) < m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ .

5. Să se arate că oricare ar fi unghiurile proprii  $\widehat{hk}$  și  $\widehat{pq}$ , există un triunghi  $ABC$  astfel încît  $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) > m(\widehat{hk})$  și  $m(\widehat{A}) < m(\widehat{pq})$ .

6. Fie patrulaterul convex  $ABCD$  în care  $(AD)$  este latura cea mai lungă și  $(BC)$  cea mai scurtă; atunci:

$$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ADC}) \text{ și } m(\widehat{BCD}) > m(\widehat{BAD}).$$

*Indicație.* În triunghiul  $ABD$ ,  $AD > AB$ , deci  $m(\widehat{ABD}) > m(\widehat{ADB})$  (fig. I.52). În triunghiul  $BCD$ ,  $BC < CD$ , deci  $m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{BDC})$ . Adunînd membru cu membru cele două inegalități, se obține:

$$m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BDC}) \text{ sau } m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ADC}).$$

La fel se demonstrează și cea de a doua inegalitate.

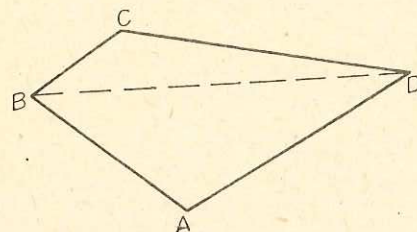


Fig. I.52

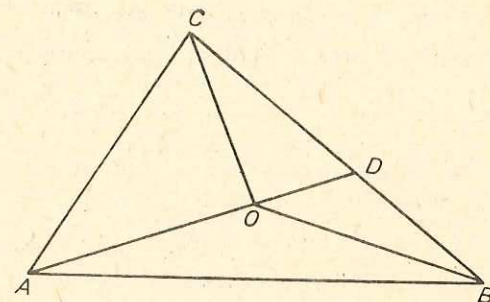


Fig. I.53

7. În triunghiul  $ABC$  se consideră punctele  $A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in AC$ ,  $C_1 \in AB$  astfel ca  $AA_1 \perp BC$ ,  $BB_1 \perp AC$ ,  $CC_1 \perp AB$ . Să se arate că:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + AC + BC.$$

8\*. Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $AB < AC$  și punctul  $D$ , astfel încît  $C \in (AD)$ . Să se arate că pentru orice punct  $M$ ,  $M \in (BC)$  are loc:

$$m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{BMA}) > m(\widehat{CMD}) + m(\widehat{MDC}).$$

9. Fie triunghiul  $ABC$  și  $O \in \text{Int } ABC$ . Să se demonstreze că

$$\frac{BC + CA + AB}{2} < OA + OB + OC < BC + CA + AB.$$

*Indicație.* În triunghiurile  $OAB$ ,  $OAC$ ,  $OBC$  au loc:

$$OA + OB > AB, \quad OA + OC > AC, \quad OB + OC > BC \text{ (fig. I.53).}$$

Adunînd membru cu membru se obține:

$$OA + OB + OC > \frac{1}{2} (AB + AC + BC).$$

Pentru a doua inegalitate fie  $\{D\} = AO \cap BC$ . Avem  $D \in (BC)$  și inegalitățile  $AO + OC < AO + OD + DC = AD + DC$ ,  $AD < AB + BD$ ; rezultă că  $AO + OC < AB + BD + DC$  sau  $AO + OC < AB + BC$ . Se obțin în mod analog alte două inegalități și apoi se adună membru cu membru.

10\*. Lungimea unui segment este mai mică decît lungimea oricărei linii poligonale care are extremitățile segmentului ca vîrfuri.

*Indicație.* Dacă linia poligonală are două laturi atunci se aplică direct teorema 2.

Dacă linia poligonală are vîrfurile  $A, M_1, M_2, \dots, M_n, B$ , se scriu inegalitățile:

$$AB < AM_1 + M_1B, \quad M_1B < M_1M_2 + M_2B, \dots, \quad M_{n-2}B < M_{n-2}M_{n-1} + M_{n-1}B, \\ M_{n-1}B < M_{n-1}M_n + M_nB.$$

Se adună membru cu membru și se obține:

$$AB + M_1B + \dots + M_{n-1}B < AM_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n + M_nB + M_1B + \\ + M_2B + \dots + M_{n-1}B,$$

sau

$$AB < AM_1 + M_1M_2 + \dots + M_nB.$$

11\*. Se consideră poligoanele convexe  $P'$  și  $P''$ . Dacă suprafața poligonală determinată de  $P'$  este inclusă în suprafața poligonală determinată de  $P''$ , atunci perimetrul poligonului  $P'$  este mai mic sau egal decît perimetrul poligonului  $P''$ .



*Indicație.* Se consideră întâi cazul când  $P'$  și  $P''$  au o latură comună.

12. Fie triunghiul  $ABC$  și  $D$  mijlocul laturii  $(BC)$ . Să se arate că:

$$AD < \frac{AB + AC}{2}.$$

13. Se consideră triunghiul  $ABC$  și  $A_1, B_1, C_1$  respectiv mijloacele laturilor  $(BC)$ ,  $(AC)$ ,  $(AB)$ . Să se arate că:

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + AC + BC.$$

14\*. Se consideră două puncte  $A$  și  $B$  și o dreaptă  $d$  care nu trece prin nici unul dintre ele. Să se determine un punct  $C, C \in d$  astfel ca oricare ar fi  $M, M \in d$ , să aibă loc:

$$AC + CB \leq AM + MB.$$

*Indicație.* Se disting două cazuri: a) dreapta  $d$  nu separă punctele  $A$  și  $B$ . Fie  $AA' \perp d$ ,  $\{O\} = AA' \cap d$ ,  $(OA) \equiv (OA')$  și  $O \in (AA')$ ;  $A'$  și  $B$  fiind în semiplane opuse, există  $C, (A'B) \cap d = \{C\}$  și

$$A'B = A'C + BC = AC + BC;$$

fie  $M \in d, M \neq C$

$$A'M + MB > A'B = AC + CB;$$

b) dacă  $d$  separă pe  $A$  și  $B$ ,  $\{C\} = (AB) \cap d$ .

15\*. (Problema biliardului). Fie două mingi de biliard situate în punctele  $A$  și  $B$  și  $(CD)$  o latură a mesei. Să se determine punctul  $M, M \in (CD)$  în care trebuie să atingă latura  $(CD)$  după lovire una din bile pentru ca să o ciocnească în continuare pe cealaltă, știind că  $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BMD}$ .

## § 11. Alte cazuri de congruență ale triunghiurilor

### Teorema de congruență a triunghiurilor L.U.U.

**Teoremă 1.** Dacă triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  sînt astfel încît  $(AB) \equiv (A'B')$ ,  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  și  $\hat{C} \equiv \hat{C}'$  atunci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

*Demonstrație.* Pe semidreapta  $(A'C')$  se consideră punctul  $C''$  astfel încît  $(AC) \equiv (A'C'')$  (fig. I.54). Atunci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$  (din L.U.L.).

a) Dacă  $C' = C''$ , teorema este demonstrată.

b) Dacă  $C'' \in (A'C')$ , atunci  $\widehat{A'C''B'} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ , ceea ce nu este posibil deoarece  $\widehat{A'C''B'}$  este unghi exterior triunghiului  $B'C''C'$ .

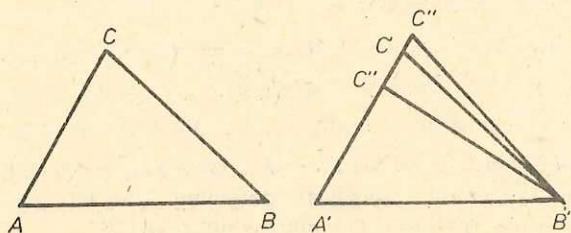


Fig. I.54

c) Dacă  $C' \in (A'C'')$  atunci  $\widehat{A'C''B'} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ , ceea ce de asemenea nu este posibil întrucît  $\widehat{A'C''B'}$  este unghi exterior triunghiului  $B'C''C'$ .

Deci singura poziție posibilă este  $C' = C''$  adică  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

### Congruența triunghiurilor dreptunghice

În cazul particular al triunghiurilor dreptunghice, teoremele de congruență se pot formula astfel: se consideră triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$ ,  $\hat{A} \equiv \hat{A}' = 90^\circ$ .

**Cazul I (C.C.)** Dacă  $(AB) \equiv (A'B')$  și  $(AC) \equiv (A'C')$  atunci triunghiurile sînt congruente.

**Cazul II (C.U.)** Dacă  $(AB) \equiv (A'B')$  și  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ , atunci triunghiurile sînt congruente.

**Cazul II' (C.U.)** Dacă  $(AB) \equiv (A'B')$  și  $\hat{C} \equiv \hat{C}'$  atunci triunghiurile sînt congruente.

**Cazul III (I.U.)** Dacă  $(BC) \equiv (B'C')$  și  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$  atunci triunghiurile sînt congruente.

Pentru triunghiurile dreptunghice există și un caz special de congruență.

**Teoremă 2. (Cazul IV.C.I.)** Dacă triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  cu  $m(\hat{A}) = m(\hat{A}') = 90^\circ$ , verifică condițiile  $(AB) \equiv (A'B')$  și  $(BC) \equiv (B'C')$ , atunci triunghiurile sînt congruente.

*Demonstrație.* Pe semidreapta  $(A'C')$  se consideră punctul  $C''$  astfel încît  $(AC) \equiv (A'C'')$  (fig. I.55). Atunci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$  (din cazul C.C.).

a) Dacă  $C' = C''$ , teorema este demonstrată.

b) Dacă  $C'' \in (A'C')$  atunci  $(B'C'') \equiv (BC) \equiv (B'C')$  și triunghiul  $B'C''C'$  este isoscel,  $\widehat{B'C''C'} \equiv \widehat{B'C''C'}$ . Dar  $\widehat{B'C''C'}$  este exterior triunghiului  $A'B'C''$  deci  $\widehat{B'C''C'} \equiv \widehat{B'C''C'} > \hat{A}'$  ceea ce nu este posibil pentru că triunghiul  $B'C''C'$  nu poate avea două unghiuri obtuze.

c) Dacă  $C' \in (A'C'')$ , în mod analog rezultă că triunghiul  $B'C''C'$  este isoscel; dar  $\widehat{B'C''C'}$  este exterior triunghiului  $A'B'C'$  deci  $\widehat{B'C''C'} \equiv \widehat{B'C''C'} > A$ , ceea ce de asemenea nu este posibil.

Prin urmare singura poziție posibilă este  $C' = C''$ , deci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

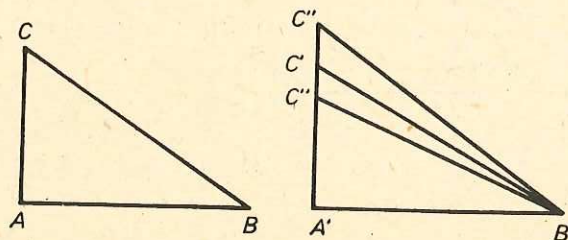


Fig. I.55



## Exerciții

1. Fie triunghiurile isoscele  $ABC$  și  $A'B'C'$  ( $(AB) \equiv (AC)$ ,  $(A'B') \equiv (A'C')$ ), în care  $(AB) \equiv (A'B')$  și  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ . Să se demonstreze că  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .
2. Dacă în patrulaterul convex  $ABCD$ ,  $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$  și  $[BD]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{B}$ , atunci  $[DB]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{D}$ .
3. Dacă în triunghiul  $ABC$ ,  $AA' \perp BC$ ,  $BB' \perp AC$ ,  $A' \in (BC)$ ,  $B' \in (AC)$  și  $(AA') \equiv (BB')$ , atunci triunghiul este isoscel.
4. Să se arate că dacă  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  și  $AA_1 \perp BC$ ,  $DD_1 \perp EF$ ,  $A_1 \in BC$ ,  $D_1 \in EF$ , atunci  $(AA_1) \equiv (DD_1)$ .
5. Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$  în care  $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$  și punctele  $M \in (BC)$ ,  $N \in (DC)$ . Să se arate că dacă  $(AM) \equiv (AN)$  și  $\widehat{BAM} \equiv \widehat{DAN}$ , atunci  $(BC) \equiv (DC)$ .

## § 12. Distanța de la un punct la o dreaptă

**Teorema 1.** Fiind dată dreapta  $d$  și punctul  $M$ ,  $M \notin d$ , există o singură dreaptă  $d'$ , astfel încât  $M \in d'$  și  $d' \perp d$ .

*Demonstrație.* a) *Existența.* Se consideră  $A$  și  $B$ ,  $A \in d$ ,  $B \in d$ ,  $A \neq B$  (fig. 1.56). Dacă  $MA \perp d$  sau  $MB \perp d$ , existența perpendicularei din  $M$  pe  $d$  este demonstrată. În caz contrar, fie în semiplanul determinat de  $d$  care nu-l conține pe  $M$ , semidreapta  $(AP)$  astfel încât  $\widehat{MAB} \equiv \widehat{PAB}$  și  $C \in (AP)$ ,  $(AM) \equiv (AC)$ .  $M$  și  $C$  fiind în semiplane opuse față de  $d$ , există punctul  $M'$ ,  $d \cap (MC) = \{M'\}$ .  $\triangle AM'M \equiv \triangle AM'C$  (din L.U.L.) deci  $\widehat{AM'C} \equiv \widehat{AM'M}$  și  $\widehat{AM'C}$ ,  $\widehat{AM'M}$  suplementare. Rezultă că  $m(\widehat{AM'C}) = m(\widehat{AM'M}) = 90^\circ$  ceea ce demonstrează existența perpendicularei.

b) *Unicitatea.* Se arată prin reducere la absurd (fig. 1.57). Dacă  $MA \perp d$ ,  $MB \perp d$ ,  $A \in d$ ,  $B \in d$ ,  $A \neq B$ , atunci triunghiul  $MAB$  are două unghiuri drepte ceea ce nu este posibil.

a) și b) demonstrează teorema.

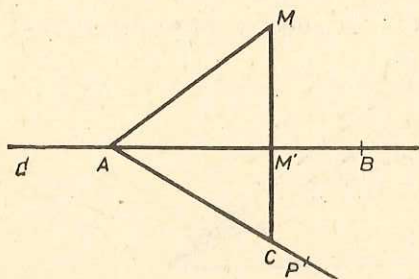


Fig. 1.56

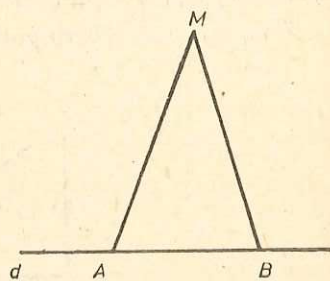


Fig. 1.57

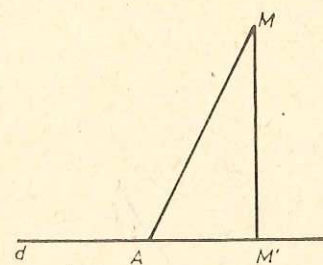


Fig. 1.58

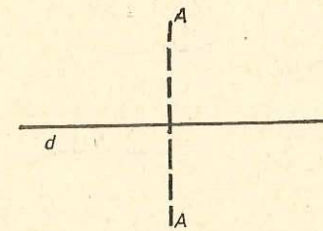


Fig. 1.59

Punctul de intersecție al perpendicularei pe  $d$  din  $M$ , cu  $d$ , se numește *picioarul perpendicularei* duse din  $M$  pe dreapta  $d$ .

**Teorema 2.** Se consideră dreapta  $d$ , punctul  $M$ ,  $M \notin d$  și  $M'$  picioarul perpendicularei din  $M$  pe  $d$ . Atunci, oricare ar fi punctul  $A$ ,  $A \in d$ ,  $A \neq M'$ , are loc  $MM' < MA$ .

*Demonstrație.* Triunghiul  $AMM'$  este dreptunghic (fig. 1.58),  $(MM')$  fiind o catetă, lungimea catetei este mai mică decât lungimea ipotenuzei  $(MA)$ .

Din teoremele 1 și 2 rezultă că există pe dreapta  $d$  un punct unic  $M'$ , astfel încât  $MM' \leq MA$  oricare ar fi punctul  $A$ ,  $A \in d$ .

**Definiție.** Se numește *distanța de la un punct la o dreaptă* căreia nu-i aparține, cea mai mică distanță dintre acel punct și punctele dreptei.

Din cele de mai sus rezultă că distanța de la un punct la o dreaptă este distanța dintre punct și picioarul perpendicularei duse din punct pe dreaptă. Se notează  $d(M, d) = \min_{P \in d} MP = d(M, M') = MM'$ , unde  $M' \in d$  și  $MM' \perp d$ .

Dacă  $M \in d$ , se definește  $d(M, d) = 0$ .

Uneori se va utiliza și noțiunea de distanță de la un punct la o semidreaptă, înțelegându-se distanța de la punct la suportul semidreptei.

**Definiții.** Punctele  $A$  și  $A'$  se numesc *simetrice față de dreapta d*, dacă  $A = A' \in d$  sau  $AA' \perp d$  și mijlocul lui  $(AA')$  se află pe  $d$ . În acest caz, punctul  $A'$  se numește *simetricul lui A față de d*.

Punctele  $A$  și  $A'$  se numesc *simetrice față de punctul O* dacă  $O$  este mijlocul lui  $(AA')$  sau  $A = A' = O$ . Mulțimile de puncte  $\mathcal{M}$  și  $\mathcal{M}'$  se numesc *simetrice față de dreapta d* (sau *punctul O*) dacă  $\mathcal{M}'$  este mulțimea simetricelor punctelor din  $\mathcal{M}$  față de dreapta  $d$  (sau față de punctul  $O$ ).

În figura 1.59  $A$  și  $A'$  sînt simetrice față de  $d$ , în figura 1.60  $A$  și  $A'$  sînt simetrice față de  $O$ , iar în figurile 1.61 și 1.63  $\mathcal{M}$  și  $\mathcal{M}'$  sînt simetrice față de  $d$  respectiv  $O$ . În figurile 1.62 și 1.64  $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ . În acest caz,  $d$  se numește *o axă de simetrie* a lui  $\mathcal{M}$  iar  $O$  centru de simetrie a lui  $\mathcal{M}$ .

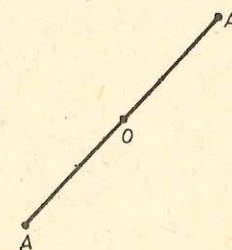


Fig. 1.60



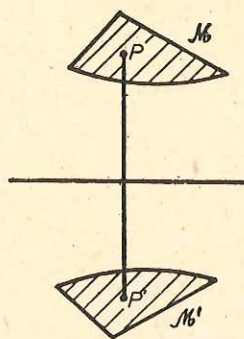


Fig. I.61

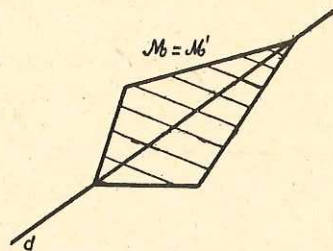


Fig. I.62

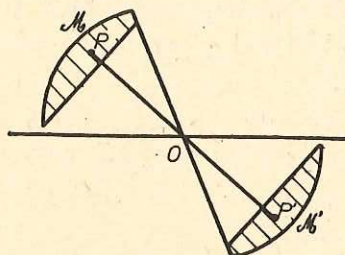


Fig. I.63

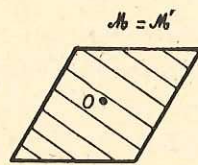


Fig. I.64

### Exerciții

1. Fie triunghiul  $ABC$  și  $A_1$  piciorul perpendicularei duse din  $A$  pe  $BC$ . Să se demonstreze că dacă  $\hat{B}$  și  $\hat{C}$  sînt ascuțite, atunci  $A_1 \in (BC)$ , iar dacă  $\hat{B}$  este obtuz, atunci  $B \in (A_1C)$ .

2. Se consideră o dreaptă  $d$ , punctul  $A$ ,  $A \notin d$  și  $A'$  piciorul perpendicularei din  $A$  pe  $d$ . Să se demonstreze că dacă punctele  $B$  și  $C$ ,  $B \in d$ ,  $C \in d$  sînt astfel încît  $A'B < A'C$  atunci  $AB < AC$ . Să se formuleze și să se demonstreze afirmația reciprocă a acestuia.

3\*. Dacă  $ABC$  este un triunghi isoscel cu  $(AB) \equiv (AC)$ , atunci pentru orice punct  $D \in (BC)$ , are loc  $AD < AB$ .

4\*. Dacă  $ABC$  este un triunghi isoscel cu  $(AB) \equiv (AC)$  și  $D \in BC$  astfel încît  $AD < AB$ , atunci  $D \in (BC)$ .

5\*. Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $AB < AC$ . Să se arate că pentru orice punct  $D \in (BC)$ ,  $AD < AC$ .

6\*. Fie  $A$  un punct situat pe o dreaptă  $d$ ,  $B \notin d$  și  $C \in AB$ . Se notează cu  $B'$  și  $C'$  simetricile lui  $B$  și  $C$  față de dreapta  $d$ . Să se demonstreze că punctele  $A$ ,  $B'$ ,  $C'$  sînt coliniare.

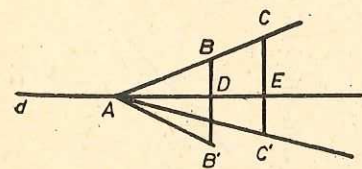


Fig. I.65

*Indicație.* Fie  $D$  și  $E$  picioarele perpendicularelor din  $B$  și  $C$  pe  $d$ . Se consideră două cazuri: 1)  $C \in (AB)$  (fig. I.65). Are loc:  $(BD) \equiv (DB')$ ,  $(CE) \equiv (EC')$  și astfel  $\triangle ABD \equiv \triangle AB'D$ ,  $\triangle ACE \equiv \triangle AC'E$ . Rezultă  $\widehat{EAB'} \equiv \widehat{EAC'}$  și deoarece  $B'$ ,  $C'$  sînt de aceeași parte a lui  $d$ , din teorema de construcție a unui unghi se deduce că  $(AB') \equiv (AC')$ .

2)  $A \in (BC)$ . Raționînd în mod analog,  $\widehat{DAB'} \equiv \widehat{EAC'}$  și din teorema 3, § 7, rezultă că  $(AB')$  și  $(AC')$  sînt semidrepte opuse (fig. I.66).

7\*. Să se arate că: a) simetrica unei drepte față de o altă dreaptă, pe care o taie, este tot o dreaptă. b) O dreaptă admite o infinitate de axe de simetrie. Să se afle aceste axe. c) Simetricul unui segment față de o dreaptă este un segment de aceeași lungime. d) Să se afle axele de simetrie ale unui segment.

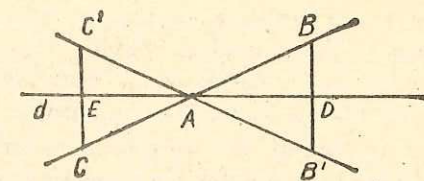


Fig. I.66

### § 13. Mediatoare. Bisectoare. Locuri geometrice

**Definiție.** Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment dusă prin mijlocul segmentului.

Existența și unicitatea mediatoarei rezultă din faptul că mijlocul unui segment există și este unic, perpendiculara printr-un punct al dreptei pe dreaptă există și este unică.

**Teorema 1.** Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.

*Demonstrație.* Se consideră  $(AB)$ ,  $O \in (AB)$ ,  $(OA) \equiv (OB)$ , și  $M$  un punct de pe mediatoarea segmentului  $(AB)$  (fig. I.67). Dacă  $M = O$ , afirmația este evidentă. Dacă  $M \neq O$ ,  $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$  (C.C.) și rezultă  $(AM) \equiv (BM)$  deci  $AM \equiv BM$ .

**Teorema 2. (Reciprocă.)** Orice punct egal depărtat de capetele unui segment aparține mediatoarei segmentului.

*Demonstrație.* Se consideră  $(AB)$  și  $M$  un punct astfel încît  $(MA) \equiv (MB)$  (fig. I.68). Dacă  $M \in AB$  atunci  $M$  este mijlocul segmentului  $(AB)$  și aparține mediatoarei. Dacă  $M \notin AB$ , fie  $O$  mijlocul segmentului  $(AB)$ .  $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$  (din L.L.L.). Deci  $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$ . Deoarece cele două unghiuri sînt și suplementare, rezultă că  $MO \perp AB$ , ceea ce înseamnă că  $MO$  este mediatoarea segmentului  $(AB)$ .

Din cele două teoreme rezultă că mediatoarea unui segment este mulțimea punctelor care au proprietatea că sînt egal depărtate de capetele segmentului.

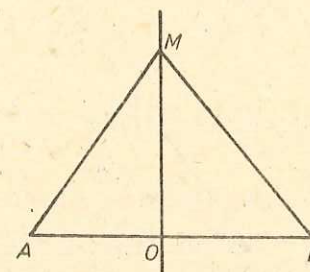


Fig. I.67

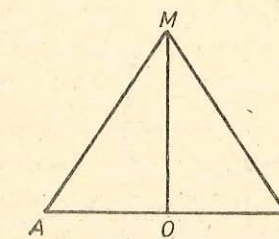


Fig. I.68



Pentru o mulțime de puncte care verifică o anumită proprietate  $\mathcal{P}$  se folosește și denumirea de „locul geometric al punctelor care au proprietatea  $\mathcal{P}$ “. Astfel mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egal depărtate de capetele segmentului.

În general, pentru a demonstra că o mulțime  $\mathcal{M}$  de puncte este locul geometric al punctelor care verifică o proprietate  $\mathcal{P}$  se va demonstra că orice element al mulțimii  $\mathcal{M}$  verifică proprietatea  $\mathcal{P}$  și că orice punct care verifică proprietatea  $\mathcal{P}$  aparține mulțimii  $\mathcal{M}$ .

Un alt exemplu de mulțime de puncte care verifică o anumită proprietate este bisectoarea unui unghi.

**Teorema 3. Bisectoarea unui unghi propriu este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului, reunit cu vârful unghiului.**

*Demonstrație.* a) Se va arăta că orice punct de pe bisectoarea are proprietatea enunțată (fig. I.69). Fie  $\hat{h}k$  un unghi,  $O$  vârful unghiului,  $s$  bisectoarea lui și  $M \in s - \{O\}$ . Se notează cu  $A$  și  $B$  picioarele perpendicularelor din  $M$  pe suporturile lui  $h$  și  $k$ .  $A \in h$  căci altfel triunghiul  $OAM$  ar avea un unghi obtuz și unul drept; analog,  $B \in k$ .  $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$  (din I.U.); rezultă  $(MA) \equiv (MB)$ , deci  $d(M, h) = d(M, k)$ .

b) Se va arăta că orice punct  $M$  cu proprietatea  $d(M, h) = d(M, k)$  și  $M \in \text{Int} \hat{h}k$ , aparține bisectoarei unghiului  $\hat{h}k$ . Dacă  $A$  și  $B$  sînt picioarele perpendicularelor din  $M$  pe suporturile lui  $h$  și  $k$ , se va demonstra că  $A \in h$  și  $B \in k$ . Presupunînd contrariul, de exemplu  $A \notin h$ , rezultă că segmentul  $(AM)$  intersectează latura  $k$ , deoarece din exercițiul 13, § 6 deducem că  $(AM)$  intersectează una din laturile unghiului și aceasta nu poate fi decît  $k$ . Fie  $\{C\} = (AM) \cap k$ . Deoarece  $MC \geq MB$  (teorema 2, § 12) și  $AM > CM$ , rezultă că  $AM > MB$ , ceea ce contrazice ipoteza. La fel se arată că  $B \in h$ . Din  $(MA) \equiv (MB)$  rezultă că  $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$  (C.I.), deci  $\hat{AOM} \equiv \hat{BOM}$  și rezultă că  $(OM)$  este bisectoarea unghiului  $\hat{h}k$ .

Pe baza proprietăților de loc geometric ale bisectoarelor și mediatoarelor se pot demonstra următoarele două teoreme referitoare la concurența bisectoarelor și mediatoarelor unui triunghi.

**Teorema 4. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sînt concurente.**

*Demonstrație.* Din teorema transversalei rezultă că bisectoarele unghiurilor  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$  intersectează pe  $(BC)$  și  $(AC)$  în cite un punct  $D$  respectiv  $E$  (fig. I.70). Din aceeași teoremă rezultă că există punctul  $I$ ,

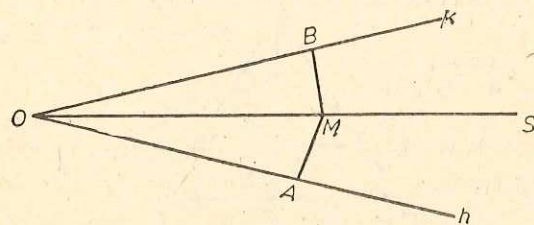


Fig. I.69

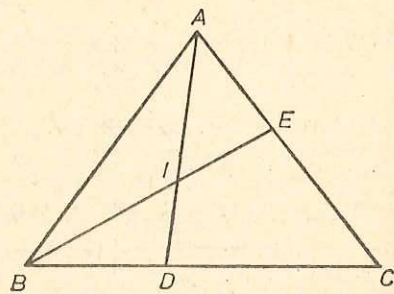


Fig. I.70

$\{I\} = (AD) \cap (BE) = (BE) \cap (AD)$ . Așadar  $I \in \text{Int} \hat{ACB}$ . Din proprietatea punctelor bisectoarei unui unghi rezultă  $d(I, BC) = d(I, AB)$ ,  $d(I, AB) = d(I, AC)$  și deci  $d(I, BC) = d(I, AC)$  și pentru că  $I \in \text{Int} \hat{ACB}$  rezultă că  $[CI]$  este bisectoarea unghiului  $\hat{C}$ .

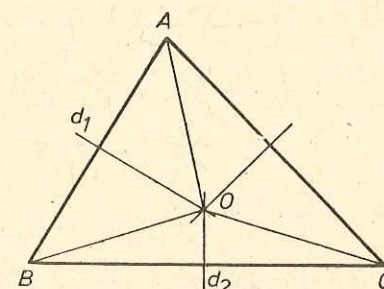


Fig. I.71

**Teorema 5. Dacă două dintre mediatoarele laturilor unui triunghi sînt concurente, atunci cele trei mediatoare ale laturilor triunghiului sînt concurente.**

*Demonstrație.* Fie triunghiul  $ABC$ ,  $d_1$  și  $d_2$  mediatoarele segmentelor  $(AB)$  respectiv  $(BC)$ ,  $\{O\} = d_1 \cap d_2$  (fig. I.71.) Din proprietatea punctelor mediatoarei rezultă că  $(OA) \equiv (OB)$ ,  $(OB) \equiv (OC)$  deci  $(OA) \equiv (OC)$ , ceea ce înseamnă că  $O$  aparține mediatoarei segmentului  $(AC)$ .

Se observă că această teoremă nu asigură faptul că în orice triunghi mediatoarele laturilor sînt concurente, ci exprimă doar o condiție suficientă pentru concurență. Cu axiomele admise, pînă acum, nu putem demonstra că mediatoarele a două laturi ale unui triunghi sînt concurente. Acest lucru se va face în capitolul II după enunțarea unei alte axiome, „axioma paralelelor“.

### Exerciții

1. Fie punctele distincte  $A$  și  $B$ . Să se afle locul geometric al punctelor  $M$  pentru care  $AM \perp AB$ .
2. Fie punctele distincte  $A$  și  $B$  și numărul real  $\alpha \in (0; 180)$ . Să se afle locul geometric al punctelor  $M$  pentru care  $m(\hat{MAB}) = \alpha^\circ$ .
3. Fie triunghiul  $ABC$  și cele două unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură  $[BC]$  respectiv  $[CB]$ . Să se demonstreze că dacă bisectoarele celor două unghiuri exterioare sînt concurente într-un punct  $M$ , atunci  $M$  aparține și bisectoarei unghiului  $\hat{A}$ .
4. Se consideră punctele  $A$  și  $B$  și o dreaptă  $d$ ,  $A \notin d$ ,  $B \notin d$ . Să se determine un punct  $C$ ,  $C \in d$  astfel ca  $(AC) \equiv (BC)$ . Discuție.
5. Fie unghiul  $\hat{h}k$  și două puncte  $A$  și  $B$ . Să se determine un punct  $C$  astfel ca  $(AC) \equiv (CB)$  și  $d(C, h) = d(C, k)$ .

### § 14. Drepte neconcurente

Din axiomele de incidență a rezultat că două drepte distincte au cel mult un punct comun, fără să se pună problema dacă există două drepte care să nu aibă nici un punct comun. Răspunsul la această întrebare este afirmativ și este justificat în următoarea:



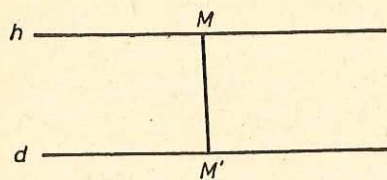


Fig. I.72

**Teorema 1.** Pentru orice dreaptă  $d$  și orice punct  $M \notin d$ , există o dreaptă  $h$ , astfel încât  $M \in h$  și  $d \cap h = \emptyset$

*Demonstrație.* Fie dreapta  $d$ ,  $M \notin d$  și  $MM' \perp d$ ,  $M' \in d$ ; se consideră dreapta  $h$ ,  $M \in h$  și  $h \perp MM'$ . Se va arăta că  $h$  și  $d$  nu sînt concurente, prin reducere la absurd (fig. I.72).

Se presupune că  $\{P\} = h \cap d$ . Dacă  $M, M', P$  sînt necoliniare atunci triunghiul  $MM'P$  are două unghiuri drepte ceea ce este absurd. Dacă  $M, M', P$  sînt coliniare atunci  $h = d$  (pentru că  $h = MP$  și  $d = M'P$ ), deci  $M \in d$ , ceea ce contrazice ipoteza.

*Observație.* Din teoremă rezultă că, fiind dată o dreaptă  $d$ , prin orice punct  $M$  al planului care nu aparține dreptei  $d$ , trece cel puțin o dreaptă neconcurentă cu  $d$ , dar nu exclude existența mai multor drepte cu aceeași proprietate.

Utilizînd ideea din demonstrația teoremei 1 se pot stabili condiții pentru ca două drepte să nu fie concurente. Înainte de aceasta se vor introduce cîteva noțiuni.

**Definiție.** O dreaptă se numește *secantă* (sau transversală) pentru două sau mai multe drepte dacă intersectează fiecare din aceste drepte în puncte distincte.

În figura I.73 dreapta  $d$  este o transversală pentru  $d_1, d_2, d_3$ , dreapta  $d_2$  este o transversală pentru  $d_1, d_2, d$ .

**Definiție.** Două unghiuri se numesc *alterne interne* dacă intersecția a două laturi este un segment, iar celelalte două laturi sînt situate în semiplane opuse față de dreapta ce conține segmentul.

În figura I.74  $\widehat{CAB}$  și  $\widehat{ABD}$  sînt unghiuri alterne interne, pentru că  $(AB \cap BA = (AB), C$  și  $D$  fiind în semiplane opuse față de  $AB$ . Dreapta  $AB$  este o secantă pentru dreptele  $AC$  și  $BD$ . Se observă că în figura compusă

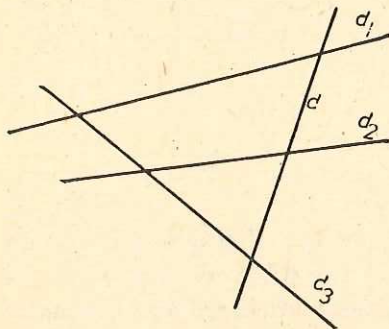


Fig. I.73

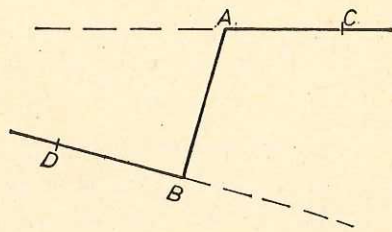


Fig. I.74

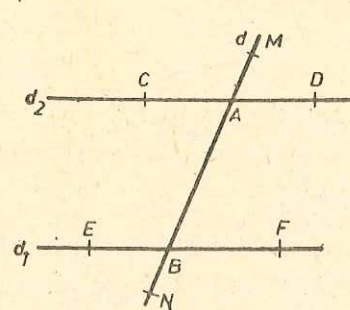


Fig. I.75

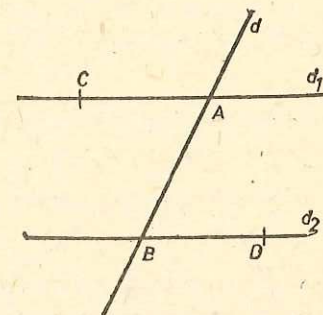


Fig. I.76

de două drepte și o secantă se formează două perechi de unghiuri alterne interne.

Fie dreptele  $d_1, d_2$  și secanta  $d$  (fig. I.75).

$C \in d_1, D \in d_1, E \in d_2, F \in d_2, d \cap d_1 = \{A\}, d \cap d_2 = \{B\}, A \in (CD),$

$B \in (EF), M \in d, N \in d, A \in (MB), B \in (AN).$

Perechile de unghiuri  $(\widehat{CAB}, \widehat{ABF}), (\widehat{DAB}, \widehat{ABE})$  se numesc *alterne interne*. Perechile de unghiuri  $(\widehat{MAC}, \widehat{ABE}), (\widehat{CAB}, \widehat{EBN}), (\widehat{MAD}, \widehat{ABF}), (\widehat{DAB}, \widehat{FBN})$  se numesc *corespondente*. Perechile de unghiuri  $(\widehat{FBA}, \widehat{DAB}), (\widehat{CAB}, \widehat{ABE})$  se numesc *interne de aceeași parte a secantei*.

**Teorema 2.** Dacă pentru două drepte distincte există o secantă cu care formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente atunci dreptele nu sînt concurente.

*Demonstrație.* Fie  $d_1 \neq d_2$ , secanta  $d, \{A\} = d_1 \cap d, \{B\} = d_2 \cap d, C \in d_1, D \in d_2, d$  separă  $C$  și  $D, \widehat{CAB} \cong \widehat{ABD}$  (fig. I.76). Se presupune prin absurd că  $d_1 \cap d_2 = \{P\}$ . Dacă  $A, B, P$  sînt necoliniare triunghiul  $ABP$  are un unghi exterior congruent cu un unghi interior neadiacent cu el, ceea ce este absurd. Dacă  $A, B, P$  sînt coliniare atunci  $d_1 = d_2$ , ceea ce contrazice ipoteza.

### Exerciții

1. Să se demonstreze că dacă două drepte distincte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente sau o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplimentare, atunci dreptele sînt nesecante.

2. Să se demonstreze că dacă segmentele  $(AB)$  și  $(CD)$  nesituate pe aceeași dreaptă au mijlocul comun, atunci  $AC \cap BD = \emptyset, AD \cap BC = \emptyset$ .



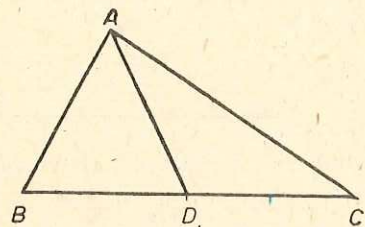


Fig. 1.77

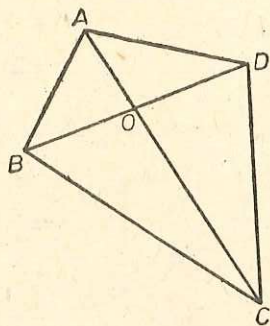


Fig. 1.78

### Exerciții recapitulative

1. Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$  și  $D$  este mijlocul segmentului  $(BC)$ . Să se arate că  $AD < \frac{BC}{2}$ .

*Indicație.* Din ipoteză  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC}) > m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$  deci sau  $m(\widehat{BAD}) > m(\widehat{ABC})$  și  $BD > AD$  sau  $m(\widehat{DAC}) > m(\widehat{ACB})$  și  $CD > AD$  (fig. 1.77).

2\*. Dacă în patrulaterul convex  $ABCD$ ,  $AB + BD \leq AC + CD$ , atunci  $AB < AC$ .

*Indicație.* Se arată în prealabil că suma lungimilor a două laturi opuse este mai mică decât suma lungimilor diagonalelor. Se obține:  $AB + CD < AC + BD$  și prin adunare membru cu membru cu inegalitatea din ipoteză se obține concluzia (fig. 1.78).

3. Dacă pentru triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  au loc:  $(AB) \equiv (A'B')$ ,  $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$ , atunci  $d(A, BC) = d(A', B'C')$ .

4. Se consideră triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  în care  $(AB) \equiv (A'B')$ ,  $(AC) \equiv (A'C')$ ,  $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$ . Să se arate că dacă unghiurile  $\widehat{C}$  și  $\widehat{C}'$  sînt ambele ascuțite (sau ambele obtuze) atunci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

5. Fie  $d$  bisectoarea unghiului propriu  $\widehat{BAC}$  și  $d'$  perpendiculara pe  $d$ , dusă prin  $B$ . Să se arate că  $d' \cap (AC) \neq \emptyset$ .

*Indicație.* Se ia  $B' \in (AC)$  astfel ca  $(AB) \equiv (A'B')$  și se arată că  $d'$  coincide cu  $BB'$ .

6\*. Reuniunea a două drepte concurente, are două axe de simetrie perpendiculare.

7\*. Dacă dreptele  $OA$  și  $OB$  nu sînt perpendiculare, dreapta  $OC$  este o axă de simetrie a mulțimii  $OA \cup OB$  dacă și numai dacă unghiurile  $\widehat{COA}$  și  $\widehat{COB}$  sînt congruente sau suplementare.

8\*. Fie  $ABCD$  un patrulater convex cu  $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$  și  $(DA) \equiv (CB)$ . Să se arate că mediatoarea  $d$  a segmentului  $(AB)$  intersectează segmentul  $(DC)$  și că  $d$  este o axă de simetrie a patrulaterului  $ABCD$ .

9\*. Dacă două drepte au o perpendiculară comună atunci mulțimea formată din reuniunea celor două drepte are axă de simetrie.

10. Fie  $A$  un punct dat,  $d$  o dreaptă dată și  $P$  un punct variabil pe  $d$ . Să se afle locul geometric al simetricului punctului  $P$  față de  $A$ .

11. Se dă un unghi propriu  $\widehat{AOB}$ . Să se afle locul geometric al punctelor  $M$  astfel încît  $(OB)$  să fie bisectoarea unghiului  $\widehat{AOM}$ . În ce caz locul geometric este diferit de mulțimea vidă?

12\*. Se consideră punctele  $M, N, P$  și  $Q$  pe laturile  $[AB], [BC], [CD], [DA]$  ale patrulaterului convex  $ABCD$ . Să se arate că patrulaterul  $MNPQ$  este convex. Generalizare.



## Paralelism. Asemănare

### § 1. Axioma paralelelor

**Definiție.** Două drepte  $d_1$  și  $d_2$ , situate în planul  $\mathcal{P}$ , se numesc *paralele* dacă nu au punct comun. Se notează  $d_1 \parallel d_2$ . Deci  $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow d_1 \cap d_2 = \emptyset$ .

Două segmente se numesc *paralele* dacă dreptele care le conțin sînt paralele. Teorema 1 din § 14 cap. I poate fi reformulată astfel: „Printr-un punct exterior unei drepte trece cel puțin o dreaptă paralelă cu ea“.

Să ne punem acum problema: fiind dată o dreaptă  $d$  și un punct  $M$  nesituat pe ea, există mai multe drepte care trec prin  $M$  și sînt paralele cu  $d$ ? (fig. II.1).

Intuitiv se pare că răspunsul este negativ, adică există o singură paralelă cu  $d$  prin  $M$ . Încă din antichitate au existat încercări pentru a demonstra acest lucru. Matematicianul grec Euclid (sec. III. î.e.n.) în cartea sa „Elemente“ a prezentat proprietatea sub forma unei axiome admitînd astfel, că nu poate fi demonstrată. Această soluție nu a mulțumit pe matematicieni care au încercat în continuare să o demonstreze, apărînd numeroase demonstrații, care ulterior s-au dovedit greșite. De-abia în secolul trecut, din lucrările matematicienilor Bolyai, Lobacevski, Gauss, precum și din modelele date de Beltrami, Klein, Poincaré se desprinde faptul că axiomele prezentate pînă aici nu sînt suficiente pentru a demonstra afirmația unicității paralelei la o dreaptă printr-un punct ce nu-i aparține, dar nici negația ei. Aceasta înseamnă că proprietatea este independentă de aceste axiome și va fi admisă ca o nouă axiomă.

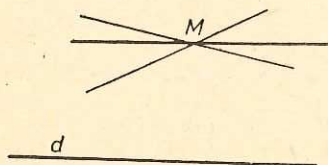


Fig. II.1

**Axioma paralelelor.** Printr-un punct  $A$  exterior unei drepte  $d$ , trece cel mult o dreaptă paralelă cu  $d$ .

O primă consecință a acestei axiome este:

**Teorema 1.** Printr-un punct  $A$ , exterior dreptei  $d$ , trece o singură paralelă cu  $d$ .

**Demonstratie.** Existența paralelei este asigurată de teorema 1 § 14 cap. I, iar unicitatea de axioma paralelelor.

Teoremele demonstrate fără a folosi „axioma paralelelor“ alcătuiesc ceea ce se numește „geometria absolută“. Prin admiterea axiomei paralelelor (numită și postulatul lui Euclid) și în consecință a tuturor teoremelor ce decurg din ea se obține „geometria euclidiană“. În

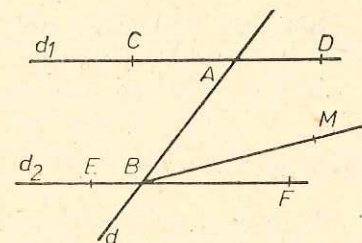


Fig. II.2

continuare se vor relua unele teoreme din „geometria absolută“ care în „geometria euclidiană“ vor avea un conținut mai bogat și se vor demonstra noi teoreme. Trebuie totuși menționat că nu toate proprietățile care apar în continuare în acest manual sînt valabile numai în geometria „euclidiană“, dar prezentarea prin separare totală a rezultatelor geometriei „absolute“ de cea „euclidiană“ ar fi îngreunat expunerea.

**Teorema 2. (Teorema paralelelor tăiate de o secantă.)** Două drepte paralele formează cu orice secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.

**Demonstratie.** Fie  $d_1 \parallel d_2$ , secanta  $d$ ,  $d \cap d_1 = \{A\}$ ,  $d \cap d_2 = \{B\}$ ,  $C \in d_1$ ,  $F \in d_2$ ,  $C$  și  $F$  de o parte și de alta a lui  $d$  (fig. II.2).

Se presupune că  $\widehat{CAB} \cong \widehat{ABF}$ ; atunci, în semiplanul ( $dF$  există semidreapta unică ( $BM$ ,  $BM \neq d_2$ , astfel încît  $\widehat{CAB} \cong \widehat{ABM}$ . Rezultă că  $BM \parallel d_1$ , deci prin  $B$  trec  $d_2$  și  $BM$ , paralele cu  $d_1$ , ceea ce este în contradicție cu axioma paralelelor.

**Definiție.** Patrulaterul cu iaturile opuse paralele se numește *paralelogram*.

**Teorema 3.** Într-un paralelogram  $ABCD$ , cu  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ , sînt verificate următoarele proprietăți:

i)  $(AB) \cong (CD)$ ,  $(BC) \cong (AD)$ ,

ii)  $\widehat{DAB} \cong \widehat{DCB}$ ,  $\widehat{ADC} \cong \widehat{ABC}$ ,

iii) Dacă  $\{O\} = AC \cap BD$  atunci  $(OA) \cong (OC)$ ,  $(OB) \cong (OD)$ ,

iv) Dacă  $\{O\} = AC \cap BD$  atunci  $O$  este centrul de simetrie al patrulaterului  $ABCD$ .

**Teorema 4.** Dacă în patrulaterul  $ABCD$  este verificată una din proprietățile i), ii), iii), iv) atunci patrulaterul este paralelogram.

Demonstrațiile acestor două teoreme se lasă sub formă de exercițiu. Se disting următoarele paralelograme particulare.



**Definiții.** Paralelogramul cu un unghi drept se numește *dreptunghi*. Paralelogramul cu două laturi alăturate congruente se numește *romb*.

Dreptunghiul cu două laturi alăturate congruente se numește *pătrat*.

### Exerciții

1. Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri corespondente congruente și perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.
2. Două drepte distincte paralele cu a treia dreaptă sînt paralele între ele.
3. Unghiurile cu laturile respectiv paralele sînt congruente sau suplementare.
4. Dacă  $d \perp d_1$  atunci  $d$  este perpendiculară pe orice dreaptă paralelă cu  $d_1$ .
5. Diagonalele unui dreptunghi sînt congruente.
6. Să se determine axele de simetrie ale unui dreptunghi, romb, pătrat.
7. Să se arate că diagonalele unui romb sînt bisectoarele unghiurilor rombului.
8. Fie triunghiul  $ABC$ ,  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  și  $M \in (BC)$ ,  $(MB) \equiv (MC)$ . Să se demonstreze că  $AM = \frac{BC}{2}$ .
9. Dacă în triunghiul  $ABC$ ,  $M$  este mijlocul laturii  $(BC)$  și  $AM = \frac{BC}{2}$ , atunci triunghiul este dreptunghic.
10. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor situate la aceeași distanță de o dreaptă dată este reuniunea a două drepte paralele cu acea dreaptă.
11. Diagonalele unui romb sînt perpendiculare.
12. Se dă paralelogramul  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ ) în care  $(BD) \equiv (AD)$ . Fie  $M$  mijlocul laturii  $(CD)$  și  $(ME) \equiv (BM)$ ,  $M \in (BE)$ . Să se arate că: a)  $BM \perp CD$  b)  $A, D, E$  coliniare c)  $(AD) \equiv (DE)$ .
13. Dacă două laturi opuse ale unui patrulater  $ABCD$  sînt paralele și congruente atunci patrulaterul este paralelogram.

*Observație.* La aplicarea teoremei 4 și a exerc. 13 trebuie să verificăm cu atenție condiția ca  $ABCD$  să fie *patrulater* în sensul definiției date: două laturi opuse să nu aibă un punct comun.

## § 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

**Teorema 1.** Într-un triunghi, măsura oricărui unghi exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el.

*Demonstrație.* Fie  $\widehat{ACD}$  un unghi exterior al triunghiului  $ABC$  și  $d$  paralela prin  $C$  la  $AB$ . Atunci  $A$  și  $B$  sînt de aceeași parte a lui  $d$ , iar  $B$  și  $D$  de o parte și de alta a lui  $d$ , de unde rezultă că segmentul  $(AD)$  intersectează dreapta  $d$  într-un punct  $E$  (fig. 11.3).

Rezultă  $E \in \text{Int } \widehat{ACD}$  și  $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ECD})$  (axioma U.3).

Pe de altă parte  $\widehat{ACE} \equiv \hat{A}$  ca un-

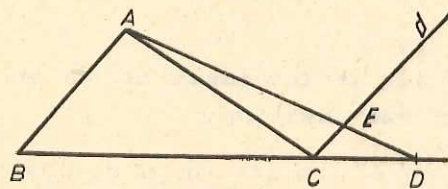


Fig. 11.3

ghiuri alterne interne și  $\widehat{ECD} \equiv \hat{B}$  ca unghiuri corespondente, deci  $m(\widehat{ACD}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$ .

Această teoremă este o completare a teoremei unghiului exterior demonstrată în cap. I și ea permite determinarea sumei măsurilor unghiurilor unui triunghi.

**Teorema 2.** Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este  $180^\circ$ .

*Demonstrație.* În figura 11.3  $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ECD}) + m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BCD}) = 180^\circ$ .

### Exerciții

1. Suma măsurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este  $90^\circ$ .
2. Măsura fiecărui unghi a unui triunghi echilateral este  $60^\circ$ .
3. Dacă într-un triunghi dreptunghic  $ABC$ ,  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ,  $m(\hat{B}) = 30^\circ$ , atunci  $AC = \frac{BC}{2}$ .
4. În triunghiul  $ABC$  se duce bisectoarea  $AA'$  ( $A' \in BC$ ), iar prin  $A'$  se duc paralelele  $A'M$  și  $A'N$  la laturile  $(AB)$  și  $(AC)$  ( $M \in AC$ ,  $N \in AB$ ). Să se arate că  $AMA'N$  este un romb.
5. În triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ) se duce înălțimea  $AD$  ( $D \in BC$ ). Se unește  $D$  cu mijloacele  $E$  și  $F$  ale laturilor  $AB$  și  $AC$ . Să se arate că  $m(\widehat{FDE}) = 90^\circ$ .
6. Fie  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  bisectoarele unghiurilor triunghiului  $ABC$  ( $A' \in BC$ ,  $B' \in AC$ ,  $C' \in AB$ ). Să se arate că  $m(\widehat{AA'B}) + m(\widehat{BB'C}) + m(\widehat{CC'A}) = 270^\circ$ .
7. Pe laturile  $(AB)$  și  $(AC)$  ale triunghiului echilateral  $ABC$  se consideră respectiv punctele  $D$  și  $E$  astfel ca  $(AD) \equiv (CE)$  și fie  $\{M\} = (BE) \cap (CD)$ . Să se arate că  $m(\widehat{BMC}) = 120^\circ$ .

8. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are două unghiuri opuse congruente atunci bisectoarele celorlalte două unghiuri sînt paralele și reciproc, dacă bisectoarele a două unghiuri opuse ale unui patrulater convex sînt paralele atunci celelalte două unghiuri sînt congruente.

9. Fie triunghiul  $ABC$  ascuțitunghic și  $AA' \perp BC$ ,  $BB' \perp AC$ ,  $\{M\} = AA' \cap BB'$ . Atunci  $m(\widehat{AMB}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$ .

10. Bisectoarele unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi ale cărui diagonale sînt paralele cu laturile paralelogramului.

11. Două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sînt congruente sau suplementare.

12. Se consideră dreapta  $d$ ,  $O \notin d$  și  $O$  piciorul perpendicularei din  $O$  pe  $d$ . Fie  $A \in d$ , astfel încît  $m(\widehat{OAP}) = 45^\circ$ . Pentru fiecare punct  $M$ ,  $M \in d$ , astfel încît  $A \in (PM)$  se construiește segmentul  $(MN)$  astfel încît  $MN \perp OM$  și  $(MN) \equiv (OM)$ ,  $N$  fiind în



semiplanul  $S$  limitat de  $d$  și conținând  $O$ . Să se arate că locul geometric al punctului  $N$  când  $M$  descrie semidreapta opusă lui  $(AP)$ , este o semidreaptă perpendiculară în  $A$  pe  $OA$ , situată în  $S$ .

13\*. Să se demonstreze că dacă într-un patrulater convex două unghiuri opuse sînt obtuze atunci lungimea diagonalei determinată de virfurile lor este mai mică decît lungimea celeilalte diagonale.

### § 3. Linia mijlocie

**Definiție.** Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește *linie mijlocie a triunghiului*.

În figura II.4  $(MA) \equiv (MB)$ ,  $(NA) \equiv (NC)$  și  $(PB) \equiv (PC)$ .  $(MN)$ ,  $(NP)$ ,  $(MP)$  sînt linii mijlocii ale triunghiului  $ABC$ . Are loc următoarea teoremă foarte utilă într-o serie de aplicații.

**Teorema 1.** Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de două laturi, este paralelă cu cea de a treia latură și are ca lungime  $\frac{1}{2}$  din lungimea celei de a treia laturi.

**Demonstrație.** Se consideră triunghiul  $ABC$ ,  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$ ,  $(MA) \equiv (MB)$ ,  $(NA) \equiv (NC)$ . Fie  $P$  astfel încît  $N \in (MP)$ ,  $(MN) \equiv (NP)$ , (fig. II.5). Din teorema 4, iii, § 1, rezultă că  $AMCP$  este paralelogram. Deci  $PC \parallel AB$  și  $(PC) \equiv (MB)$ .  $B$  și  $P$  sînt de o parte și de alta a lui  $MC$ , deci  $MBCP$  este un patrulater, care are laturile  $(PC)$  și  $(MB)$  paralele și congruente. Atunci, din ex. 13, § 1, rezultă că patrulaterul  $MBCP$  este paralelogram, deci  $MP \parallel BC$ ,  $(MP) \equiv (BC)$  și deoarece  $MP = 2MN$  rezultă  $MN = \frac{1}{2} BC$ .

**Teorema 2.** (Reciprocă teoremei 1.) Dacă  $M$  este mijlocul laturii  $(AB)$  a triunghiului  $ABC$  și  $MN \parallel BC$ ,  $N \in (AC)$  atunci  $N$  este mijlocul laturii  $(AC)$ .

Se demonstrează ușor prin reducere la absurd.

**Definiție.** Un patrulater cu două laturi opuse paralele și celelalte două neparalele se numește *trapez*. Laturile paralele ale trapezului se numesc *baze*. Dacă laturile neparalele sînt congruente, trapezul se numește *isoscel*.

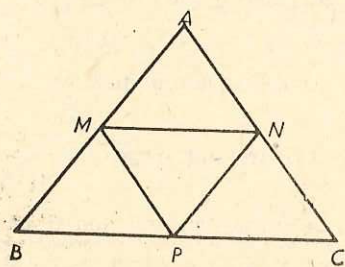


Fig. II.4

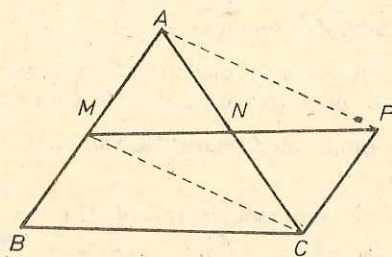


Fig. II.5

**Definiție.** Segmentul determinat de mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește *linie mijlocie a trapezului*.

În figura II.6,  $AB \parallel CD$ ,  $AD$  nu este paralel cu  $BC$ ,  $ABCD$  este trapez,  $(AB)$  baza mare  $(DC)$  baza mică.  $(AM) \equiv (MD)$ ,  $(BN) \equiv (NC)$ ,  $(MN)$  linie mijlocie a trapezului.  $(AC)$  și  $(BD)$  se numesc diagonale iar  $\{O\} = (BD) \cap (AC)$ ,  $O$  este intersecția diagonalelor. Dacă unul dintre unghiuri este drept, trapezul se va numi *dreptunghic*.

**Teorema 3.** Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele trapezului și are lungimea egală cu semisuma lungimilor celor două baze.

**Demonstrație.** Fie trapezul  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$  și  $(MN)$  linia mijlocie,  $M \in (AD)$ ,  $N \in (BC)$  (fig. II.7). Se notează cu  $E$  intersecția diagonalei  $(AC)$  cu  $(MN)$ . Se presupune prin absurd că  $E$  nu este mijlocul segmentului  $(AC)$ . Fie deci,  $E' \neq E$  mijlocul segmentului  $(AC)$ . În triunghiul  $ABC$ ,  $(E'N)$  este linie mijlocie, deci  $E'N \parallel AB$  iar în triunghiul  $ADC$ ,  $(E'M)$  este linie mijlocie, deci  $E'M \parallel DC$ ; dar  $AB \parallel DC$  deci  $E'M \parallel AB$  și  $E'N \parallel AB$ . Din axioma de paralelism rezultă că  $M, E', N$  sînt coliniare deci  $E = E'$  și  $MN \parallel AB$ ,  $MN \parallel DC$ .

$$ME = \frac{1}{2} DC, NE = \frac{1}{2} AB \text{ și } MN = ME + NE = \frac{1}{2} (AB + DC).$$

### Exerciții

- Pe laturile patrulaterului convex  $ABCD$  se consideră punctele  $M, N, P, Q$ , mijloacele segmentelor  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(CD)$ ,  $(DA)$ . Să se arate că patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.
- Pe laturile  $(AB)$ ,  $(CD)$  ale paralelogramului  $ABCD$  se iau arbitrar punctele  $M$  și  $N$ . Dreapta  $d$ , determinată de mijloacele laturilor  $(BC)$  și  $(AD)$ , intersectează succesiv segmentele  $(AN)$ ,  $(MD)$ ,  $(BN)$ ,  $(MC)$  în  $E, F, G, H$ . Să se demonstreze că  $(EF) \equiv (GH)$ .
- Fie triunghiul echilateral  $ABC$  și punctele  $D$  și  $E$  astfel ca  $C \in (BD)$ ,  $A \in (CE)$  și  $(DC) \equiv (AE) \equiv (AB)$ . Se notează  $\{F\} = DE \cap AB$ . Să se arate că  $AF = \frac{1}{3} AB$ .

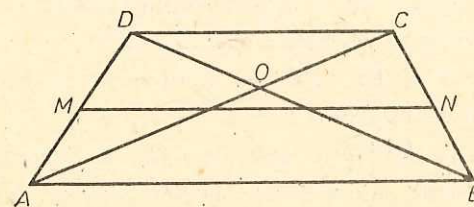


Fig. II.6

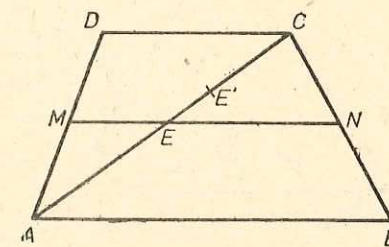


Fig. II.7



*Indicație.* Se construiește  $CG \parallel AB$ ,  $G \in DE$ ;  $(GC)$  este linie mijlocie în triunghiul  $BDF$ , iar  $(AF)$  este linie mijlocie în triunghiul  $ACG$ .

4. Să se demonstreze că diagonalele trapezului isoscel sînt congruente și unghiurile adiacente unei baze sînt de asemenea congruente.

5. Să se determine axa de simetrie a unui trapez isoscel.

6. Se consideră trapezul  $ABCD$  în care  $AB \parallel CD$  și  $AD = AB + CD$ . Să se demonstreze că dacă  $E$  este mijlocul segmentului  $(BC)$  atunci  $m(\widehat{AED}) = 90^\circ$ .

*Indicație.* Fie  $(EF)$  linia mijlocie a trapezului,  $EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{AD}{2}$  deci triunghiurile  $DEF$  și  $AEF$  sînt isoscele și aplicînd teorema relativă la suma măsurilor unghiurilor triunghiului  $AED$  rezultă că  $m(\widehat{AED}) = 90^\circ$ .

7. Se consideră un triunghi isoscel  $ABC$ ,  $(AB) \equiv (AC)$  și punctele variabile  $P \in (AB)$ ,  $Q \in (AC)$  astfel ca  $(BP) \equiv (AQ)$ . Fie  $O$  mijlocul segmentului  $(PQ)$ .

i) Să se demonstreze că  $d(O, BC)$  este constantă.

ii) Să se afle locul geometric al punctului  $O$ .

#### § 4. Concurența unor drepte în triunghi

În capitolul I, § 13 s-a demonstrat concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi și s-a enunțat o condiție suficientă pentru ca mediatoarele laturilor triunghiului să fie concurente.

Dificultatea a constat în faptul că nu s-a putut afirma cu certitudine concurența a două dintre mediatoarele laturilor triunghiului, în geometria absolută nefiind admisă axioma paralelelor. Se poate acum enunța:

**Teorema 1.** În orice triunghi, mediatoarele laturilor sînt concurente.

*Demonstrație.* Este suficient să se demonstreze concurența a două mediatoare. Fie triunghiul  $ABC$ ,  $d_1$  și  $d_2$  mediatoarele segmentelor  $(AB)$  respectiv  $(BC)$  (fig. II.8). Presupunînd că  $d_1$  și  $d_2$  nu sînt concurente, rezultă  $d_1 \parallel d_2$ .

Pentru că  $d_2 \perp BC$  rezultă și  $d_1 \perp BC$ . Dar  $d_1 \perp BA$ . Deci prin  $B$  trec două perpendiculare distincte pe dreapta  $d_1$ , și anume  $BA \perp d_1$ ,  $BC \perp d_1$ , ceea ce nu este posibil.

Prin urmare  $d_1$  și  $d_2$  sînt concurente. În continuare se aplică teorema 5 din cap. I, § 13.

Relativ la triunghi se definesc și alte drepte (linii) importante.

**Definiții.** Dreapta determinată de virful unui triunghi și mijlocul laturii opuse se numește *mediană*.

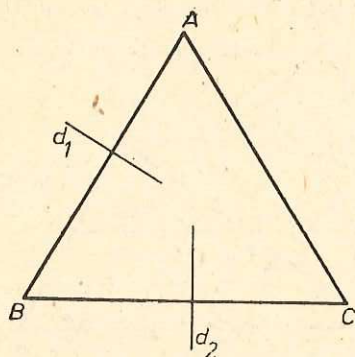


Fig. II.8

Perpendiculara prin virful unui triunghi pe dreapta determinată de latura opusă se numește *înălțime*.

**Teorema 2.** Înălțimile unui triunghi sînt concurente.

*Demonstrație.* Fie triunghiul  $ABC$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  picioarele perpendicularelor din  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , respectiv pe  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  și  $DEF$  triunghiul format de paralelele duse la laturile triunghiului  $ABC$  prin virfurile acestuia (fig. II.9).

Din construcție,  $ABCF$  și  $BCAD$  sînt paralelograme deci  $(BC) \equiv (AF) \equiv (AD)$ . Pentru că  $BC \parallel DF$  și  $AA' \perp BC$  rezultă că  $AA' \perp DF$ . Deci  $AA'$  este mediatoarea segmentului  $(DF)$ . În mod analog se arată că  $BB'$  și  $CC'$  sînt mediatoarele segmentelor  $(DE)$  respectiv,  $(EF)$ . Prin urmare înălțimile triunghiului  $ABC$  sînt mediatoarele laturilor triunghiului  $DEF$  și deci din teorema 1 rezultă că sînt concurente.

**Teorema 3.** Medianele unui triunghi sînt concurente. Punctul de intersecție determină cu mijlocul fiecărei laturi un segment a cărui lungime este  $1/2$  din lungimea segmentului pe care-l determină cu virful opus laturii.

*Demonstrație.* Fie triunghiul  $ABC$ ,  $D$  și  $E$  mijloacele laturilor  $(BC)$  respectiv  $(AC)$ . Deoarece în triunghiul  $BAD$ ,  $(BE \subset \text{Int } \widehat{ABC})$ ,  $A \in (BA)$ ,  $D \in (BC)$ , rezultă că  $(BE)$  și  $(AD)$  au un punct comun  $G$  (fig. II.10).

Deoarece  $(AD) \subset \text{Int } \widehat{BAE}$  rezultă că  $\{G\} = (AD) \cap (BE)$ . Fie  $M$ ,  $N$  mijloacele segmentelor  $(AG)$  respectiv  $(BG)$ . În triunghiul  $ABG$ ,  $(MN)$  este linie mijlocie, deci  $MN \parallel AB$  și  $MN = \frac{1}{2} AB$ . În triunghiul  $ABC$ ,  $(DE)$

este linie mijlocie, deci  $DE \parallel AB$  și  $DE = \frac{1}{2} AB$ . Rezultă că  $(DE) \equiv (MN)$  și  $DE \parallel MN$ .  $MNDE$  este patrulater și deci este paralelogram (ex. 13, § 1, II).

Rezultă  $GD = MG = AM = \frac{1}{3} AD$ . Fie acum  $F$  mijlocul laturii  $(AB)$

și  $\{G'\} = (FC) \cap (AD)$ . În mod analog rezultă  $DG = \frac{1}{3} AD$ . Deoarece  $G, G' \in (DA)$ , din teorema de construcție a unui segment rezultă  $G = G'$ .

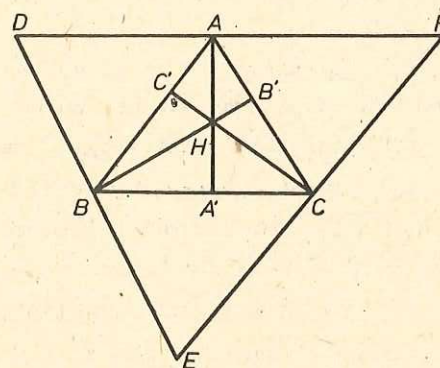


Fig. II.9

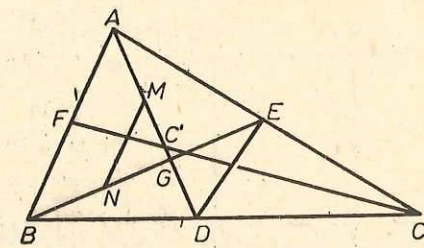


Fig. II.10



**Observații.** Punctul  $H$  de concurență al înălțimilor se numește *ortocentrul* triunghiului. Punctul  $G$  de concurență al medianelor se numește *centrul de greutate* al triunghiului. Centrul de greutate al triunghiului și punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor unui triunghi aparțin interiorului triunghiului. Ortocentrul triunghiului și punctul de concurență al mediatoarelor triunghiului pot să nu aparțină interiorului triunghiului. În unele probleme de geometrie prin cuvintele „mediană“ sau „bisectoare“ se va înțelege segmentul determinat de vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse, respectiv segmentul determinat de vârful triunghiului și intersecția bisectoarei cu latura opusă unghiului. Termenul „înălțime“ va desemna segmentul determinat de vârful triunghiului și piciorul perpendicularei din vârf pe dreapta determinată de latura opusă. Se pot folosi de asemenea termenii de „mediană“, „bisectoare“, „înălțime“ și pentru lungimile acestor segmente fără a exista pericol de confuzie deoarece rezultă din text sensul care li se atribuie. Astfel, teorema 3 poate fi reformulată într-un enunț ușor de memorat: „Medianele unui triunghi sînt concurente într-un punct situat la  $\frac{2}{3}$  de vîrf și  $\frac{1}{3}$  de bază pe fiecare dintre ele“.

### Exerciții

1. Să se determine poziția ortocentrului unui triunghi dreptunghic și poziția punctului de concurență a mediatoarelor laturilor sale.
2. Fie triunghiul  $ABC$  și cele două unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură  $(BC$  respectiv  $(CB)$ . Să se demonstreze că bisectoarele acestor unghiuri exterioare și bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$  sînt concurente (completarea ex. 1, § 13 cap. I).
3. Unghiurile opuse  $\hat{A}$  și  $\hat{C}$  ale patrulaterului convex  $ABCD$  sînt drepte.  $AD \cap BC = \{E\}$ ,  $AB \cap DC = \{F\}$ . Să se demonstreze că  $BD \perp EF$ .
- 4\*. Se consideră triunghiul ascuțitunghic  $ABC$ ,  $H$  ortocentrul și  $A' \in (HA)$ ,  $B' \in (HB)$ ,  $C' \in (HC)$  astfel ca  $(HA') \equiv (BC)$ ,  $(HB') \equiv (CA)$ ,  $(HC') \equiv (AB)$ . Să se arate că:
  - i) dacă  $M, N, P$  sînt mijloacele laturilor  $(BC)$ ,  $(AC)$ ,  $(AB)$  atunci  $B'C' = 2AM$ ,  $A'C' = 2BN$ ,  $A'B' = 2CP$ .
  - ii)  $H$  este centrul de greutate al triunghiului  $A'B'C'$ .
5. În paralelogramul  $ABCD$  se duce  $CE \perp BC$ ,  $AE \perp AB$ . Să se arate că  $DE \perp AC$ .
- 6\*. În triunghiul  $ABC$  ( $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ) se duce înălțimea  $AD$ ,  $D \in BC$  și se consideră  $F \in (AD)$ . Perpendiculara în  $F$  pe  $FC$  intersectează pe  $AB$  în  $G$ . Paralela prin  $A$  la  $FG$  intersectează  $BC$  în  $H$ . Să se arate că patrulaterul  $AGFH$  este paralelogram.

### § 5. Paralele echidistante

Fie  $d_1$  și  $d_2$  două drepte distincte,  $d_1 \parallel d_2$  și  $M_1 \in d_1$ ,  $M_2 \in d_1$ ,  $M'_1, M'_2$  picioarele perpendicularelor din  $M_1$  respectiv  $M_2$  pe  $d_2$  (fig. II. 11). Atunci

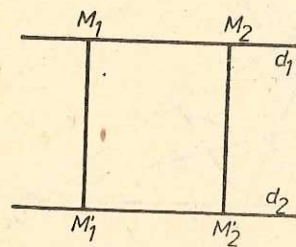


Fig. II.11

$M_1M'_1M'_2M_2$  este un dreptunghi deci  $(M_1M'_1) \equiv (M_2M'_2)$  sau  $d(M_1, d_2) = d(M_2, d_2)$  și oricare ar fi punctul  $M \in d_1$ ,  $d(M, d_2)$  este constantă. Oricare ar fi  $N \in d_2$ ,  $d(N, d_1)$  este de asemenea constantă,  $d(M, d_2) = d(N, d_1)$ . Valoarea acestei constante se numește *distanța dintre dreptele paralele  $d_1$  și  $d_2$*  și se va nota  $d(d_1, d_2)$ .

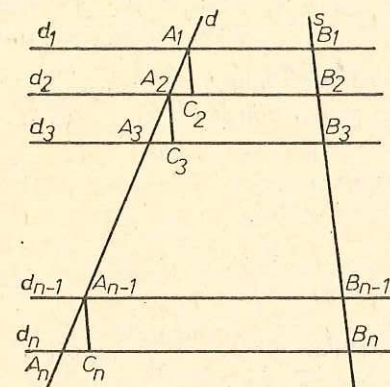


Fig. II.12

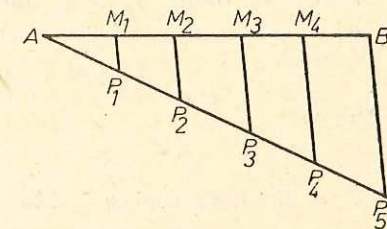


Fig. II.13

**Teoremă. (Teorema paralelelor echidistante.)** Fie pe dreapta  $d$  punctele distincte  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ ), astfel ca  $(A_1A_2) \equiv (A_2A_3) \equiv \dots \equiv (A_{n-1}A_n)$  și dreptele  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ ,  $A_1 \in d_1$ ,  $A_2 \in d_2$ ,  $A_3 \in d_3, \dots, A_n \in d_n$ . Dacă  $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \dots \parallel d_n$  atunci dreptele  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  determină pe orice secantă segmente congruente.

**Demonstrație.** Fie  $s$  secanta dreptelor  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  și  $\{B_1\} = d_1 \cap s$ ,  $\{B_2\} = d_2 \cap s$ ,  $\{B_3\} = d_3 \cap s, \dots, \{B_n\} = d_n \cap s$  (fig. II.12). Se consideră punctele  $C_2 \in d_2$ ,  $C_3 \in d_3, \dots, C_n \in d_n$  astfel ca  $A_1C_2 \parallel s$ ,  $A_2C_3 \parallel s, \dots, A_{n-1}C_n \parallel s$ .  $\triangle A_1A_2C_2 \equiv \triangle A_2A_3C_3 \equiv \dots \equiv \triangle A_{n-1}A_nC_n$  (din L.U.L.), deci  $(A_1C_2) \equiv (A_2C_3) \equiv \dots \equiv (A_{n-1}C_n)$ . Din paralelogramele  $A_1C_2B_2B_1$ ,  $A_2C_3B_3B_2, \dots, A_{n-1}C_nB_nB_{n-1}$  rezultă că  $(A_1C_2) \equiv (B_1B_2)$ ,  $(A_2C_3) \equiv (B_2B_3), \dots, (A_{n-1}C_n) \equiv (B_{n-1}B_n)$ , deci  $(B_1B_2) \equiv (B_2B_3) \equiv \dots \equiv (B_{n-1}B_n)$ .

**Observație.** Dacă secanta  $s$  este perpendiculară pe dreptele paralele  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  atunci segmentele determinate pe secantă au lungimi egale și cu distanța dintre două drepte paralele consecutive. Din acest motiv trei sau mai multe drepte paralele care îndeplinesc condițiile teoremei se numesc paralele *echidistante*.

### Exerciții

1. Fînd dat segmentul  $(AB)$  să se determine un segment  $(MN)$  astfel ca  $5MN = AB$  (generalizare:  $nMN = AB$ ).

**Indicație:** Se consideră pe semidreapta  $(AX(AX \neq AB))$  (fig. II.13), un segment oarecare  $(AP_1)$  și punctele distincte  $P_2, P_3, P_4, P_5$  astfel încît  $(AP_1) \equiv (P_1P_2) \equiv (P_2P_3) \equiv (P_3P_4) \equiv (P_4P_5)$ . Prin  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  se duc drepte paralele cu  $P_5B$  care intersectează  $(AB)$  în  $M_1, M_2, M_3, M_4$ ,  $(AM_1) \equiv (M_1M_2) \equiv (M_2M_3) \equiv (M_3M_4) \equiv (M_4B)$  și  $AM_1 = \frac{1}{5}AB$ .

2. Să se formuleze o reciprocă a teoremei 3, § 3, folosind teorema paralelelor echidistante.



## § 6. Teorema lui Thales

**Definiție.** Fiind date mulțimile ordonate de numere reale  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ele se numesc *proporționale* dacă există un număr real, nenul  $k$ , astfel încît  $a_1 = kb_1$ ,  $a_2 = kb_2, \dots, a_n = kb_n$ .  $k$  se numește în acest caz *coeficient de proporționalitate*.

Exemplu

$$A = (2, 5, 9), B = (6, 15, 27),$$

$A$  și  $B$  sînt proporționale, coeficientul de proporționalitate fiind  $k = \frac{1}{3}$ , pentru că  $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$ ,  $5 = \frac{1}{3} \cdot 15$ ,  $9 = \frac{1}{3} \cdot 27$ . Se poate spune că și  $(6, 15, 27)$  sînt proporționale cu  $(2, 5, 9)$ , în acest caz coeficientul de proporționalitate fiind  $k' = 3$ . În cazul particular  $k = 1$  cele două mulțimi de numere coincid. Dacă numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  nu sînt nule atunci definiția dată este echivalentă cu egalitățile:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

**Definiție.** Fiind date mulțimile ordonate de *segmente*

$$((A_1B_1), (A_2B_2), \dots, (A_nB_n))$$

$$((A'_1B'_1), (A'_2B'_2), \dots, (A'_nB'_n)), n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

ele se numesc *proporționale* dacă mulțimile ordonate de numere  $(A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n)$ ,  $(A'_1B'_1, A'_2B'_2, \dots, A'_nB'_n)$  sînt proporționale.

**Teorema 1. (Teorema lui Thales.)** Fie triunghiul  $ABC$  și  $DE \parallel BC$ ,  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$ . Atunci

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

*Demonstrație*

**Cazul I.** Se presupune că  $\frac{AD}{AB} = \frac{m}{n}$  unde  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ; rezultă  $\frac{AD}{m} = \frac{AB}{n}$  deci  $(AD, AB)$  și  $(m, n)$  sînt proporționale. Fie  $k > 0$  coeficientul de proporționalitate. Deci  $AD = k \cdot m$  și  $AB = k \cdot n$ . Se împarte segmen-

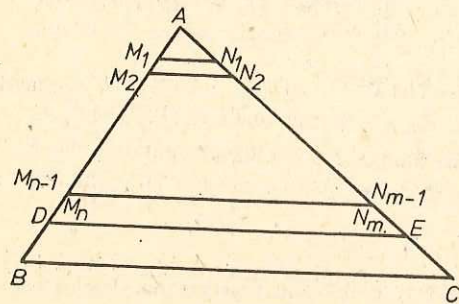


Fig. II.14

tu  $(AB)$  în  $n$  segmente congruente, prin punctele  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ , astfel încît

$AM_1 = k$ ,  $AM_2 = 2k, \dots$ ,  
 $AM_{n-1} = (n-1)k$ ,  $AB = n \cdot k$   
 (fig. II.14). Pentru că  $AD = m \cdot k$  rezultă că  $D = M_m$ . Prin punctele  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  se duc paralele la  $BC$  care intersectează  $(AC)$

respectiv în  $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$ . Deoarece  $DE$  este una dintre aceste paralele,  $E = N_m$ . Din teorema paralelelor echidistante rezultă că

$$(AN_1) \equiv (N_1N_2) \equiv \dots \equiv (N_{n-1}C).$$

Atunci

$$AE = mAN_1 \text{ și } AC = nAN_1,$$

deci

$$\frac{AE}{AC} = \frac{m \cdot AN_1}{n \cdot AN_1} = \frac{m}{n} \text{ adică } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

**Cazul II.** Fie  $\frac{AD}{AB} = \alpha$  unde  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .

Se presupune că  $\frac{AE}{AC} = \beta \neq \alpha$  (fig. II.15).

Cum  $\beta < 1$ , există punctul unic  $E'$ ,  $E' \in (AC)$ ,  $E' \neq E$ , astfel încît:

$$AE' = \alpha AC \text{ deci } \frac{AE'}{AC} = \alpha.$$

a) Dacă  $\beta > \alpha$  atunci  $E' \in (AE)$  și  $AE' < AE$ . Există  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încît  $\frac{AC}{n} < EE'$ . Se construiesc pe  $(AC)$  punctele  $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$  care împart  $(AC)$  în  $n$  segmente congruente de lungime  $k$  unde  $k = \frac{AC}{n}$  și

$$AN_1 = k, AN_2 = 2k, \dots, AN_{n-1} = (n-1)k, AC = n \cdot k.$$

Deoarece  $EE' > k$ , rezultă că cel puțin unul dintre punctele de diviziune, de exemplu  $N_i \in (EE')$ . Atunci

$$AN_i = ik > AE' \text{ și } \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} > \frac{AE'}{AC} = \alpha.$$

Prin  $N_i$  se duce  $N_iM_i \parallel BC$ ,  $M_i \in (AB)$ . Aplicînd rezultatul demonstrat în cazul I, rezultă:

$$(1) \quad \frac{AM_i}{AB} = \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} > \alpha.$$

Pe de altă parte, deoarece  $M_iN_i \parallel DE$  punctul  $M_i \in (AD)$  deci  $AM_i < AD$  și

$$(2) \quad \frac{AM_i}{AB} < \frac{AD}{AB} = \alpha.$$

Inegalitățile (1) și (2) fiind contradictorii rezultă că nu este posibil  $\beta > \alpha$ .

b) Dacă  $\beta < \alpha$  atunci  $E' \in (EC)$  și există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încît  $\frac{AC}{n} < EE'$  (fig. II.16). Analog cazului II. a) punctele  $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$  împart segmentul  $(AC)$

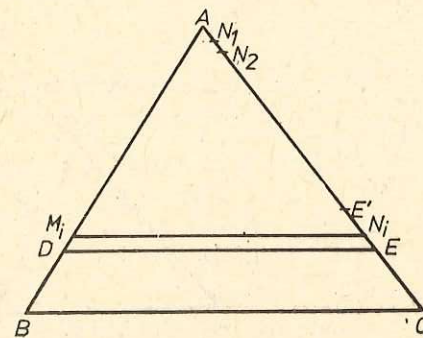


Fig. II.15

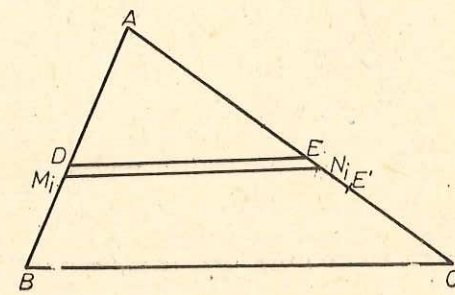


Fig. II.16



în  $n$  segmente congruente de lungime  $k$ ,  $k = \frac{AC}{n}$  și deoarece că  $k < EE'$ , există un punct de diviziune  $N_i \in (EE')$ . Atunci

$$AN_i = ik < AE' \text{ și } \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} < \frac{AE'}{AC} = \alpha.$$

Se construiește  $N_i M_i \parallel BC$  și  $M_i \in (AB)$ . Aplicînd rezultatul demonstrat la cazul I, rezultă

$$(3) \quad \frac{AM_i}{AB} = \frac{AN_i}{AC} = \frac{i}{n} < \alpha$$

și deoarece  $M_i N_i \parallel DE$ ,  $M_i \in (BD)$  deci  $AM_i > AD$  adică

$$(4) \quad \frac{AM_i}{AB} > \frac{AD}{AB} = \alpha.$$

Inegalitățile (3) și (4) fiind contradictorii rezultă că nu este posibil  $\beta < \alpha$ . Din II a) și b) rezultă  $\alpha = \beta$  ceea ce demonstrează teorema.

*Observație.* Enunțul teoremei lui Thales este mai ușor de memorat în formularea: O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte laturi segmente proporționale.

Folosind proprietățile proporțiilor se pot obține și alte proporții echivalente cu

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ și anume: } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ sau } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

**Teorema 2. (Consecință a teoremei lui Thales.)** Fie triunghiul  $ABC$   $d \parallel BC$  și  $\{D\} = d \cap AB$ ,  $\{E\} = d \cap AC$ ,  $A \notin d$ . Atunci

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

*Demonstrație*

*Cazul I.* Dacă  $D \in (AB)$  se aplică teorema 1 (demonstrată anterior), triunghiului  $ABC$  și dreptei  $DE$  (fig. II. 17).

*Cazul II.* Dacă  $B \in (AD)$  se aplică teorema 1 triunghiului  $ADE$  și dreptei  $BC$  (fig. II. 18).

*Cazul III.* Dacă  $A \in (BD)$  se construiesc segmentele  $(AM) \equiv (AD)$ ,  $(AN) \equiv (AE)$ ,  $(AM) \subset (AB)$ ,  $(AN) \subset (AC)$  (fig. II.19). Atunci  $EMND$  este paralelogram și  $MN \parallel ED \parallel BC$ . Dacă  $M \in (AB)$  se aplică teorema 1

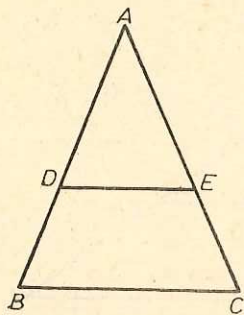


Fig. II.17

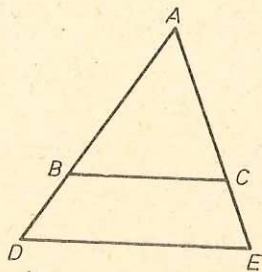


Fig. II.18

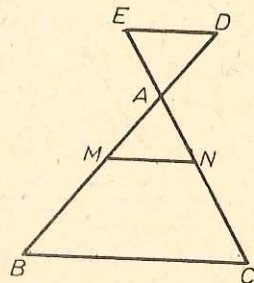


Fig. II.19

triunghiului  $ABC$  și dreptei  $MN$ , dacă  $B \in (AM)$ , se aplică teorema 1 triunghiului  $AMN$  și dreptei  $BC$ .

**Teorema 3. (Reciproca teoremei 1.)** Fie triunghiul  $ABC$  și  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$ , astfel încît

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ sau } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ sau } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

atunci  $DE \parallel BC$ .

Demonstrația se face folosind metoda reducerii la absurd.

Teoremele 1, 2, 3 pot fi enunțate și astfel:

**Teorema lui Thales.** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $D, E$  distincte diferite de  $A$ ,  $D \in AB$ ,  $E \in AC$  astfel încît  $D$  și  $E$  se află amîndouă fie pe laturile unghiului  $\widehat{BAC}$  fie pe prelungirile acestora. Atunci  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$  dacă și numai dacă  $DE \parallel BC$ .

Această teoremă are numeroase aplicații în probleme care cer stabilirea unor relații între lungimi de segmente sau în demonstrarea paralelismului a două drepte.

**Teorema 4. (Teorema paralelelor neechidistante.)** Se consideră dreptele  $d_1, d_2, \dots, d_n$ ,  $n > 2$ ,  $d_1 \parallel d_2 \parallel \dots \parallel d_n$ , secantele  $s$  și  $k$  și punctele  $\{A_i\} = d_1 \cap s$ ,  $\{A_2\} = d_2 \cap s$ , ...,  $\{A_n\} = d_n \cap s$ ,  $\{B_1\} = d_1 \cap k$ ,  $\{B_2\} = d_2 \cap k$ , ...,  $\{B_n\} = d_n \cap k$ . Atunci

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2 A_3}{B_2 B_3} = \dots = \frac{A_{n-1} A_n}{B_{n-1} B_n}.$$

*Demonstrație.* Dacă  $s \parallel k$ , atunci

$A_1 A_2 B_2 B_1, A_2 A_3 B_3 B_2, \dots, A_{n-1} A_n B_n B_{n-1}$  sînt paralelograme și

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2 A_3}{B_2 B_3} = \dots = \frac{A_{n-1} A_n}{B_{n-1} B_n} = 1 \text{ (fig. II.20).}$$

Dacă  $s$  nu este paralel cu  $k$ , fie  $\{O\} = s \cap k$ . Se aplică teorema lui Thales triunghiului  $OA_{i+1} B_{i+1}$  și dreptei  $A_i B_i$

$$\frac{OA_i}{A_i A_{i+1}} = \frac{OB_i}{B_i B_{i+1}}$$

de unde se obține

$$(1) \quad \frac{OA_i}{OB_i} = \frac{A_i A_{i+1}}{B_i B_{i+1}}.$$

Aplicînd teorema lui Thales triunghiului  $OA_{i-1} B_{i-1}$  și dreptei  $A_i B_i$  se obține:

$$(2) \quad \frac{OA_i}{OB_i} = \frac{A_{i-1} A_i}{B_{i-1} B_i}.$$

Din (1) și (2) rezultă că

$$\frac{A_{i-1} A_i}{B_{i-1} B_i} = \frac{A_i A_{i+1}}{B_i B_{i+1}}.$$

Scriînd aceste proporții pentru  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , se obține șirul de rapoarte egale din teoremă.

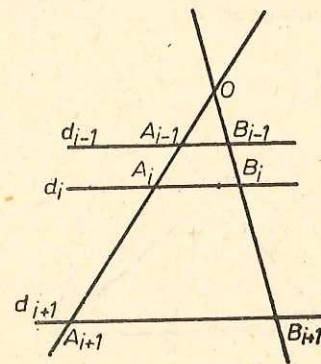


Fig. II.20



## Exerciții

1. Fie triunghiul isoscel  $ABC$ ,  $(AB) \equiv (AC)$  și  $d$  o dreaptă paralelă cu  $BC$ ,  $A \notin d$ . Dacă  $\{M\} = d \cap AB$ ,  $\{N\} = d \cap AC$  să se arate că triunghiul  $AMN$  este isoscel, iar dacă  $ABC$  este echilateral atunci și  $AMN$  este echilateral.

2. Se consideră trei semidrepte cu aceeași origine  $M$ , cuprinse în drepte distincte și punctele:  $A, B$  pe prima semidreaptă,  $C, D$  pe a doua și  $N$  pe a treia, astfel ca  $d(M, A) = 18$ ,  $d(M, B) = 54$ ,  $d(M, C) = 25$ ,  $d(M, D) = 75$ . O dreaptă ce trece prin  $A$  și este paralelă cu  $BN$  intersectează  $MN$  în  $E$ . În ce condiții paralela la  $ND$  prin  $E$  conține punctul  $C$ ?

3. Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$ . Paralela prin  $B$  la latura  $AD$  intersectează dreapta  $AC$  în  $E$ , iar paralela prin  $A$  la latura  $BC$  intersectează dreapta  $BD$  în  $F$ . Să se arate că  $EF \parallel CD$ .

4. Fie triunghiul  $ABC$  și  $MN \parallel BC$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in AC$ . Se duc  $MM' \parallel AC$ ,  $NN' \parallel AB$  ( $M' \in BC$ ,  $N' \in BC$ ). Prin  $M'$  și  $N'$  se duc  $M'P \parallel AB$  și  $N'Q \parallel AC$ ,  $P \in AC$ ,  $Q \in AB$ . Să se demonstreze că  $PQ \parallel MN$ .

5. Fie triunghiul  $ABC$  și  $D, E, F, G, H$  mijloacele segmentelor  $(BC)$ ,  $(AD)$ ,  $(BD)$ ,  $(EF)$ ,  $(ED)$ . Fie  $GH \cap AC = \{I\}$  și  $BE \cap AC = \{J\}$ . Atunci

i)  $AI = 3IC$ ,

ii)  $HI = 3GH$ ,

iii)  $BE = 3EJ$ .

## § 7. Teorema bisectoarei

**Teoremă.** Fie triunghiul  $ABC$  și  $D \in (BC)$ . Atunci  $(AD)$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$  dacă și numai dacă  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .

**Demonstrație.** 1. Se arată că dacă  $(AD)$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$  atunci  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .

Se construiește prin  $C$  paralela la  $AD$  care intersectează  $AB$  în  $E$  (fig. II.21). Din teorema lui Thales rezultă că  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ . Triunghiul  $ACE$  este isoscel

pentru că  $\widehat{AEC} \equiv \widehat{BAD}$  (unghiuri corespondente),  $\widehat{ACE} \equiv \widehat{DAC}$  (unghiuri alterne interne) și  $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$  (din ipoteză ( $AD$  bisectoare)). Deci  $(AE) \equiv (AC)$  de unde rezultă egalitatea din teoremă.

2. Se arată, prin reducere la absurd, că dacă  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$  atunci  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$  (fig. II.22). Într-adevăr, dacă  $[AD]$  nu este bisectoare, fie  $D' \in (BC)$  astfel încât  $(AD')$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ . Atunci  $\frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC}$

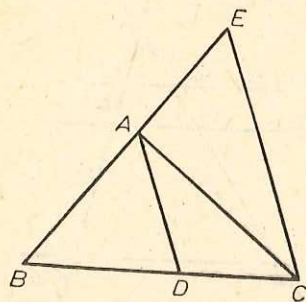


Fig. II.21

și deci  $D'$  împarte segmentul  $(BC)$  în același raport ca și punctul  $D$  ceea ce nu este posibil decât dacă  $D = D'$ .

Și această teoremă se poate formula într-un euhunț ușor de memorat: „bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă unghiului segmente proporționale cu laturile unghiului și reciproc“.

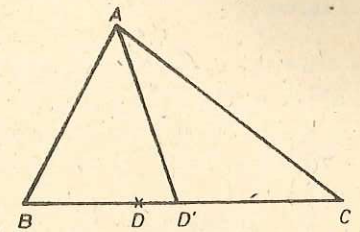


Fig. II.22

## Exerciții

1. Fie triunghiul  $ABC$ ,  $D \in BC$  și  $D \notin (BC)$ . Atunci  $[AD]$  este bisectoarea unuia din unghiurile cu vîrf în  $A$  și exterioare triunghiului, dacă și numai dacă  $\frac{BD}{DC} =$

$$= \frac{AB}{AC} \quad (\text{teorema bisectoarei unghiului exterior}).$$

2. Lungimile laturilor unui triunghi  $ABC$  fiind  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ , să se calculeze segmentele determinate de bisectoarea unui unghi a triunghiului pe latura opusă.

3. Într-un triunghi  $ABC$ , bisectoarele unghiurilor formate de mediana  $AM$  ( $M \in (BC)$ ) cu latura  $(BC)$  intersectează celelalte două laturi în  $P$  și  $Q$ . Să se arate că  $PQ \parallel BC$ . Reciproc, dacă  $M \in (BC)$ ,  $MP$  și  $MQ$  sînt bisectoarele unghiurilor  $\widehat{AMB}$  respectiv  $\widehat{AMC}$  ( $P \in (AB)$ ,  $Q \in (AC)$ ) și  $PQ \parallel BC$ , atunci  $M$  este mijlocul laturii  $(BC)$ .

4. Se dă triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 20$ ,  $BC = 30$ ,  $[BD]$  bisectoarea unghiului  $\widehat{B}$ ,  $D \in (AC)$ , dreapta  $DE \parallel AB$  ( $E \in (BC)$ ) și dreapta  $EF \parallel BD$  ( $F \in (AC)$ ). Să se determine  $AC$  dacă  $AD - FC = 1$ .

## § 8. Asemănarea triunghiurilor

**Definiție.** Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$ . Dacă

$$(1) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$(2) \quad \widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$$

se spune că există o asemănare între triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  și se scrie  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Ca și în cazul congruenței, între două triunghiuri pot exista mai multe asemănări.

**Definiție.** Două triunghiuri  $ABC$  și  $A'B'C'$  se numesc asemenea dacă între ele există cel puțin o asemănare.



**Exerciții**

1\*. Să se demonstreze că dacă  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  și  $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ , atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$ .

2\*. Să se demonstreze că dacă  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  și  $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$ , atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$ .

Prin notația  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  se înțelege că ordinea virfurilor este dată și are loc asemănarea definită de egalitățile (1) și (2). În acest caz, perechile de virfuri  $(A, A')$ ;  $(B, B')$ ;  $(C, C')$  și perechile de laturi  $((BC), (B'C'))$ ,  $((AC), (A'C'))$ ,  $((AB), (A'B'))$  se numesc *corespondente* sau *omoloage*. Raportul lungimilor a două laturi omoloage se numește *raportul de asemănare* al celor două triunghiuri. Evident, două triunghiuri congruente sînt asemenea, raportul de asemănare fiind egal cu 1 și oricare două triunghiuri echilaterale sînt asemenea. O altă situație în care sînt puse în evidență triunghiuri asemenea este dată de următoarea:

**Teorema 1. (Teorema fundamentală a asemănării).** Fie triunghiul  $ABC$  și  $DE \parallel BC$ ,  $A \neq D$ ,  $D \in AB$ ,  $E \in AC$ . Atunci  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ .

*Demonstrație.* Există trei situații posibile: 1)  $D \in (AB)$ , 2)  $B \in (AD)$ , 3)  $A \in (BD)$ . Se va da demonstrația numai pentru cazul 1), întrucît celelalte cazuri se tratează în mod analog cazurilor considerate la consecința teoremei lui Thales.

Deoarece  $DE \parallel BC$  rezultă  $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC}$  (unghiuri corespondente),  $\widehat{AED} \equiv \widehat{ACB}$  (unghiuri corespondente),  $\widehat{DAE} \equiv \widehat{BAC}$  (fig. II.23). Din teorema lui Thales rezultă că  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ . Se construiește  $EF \parallel AB$ ,  $F \in BC$  și atunci  $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ . Deoarece  $BDEF$  este paralelogram rezultă  $(DE) \equiv (BF)$  și  $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$  deci se obține  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ . Fiind îndeplinite egalitățile din definiție, rezultă că  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ . Noțiunea de asemănare se poate extinde și pentru poligoane.

**Definiție.** Două poligoane convexe  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  și  $B_1B_2B_3 \dots B_n$  se numesc *asemenea* dacă

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$$

și  $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1, \hat{A}_2 \equiv \hat{B}_2, \dots, \hat{A}_n \equiv \hat{B}_n$ .

Pe baza teoremei 1 se pot demonstra teoremele asemănării, numite și cazuri de asemănare, care stabilesc condiții necesare și suficiente pentru ca două triunghiuri să fie asemenea.

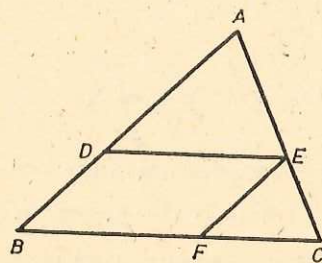


Fig. II.23

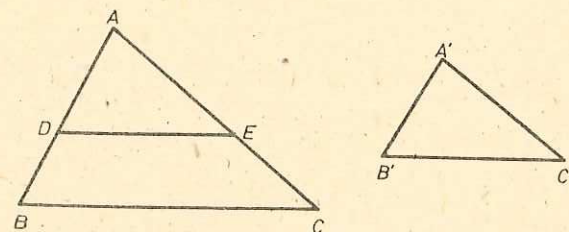


Fig. II.24

Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$ :

**Teorema 2.** Dacă  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  și  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$  atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

**Teorema 3.** Dacă  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  și  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$  atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

**Teorema 4.** Dacă  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$  atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

*Demonstrații.* Fie  $D \in (AB)$  astfel încît  $(A'B') \equiv (AD)$  și  $DE \parallel BC$ ,  $E \in (AC)$ .  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  conform teoremei fundamentale a asemănării (fig. II.24). Se va demonstra că în ipotezele fiecăreia dintre cele trei teoreme  $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$  și deci  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

1)  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  (din ipoteza teoremei 2)

$\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC} \equiv \hat{B}'$  (din construcție și ipoteza teoremei 2)

$(AD) \equiv (A'B')$  (din construcție).

Deci  $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$  (din U.L.U.).

2)  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$  (din ipoteza teoremei 3)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$  (pentru că  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ) rezultă  $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AE}$

$(AD) \equiv (A'B')$  (din construcție)

deci  $(A'C') \equiv (AE)$ , deoarece  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  și  $(AD) \equiv (A'B')$  rezultă că  $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$  (din L.U.L.).

3)  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$  (din ipoteza teoremei 4)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$  (pentru că  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ) și  $(AD) \equiv (A'B')$ ,

rezultă că

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{DE}$$

Egalitatea rapoartelor cu aceeași numărători implică egalitatea numitorilor deci  $A'C' = AE$  și  $B'C' = DE$  sau  $(A'C') \equiv (AE)$  și  $(B'C') \equiv (DE)$ . Rezultă și în acest caz că  $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$  (din L.L.L.)



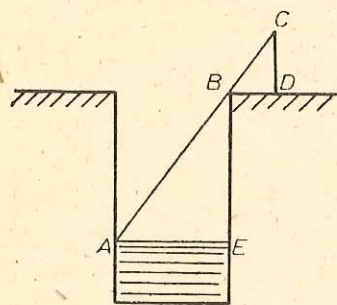


Fig. II.25

### Aplicații

1. Să se măsoare adâncimea unei fântini pînă la nivelul apei prin mijloace simple.

*Rezolvare.* Observatorul aflat în punctul  $D$  privește din punctul  $C$  (ochiul) bordura, punctul  $B$ , zăbind suprafața apei în punctul  $A$ , astfel încît  $A$ , bordura  $B$  și ochiul  $C$  să fie în linie dreaptă (fig. II.25). În acest caz  $\triangle BCD \sim \triangle ABE$  și  $\frac{CD}{BE} = \frac{BD}{AE}$ . Lungimile  $CD$ ,  $BD$ ,

$AE$  sînt respectiv înălțimea observatorului, distanța de la acesta la bordură și lărgimea fântinii deci pot fi măsurate și rezultă  $BE = \frac{CD \cdot AE}{BD}$ .

2. Determinarea înălțimii unui copac folosind legile reflexiei într-o oglindă plană.

*Rezolvare.* Într-un punct  $O$  este situată o oglindă plană, înălțimea copacului fiind  $AB$ , observatorul situat în punctul  $D$ ,  $O \in (AD)$  se deplasează astfel încît din punctul  $C$  (ochi) zărește în oglindă virful copacului (fig. II.26).

Știind că  $\widehat{BOM} = \widehat{MOC}$  (unghiul de incidență este congruent cu unghiul de reflexie) rezultă  $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ , deci  $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO}$ ;  $AO$ ,  $OD$ ,  $CD$  fiind respectiv distanța de la copac la oglindă, distanța de la oglindă la observator și înălțimea observatorului; în urma înlocuirii acestora în proporție se obține:  $AB = \frac{DC \cdot AO}{DO}$ .

3. Determinarea înălțimii unui copac, despărțit de observator printr-un obstacol, folosind legile reflexiei într-o oglindă plană.

*Rezolvare.* Se așază oglinda în  $O$  și observatorul se deplasează în punctul  $D$ ,  $O \in (AD)$ , astfel încît din  $C$  (ochi) zărește în oglindă virful copacului

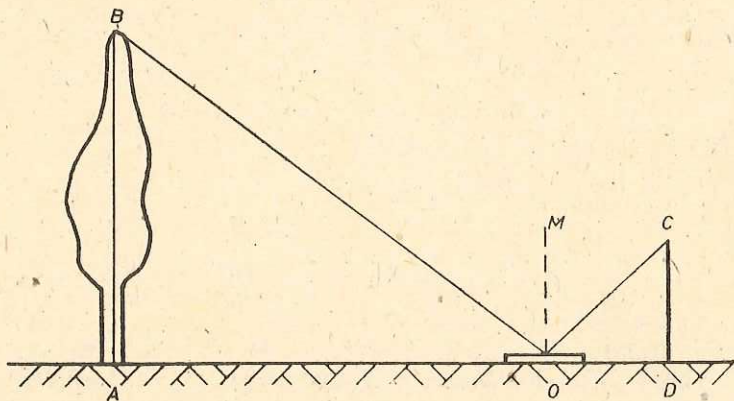


Fig. II.26

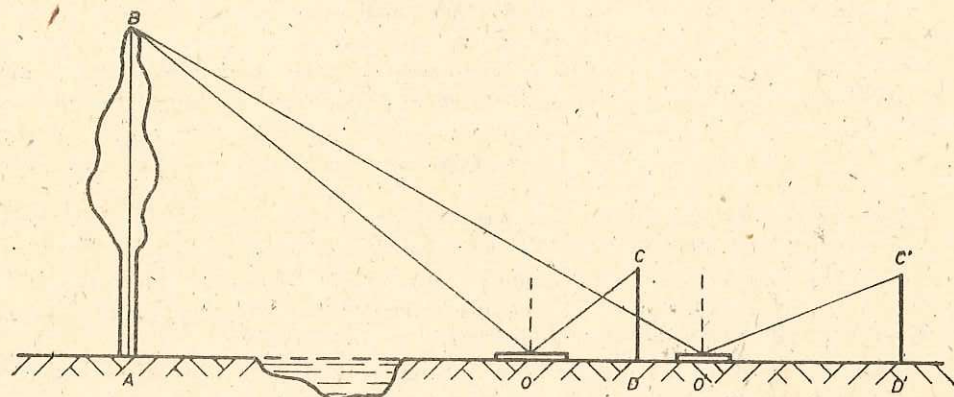


Fig. II.27

(fig. II.27). Atunci  $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ . Se deplasează oglinda în  $O'$ , iar observatorul se deplasează în  $D'$ ; repetind observația, se obține  $\triangle AO'B \sim \triangle D'O'C'$ . Scriind proporționalitatea laturilor triunghiurilor asemenea obținute, avem:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO} \text{ și } \frac{AB}{D'C'} = \frac{AO'}{D'O'} \text{ deoarece } DC = D'C' \text{ rezultă } \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO} = \frac{AB}{D'C'} = \frac{AO'}{D'O'} = \frac{AO' - AO}{D'O' - DO} = \frac{OO'}{D'O' - DO}.$$

Prin urmare

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OO'}{D'O' - DO}.$$

$OO'$ ,  $DC$ ,  $D'O'$ ,  $DO$  se determină cu mijloace simple deci  $AB = \frac{DC \cdot OO'}{D'O' - DO}$ .

### Exerciții

3. Fie  $ABC$  un triunghi și fie  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  trei puncte coliniare distincte astfel ca  $A' \in BC$ ,  $B' \in CA$ ,  $C' \in AD$ . Să se arate că

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \text{ (teorema lui Menelaus).}$$

*Indicație.* Se duce o paralelă prin  $C$  la  $AB$  care intersectează pe  $A'B'$  în  $P$ . Din proporționalitatea laturilor rezultată din asemănările  $\triangle CPA' \sim \triangle BC'A'$ ,  $\triangle AB'C' \sim \triangle CB'P$  se obține relația cerută.

4\*. Se consideră punctele  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  situate pe dreptele  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  determinate de laturile triunghiului  $ABC$ . Dacă două dintre ele sînt situate pe laturile triunghiului și unul pe prelungirea laturii, sau nici unul nu e situat pe laturile triunghiului și este verificată relația din problema precedentă, atunci cele trei puncte sînt coliniare (reciproca teoremei lui Menelaus).



**Indicație.** Se arată că de exemplu  $B'C'$  nu poate fi paralelă cu  $BC$  și se notează  $\{A''\} = BC \cap B'C'$ . Din relația dată și din exercițiul 3 rezultă  $A' = A''$ .

5. Se consideră un triunghi  $ABC$  și trei drepte concurente  $AM, BM, CM$  care mai intersectează suporturile laturilor triunghiului în punctele  $A', B', C'$ . Să se demonstreze relația

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \text{ (teorema lui Ceva).}$$

**Indicație.** Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul  $B'BC$  pentru punctele coliniare  $A, M, A'$  și în triunghiul  $ABB'$  pentru punctele coliniare  $C, M, C'$ .

6\*. Fie  $A', B', C'$  trei puncte situate pe laturile  $(BC), (AB), (AC)$  ale triunghiului  $ABC$ . Să se demonstreze că dacă este verificată relația din problema precedentă atunci dreptele  $AA', BB', CC'$  sînt concurente (reciproca teoremei lui Ceva).

7. Să se demonstreze că într-un triunghi produsul dintre lungimea unei înălțimi și lungimea laturii corespunzătoare este același pentru fiecare înălțime.

8. Să se demonstreze că distanțele de la un punct  $M$  al mediane ( $AD$ ) la laturile  $(AB), (AC)$  ale unui triunghi sînt în raport invers cu lungimile acestor laturi. Se va deduce că distanțele de la centrul de greutate la laturi sînt invers proporționale cu lungimile laturilor.

9. Dintr-o tablă triunghiulară se cere să se taie un pătrat cu o latură pe latura cea mai mare a triunghiului și cu celelalte două vîrfuri pe celelalte laturi ale triunghiului.

10. Pe latura  $(AB)$  a triunghiului  $ABC$  se consideră un punct  $C_1$ . Prin  $A$  se duce paralela la  $CC_1$  care intersectează  $BC$  în  $A_1$  și prin  $B$  paralela la  $CC_1$  care intersectează

$AC$  în  $B_1$ . Să se demonstreze că  $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}$ .

**Indicație**

$$\frac{CC_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{AB}, \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{C_1B}{AB},$$

$$\frac{CC_1}{A_1A} + \frac{CC_1}{B_1B} = \frac{AC_1 + C_1B}{AB} = 1.$$

11\*. În triunghiul  $ABC$  se consideră bisectoarea unghiului  $\hat{C}$  care intersectează latura  $(AB)$  în  $D$ . Demonstrați că  $CD < \sqrt{AC \cdot BC}$ .

**Indicație.** Fie  $E \in (AC)$ , astfel ca  $\widehat{CDE} \equiv \widehat{CBD}$ . Deoarece  $\widehat{CDA} > \widehat{CBD}$  și

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE}, \quad CD^2 = CE \cdot CB < CB \cdot AC.$$

12. Prin punctul de intersecție  $O$  al diagonalelor unui trapez se duce o paralelă la baze, care taie laturile neperalele în  $E$  și  $F$ . Să se arate că  $O$  este mijlocul segmentului  $(EF)$ .

13. Să se arate că dreapta determinată de punctul de intersecție al laturilor neperalele ale unui trapez și punctul de intersecție  $O$  al diagonalelor trece prin mijloacele bazelor trapezului.

## § 9. Relații metrice

**Definiție.** Fie o dreaptă  $d$  și un punct  $M, M \notin d$ . Se numește *proiecție ortogonală* a punctului  $M$  pe dreapta  $d$  piciorul perpendicularei din  $M$  pe  $d$ . Dacă  $MM' \perp d, M' \in d$ , se notează  $M' = pr_d M$ . Pentru  $M \in d$  se definește

$pr_d M = M$ . Pentru prescurtarea exprimării, în continuare, se va folosi doar termenul *proiecție* care va desemna proiecția ortogonală (fig. II.28).

**Definiție** Fie  $M$  o mulțime de puncte și  $d$  o dreaptă. Mulțimea  $M'$  se numește *proiecția ortogonală a mulțimii  $M$  pe  $d$*  dacă  $M'$  este mulțimea proiecțiilor pe  $d$  a punctelor mulțimii  $M$ . Se notează  $M' = pr_d M$ .

### Exerciții

1. Să se arate că proiecția unui segment  $(AB)$  pe o dreaptă  $d$  este segmentul  $(CD)$  unde  $C = pr_d A$  și  $D = pr_d B$ .

2. Să se arate că proiecția unui poligon pe o dreaptă este un segment închis.

**Teorema 1. (Teorema catetei.)** Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic este medie proporțională între lungimea ipotenuzei și a proiecției catetei pe ipotenuză.

**Teorema 2. (Teorema înălțimii.)** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii duse din vîrfurile unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Se reamintește că numărul pozitiv „ $a$ ” se numește *medie proporțională* (sau geometrică) a numerelor pozitive „ $b$ ” și „ $c$ ” dacă  $a^2 = bc$ .

**Demonstrație.** Fie triunghiul  $ABC, m(\hat{A}) = 90^\circ$  și fie  $D = pr_{BC} A$  (fig. II.29).

Deoarece  $\hat{B}$  și  $\hat{C}$  sînt ascuțite rezultă că  $D \in (BC)$  (ex. 1 § 12.1) și  $(BD) = pr_{BC}(AB), (CD) = pr_{BC}(AC)$ .  $\triangle BDA \sim \triangle BAC$  fiind dreptunghice și avînd unghiul  $\hat{B}$  comun, deci  $\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$  de unde  $AB^2 = CB \cdot BD$  ceea ce demonstrează teorema 1.

Analog  $\triangle ADC \sim \triangle BAC$  de unde rezultă  $\triangle BDA \sim \triangle ADC$  și  $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC}$  deci  $DA^2 = DB \cdot DC$  ceea ce demonstrează teorema 2.

**Teorema 3. (Teorema lui Pitagora.)** Într-un triunghi dreptunghic pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.



Fig. II.28

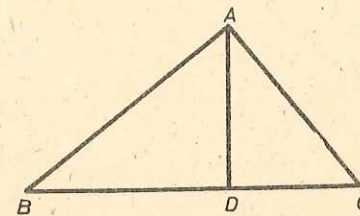


Fig. II.29



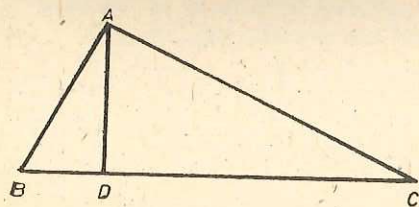


Fig. 11.30

*Demonstrație*

Fie triunghiul  $ABC$ ,  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  și  $D = pr_{BC}A$  (fig. 11.30). Atunci

$$AB^2 = BC \cdot BD,$$

$$AC^2 = BC \cdot DC.$$

$$\text{Deci } AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + DC) = BC^2.$$

**Teorema 4. (Reciprocele teoremelor 1, 2.)** Se consideră triunghiul  $ABC$ ,  $D = pr_{BC}A$ . Dacă  $D \in (BC)$  și este verificată una din condițiile:

i)  $AB^2 = BC \cdot BD,$

ii)  $AD^2 = BD \cdot DC,$  atunci  $m(\hat{A}) = 90^\circ.$

*Demonstrația* se face prin reducere la absurd și se lasă ca exercițiu.

**Teorema 5. (Teorema lui Pitagora generalizată.)** Dacă în triunghiul  $ABC$ ,  $\hat{C}$  este un unghi ascuțit și  $D = pr_{BC}A$ , atunci

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

*Demonstrație.* Se consideră trei cazuri

a)  $\hat{B}$  ascuțit, atunci  $D \in (BC)$  (fig. 11.31). Triunghiurile  $ABD$  și  $ADC$  fiind dreptunghice au loc egalitățile:

$$(2) \quad AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$(3) \quad AD^2 = AC^2 - DC^2$$

$$(4) \quad BD = BC - DC.$$

Se înlocuiește în (2)  $AD$  și  $BD$  date de egalitățile (3) și (4), atunci

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (BC - DC)^2.$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

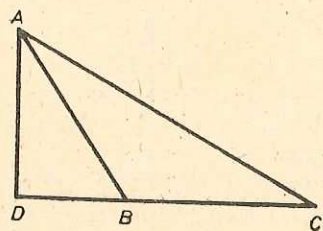


Fig. 11.32

b)  $\hat{B}$  obtuz, atunci  $B \in (DC)$ , (fig. 11.32) egalitățile (2) și (3) rămân adevărate și are loc

$$(5) \quad BD = DC - BC.$$

Înlocuind în (2)  $AD$  și  $BD$  date de (3) și (5) se obține

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (DC - BC)^2$$

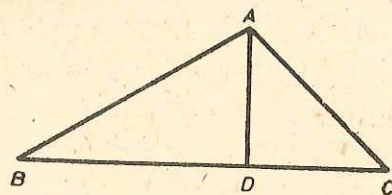


Fig. 11.31

deci

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

c)  $m(\hat{B}) = 90^\circ$ , atunci (1) rezultă din teorema lui Pitagora.

**Teorema 5". (Teorema lui Pitagora generalizată.)** Dacă în triunghiul

$ABC$ ,  $\hat{C}$  este obtuz și  $D = pr_{BC}A$ , atunci

$$(6) \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC.$$

*Demonstrație.*  $\hat{C}$  fiind obtuz rezultă că  $C \in (BD)$  (fig. 11.33). Din triunghiurile dreptunghice  $ABD$  și  $ACD$  se obține:

$$(7) \quad AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

$$(8) \quad AD^2 = AC^2 - CD^2,$$

$$(9) \quad BD = BC + CD.$$

Înlocuind  $AD$ ,  $BD$  din (8) și (9) în egalitatea (7) se obține:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC.$$

**Teorema 6. (Reciproca teoremei lui Pitagora.)** Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

*Demonstrație.* Se consideră triunghiul  $ABC$  în care

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Fie  $D$  proiecția lui  $A$  pe  $BC$ . Dacă  $\hat{ACB}$  nu este unghi drept atunci  $D \neq C$ .

Ținând seama de ipoteză și de relațiile (1) sau (6), (după cum  $\hat{ACB}$  este ascuțit sau obtuz), rezultă  $BC \cdot DC = 0$ , adică  $DC = 0$ , ceea ce este în contradicție cu  $C \neq D$ . Rezultă că  $m(\hat{ACB}) = 90^\circ$ .

*Aplicație.* Să se arate că fiind date trei numere reale pozitive  $a, b, c$  astfel încât  $a < b + c$ ,  $b < a + c$ ,  $c < a + b$ , există un triunghi  $ABC$  pentru care  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ .

*Rezolvare.* Se poate presupune că  $a \leq b \leq c$ , și pe o dreaptă  $d$  se consideră punctele  $A, B$  astfel ca  $AB = c$ . Se va arăta că se poate determina poziția unui punct  $M$ ,  $M \in (AB)$  și a unui punct  $C$  care aparține perpendicularei în  $M$  pe  $AB$  astfel ca  $AC = b$  și  $BC = a$ . Poziția acestor puncte este determinată dacă se cunosc

numerele  $x = AM$  și  $y = MC$  (fig. 11.34).

În acest scop vom presupune că există triunghiul cerut  $ABC$  și notînd cu  $M$  proiecția lui  $C$  pe  $AB$  se calculează valorile lui  $x$  și  $y$ . Deoarece am presupus că  $a \leq b \leq c$  rezultă că unghiurile  $A$  și  $B$  sînt ascuțite și deci  $M \in (AB)$  (ex. 1, § 12, I). Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată se obține  $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ , deci:

$$(10) \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ și } y = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

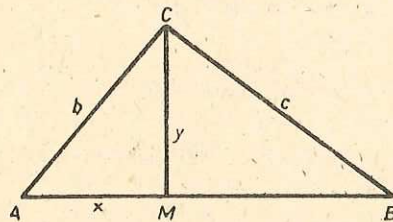


Fig. 11.34



În ipoteza că triunghiul  $ABC$  există, rezultă că există și segmentele  $(AM)$ ,  $(CM)$ , deci  $x > 0$  și  $x < b$ .

Se trece acum la rezolvarea propriu-zisă a problemei propuse. Se va arăta că în ipotezele făcute în enunț și  $a \leq b \leq c$ , numerele  $x$  și  $y$  definite prin formulele (10) există și sînt pozitive ceea ce revine la  $0 < x < b$ . Din  $b \geq a$  și  $c > 0$  rezultă  $x > 0$ . Pe de altă parte, prin ipoteză  $c < a + b$ , deci  $0 \leq c - b < a$  și astfel  $(c - b)^2 < a^2$ . De aici se deduce că  $b^2 + c^2 - 2bc < a^2$  și  $b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$ , de unde rezultă

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} < b.$$

Se determină pe  $(AB)$  (pe baza teoremei de construcție a unui segment) punctul  $M$  astfel ca  $AM = x$  și pe perpendiculara în  $M$  pe  $AB$  punctul  $C$  astfel ca  $MC = y$ . Cum  $x < b \leq c$ , rezultă  $M \in (AB)$  și  $AC^2 = x^2 + y^2 = x^2 + b^2 - x^2 = b^2$ ,  $BC^2 = MB^2 + CM^2 = (c - x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = c^2 - 2c \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + x^2 + b^2 - x^2 = a^2$ .

S-a demonstrat că triunghiul  $ABC$  astfel construit îndeplinește cerințele problemei.

### Exerciții

3. Se consideră triunghiul  $ABC$  ( $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ) în care  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ . Să se arate că

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

4. Să se demonstreze că raportul lungimilor proiecțiilor catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză este egal cu raportul pătratelor lungimilor catetelor.

5. Se consideră un triunghi  $ABC$  și fie  $D$  proiecția lui  $A$  pe  $BC$ . Perpendiculara în  $A$  pe  $AB$  intersectează pe  $BC$  în  $E$ . Dacă  $AB = 13$ ,  $BC = 21$  și  $AD = 12$  să se afle perimetrul triunghiului  $ACE$ .

6. Prin vârful  $A$  al triunghiului isoscel  $ABC$  se duce o paralelă la  $BC$  pe care se consideră un punct  $M$ . Să se demonstreze că:

$$MB^2 + MC^2 = 2(MA^2 + AB^2).$$

*Indicație.* Se notează cu  $B'$ ,  $C'$  proiecțiile lui  $B$ ,  $C$  pe  $AM$ . Unul din triunghiurile  $MAB'$  și  $MAC'$  are unghiul din  $A$  obtuz și celălalt are unghiul din  $A$  ascuțit. Se calculează cu teorema lui Pitagora generalizată  $MB^2$  și  $MC^2$  și se adună.

7. În dreptunghiul  $ABCD$ , perpendiculara din  $A$  pe diagonala  $(BD)$  intersectează dreapta  $BC$  în  $F$ . Să se demonstreze că

$$AB^2 = BF \cdot BC.$$

8. Se consideră triunghiul  $ABC$ ,  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  în care  $AB = AC + 6$  și  $BC = 30$ . Să se determine  $CD$ , ( $CD$  fiind bisectoarea unghiului  $\hat{C}$ ,  $D \in (AB)$ ).

9. Se consideră triunghiul  $ABC$  și înălțimea  $BD$ ,  $D \in (AC)$ . Pe laturile  $(AB)$  și  $(BC)$  se construiesc triunghiurile dreptunghice  $ABE$ ,  $BCF$ ,

$$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BCF}) = 90^\circ \text{ și } (AE) \equiv (DC), (FC) \equiv (AD).$$

Să se arate că  $(BF) \equiv (BE)$ .

10. Se consideră pătratul  $ABCD$ , cu  $AB = 4$  și punctul  $E \in (AD)$ , astfel ca  $AE = 1$ . Să se afle distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $CE$ .

*Indicație:* Se folosește proprietatea că într-un triunghi produsul dintre lungimea înălțimii și lungimea laturii corespunzătoare este constant.

### Exerciții recapitulative

1. Lungimile bazelor unui trapez sînt  $a$ ,  $b$ ,  $a > b$  și distanța dintre baze este  $h$ . Să se afle:

- i) distanța dintre punctul de intersecție a laturilor neoparalele și baza mică,
- ii) distanța dintre punctul de intersecție a diagonalelor și baza mare.

2. Să se arate că lungimea medianei  $(AM)$  ( $M \in (BC)$ ) a triunghiului  $ABC$ , este:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$

3. Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $AB = 40$ ,  $BC = 50$ ,  $CA = 60$  și bisectoarea  $(AD)$ ,  $D \in (BC)$ . Să se afle în ce raport împarte bisectoarea  $(BE)$ , segmentul  $(AD)$ .

4. Se dă un pătrat  $ABCD$  și  $M \in \text{Int } ABCD$  astfel încît

$$m(\widehat{MCD}) = m(\widehat{MDC}) = 15^\circ.$$

Să se arate că triunghiul  $ABM$  este echilateral.

5. Se consideră pătratul  $ABCD$  și punctele  $E$ ,  $F$ , care determină pe  $CD$  segmentele  $(DE) \equiv (EF) \equiv (FC)$ . Fie  $\{G\} = AE \cap BC$  și  $H$  mijlocul lui  $(AG)$ . Să se arate că  $DH = \frac{1}{2} AC$ .

6. Fie  $(AC)$  cea mai lungă dintre diagonalele paralelogramului  $ABCD$  și  $E$ ,  $F$ , picioarele perpendicularelor din  $C$  pe  $AB$  și  $AD$ . Să se arate că:

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

7. Se consideră triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  și  $D$  piciorul perpendicularei din  $A$  pe  $BC$ . Se notează cu  $E$  și  $F$  intersecția perpendicularelor pe  $BC$  în punctele  $B$  și  $C$  cu înălțimile din  $C$  și  $B$ . Să se demonstreze că dacă  $(AD) \equiv (BC)$  atunci:

- i) triunghiurile  $BDE$  și  $CDF$  sînt isoscele,
- ii) triunghiul  $EDF$  este dreptunghic și  $(DA)$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{EDF}$ .

8. Fie  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , centrele de simetrie ale pătratelor construite în exterior pe laturile unui romb. Să se arate că  $ABCD$  este pătrat.

9. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu

$$AB = 34, BC = 56, M \in (AC), (AM) \equiv (MC) BM = 39.$$

Să se afle distanța de la  $M$  la dreapta  $BC$ .

10. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu

$$AB = AC, \widehat{BAC} \text{ obtuz și } AD \perp AB, D \in (BC).$$

Să se afle  $\frac{CD}{BD}$  știind că  $BC = 32$  și distanța de la  $A$  la dreapta  $BC$  este 12.

11. Se consideră triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ),  $M$  piciorul perpendicularei din  $A$  pe  $BC$ ,  $N$  mijlocul laturii  $(BC)$  și  $P$  intersecția dreptei  $AN$  cu perpendiculara din  $M$  pe  $AC$ . Dacă  $(AP) \equiv (PN)$ , să se arate că unghiurile ascuțite ale triunghiului  $ABC$  au măsurile  $60^\circ$  și  $30^\circ$ .

12. Fie un dreptunghi  $ABCD$ . Să se demonstreze că pentru orice punct  $M$  este verificată relația  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ .

*Indicație.* Se utilizează rezultatul exercițiului 2.



13.  $A, B, C$  fiind trei puncte coliniare  $B \in (AC)$  și  $O$  un punct exterior dreptei  $AC$ , să se demonstreze relația:  $OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC$ . (Relația lui Stewart.)

*Indicație.* Se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile  $OAB$  și  $OBC$ ; relațiile obținute se înmulțesc respectiv cu  $BC$  și  $AB$  și se adună membru cu membru.

14\*. Să se afle locul geometric al punctelor  $M$ , pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte date  $A, B$  să fie o constantă  $k$ .

*Indicație.* Fie  $O$  mijlocul segmentului  $(AB)$  și  $N$  proiecția lui  $M$  pe  $AB$ . Presupunind  $k > 0$ , avem  $MA > MB$  și  $N \in (BO)$ . Aplicând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile  $AMO$  și  $BMO$  se deduce:  $MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot NO = k$ ,  $NO = \frac{k}{2AB}$  deci  $NO$  este constant și locul geometric este perpendiculara pe  $AB$ , dusă prin punctul fix  $N$ .

15. Se dă pătratul  $ABCD$  cu laturile de lungime  $a$ . Pe laturile  $(BC)$  și  $(CD)$  se iau punctele  $E$ , respectiv  $F$  astfel încât  $BE = \frac{1}{3}a$  și  $CF = \frac{2}{9}a$ . Să se arate că triunghiul  $AEF$  este dreptunghic.

16. Să se demonstreze că într-un paralelogram, suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor.

17. Să se afle raportul dintre suma pătratelor lungimilor laturilor unui triunghi și suma pătratelor medianelor. Să se deducă de aici că într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor medianelor corespunzătoare catetelor este egală cu de cinci ori pătratul mediane relative la ipotenuză.

18. Se consideră trapezul  $ABCD$ . Paralela cu bazele  $BC$  și  $AD$  ale trapezului ce trece prin punctul de intersecție al diagonalelor intersectează laturile neoparalele în punctele  $E$  și  $F$ . Să se arate că:

$$EF = \frac{2}{\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}}$$

19\*. În patrulaterul convex  $ABCD$ ,  $E$  este mijlocul laturii  $(AB)$  și  $F$  mijlocul laturii  $(CD)$ . Să se demonstreze că mijloacele segmentelor  $(AF)$ ,  $(CE)$ ,  $(BF)$ ,  $(DE)$  sînt virfurile unui paralelogram.

20. Printr-un punct variabil  $D$  situat pe latura  $[BC]$  a unui triunghi  $ABC$  se duce o paralelă la mediana  $AM$ ,  $M$  fiind mijlocul laturii  $(BC)$ . Această paralelă intersectează dreptele  $AB$  și  $AC$  în punctele  $E$ , respectiv  $F$ . Să se arate că:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \text{ și } DE + DF = \text{const.}$$

21. Se consideră un trapez isoscel  $ABCD$  cu bazele  $(AB)$ ,  $(DC)$ ,  $AB = 2a$ ,  $DC = 2b$ , în care diagonala  $AC$  este bisectoarea unghiului  $\hat{A}$ . Să se exprime cu  $a$  și  $b$  lungimile diagonalelor și lungimile laturilor neoparalele ale trapezului. (Se presupune  $b < a < 3b$ .)

§ 1. Definiții

În capitolele precedente s-au definit și studiat diferite mulțimi de puncte din plan (unghi, poligon convex, mediatoare, bisectoare etc.). Utilizînd noțiunea de loc geometric se pot defini și alte tipuri de mulțimi de puncte dintre care, în acest capitol, vom studia cercul.

**Definiție.** Fie  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  și  $O$  un punct din plan. Se numește *cerc* de centru  $O$  și rază  $r$  locul geometric al punctelor  $M$  din plan pentru care  $OM = r$ . Se notează  $@(O, r) = \{M \mid OM = r\}$ . Pentru trasarea cercului se folosește compasul (fig. III.1). Dacă  $M \in @(O, r)$  atunci pentru segmentul  $(OM)$  se va folosi denumirea de rază  $(OM)$ . Deci cuvîntul „rază“ are două sensuri: poate fi un număr  $r$  sau un segment  $(OM)$ . În general, din text se înțelege despre care sens este vorba.

**Definiție.** Fiînd dat cercul  $@(O, r)$  mulțimea punctelor  $P$  din plan pentru care  $OP < r$  se numește *interiorul* cercului. Se notează

$$\text{Int } @(O, r) = \{P \mid OP < r\}.$$

Se definește și *exteriorul* unui cerc și anume:  $\text{Ext } @(O, r) = \{Q \mid OQ > r\}$ .

**Teorema 1. Interiorul unui cerc este o mulțime convexă.**

*Demonstrație.* Fie  $@(O, r)$  și  $A \in \text{Int } @(O, r)$ ,  $B \in \text{Int } @(O, r)$ , deci  $OA < r$ ,  $OB < r$  (fig. III.2). Dacă  $P \in (AB)$  atunci  $OP < OA$  sau  $OP < OB$  (vezi ex. 5 § 12, cap. I). În ambele cazuri, rezultă  $OP < r$ , deci  $P \in \text{Int } @(O, r)$ .

**Definiție.** Se numește *disc* de centru  $O$  și rază  $r$ ,  $r > 0$ , mulțimea  $@(O, r) \cup \text{Int } @(O, r)$ .

Se observă că  $@(O, r) \cup \text{Int } @(O, r) = \{M \mid OM \leq r\}$ .

Două cercuri care au razele egale se numesc *congruente*.

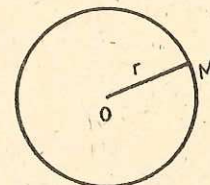


Fig. III.1

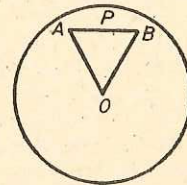


Fig. III.2



**Teorema 2.** Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $r > 0$  și dreapta  $h$ .

- Dacă  $d(O, h) < r$ , atunci dreapta  $h$  și cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  au exact două puncte comune.
- Dacă  $d(O, h) = r$ , atunci dreapta  $h$  și cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  au exact un punct comun.
- Dacă  $d(O, h) > r$  atunci dreapta  $h$  și cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  nu au puncte comune.

*Demonstrație.* a) Dacă  $d(O, h) = 0$  deci  $O \in h$ , atunci pe cele două semidrepte  $h'$  și  $h''$  determinate de  $O$  pe  $h$ , există câte un singur punct  $A \in h'$ ,  $B \in h''$ , astfel ca  $OA = OB = r$  (fig. III.3).

Dacă  $0 < d(O, h) = r_1 < r$ , atunci se notează  $O' = \text{pr}_h O$  (fig. III.4) și pe semidreptele  $h'$  și  $h''$  determinate de  $O'$  pe  $h$ , există punctele unice  $A \in h'$ ,  $B \in h''$ , astfel încât lungimile segmentelor  $(O'A)$  și  $(O'B)$  să fie de o anumită valoare, de exemplu  $O'A = O'B = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ . Triunghiurile  $OO'A$  și  $OO'B$  fiind dreptunghice, din teorema lui Pitagora se determină  $OA = OB = \sqrt{OO'^2 + O'A^2} = r$ , deci punctele  $A$  și  $B$  aparțin cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ . Oricare ar fi punctul  $M$ ,  $M \in h$ , astfel încât  $O'M < \sqrt{r^2 - r_1^2}$ , rezultă că  $OM = \sqrt{OO'^2 + O'M^2} < r$  și  $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$ , iar dacă  $O'M > \sqrt{r^2 - r_1^2}$ , atunci  $OM > r$ , și  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ .

b) Dacă  $d(O, h) = r$ , fie  $O' = \text{pr}_h O$ , deci  $OO' = r$  adică  $O' \in \mathcal{C}(O, r)$ . Dacă  $M \in h$ ,  $M \neq O'$ , atunci  $OM > OO' = r$  și deci  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$  (fig. III.5).

c) Dacă  $d(O, h) > r$  atunci pentru orice punct  $M$ ,  $M \in h$ ,  $OM \geq d(O, h) > r$  deci  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$  (fig. III.6).

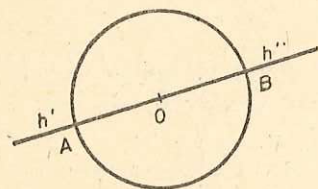


Fig. III.3

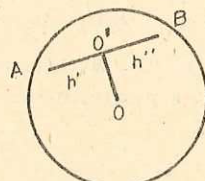


Fig. III.4

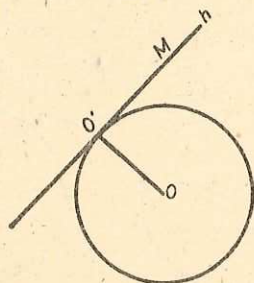


Fig. III.5

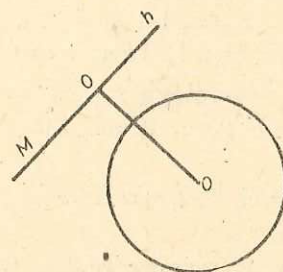


Fig. III.6

**Definiție.** Dreapta  $h$  se numește *tangentă* cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  dacă există exact un punct comun cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  și drepte  $h$ .

Din teorema 2 rezultă că dreapta  $h$  este tangentă la cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  dacă și numai dacă  $d(O, h) = r$ . Punctul  $O'$  comun tangentei  $h$  și cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  se numește *punct de tangentă*. Din demonstrația punctului b) a teoremei 2 rezultă că

*raza  $(OO')$  este perpendiculară pe tangenta prin  $O'$ .*

O dreaptă  $h$  se numește *secantă* unui cerc dacă dreapta  $h$  și cercul au două puncte distincte comune. Dreapta  $h$  se numește *exterioară* unui cerc dacă dreapta  $h$  și cercul nu au nici un punct comun.

### Exerciții

- Să se arate că prin două puncte distincte trec o infinitate de cercuri, și să se determine locul geometric al centrelor acestor cercuri.
- Fie  $A, B, C$  trei puncte distincte ale unui cerc. Să se arate că ele nu pot fi coliniare și că centrul cercului este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului  $ABC$ .
- Să se arate că dacă două cercuri au trei puncte distincte comune, cercurile coincid.
- \* Să se arate că discul este o mulțime convexă.
- \* Să se demonstreze că centrul unui cerc este centru de simetrie al său și al discului pe care-l determină.
- \* Arătați că orice dreaptă care conține centrul cercului este axă de simetrie a cercului (și a discului).

*Indicație.* Se consideră un punct  $M$  pentru care  $OM = r$  și o dreaptă  $d$  care conține centrul cercului; dacă  $M'$  este simetricul punctului  $M$  față de dreapta  $d$  atunci  $OM' = OM = r$ .

- \* Să se arate că dacă punctele  $A$  și  $B$  aparțin unui disc de rază  $r$  atunci  $AB \leq 2r$ .  
*Indicație.* În triunghiul  $OAB$  ( $O$  centrul cercului),  $AB < OA + OB \leq 2r$ .  
Dacă  $A, O, B$  sînt coliniare și  $O \in [AB]$ ,  $AB = AO + OB \leq 2r$ , iar dacă  $A \in (OB)$  sau  $B \in (OA)$  atunci  $AB < OA + OB \leq 2r$ .

- \* Să se arate că o dreaptă care conține un punct din interiorul unui cerc intersectează cercul.
- \* Fie  $d$  o tangentă sau o dreaptă exterioară cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ . Arătați că  $\mathcal{C}(O, r) \subset [dO]$ .
- Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente la o dreaptă dată într-un punct dat.
- Fie  $A, B$  două puncte fixe. Se consideră un cerc variabil de centru  $M$ , tangent drepte  $AB$  în punctul  $B$ . Perpendiculara din  $B$  pe  $AM$  taie din nou cercul în  $T$ . Să se afle locul geometric al punctului  $T$ .
- Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc un punct fix  $A$  cu un punct variabil  $M$ , situat pe un cerc dat  $\mathcal{C}(O, r)$ .
- Virfurile  $A, B$  ale triunghiului  $ABM$  sînt fixe, iar  $M$  este un punct variabil. Să se afle locul geometric al punctului  $M$ , știind că mediana  $(AA')$  a triunghiului  $ABM$  are o lungime dată  $l$ .
- Dacă virfurile unui patrulater aparțin unui cerc, atunci patrulaterul este convex.

## § 2. Coarde. Arce. Unghiuri la centru

Segmentul determinat de două puncte ale unui cerc se numește *coardă*. Dacă coarda conține centrul cercului atunci ea se numește *diametru*, iar capetele unui diametru se numesc puncte *diametral opuse*. Pentru un cerc de



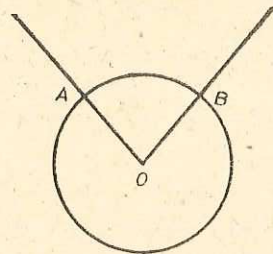


Fig. III.7

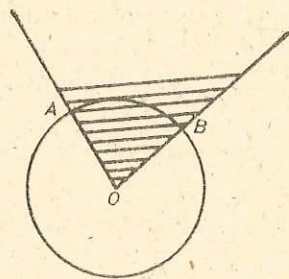


Fig. III.8

rază  $r$ , lungimea unui diametru este  $2r$  și este mai mare sau egală decât lungimea oricărei coarde.

**Definiție.** Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește *unghi la centru* pentru acel cerc.

Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și punctele  $A \in \mathcal{C}(O, r)$ ,  $B \in \mathcal{C}(O, r)$ ; dacă  $A$  și  $B$  nu sînt diametral opuse atunci ele determină unghiul la centru propriu  $\widehat{AOB}$  (fig. III.7). Dacă  $A$  și  $B$  sînt diametral opuse atunci unghiul  $\widehat{AOB}$  este un unghi alungit.

**Definiție.** Fie  $A$  și  $B$  două puncte ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  care nu sînt diametral opuse. Se numește *arc mic*  $\widehat{AB}$  mulțimea formată din  $A$ ,  $B$  și punctele cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  care aparțin interiorului unghiului  $\widehat{AOB}$ . Se numește *arc mare*  $\widehat{AB}$  mulțimea punctelor cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  care nu aparțin interiorului unghiului  $\widehat{AOB}$ .  $A$  și  $B$  se numesc *capetele* celor două arce (fig. III.8).

Se introduce o notație a arcului folosind încă un punct  $M$  al lui, diferit de capete:  $\widehat{AMB}$  este arcul cu capetele  $A$ ,  $B$  căreia îi aparține și punctul  $M$ . Dacă nu e pericol de confuzie, arcul  $\widehat{AMB}$  poate fi notat  $\widehat{AB}$ . De exemplu dacă se precizează arc mic, arc mare. Mulțimea  $\widehat{AB} - \{A, B\}$  se numește *arc deschis*.

**Definiție.** Dacă  $A$  și  $B$  sînt puncte diametral opuse ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $M$  un punct al cercului diferit de acestea, atunci arcul  $\widehat{AMB}$  este mulțimea punctelor cercului situate în semiplanul închis determinat de dreapta  $AB$  căreia îi aparține punctul  $M$  și se numește *semicercul*  $\widehat{AMB}$ .

Evident, orice diametru determină două semicercuri.

În capitolul I fiecărui unghi  $i$  s-a pus în corespondență un număr real  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 180]$  care reprezintă măsura unghiului. Deoarece arcele unui cerc sînt determinate prin unghiuri, rezultă că fiecărui arc  $i$  se poate asocia un număr real, numit măsura arcului.

**Definiție.** Fie  $A$  și  $B$  două puncte ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ .

1. Dacă  $A$  și  $B$  nu sînt diametral opuse măsura arcului mic  $\widehat{AB}$  este egală cu măsura unghiului la centru  $\widehat{AOB}$ , adică  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AOB})$ .

2. Dacă  $A$  și  $B$  nu sînt diametral opuse, măsura arcului mare  $\widehat{AB}$  este egală cu 360 minus măsura unghiului la centru  $\widehat{AOB}$ , adică  $m(\widehat{AB}) = 360 - m(\widehat{AOB})$ .

3. Dacă  $A$  și  $B$  sînt diametral opuse, măsura semicercului  $\widehat{AB}$  este 180, adică  $m(\widehat{AB}) = 180$ .

Se poate considera convențional că un cerc este un arc mare  $\widehat{AB}$  ale cărui capete  $A$  și  $B$  coincid, deci  $m(\widehat{AOB}) = 0$  și măsura cercului este conform definiției egală cu 360.

*Observație.* Adoptînd aceeași convenție de notație ca și pentru unghiuri se va scrie  $m(\widehat{AB}) = \alpha^\circ$ ; unde  $\alpha \in [0, 360]$ .

**Definiție.** Două arce ale aceluiași cerc (sau din două cercuri congruente) se numesc *congruente* dacă au aceeași măsură.

În multe probleme teoretice și practice se pune problema determinării măsurii unui arc cînd acesta poate fi considerat ca reuniune de două arce avînd comun doar unul din capete. Pentru o rezolvare corectă a problemelor de acest fel, reprezentarea intuitivă nefiind o justificare, se va stabili următoarea teoremă.

**Teorema 1.** Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $\widehat{AB}$  un arc al cercului și  $M$  un punct diferit de  $A$  și  $B$  al arcului  $\widehat{AB}$ . Atunci,  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM})$ , unde  $B \notin \widehat{AM}$  și  $A \notin \widehat{BM}$ .

*Demonstrație.*

1) Dacă  $\widehat{AMB}$  este un arc mic, deoarece  $OM \subset \text{Int } \widehat{AOB}$  (fig. III.9) are loc  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{MOB})$  adică  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM})$ .

2) Dacă  $\widehat{AMB}$  este un semicerc (fig. III.10) atunci  $m(\widehat{AMB}) = 180^\circ$ , iar  $\widehat{AOM}$  și  $\widehat{BOM}$  sînt suplementare,  $m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{BOM}) = 180^\circ$ , adică  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180^\circ$ .

3) Dacă  $\widehat{AMB}$  este un arc mare, punctele  $A$  și  $B$  fiind situate în același semiplan față de dreapta  $OM$  (fig. III.11) și presupunînd că  $B$  aparține arcului mic  $\widehat{AM}$ , se

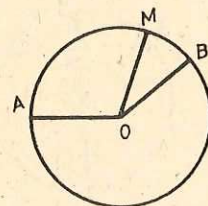


Fig. III.9

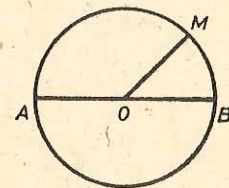


Fig. III.10

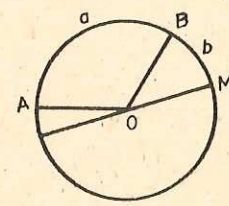


Fig. III.11



notează  $m(\widehat{AOB}) = a^\circ$ ,  $m(\widehat{MOB}) = b^\circ$ . Atunci  $m(\widehat{AMB}) = 360^\circ - a^\circ$ ; pentru arcul mare  $\widehat{AM}$ ,  $m(\widehat{AM}) = 360^\circ - m(\widehat{AOM}) = 360^\circ - (a^\circ + b^\circ)$ . Deci

$$m(\widehat{AM}) + m(\widehat{MB}) = 360^\circ - (a^\circ + b^\circ) + b^\circ = 360^\circ - a^\circ = m(\widehat{AMB}).$$

Dacă  $B$  aparține arcului mare  $\widehat{AM}$ , demonstrația se face în mod analog.

4) Dacă  $\widehat{AMB}$  este un arc mare, iar punctele  $A$  și  $B$  sînt în semiplane opuse față de dreapta  $OM$ ,  $M'$  fiind diametral opus lui  $M$ , (fig. III.12), avem  $(OM' \subset \text{Int } \widehat{AOB})$  căci  $M \notin \text{Int } \widehat{AOB}$  (Cap. I., § 6, ex. 12). Se notează  $m(\widehat{AOB}) = a^\circ$ ,  $m(\widehat{MOA}) = b^\circ$ .

$$m(\widehat{AMB}) = 360^\circ - m(\widehat{AOB}) = 360^\circ - a^\circ.$$

$$m(\widehat{MOB}) = a^\circ - b^\circ, m(\widehat{MOB}) = 180^\circ - (a^\circ - b^\circ), m(\widehat{MOA}) = 180^\circ - b^\circ.$$

$$\text{Atunci } m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180^\circ - b^\circ + 180^\circ - (a^\circ - b^\circ) = 360^\circ - a^\circ = m(\widehat{AMB}).$$

5) Dacă  $\widehat{AMB}$  este un arc mare,  $M$  și  $A$  (sau  $M$  și  $B$ ) fiind diametral opuse (fig. III.13),  $m(\widehat{AM}) = 180^\circ$ ,  $m(\widehat{MOB}) = 180^\circ - m(\widehat{AOB})$  deci

$$m(\widehat{AM}) + m(\widehat{BM}) = 180^\circ + 180^\circ - m(\widehat{AOB}) = 360^\circ - m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AMB}).$$

Se vor stabili în continuare cîteva proprietăți relative la arce și coarde a căror demonstrație poate reprezenta și un exercițiu pentru cititor.

Punctul  $M$  se numește mijlocul arcului  $\widehat{AB}$  dacă aparține arcului  $\widehat{AB}$  și arcele mici  $\widehat{AM}$  și  $\widehat{BM}$  sînt congruente. Existența mijlocului unui arc rezultă din

**Teorema 2.** Dacă  $A$  și  $B$  sînt puncte distincte ale unui cerc, atunci diametrul perpendicular pe coarda  $(AB)$  conține mijlocul coardei  $(AB)$  și mijloacele arcelor  $\widehat{AB}$  (arcul mic și arcul mare).

*Demonstrație.* Dacă  $A$  și  $B$  nu sînt diametral opuse se notează  $O' = pr_{AB}O$  (fig. III. 14). Fie  $\{C\} = \mathcal{C}(O, r) \cap (OO')$  și  $D$  punctul diametral opus lui  $C$ .  $\triangle AOO' \cong \triangle BOO'$  (C.I.), deci  $(AO') \cong (BO')$ ,  $\widehat{AOC} \cong \widehat{BOC}$  și  $\widehat{AOD} \cong \widehat{BOD}$

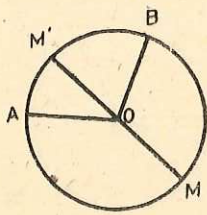


Fig. III.12

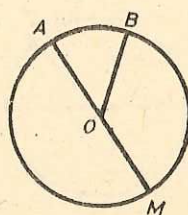


Fig. III.13

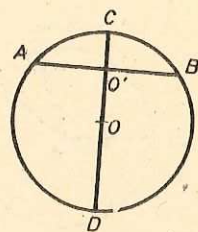


Fig. III.14

(avînd suplamente congruente) din care rezultă că  $C$  este mijlocul arcului mic  $\widehat{AB}$  și  $D$  mijlocul arcului mare  $\widehat{AB}$ . Evident, teorema este adevărată și dacă  $A$  și  $B$  sînt diametral opuse.

**Teorema 3.** Dacă două coarde  $(AB)$  și  $(CD)$  din același cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  sînt congruente, atunci arcele mici  $\widehat{AB}$  și  $\widehat{CD}$  sînt congruente și reciproc, dacă arcele mici  $\widehat{AB}$  și  $\widehat{CD}$  ale unui cerc sînt congruente, atunci coardele  $(AB)$  și  $(CD)$  sînt congruente.

*Demonstrație.* a) Dacă  $(AB) \cong (CD)$ ,  $(AB)$ ,  $(CD)$  fiind coarde ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , atunci  $\triangle AOB \cong \triangle COD$  (L.L.L.), deci  $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$  deci  $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$  (fig. III. 15). b) Dacă  $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$  atunci  $\triangle AOB \cong \triangle COD$  (L.U.L.) deci  $(AB) \cong (CD)$ .

**Teorema 4.** Dacă două coarde ale unui cerc sînt congruente atunci distanțele de la centrul cercului la coarde sînt egale.

*Demonstrație.* Dacă  $(AB) \cong (CD)$ ,  $(AB)$ ,  $(CD)$  fiind coarde ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , atunci  $\triangle AOB \cong \triangle COD$  și înălțimile din  $O$  ale acestor triunghiuri sînt congruente (fig. III.16).

Teoremele 3 și 4 sînt adevărate și dacă cele două coarde aparțin la două cercuri congruente.

**Teorema 5.** Dacă două coarde  $(AB)$  și  $(CD)$  ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  sînt paralele,  $A$  și  $C$  fiind situate în același semiplan față de diametrul perpendicular pe cele două coarde, atunci arcele mici  $\widehat{AC}$  și  $\widehat{BD}$  sînt congruente și coardele  $(AC)$  și  $(BD)$  sînt congruente.

*Demonstrație.* Fie  $(MN)$  diametrul perpendicular pe coarda  $(AB)$ ,  $M$  și  $N$  aparținînd cercului astfel ca  $M$  și  $A$  să fie de aceeași parte a dreptei  $CD$  (fig. III.17).

Atunci  $\widehat{AM} \cong \widehat{BN}$ ,  $\widehat{CN} \cong \widehat{BD}$ ; folosind teorema 1 se obține  $m(\widehat{AC}) = 180^\circ - [m(\widehat{AM}) + m(\widehat{CN})] = 180^\circ - [m(\widehat{BN}) + m(\widehat{BD})] = m(\widehat{BD})$ . Deci  $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$  și  $(AC) \cong (BD)$ .

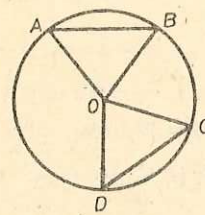


Fig. III.15

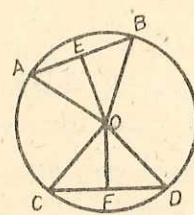


Fig. III.16

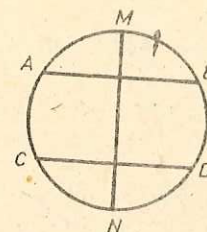


Fig. III.17



Teorema 5 poate fi formulată într-un enunț mai ușor de memorat, dar nu suficient de precis: „arcele situate între două coarde paralele sînt congruente“.

### Exerciții

1. Să se demonstreze că dacă diametrul unui cerc conține mijlocul unui arc  $\widehat{AB}$  sau a coardei  $(AB)$ , atunci diametrul este perpendicular pe coarda  $(AB)$  (reciproca teoremei 2).
2. Dacă centrul unui cerc este la distanțe egale de două coarde ale cercului, atunci coardele sînt congruente (reciproca teoremei 4).
- 3\*. Dacă coardele  $(AB)$  și  $(CD)$  ale unui cerc sînt congruente atunci  $AC \parallel BD$  sau  $AD \parallel BC$  (reciproca teoremei 5).
4. Se consideră cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , punctul  $M \in \mathcal{C}(O, r)$  și  $h$  tangenta în  $M$  la cerc. Să se demonstreze că pentru orice coardă  $(AB)$ ,  $AB \parallel h$ , punctul  $M$  este mijlocul arcului  $\widehat{ABM}$ .
5. Se dau: un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ , un punct  $A \in \mathcal{C}(O, r)$  și un număr real  $\alpha \in (0, 360)$ ,  $\alpha \neq 180$ . Să se arate că există exact două puncte  $M$ ,  $M \notin \mathcal{C}(O, r)$  astfel ca  $m(\widehat{AM}) = \alpha^\circ$ .
6. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc, care au o lungime dată.
7. Se dau punctele distincte  $A, B$  și dreapta  $d$  perpendiculară pe  $AB$ .  $M$  fiind un punct variabil pe  $d$ , să se afle locul geometric al punctului diametral opus lui  $M$  în cercul care trece prin  $A, B$  și  $M$ .
- 8\*. Două cercuri se intersectează în  $A, B$ . O secantă variabilă trecînd prin  $A$  taie cercurile a doua oară în  $M, N$ . Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului  $(MN)$ .

### § 3. Unghi înscris

**Definiție.** Unghiul  $\widehat{AMB}$  se numește *unghi înscris* unui cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  dacă  $A, M, B$  sînt puncte ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ .

Arcul  $\widehat{AB}$  căruia nu-i aparține punctul  $M$  se numește *arc cuprins între laturile unghiului*.

**Teorema 1.** Măsura unui unghi înscris în cerc este  $\frac{1}{2}$  din măsura arcului cuprins între laturile sale.

*Demonstrație.* Se consideră unghiul  $\widehat{AMB}$  înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ .

**Cazul I.** Una din laturile unghiului conține centrul cercului, de exemplu  $O \in AM$  (fig. III.18); atunci  $\widehat{AOB}$  este exterior triunghiului isoscel  $OMB$  și  $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AOB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ .

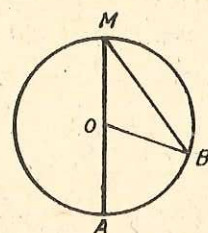


Fig. III.18

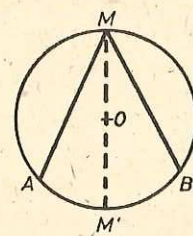


Fig. III.19

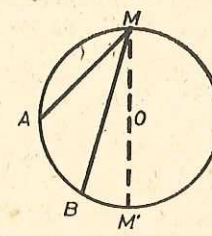


Fig. III.20

**Cazul II.** Centrul cercului este în interiorul unghiului  $\widehat{AMB}$  (fig. III.19). Atunci  $M'$  fiind diametral opus lui  $M$ , din cazul I și teorema 1 § 2 rezultă  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMM'}) + m(\widehat{M'MB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM'}) + \frac{1}{2} m(\widehat{M'B}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ .

**Cazul III.** Centrul cercului nu aparține interiorului unghiului  $\widehat{AMB}$  (fig. III.20). Punctul  $M'$  fiind diametral opus punctului  $M$  și  $(MB \subset \text{Int } \widehat{AMM'})$  prin aplicarea cazului I se obține:

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMM'}) - m(\widehat{BMM'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM'}) - \frac{1}{2} m(\widehat{BM'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}).$$

Cele trei cazuri demonstrează teorema.

Din teorema 1 rezultă că fiind date două puncte fixe  $A$  și  $B$  ale unui cerc și un punct  $M$  variabil pe arcul mare  $\widehat{AB}$ , diferit de  $A$  și  $B$ , unghiurile  $\widehat{AMB}$  au aceeași măsură, egală cu  $\frac{1}{2} m(\widehat{AOB})$ , iar dacă  $M$  aparține arcului mic  $\widehat{AB}$ , măsura unghiurilor  $\widehat{AMB}$  este de asemenea constantă egală cu  $\frac{1}{2} (360^\circ - m(\widehat{AOB}))$ . Dacă  $\widehat{AB}$  este semicerc,  $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$ .

**Teorema 2.** Măsura unui unghi cu vârful pe cerc, una din laturi fiind secantă cercului, iar cealaltă tangentă cercului este  $\frac{1}{2}$  din măsura arcului de cerc inclus în interiorul unghiului.

*Demonstrație.* Fie unghiul  $\widehat{AMB}$ ,  $M \in \mathcal{C}(O, r)$ ,  $B \in \mathcal{C}(O, r)$ ,  $MA$  tangentă cercului.

**Cazul I.** (fig. III.21)  $\widehat{AMB}$  este un unghi ascuțit;  $M'$  fiind punctul diametral opus lui  $M$ , ținînd seama că  $B$  și  $M'$  sînt de aceeași parte a tangentei, rezultă  $(MB \subset \text{Int } \widehat{AMM'})$ , deci

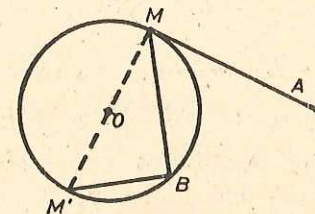


Fig. III.21



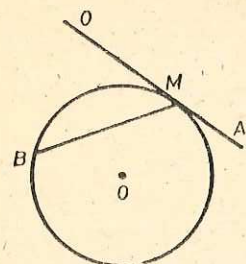


Fig. III.22

$\widehat{BM'M} = \widehat{AMB}$  (având același complement  $\widehat{BMM'}$ ), iar  $\widehat{BM'M}$  este un unghi înscris. Atunci  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BM'M}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BM})$ , arcul  $\widehat{BM}$  fiind un arc mic.

**Cazul II.**  $\widehat{AMB}$  este un unghi obtuz (fig. III.22). Fie  $C \in AM$ ,  $M \in (AC)$ , iar  $D$  un punct al arcului mare  $\widehat{BM}$ . Unghiurile  $\widehat{CMB}$  și  $\widehat{AMB}$  sînt suplementare;  $\widehat{CMB}$  fiind un unghi ascuțit, conform cazului I,  $m(\widehat{CMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{MB})$  (arcul mic  $\widehat{MB}$ ). Atunci

$$\begin{aligned} m(\widehat{AMB}) &= 180^\circ - m(\widehat{CMB}) = \frac{1}{2} [360^\circ - 2m(\widehat{CMB})] = \\ &= \frac{1}{2} [360^\circ - m(\widehat{MB})] = \frac{1}{2} m(\widehat{BDM}). \end{aligned}$$

**Cazul III.** Dacă  $\widehat{AMB}$  este unghi drept, atunci  $M, B$  sînt diametral opuse și  $\widehat{MB}$  este semicerc, deci  $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ = \frac{1}{2} m(\widehat{MB})$ .

**Definiție.** Unghiul  $\widehat{AMB}$  se numește *unghiul cu vîrf în interiorul unui cerc*  $\mathcal{C}(O, r)$  dacă  $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$ , iar  $A$  și  $B$  sînt puncte ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ .

Dacă  $\widehat{AMB}$  este un unghi cu vîrf în interiorul unui cerc (fig. III. 23), dreptele  $MA$  și  $MB$  avînd un punct în interiorul cercului vor avea cîte două puncte comune cu cercul  $A, A'$  respectiv  $B, B'$ . Unghiul  $\widehat{A'MB'}$  este de asemenea un unghi cu vîrf în interiorul cercului și  $\widehat{AMB} \equiv \widehat{A'MB'}$  ca unghiuri opuse la vîrf. Arcele  $\widehat{AB}$  și  $\widehat{A'B'}$  care sînt incluse în  $\text{Int } \widehat{AMB}$  respectiv  $\text{Int } \widehat{A'MB'}$  se numesc *arc cuprins între laturile unghiului*, respectiv arc cuprins între prelungirile laturilor unghiului cu vîrf în interiorul cercului.

**Teorema 3.** Măsura unui unghi cu vîrf în interiorul unui cerc este  $\frac{1}{2}$  din suma măsurilor arcului cuprinse între laturile unghiului și a arcului cuprins între prelungirile acestora.

**Demonstrație.** Fie unghiul  $\widehat{AMB}$  cu  $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$  și  $\widehat{A'MB'}$  opus la vîrf cu  $\widehat{AMB}$ ,  $A' \in AM$ ,  $B' \in BM$ ,  $A'$  și  $B'$  fiind pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  (fig. III.24). Unghiurile  $\widehat{A'AB'}$  și  $\widehat{AB'B}$  fiind

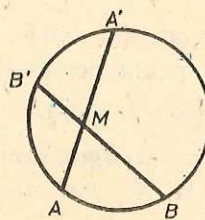


Fig. III.23

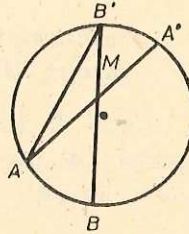


Fig. III.24

unghiuri înscrise în cerc,  $m(\widehat{A'AB'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{A'B'})$  și  $m(\widehat{AB'B}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ .

Unghiul  $\widehat{AMB}$  este un unghi exterior pentru triunghiul  $AMB'$  și deci

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{A'AB'}) + m(\widehat{AB'B}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{A'B'}) + m(\widehat{AB})].$$

**Definiție.** Unghiul  $\widehat{hk}$  se numește *unghi cu vîrf în exteriorul unui cerc* dacă vîrf său aparține exteriorului cercului, iar semidreptele  $h$  și  $k$  sînt tangente sau secante cercului.

Laturile unui unghi exterior determină pe cerc două arce care aparțin interiorului unghiului; acestea se numesc *arce cuprinse între laturile unghiului*.

**Teorema 4.** Măsura unui unghi cu vîrf în exteriorul unui cerc este egală cu  $\frac{1}{2}$  din valoarea absolută a diferenței măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale.

**Demonstrație.** Fie  $\widehat{hk}$  un unghi cu vîrf în  $M$ ,  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ .

**Cazul I.** Laturile  $h$  și  $k$  sînt secante cercului în punctele  $A, C$  respectiv  $B, D$ ,  $A \in h$ ,  $C \in h$ ,  $A \in (MC)$ ,  $B \in k$ ,  $D \in k$ ,  $B \in (MD)$  (fig. III.25).

Unghiurile  $\widehat{CAD}$  și  $\widehat{ADB}$  fiind unghiuri înscrise în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $m(\widehat{CAD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CD})$ ,  $m(\widehat{ADB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ . Unghiul  $\widehat{CAD}$  este un unghi exterior triunghiului  $AMD$ , deci  $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ADM}) + m(\widehat{CMD})$ , de unde rezultă că  $m(\widehat{CMD}) = m(\widehat{CAD}) - m(\widehat{ADM}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB})]$ .

**Cazul II.** Latura  $h$  este tangentă cercului în  $A$ , iar  $k$  este secanta cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $B$  și  $D$  fiind punctele comune cercului și secantei,  $B \in (MD)$  (fig. III.26). Se alege un punct  $C$ ,  $C \in h$ ,  $A \in (CM)$ ;  $\widehat{CAD}$  fiind unghi exterior

triunghiului  $AMD$ ,  $m(\widehat{CAD}) =$   
 $= m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{ADM})$ .

Dar,  $m(\widehat{ADM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$

și  $m(\widehat{CAD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AD})$ . Rezultă

$m(\widehat{AMD}) = m(\widehat{CAD}) - m(\widehat{ADM}) =$

$= \frac{1}{2} m(\widehat{AD}) - \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) =$

$= \frac{1}{2} [m(\widehat{AD}) - m(\widehat{AB})]$ .

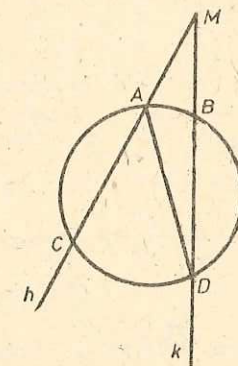


Fig. III.25

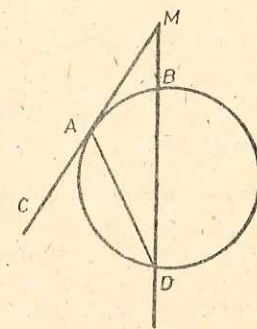


Fig. III.26



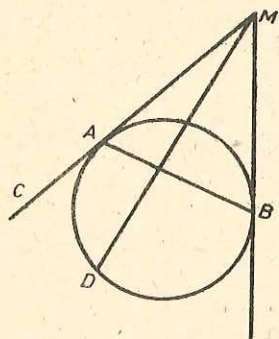


Fig. III.27

**Căzul III.** Laturile  $h$  și  $k$  sînt tangente cercului în punctele  $A$  și  $B$ ,  $A \in h$ ,  $B \in k$  (fig. III.27). Se alege punctul  $C$ ,  $C \in h$ ,  $A \in (CM)$  și un punct  $D$  al arcului mare  $\widehat{AB}$ . Unghiul  $\widehat{CAB}$  este exterior triunghiului  $ABM$  deci  $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{MBA})$  și  $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ADB})$ ,  $m(\widehat{MBA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ .

Atunci

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{CAB}) - m(\widehat{MBA}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{ADB}) - m(\widehat{AB})].$$

### Aplicație. Arc capabil de unghi dat

Se consideră punctele fixe  $A$  și  $B$  și un număr real  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 180)$ . Să se determine locul geometric al punctelor  $M$  situate într-unul din semiplanele limitate de dreapta  $AB$ , pentru care  $m(\widehat{AMB}) = \alpha^\circ$ .

**Rezolvare.** Se consideră punctele,  $A$ ,  $B$ ,  $A \neq B$  și  $S$  unul din semiplanele limitate de dreapta  $AB$  (fig. III. 28).

Fie semidreapta  $(AC)$  în semiplanul opus lui  $S$  astfel încît  $m(\widehat{CAB}) = \alpha^\circ$  și  $O$  punctul de intersecție al medietoarei segmentului  $(AB)$  cu perpendiculara prin  $A$  pe  $AC$ . Pe cercul de centru  $O$  și rază  $r = OA$ , punctele  $A$  și  $B$  determină arcul  $\widehat{AB}$  situat în semiplanul  $S$ . Se va arăta că *acest arc, fără capetele  $A$ ,  $B$  este locul geometric căutat.* Fie  $M$  un punct al arcului  $\widehat{AB}$  din semiplanul  $S$  și  $N$  un punct al cercului care nu aparține semiplanului  $S$ . Atunci  $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ANB})$ . Deoarece  $AC$  este tangentă cercului ( $AC \perp AO$ ), rezultă că  $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ANB})$  deci  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha^\circ$ .

Rămîne de arătat că pentru orice punct  $Q$  al semiplanului  $S$  nesituat pe arcul  $\widehat{AB}$ ,  $m(\widehat{AQB}) \neq \alpha^\circ$ . Într-adevăr, dacă  $Q \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r) \cap S$ , rezultă că  $m(\widehat{AQB}) > \frac{1}{2} m(\widehat{ANB}) = \alpha^\circ$  deoarece  $\widehat{AQB}$  este un unghi cu vîrfurile în interiorul cercului, iar dacă  $Q \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r) \cap S$  rezultă că  $m(\widehat{AQB}) < \frac{1}{2} m(\widehat{ANB}) = \alpha^\circ$ . Arcul deschis  $\widehat{AMB}$  din semiplanul  $S$  astfel construit este locul geometric

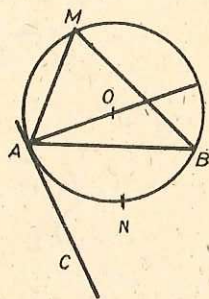


Fig. III.28

al punctelor  $M$  pentru care  $m(\widehat{AMB}) = \alpha^\circ$  și se numește *arc capabil de  $\alpha^\circ$ .*

Arcul deschis  $\widehat{ANB}$  din semiplanul opus este arcul capabil de unghiul  $180^\circ - \alpha^\circ$ .

### Exerciții

1. Pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  se consideră coarda  $(AB)$  și unghiul  $\widehat{ABM}$ . Să se demonstreze că dacă  $m(\widehat{ABM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ , arcul  $\widehat{AB}$  fiind inclus în  $\text{Int } \widehat{ABM}$ , atunci  $BM$  este tangentă cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  în  $B$ .
2. Două cercuri se intersectează în  $M$  și  $N$ . Fie  $M'$  și  $M''$  punctele diametral opuse lui  $M$  în cele două cercuri. Să se arate că  $M'$ ,  $N$  și  $M''$  sînt coliniare.
3. Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare  $(AB)$  și  $(CD)$ . Fie  $M$  un punct al cercului situat pe arcul  $\widehat{BD}$  sau  $\widehat{AC}$ . Să se arate că  $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{BMC}) = 90^\circ$ .
4. Într-un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  se inscrie triunghiul  $ABC$ . Dacă  $m(\widehat{B}) = 35^\circ$  și  $m(\widehat{C}) = 43^\circ$ , să se găsească măsurile unghiurilor  $\widehat{BAO}$  și  $\widehat{CAO}$ .
5. În triunghiul  $ABC$  înscris într-un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  se duc înălțimile corespunzătoare vîrfurilor  $B$  și  $C$  și diametrul prin punctul  $A$ . Să se arate că cele două înălțimi și diametrul determină un triunghi asemenea cu  $ABC$ .
6. Pe un cerc se dau trei puncte oarecare  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Fie  $D$  mijlocul arcului  $\widehat{AB}$ ,  $E$  mijlocul arcului  $\widehat{AC}$ ; dreapta  $DE$  intersectează pe  $AB$  în  $F$  și pe  $AC$  în  $G$ . Să se arate că  $(AF) \equiv (AG)$ .
7. Se dă triunghiul  $ABC$  înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și se notează cu  $D$  mijlocul arcului  $\widehat{BC}$ . Să se demonstreze că măsura unghiului  $\widehat{ADO}$  este egală cu jumătatea diferenței dintre măsurile unghiurilor  $\widehat{ABC}$  și  $\widehat{ACB}$ .
8. Se dă un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  și un punct exterior  $A$  din care se duc tangențele  $AB$  și  $AC$ . Dreapta  $BO$  intersectează cercul a doua oară în  $E$ . Să se arate că  $\widehat{BAO} \equiv \widehat{ECF}$ , unde  $F$  este intersecția dintre tangenta  $AC$  și dreapta  $BE$ .
9. În triunghiul  $ABC$  înscris într-un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  se duce perpendiculara din  $A$  pe  $BC$  care taie cercul a doua oară în  $D$ . Notînd cu  $E$  punctul diametral opus lui  $A$ , să se arate că unghiurile  $\widehat{BAC}$  și  $\widehat{DAE}$  au aceeași bisectoare.
10. Două cercuri se intersectează în  $A$  și  $B$ . O secantă variabilă trecînd prin  $A$  taie cercurile a doua oară respectiv în  $M$  și  $N$ . a) Să se arate că măsura unghiului  $\widehat{MBN}$  este constantă. b) Să se determine poziția secantei  $MN$  astfel ca distanța  $MN$  să fie maximă.
11. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  care trec printr-un punct fix  $A$ .
12. Fie  $(AB)$  un diametru fix al unui cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar  $M$  un punct variabil pe cerc. Se ia pe raza  $(OM)$  un punct  $P$  astfel ca  $OP$  să fie egală cu distanța de la  $M$  la dreapta  $AB$ . Să se afle locul geometric al punctului  $P$ .
13. Fie  $(AB)$  o coardă fixă a unui cerc, iar  $(PQ)$  o coardă variabilă ca poziție, dar de lungime fixă. Să se afle locurile geometrice ale punctelor  $AP \cap BQ$  și  $AQ \cap BP$ .
14.  $(AB)$  fiind o coardă fixă, iar  $M$  un punct variabil al unui cerc, să se afle locul geometric al punctului  $P$  astfel încît  $M \in (AP)$  și  $(MP) \equiv (MB)$ .



15\*. Se dau un cerc, pe el un punct fix  $A$ , o dreaptă  $d$  și un punct fix  $B \in d$ . Prin  $A$  și  $B$  ducem un cerc variabil, care taie din nou cercul dat în  $P$  și dreapta dată în  $Q$ . Să se arate că dreapta  $PQ$  trece printr-un punct fix.

16. Fie  $ABC$  un triunghi,  $(CB'$  semidreapta opusă lui  $(CB$ , iar  $D \in \text{Int } \widehat{ACB}'$ . Să se arate că dreapta  $CD$  este tangentă cercului circumscris triunghiului  $ABC$  dacă și numai dacă  $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABC}$ .

17. Fie  $(AB)$  un diametru al unui cerc,  $(AC)$  o coardă,  $D \in (AB)$ ,  $E = \text{pr}_{AC}D$  și  $F$  unul dintre punctele de intersecție ale dreptei  $DE$  cu cercul dat. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor  $FCE$  și  $FBD$  sînt tangente.

18. Triunghiul  $MAB$  înscris în cercul dat  $\mathcal{C}(O, r)$  are vîrfurile  $A$  și  $B$  fixe, iar vîrfurile  $M$  variabil pe cerc. Să se afle locurile geometrice descrise de: a) ortocentrul, b) centrul cercului înscris și c) centrul de greutate al triunghiului  $MAB$ .

#### § 4. Poligoane înscrise și circumscrise

**Definiție.** Un poligon se numește *înscris într-un cerc* dacă vîrfurile poligonului aparțin cercului. În acest caz cercul se numește *circumscris poligonului*.

Un poligon se numește *circumscris unui cerc* dacă laturile sale sînt tangente la cerc. În acest caz, cercul se numește *înscris în poligon*.

Fiind dat un triunghi  $ABC$ , există întotdeauna un cerc unic circumscris triunghiului și un cerc unic înscris în triunghi. Centrul cercului circumscris triunghiului este punctul de concurență al mediatoarelor laturilor triunghiului și centrul cercului înscris în triunghi este punctul de concurență al bisectoarelor unghiurilor triunghiului. În cazul poligoanelor cu mai mult de trei laturi nu întotdeauna există cerc înscris sau circumscris.

**Teorema 1.** Un poligon convex poate fi înscris într-un cerc dacă mediatoarele laturilor sale sînt concurente și reciproc, dacă un poligon convex este înscris într-un cerc, atunci mediatoarele laturilor sale sînt concurente.

**Demonstrație.** a) Se consideră poligonul  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  și se presupune că mediatoarele laturilor sale au un punct comun  $O$  (fig. III.29). Atunci pe baza proprietății punctelor mediatoarei rezultă că  $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$ . Deci vîrfurile  $A_1, A_2, \dots, A_n$  aparțin unui cerc de centru  $O$  și rază  $r = OA_1$ .

b) Dacă poligonul  $A_1 A_2 \dots A_n$  are vîrfurile pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  atunci  $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n = r$ , deci  $O$  se află pe mediatoarele segmentelor  $(A_1 A_2), (A_2 A_3), \dots, (A_{n-1} A_n), (A_n A_1)$ .

Un poligon care poate fi înscris într-un cerc se numește poligon *inscriptibil*.

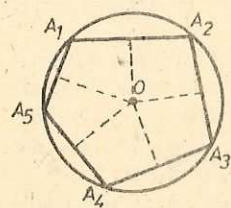


Fig. III.29

**Teorema 2.** Un poligon convex poate fi circumscris unui cerc dacă bisectoarele unghiurilor sale sînt concurente și reciproc, dacă un poligon convex este circumscris unui cerc atunci bisectoarele unghiurilor sale sînt concurente.

**Demonstrație.** a) Se consideră poligonul  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  și  $O$  punctul de concurență al bisectoarelor unghi-

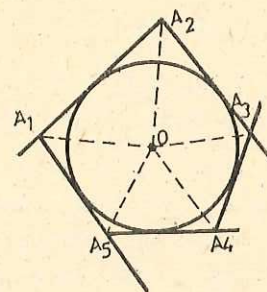


Fig. III.30.

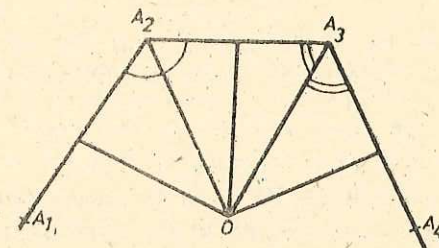


Fig. III.31

rilor sale (fig. III.30). Atunci pe baza proprietății punctelor bisectoarei rezultă că  $d(O, A_1 A_2) = d(O, A_2 A_3) = \dots = d(O, A_n A_1)$ . Cercul de centru  $O$  și rază  $r = d(O, A_1 A_2)$  este tangent fiecărei laturi a poligonului. b) Dacă poligonul  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  are laturile tangente cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  atunci  $d(O, A_1 A_2) = d(O, A_2 A_3) = \dots = d(O, A_n A_1) = r$  deci  $O$  se află pe bisectoarele unghiurilor  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \dots, \hat{A}_n$ .

**Definiție.** Un poligon convex se numește *poligon regulat* dacă toate laturile și toate unghiurile sînt congruente.

**Teorema 3.** Orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc și poate fi circumscris unui cerc.

**Demonstrație.** a) Fie poligonul regulat  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  (fig. III.31). Mediatoarele laturilor  $(A_1 A_2)$  și  $(A_2 A_3)$  sînt concurente într-un punct  $O$ . Triunghiurile  $OA_1 A_2$  și  $OA_2 A_3$  sînt isoscele și congruente, deci  $\widehat{OA_1 A_2} \equiv \widehat{OA_2 A_1} \equiv \widehat{OA_2 A_3} \equiv \widehat{A_2 A_3 O}$ . Deoarece  $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_2 \equiv \hat{A}_3 \equiv \dots \equiv \hat{A}_n$  rezultă că  $\widehat{A_2 A_3 O} \equiv \widehat{OA_3 A_4}$ , deci  $\triangle OA_3 A_4 \equiv \triangle OA_3 A_2$  (L.U.L.). Rezultă că  $OA_3 A_4$  este isoscel,  $(OA_3) \equiv (OA_4)$ , deci  $O$  aparține și mediatoarei segmentului  $(A_3 A_4)$ . În mod analog se arată succesiv că triunghiurile  $OA_4 A_5, \dots, OA_n A_1$  sînt isoscele și congruente, deci  $O$  aparține mediatoarelor laturilor poligonului. Mediatoarele fiind concurente, conform teoremei 1, poligonul  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  poate fi înscris într-un cerc.

b) Din demonstrația de la punctul a) rezultă că  $(A_1 O), (A_2 O), (A_3 O), \dots, (A_n O)$  sînt bisectoarele unghiurilor  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \dots, \hat{A}_n$ .  $O$  fiind deci punctul lor comun, conform teoremei 2 poligonul  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  poate fi circumscris unui cerc.

Se observă că în cazul poligoanelor regulate centrul cercului înscris coincide cu centrul cercului circumscris și se numește *centrul* poligonului. Raza cercului înscris într-un poligon regulat se mai numește și *apotema* poligonului regulat.



## Patrulater inscriptibile

Știm că un *patrulater inscriptibil este convex* (§ 1, exer. 14). În cazul patruleterelor convexe pot fi stabilite condiții de inscriptibilitate caracteristice.

**Teorema 4.** Dacă un patrulater este inscriptibil atunci orice unghi determinat de o diagonală și o latură este congruent cu unghiul determinat de cealaltă diagonală cu latura opusă primei laturi și reciproc dacă un patrulater este convex și un unghi determinat de o latură și o diagonală este congruent cu unghiul determinat de latura opusă primei laturi și cealaltă diagonală, atunci patrulaterul este inscriptibil.

*Demonstrație.* a) Fie patrulaterul  $ABCD$  inscriptibil și  $\mathcal{C}(O, r)$  cercul circumscris acestuia (fig. III.32); atunci  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DBC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{DC})$ .

b) Fie patrulaterul  $ABCD$  convex și  $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD})$  (fig. III.33). Atunci ținând seama că  $B$  și  $C$  se află în același semiplan limitat de  $AD$ , din proprietatea arcului capabil de unghi dat, rezultă că punctele  $B$  și  $C$  aparțin unui cerc în care  $(AD)$  este coardă.

**Teorema 5.** Dacă un patrulater este inscriptibil atunci suma măsurilor a două unghiuri opuse este  $180^\circ$  și reciproc dacă suma măsurilor a două unghiuri opuse dintr-un patrulater convex este  $180^\circ$ , atunci patrulaterul este inscriptibil.

Demonstrația acestei teoreme se lasă ca exercițiu.

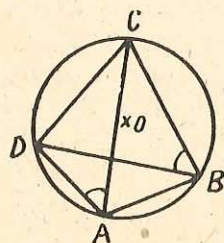


Fig. III.32

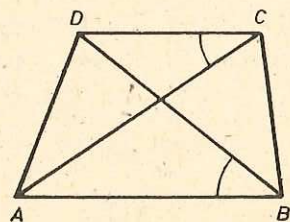


Fig. III.33

## Exerciții

- Fiind dat triunghiul  $ABC$ , să se arate că există patru cercuri tangente dreptelor  $AB, BC, CA$  (un cerc *inscris* și trei cercuri *exinscrise*).
- Să se calculeze apotema și lungimea laturii unui poligon regulat cu  $n$  laturi, înscris în cercul de rază  $r$  pentru  $n = 3, 4, 6, 8$ .
- Să se arate că orice dreptunghi este inscriptibil.
- Să se arate că dacă în trapezul isoscel  $ABCD$  poate fi înscris un cerc, atunci distanța dintre cele două baze este medie proporțională între lungimile bazelor.
- Să se arate că dacă un trapez este inscriptibil, atunci el este isoscel.
- Să se determine măsura arcului mic determinat de o latură a unui poligon regulat cu  $n$  laturi înscris în  $\mathcal{C}(O, r)$ .

7\*. Fie un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ . Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $n > 2$  există un poligon regulat cu  $n$  laturi înscris în cerc și un poligon regulat cu  $n$  laturi circumscris cercului.

*Indicație.* Se utilizează axioma de construcție a unghiurilor și faptul că măsura unghiului la centru ale cărui laturi trec prin două vîrfuri consecutive ale poligonului este  $\alpha = \frac{2 \cdot 180^\circ}{n}$ .

8\*. Se consideră un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  și două poligoane regulate cu  $n$  laturi, unul înscris și celălalt circumscris cercului. Să se arate că dacă se notează cu  $l_n$  și  $L_n$  lungimile laturilor celor două poligoane, atunci

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

9. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil o bisectoare interioară se intersectează cu bisectoarea exterioară a unghiului opus, pe cercul circumscris patrulaterului.

*Indicație.* Se arată că se obține un patrulater inscriptibil.

10. Prin punctele comune  $A$  și  $B$  a două cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  se duc secantele arbitrare  $MAN$  și  $PBQ$ ,  $M \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $P \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$ . Să se demonstreze că  $MP \parallel NQ$ .

11. În cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  se duce diametrul  $(AB)$  și tangenta în  $A$ , pe care se iau două puncte oarecare  $C$  și  $D$ ,  $A$  separă  $C$  și  $D$ . Dreptele  $CB$  și  $DB$  intersectează cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  în  $E$  și  $F$ . Să se arate că patrulaterul  $CDFE$  este inscriptibil. Ce devine acest patrulater în cazul cînd  $(AC) \equiv (AD)$ .

*Indicație.* Se arată că un unghi interior al patrulaterului este congruent cu unghiul opus exterior; în cazul particular se obține trapez isoscel.

12\*. Să se arate că un paralelogram este inscriptibil dacă și numai dacă este un dreptunghi.

13. Fie  $A', B', C'$  mijloacele laturilor unui triunghi  $ABC$ , iar  $D$  piciorul unei înălțimi ( $D = pr_{BC}A$ ). Să se arate că punctele  $A', B', C'$  și  $D$  sînt pe un cerc.

14. Fie  $ABC$  un triunghi,  $A', B'$  mijloacele laturilor  $(BC)$  și  $(AC)$ ,  $D$  piciorul înălțimii duse din  $A$ ,  $H$  ortocentrul, iar  $A_1$  mijlocul segmentului  $(AH)$ . Să se arate că punctele  $A', B', A_1$  și  $D$  sînt situate pe un cerc în fiecare din următoarele cazuri posibile: a)  $H \in (AD)$ , b)  $H = D$ , c)  $A \in (HD)$ .

15. Fie  $ABC$  un triunghi,  $D, E, F$  picioarele înălțimilor,  $A', B, C'$  mijloacele laturilor,  $H$  ortocentrul, iar  $A_1, B_1, C_1$  mijloacele segmentelor  $(AH), (BH), (CH)$ . Să se arate că punctele  $D, E, F, A', B', C', A_1, B_1, C_1$  sînt pe un cerc (numit „cercul lui Euler” sau „cercul celor nouă puncte” al triunghiului  $ABC$ ).

*Indicație.* Se vor folosi exercițiile 13 și 14.

16\*. Folosind notațiile exercițiului 15 să se arate că dreptele  $A'A_1, B'B_1, C'C_1$  sînt concurente.

17. Fie  $ABC$  un triunghi și  $D, E, F$  picioarele înălțimilor. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor  $AEF, BFD, CDE$  au un punct comun.

18. Se consideră un patrulater convex avînd diagonalele perpendiculare, care se intersectează în punctul  $O$ . Să se arate că proiecțiile lui  $O$  pe laturi sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

19. Fie  $\widehat{AOB}$  un unghi drept,  $M$  și  $N$  puncte variabile respectiv pe  $(OA)$  și  $(OB)$ , iar  $MNPQ$  un pătrat astfel ca  $MN$  să se separe punctele  $O$  și  $P$ . Să se afle locul geometric al centrului pătratului.



20\*. Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic și  $D \in (BC)$  un punct fix. Paralela prin  $L$  la  $AB$  taie  $AC$  în  $E$ . Fie  $M$  un punct variabil pe segmentul  $(AE)$  și  $\{N\} = AB \cap DM$ . Cercurile circumscrise triunghiurilor  $CDM$  și  $AMN$  se intersectează a doua oară în  $P$ . Să se afle locul geometric al punctului  $P$ .

21\*. Fie  $ABC$  un triunghi și  $D, E, F$  picioarele înălțimilor. Să se arate: a) triunghiurile  $AEF, DEC$  și  $DBF$  sînt asemenea cu triunghiul  $ABC$ . b) Bisectoarele triunghiului  $DEF$  (numit „triunghi ortic”) coincid cu înălțimile triunghiului  $ABC$ .

22\*. Se ia un punct  $M$  pe cercul circumscris unui triunghi ascuțitunghic  $ABC$ . Să se arate că proiecțiile  $P, Q, R$  ale punctului  $M$  pe  $BC, CA, AB$  sînt trei puncte situate pe o dreaptă („dreapta lui Simson”). Să se considere apoi cazul triunghiului obtuzunghic.

## § 5. Poziția relativă a două cercuri

Fînd date două cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ ,  $O_1 \neq O_2$  se pune problema dacă există puncte comune cercurilor și cîte sînt acestea. Din ex. 3 § 1 rezultă că două cercuri distincte nu pot avea decît cel mult două puncte comune. Stabilirea exactă a numărului de puncte comune a două cercuri se face prin următoarea teoremă:

**Teoremă.** Fie cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ ,  $O_1 \neq O_2$  și  $d = O_1O_2$ .

Dacă 1)  $d > r_1 + r_2$ , cercurile nu au puncte comune

2)  $d = r_1 + r_2$ , cercurile au exact un punct comun

3)  $d < r_1 + r_2$  și  $d > |r_2 - r_1|$ , cercurile au exact două puncte comune

4)  $d = |r_1 - r_2|$ , cercurile au exact un punct comun

5)  $d < |r_1 - r_2|$ , cercurile nu au puncte comune.

*Demonstrație.* 1. Presupunînd că  $M$  este un punct comun celor două cercuri adică  $O_1M = r_1$  și  $O_2M = r_2$ , are loc  $O_1O_2 \leq O_1M + O_2M$  sau  $d \leq r_1 + r_2$ , ceea ce contrazice ipoteza (fig. III.34).

2. Pe semidreapta  $(O_1O_2)$  se construiește punctul unic  $M$ , astfel încît  $O_1M = r_1$  (fig. III.35). Deoarece  $d > r_1$ , rezultă că  $M \in (O_1O_2)$ , deci  $O_2M = d - r_1 = r_2$ ; așadar  $M$  aparține celor două cercuri. Pentru orice alt punct  $Q$ ,  $Q \notin (O_1O_2)$ , are loc inegalitatea:  $O_1Q + O_2Q > O_1O_2 = r_1 + r_2$ , deci  $Q$  nu poate fi comun celor două cercuri.

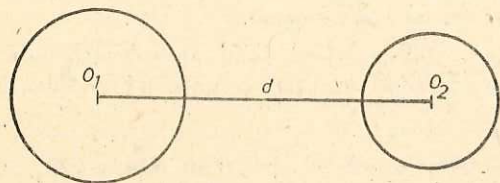


Fig. III.34

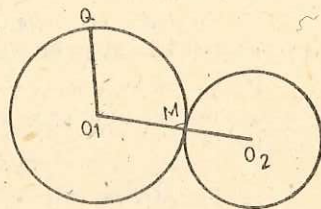


Fig. III.35

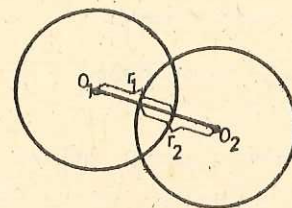


Fig. III.36

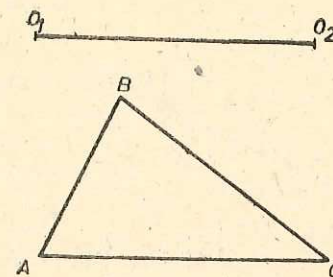


Fig. III.37

3. Se presupune că  $r_2 \geq r_1$  și se va arăta că numerele  $r_1, r_2, d$  pot fi lungimile laturilor unui triunghi (fig. III.36). Din  $d > |r_2 - r_1|$  rezultă  $d > r_2 - r_1$  adică  $r_2 < d + r_1$ . Inegalitatea  $d < r_1 + r_2$  este verificată prin ipoteză, iar  $r_1 < r_2 + d$  rezultă din presupunerea  $r_2 \geq r_1$ . Din § 9 cap. II, aplicații, rezultă că există un triunghi  $ABC$  cu  $AB = r_1, BC = r_2, AC = d = O_1O_2$  (fig. III.37). Într-unul din semiplanele determinate de dreapta  $O_1O_2$  se construiesc semidreptele  $(O_1M)$  și  $(O_2N)$  astfel încît  $\widehat{O_2O_1M} \equiv \widehat{CAB}$  și  $\widehat{O_1O_2N} \equiv \widehat{BCA}$ . Se notează cu  $P$  punctul de intersecție al semidreptelor  $(O_1M)$  și  $(O_2N)$ .  $\triangle O_1O_2P \equiv \triangle ACB$  deci  $O_1P = r_1$  și  $O_2P = r_2$ . Fie  $P'$  simetricul lui  $P$  față de  $O_1O_2$ . Atunci  $O_1P' = O_1P = r_1$ , deci  $P$  și  $P'$  aparțin cercului  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $O_2P' = O_2P = r_2$ , deci  $P$  și  $P'$  aparțin cercului  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ . Dacă  $r_1 > r_2$  se face un raționament analog.

4. Se presupune  $r_2 > r_1$ , deci  $r_2 = d + r_1$  (fig. III.38). Pe semidreapta  $(O_2O_1)$  există punctul unic  $M$  astfel încît  $O_2M = r_2$ . Atunci  $O_1 \in (O_2M)$  și  $O_1M = r_1$ , deci  $M$  aparține celor două cercuri. Să arătăm că cercurile nu au nici un alt punct comun. Dacă  $M'$  este diametral opus lui  $M$  în cercul  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ , atunci  $M'O_1 = r_2 + d > r_1$  deci pe dreapta  $O_1O_2$  nu poate exista alt punct comun celor două cercuri. Fie  $P$  un punct pe cercul  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ ,  $P \notin O_1O_2$ . Atunci  $O_1P > O_2P - O_1O_2 = r_2 - d = r_1$ , deci  $P$  nu poate aparține și cercului  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ .

5. Presupunînd că  $M$  este un punct comun celor două cercuri (fig. III.39), adică  $O_1M = r_1$  și  $O_2M = r_2$ , are loc

$$O_1O_2 \geq |O_1M - O_2M|$$

sau  $d \geq |r_1 - r_2|$ , ceea ce contrazice ipoteza.

**Definiție.** Două cercuri se numesc *tangente* dacă au exact un punct comun și se numesc *secante* dacă au două puncte distincte comune.

În teorema precedentă s-a studiat cazul cercurilor cu centre diferite. Dacă centrele a două cercuri coincid, cercurile se vor numi *concentrice*. Este ușor de verificat că două cercuri concentrice sau coincid sau nu au nici un punct comun.

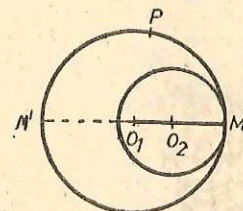


Fig. III.38

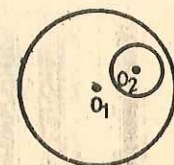


Fig. III.39



## Aplicații

### 1. Tangente dintr-un punct exterior

**Teoremă.** Prin orice punct exterior unui cerc trec două drepte tangente la cerc.

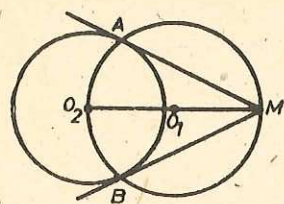


Fig. III.40

**Demonstrație.** Se consideră cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și un punct  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ . Fie  $O_1$  mijlocul segmentului  $(OM)$  și  $r_1 = \frac{OM}{2}$ . Deoarece  $O_1O = r_1$  și  $OM > r$  rezultă că  $r, r_1, OO_1$  verifică condițiile de la punctul 3 al teoremei, deci cercurile  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  sînt secante în punctele  $A$  și  $B$  (fig. III.40),  $m(\widehat{OAM}) = m(\widehat{OBM}) = 90^\circ$  fiind înscrise în semicercurile  $\widehat{OAM}$  și  $\widehat{OBM}$ ; rezultă că  $OA \perp AM$  și  $OB \perp BM$ , deci  $AM$ , și  $BM$ , sînt tangente din  $M$  la cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ .

Arătați că nu există alte tangente din  $M$  la cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ !

### 2. Puterea unui punct față de un cerc

**Teorema 1.** Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$ . Atunci pentru orice coardă  $(AB)$  care conține punctul  $M$ , produsul  $AM \cdot BM$  este constant.

**Demonstrație.** În cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  se consideră cordele  $(AB)$  și  $(CD)$  care conțin punctul  $M$  (fig. III.41).  $\triangle MAC \sim \triangle MDB$  deoarece  $\widehat{CMA} \equiv \widehat{BMD}$  (opuse la vîrf) și  $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CDB}$  (cuprind același arc între laturi).

Atunci  $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$  și  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

Valoarea constantă a acestui produs înmulțită cu  $(-1)$  se notează  $\rho(M)$  și se numește *puterea punctului  $M$ , interior cercului, față de cerc.*

**Teorema 2.** Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ . Atunci pentru orice secantă  $AB$ ,  $A \in \mathcal{C}(O, r)$ ,  $B \in \mathcal{C}(O, r)$  care conține punctul  $M$ , produsul  $MA \cdot MB$  este constant.

**Demonstrație.** Se consideră secantele  $AB$  și  $CD$  care conțin punctul  $M$  (fig. III.42),  $A, B, C, D$  fiind pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $A \in (BM)$  și  $C \in (DM)$ .

$\triangle MBC \sim \triangle MDA$  deoarece  $\widehat{BMC} \equiv \widehat{DMA}$  și  $\widehat{MBC} \equiv \widehat{MDA}$  (cuprind

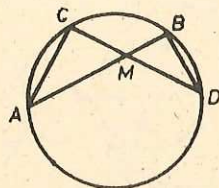


Fig. III.41

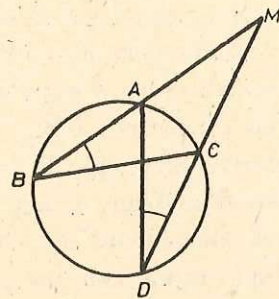


Fig. III.42

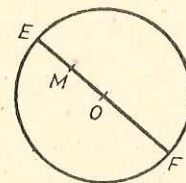


Fig. III.43

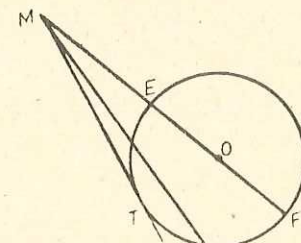


Fig. III.44

același arc între laturi). Atunci  $\frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MA}$ , deci  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

Valoarea constantă a acestui produs se notează cu  $\rho(M)$  și se numește *puterea punctului  $M$ , exterior cercului, față de cerc.*

Se va da în continuare expresia puterii unui punct față de cerc cînd se cunoaște raza cercului  $r$  și distanța de la punct la centrul cercului.

a)  $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$  (fig. III.43). Fie  $(EF)$  diametrul prin  $M$ . Atunci  $\rho(M) = -ME \cdot MF = -[r - OM] \cdot [r + OM] = -(r^2 - OM^2) = OM^2 - r^2$ .

b)  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$  (fig. III.44).  $(EF)$  fiind un diametru și  $E \in (MF)$ , are loc:  $\rho(M) = ME \cdot MF = [OM - r] \cdot [OM + r] = OM^2 - r^2$ .

Se observă că dacă  $MT$  este tangentă la cerc,  $T$  fiind punctul de tangență,  $TM^2 = OM^2 - r^2 = \rho(M)$ .

*Observație.* În mod convențional, dacă punctul  $M$  aparține cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $\rho(M) = 0$ .

În concluzie, oricare ar fi punctul  $M$  din planul cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , avem

$$\rho(M) = OM^2 - r^2.$$

### 3. Axa radicală a două cercuri

Se consideră două cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ ,  $O_1 \neq O_2$  și se pune problema să se găsească locul geometric al punctelor care au puteri egale față de cele două cercuri (fig. III.45). Aceasta revine la găsirea punctelor  $M$ , pentru care

$$O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2.$$

Dacă  $r_1 \geq r_2$ , atunci se poate nota  $a^2 = r_1^2 - r_2^2$  și condiția se scrie

$$O_1M^2 - O_2M^2 = a^2.$$

Deci trebuie găsit locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă. În exercițiul recapitulativ

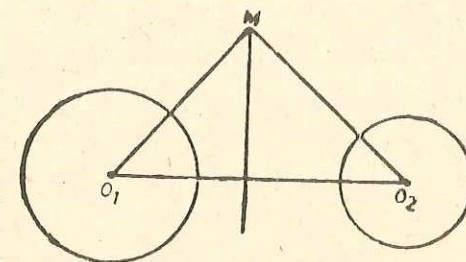


Fig. III.45



nr. 16, cap. II s-a rezolvat această problemă și s-a găsit că locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe  $O_1O_2$ .

Dreapta astfel determinată se numește *axa radicală* a cercurilor  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ .

#### 4. Construcții geometrice

Se consideră următoarele operații numite construcții geometrice fundamentale:

- trasarea unei drepte cu rigla când se cunosc două puncte distincte care îi aparțin;
- determinarea punctului de intersecție a două drepte date;
- trasarea cu compasul a unui cerc când este dat centrul și un segment a cărui lungime este raza;
- determinarea punctelor de intersecție dintre o dreaptă și un cerc;
- determinarea punctelor de intersecție a două cercuri.

Prin construcție geometrică sau construcție cu rigla (negradată) și compasul se va înțelege o succesiune de construcții geometrice fundamentale.

În clasele precedente s-au învățat diferite construcții geometrice.

O altă construcție geometrică, la care se aplică puterea punctului, este determinarea unui segment a cărui lungime este medie proporțională a două segmente date.

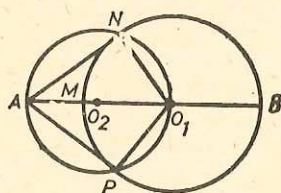


Fig. III.46

Fie segmentele  $(AB)$  și  $(CD)$  cu  $AB = a$ ,  $CD = b$ ,  $a > b$  (fig. III.46). Să se construiască un segment de lungime  $\sqrt{a \cdot b}$ . Pe segmentul  $(AB)$  se construiește punctul  $M$ , astfel ca  $AM = b$ . Se construiește în continuare punctele  $O_1$ , mijlocul segmentului  $(MB)$ , și  $O_2$ , mijlocul segmentului  $(AO_1)$ . Se notează cu  $N$  și  $P$  punctele de intersecție ale cercurilor cu centrele în  $O_1$  și  $O_2$  de raze  $O_1B$ , respectiv  $O_2A$ . Triunghiul  $ANO_1$  este dreptunghic de unde rezultă că  $AN$  este tangentă la cercul  $\mathcal{C}(O_1, O_1B)$  și deci  $AN^2 = AM \cdot AB = a \cdot b$ . Analog,  $AP^2 = a \cdot b$ .

#### Exerciții

1. Două cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  au razele  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ ,  $O_1O_2 = d$ . Să se studieze pozițiile relative ale celor două cercuri după valorile lui  $d$ .
2. Se dă un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $r = 3$ , și punctul  $O'$ ,  $OO' = 2$ . Fie cercul  $\mathcal{C}(O', x)$ . Să se studieze pozițiile relative ale celor două cercuri după valorile lui  $x$ .
3. Fiind date cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r)$ ,  $\mathcal{C}(O_2, 5)$  și  $O_1O_2 = 2(r - 5)$ , să se discute după valorile lui  $r$  pozițiile relative ale celor două cercuri.
4. Să se arate că două cercuri tangente au o tangentă comună în punctul comun.
5. Să se arate că două cercuri cu interioarele disjuncte au tangente comune.

6. Fie cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ . Să se arate că dacă există punctele  $A \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $B \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$  astfel încât  $A \in \text{Int } \mathcal{C}(O_2, r_2)$  și  $B \in \text{Ext } \mathcal{C}(O_2, r_2)$ , atunci cercurile sînt secante.

7. Să se arate că, dacă cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  sînt tangente, axa lor radicală este tangenta comună, iar dacă cercurile sînt secante, axa lor radicală este dreapta determinată de punctele comune celor două cercuri.

8\*. Să se construiască tangentele comune la două cercuri date.

9\*. Să se construiască tangentele la un cerc, paralele cu o dreaptă dată.

10\*. Să se construiască cercul care trece prin două puncte date și este tangent unei drepte date.

11\*. Să se construiască cercul care trece prin punctele  $A$  și  $B$  și este tangent unui cerc dat  $\mathcal{C}(O, r)$ .

12\*. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la două drepte date.

13. Se dă un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  în care este înscris triunghiul isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Prin  $A$  se duce o secantă care intersectează  $BC$  în  $E$  și cercul în  $F$ . Să se arate că  $AB$  este tangentă la cercul circumscris triunghiului  $BEF$ .

14. Se dă cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și punctul exterior  $M$  a cărui distanță la centrul cercului este  $2r$ . Din  $M$  se duce tangenta  $MN$  la cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și se prelungeste  $(MO)$  pînă ce intersectează cercul în  $P$ . Tangenta în  $P$  la cerc intersectează tangenta  $MN$  în  $Q$ . Să se arate că  $2PQ = MQ$  și  $QM = 2\sqrt{3}r$ , iar triunghiul  $PQN$  este echilateral.

15. Fiind date punctele  $A, C$  și  $B \in (AC)$ , ducem tangenta  $CT$  la cercul de diametru  $(AB)$ . Cercul cu centrul  $C$  și rază  $(CT)$  intersectează  $AB$  în  $M$  și  $N$ . Să se arate că avem relația  $AM \cdot AN = AB \cdot AC$ .

*Indicație.* Se scrie puterea punctului  $C$  față de cercul de diametru  $(AB)$  și apoi puterea punctului  $A$  față de cercul cu diametru  $(MN)$  sub forma  $AM \cdot AN = (AC - CT) \cdot (AC + CT)$ .

16\*. O dreaptă arbitrară  $d$  taie două cercuri în punctele  $A, B, C, D$  și axa lor radicală în  $O$ . Să se arate că avem relațiile:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB}.$$

#### § 6. Lungimea cercului

Lungimea unui segment a fost considerată ca noțiune fundamentală, însă lungimea unui cerc sau a unui arc de cerc sînt noțiuni care se definesc.

**Definiție.** Lungimea unui cerc este un număr real pozitiv mai mare decît perimetrul oricărui poligon convex înscris în cerc și mai mic decît perimetrul oricărui poligon convex circumscris cercului.

Admitem că orice cerc are lungime.

O proprietate importantă a lungimii cercului este dată de:

**Teorema 1.** Raportul dintre lungimea unui cerc și lungimea razei este același pentru toate cercurile.



Vom accepta fără demonstrație această teoremă întrucât necesită cunoștințe suplimentare.

Numărul care reprezintă raportul dintre lungimea unui cerc oarecare și lungimea diametrului său se notează cu  $\pi$ . Acesta este un număr irațional și o aproximare a sa este  $\pi \approx 3,1415$ .

Cu această notație rezultă că lungimea unui cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  notată  $l_{\text{cerc}}$  este:

$$l_{\text{cerc}} = 2\pi r.$$

Pentru a defini lungimea unui arc al unui cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  se poate proceda în mod analog considerându-se linii poligonale înscrise în cerc și având aceleași extremități cu arcul.

Calcularea lungimii unui arc se face ținând cont de faptul că arcele congruente au lungimi egale și dacă un arc este reuniunea a două arce care au un singur punct comun, atunci lungimea sa este suma lungimilor celor două arce. În acest mod va rezulta (prin analogie cu demonstrația teoremei lui Thales) că:

a) lungimea unui arc  $\widehat{AB}$  pentru care  $m(\widehat{AB}) = p \cdot \frac{180}{n}$ ,  $p, n \in \mathbb{N}^*$  este

$$l_{\widehat{AB}} = p \cdot \frac{\pi r}{n};$$

b) dacă  $m(\widehat{AB}) = \alpha^\circ$ ,  $\alpha \in [0, 180]$ , atunci  $l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r \alpha}{180}$ ;

c) lungimea unui arc mare  $\widehat{AB}$  pentru care  $m(\widehat{AB}) = 360^\circ - \alpha^\circ$  este

$$l_{\widehat{AB}} = 2\pi r - \frac{\pi r}{180} \alpha = \frac{\pi r}{180} (360 - \alpha).$$

Astfel, rezultă:

**Teorema 2.** Pentru orice arc  $\widehat{AB}$ ,  $l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r}{180} \cdot m(\widehat{AB})$ .

Din această teoremă rezultă că raportul dintre lungimea unui arc și raza cercului nu depinde decât de măsura arcului respectiv. Aceasta face posibilă introducerea unei noi măsuri pentru arce și unghiuri.

**Definiție.** Măsura în radiani a unui arc  $\widehat{AB}$  al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , notată  $\mu(\widehat{AB})$  este

$$\mu(\widehat{AB}) = \frac{l_{\widehat{AB}}}{r} = \frac{\pi}{180} m(\widehat{AB})$$

Măsura în radiani a unui unghi  $\widehat{hk}$  este lungimea arcului de pe cercul de rază 1 și cu centrul în vârful unghiului, aparținând interiorului unghiului.

Se observă că, de fapt, măsura în radiani a unui unghi este măsura în radiani a unui arc de pe un cerc de rază  $r$  cu centrul în vârful unghiului, aparținând interiorului unghiului. Reamintim că măsura notată  $m(\widehat{hk})$  este măsura în grade a unghiului.

## Exerciții

1. Să se afle măsura în radiani a unghiurilor de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $12^\circ$ ,  $135^\circ$ .
2. Să se calculeze o valoare aproximativă a lui  $\pi$  cu ajutorul unui octogon regulat înscris într-un cerc.
3. Fie cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  și patrulaterale convexe  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ , înscrise respectiv în cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ . Să se arate că dacă patrulateralele sînt asemenea, atunci

$$\frac{\text{Perimetrul } A_1B_1C_1D_1}{r_1} = \frac{\text{Perimetrul } A_2B_2C_2D_2}{r_2}.$$

4. Să se afle lungimea unui arc cuprins între laturile unui unghi la centru cu măsura de 1 radian și măsura în grade a acestui unghi. (Se consideră cercul de rază 1.)

5. Fie cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  pentru care  $O_1O_2 = 2$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = \sqrt{3}$ . Să se arate că sînt secante și să se afle perimetrul figurii formate din cele două arce mici determinate de punctele comune celor două cercuri.

6. Fie  $(AB)$  un diametru al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $M, N$  două puncte distincte,  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AB)$  și cercurile  $\mathcal{C}(M, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(O, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(N, r_1)$ , astfel încît perechile de cercuri  $\mathcal{C}(M, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(O, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(N, r_1)$  să fie tangente exterioare, iar cercurile  $\mathcal{C}(M, r_1)$  și  $\mathcal{C}(N, r_1)$  să fie tangente interior cu cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ . Să se calculeze suma lungimilor cercurilor  $\mathcal{C}(M, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(O, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(N, r_1)$  în funcție de  $r$ . Generalizare.

## Exerciții recapitulative

1. Să se arate că lungimea segmentului determinat de punctele de tangență pe tangenta comună la două cercuri tangente exterioare este media geometrică a diametrelor celor două cercuri.

2. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi isoscel  $ABC$ , în care  $AB = AC = 20$ ,  $BC = 24$ .

3\*. Distanța de la un punct oarecare al unui cerc la o coardă dată este media geometrică a distanțelor de la același punct la tangentele duse la cerc prin extremitățile coardei.

4. Fie două puncte fixe  $A, B$  situate pe diametrul unui semicerc și egal depărtate de centru, iar  $M$  și  $N$  două puncte variabile pe semicerc, astfel ca  $AM \parallel BN$ . Să se demonstreze că produsul  $AM \cdot BN$  este constant.

5. Fie  $H$  ortocentrul unui triunghi  $ABC$ , iar  $A', B', C'$  picioarele înălțimilor. Să se arate că:  $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$ .

6. Pe laturile unui hexagon regulat se construiesc în exterior pătrate care au câte o latură comună cu hexagonul. Să se arate că virfurile acestor pătrate, diferite de virfurile hexagonului, formează un dodecagon regulat.

7. Dacă trei cercuri sînt două câte două tangente exterioare, care este raportul între suma lungimilor acestor cercuri și perimetrul triunghiului format de centrele lor?

8. Considerăm trapezul  $ABCD$  cu laturile paralele  $(AB)$  și  $(CD)$ ; fie  $E$  intersecția dreptei  $AD$  cu cercul circumscris triunghiului  $BCD$  și  $F$  intersecția dreptei  $AD$  cu paralela din  $C$  la  $BE$ . Presupunind că  $D \in (AE)$ , să se arate că

1) Patrulaterul  $ABCF$  este inscriptibil

2)  $BC$  este medie geometrică între  $AD$  și  $EF$ .

9. Se dau cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangență  $T$  se duc două drepte arbitrare  $ATC$  și  $DTB$  care intersecțiază cercul  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  în  $A$  și  $D$  și cercul  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  în  $C$  și  $B$ . Să se arate că patrulaterul  $ABCD$  este un trapez



10\*. Se dă triunghiul  $ABC$  înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $O \in \text{Int } ABC$ ; se duce înălțimea  $AD$  și diametrul prin  $A$ . Se proiectează vîrfurile  $B$  și  $C$  pe acest diametru în  $E$  și  $F$  și se intersectează  $DE$  și  $DF$  cu  $AC$  și  $AB$ , respectiv, în  $G$  și  $H$ . Să se demonstreze că punctele  $A, H, D, G$  sînt conciclice.

11. Fie cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ ,  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  secante în  $A$  și  $B$ . Prin punctele  $A$  și  $B$  se duc două secante paralele  $CAD$  și  $EBF$  care intersectează cele două cercuri, respectiv, în punctele  $C, D$  și  $E, F$ . Să se demonstreze că patrulaterul  $CDFE$  este paralelogram.

12. Se dau două cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ , cercul  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  trecînd prin centrul  $O_1$ . Tangentele comune la aceste cercuri au punctele de contact cu cercul  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  în  $A$  și  $B$ . Să se demonstreze că dreapta  $AB$  este tangentă cercului  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ .

13. Se consideră două cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ , și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  tangente exterioare în punctul  $T$ . Tangenta exterioară comună  $AB$  se intersectează cu tangenta în  $T$  la cele două cercuri în punctul  $C$ , iar cu linia centrelor  $O_1O_2$  în punctul  $M$ .

- 1) Să se calculeze lungimea segmentelor  $(AB)$  și  $(TC)$  în funcție de  $r_1$  și  $r_2$ .
- 2) Să se arate că dreptele  $AT$  și  $BT$  sînt perpendiculare.
- 3) Să se calculeze lungimea segmentului  $(MO_1)$  și măsura unghiului  $\widehat{OMA}$  în cazul particular  $r_1 = a$ ,  $r_2 = 3a$ .

Capitolul  
IV

Elemente de geometrie analitică

§ 1. Coordonate în plan

Alegem în plan dreptele perpendiculare  $OA$  și  $OB$ ,  $OA = 1$ ,  $OB = 1$  (fig. IV. 1) și considerăm cîte un sistem de coordonate pe  $OA$ , respectiv,  $OB$  astfel ca  $x_O = 0$ ,  $x_A > 0$  și  $y_O = 0$ ,  $y_B > 0$  (notăm coordonatele pe  $OA$  cu  $x$  și pe  $OB$  cu  $y$ ). Cîm  $OA = 1$ ,  $OB = 1$ , rezultă  $x_A = 1$ ,  $y_B = 1$ . Dacă  $P$  este un punct din plan, există o singură dreaptă paralelă cu  $OB$  care conține punctul  $P$  și care intersectează dreapta  $OA$  în  $M$ . De asemenea, există o singură dreaptă paralelă cu  $OA$ , care conține punctul  $P$  și care intersectează pe  $OB$  în  $N$ . Dacă  $x = x_M$  și  $y = y_N$ , atunci punctului  $P$  i se asociază în acest fel o pereche ordonată unică de numere reale  $(x, y)$ . Numărul  $x$  se numește *abscisa* punctului  $P$ , iar numărul  $y$  se numește *ordonata* lui  $P$ . Axa  $OA$  o numim *axa absciselor*, iar axa  $OB$  *axa ordonatelor*.

Fiînd date numerele reale  $x$  și  $y$ , conform axiomei riglei numărului  $x$  i se asociază un punct unic  $M$  pe  $OA$  cu  $x_M = x$  și numărului  $y$  i se asociază un singur punct  $N$  pe  $OB$  cu  $y_N = y$ . Ducînd prin  $M$  o paralelă la  $OB$  și prin  $N$  o paralelă la  $OA$ , cele două paralele se intersectează în punctul unic  $P$ . În acest fel, perechii de numere reale  $(x, y)$  i se asociază punctul unic  $P$ .

Constatăm deci că există o funcție bijectivă definită pe mulțimea punctelor planului și cu valori în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , care asociază fiecărui punct  $P$  din plan o pereche ordonată de numere reale  $(x, y)$ .

Funcția descrisă mai sus ne definește așa-numitul *sistem de coordonate* în plan.

Punctele  $O, A, B$  determină sistemul de coordonate în mod unic. Tripletul ordonat

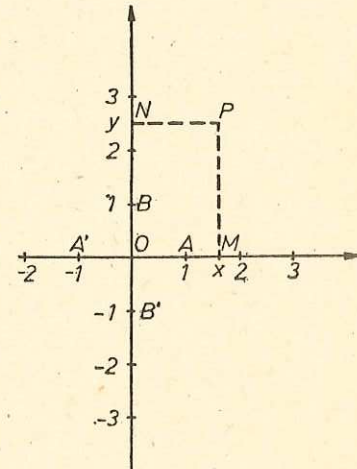


Fig. IV. 1



$(O, A, B)$  se numește *reperul sistemului de coordonate*. Reperul determină în mod unic sistemul de coordonate.

Fie  $A', B'$  cite un punct pe semidreptele opuse lui  $(OA, respectiv, (OB)$ . Mulțimile de puncte  $\text{Int } \widehat{AOB}$ ,  $\text{Int } \widehat{BOA'}$ ,  $\text{Int } \widehat{A'OB'}$ ,  $\text{Int } \widehat{B'OA}$  se numesc, respectiv, *cadranale* I, II, III, IV.

- $(x, y) \in \text{Cadrantului I} \Leftrightarrow x > 0 \text{ și } y > 0,$
- $(x, y) \in \text{Cadrantului II} \Leftrightarrow x < 0 \text{ și } y > 0,$
- $(x, y) \in \text{Cadrantului III} \Leftrightarrow x < 0 \text{ și } y < 0,$
- $(x, y) \in \text{Cadrantului IV} \Leftrightarrow x > 0 \text{ și } y < 0.$

*Exemplu.* Pe figura IV. 2 avem  $A(1, 0), B(0, 1), A'(-1, 0), B'(0, -1), C(3, 2), D(-2, 3), E(0, -3), F(-2, -1), G(2, -1)$ .

### Exerciții

1. Figurați punctele  $M(3, 5), N(-1, 4), P(2, -2), Q(0, 4), R(-6, 0)$ .
2. Aflați locul geometric al punctelor  $M(x, 2)$ , când  $x$  ia toate valorile din  $\mathbb{R}$ .
3. Aflați locul geometric al punctelor care au abscisa egală cu 5.

**Teorema 1.** Fie  $M(x_1, y_1)$  și  $N(x_2, y_2)$  două puncte date și  $P(x, y)$  mijlocul segmentului  $(MN)$ . Atunci coordonatele lui  $P$  se calculează din formulele

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}; \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Dacă  $x_1 = x_2$ , evident  $x = x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Fie  $x_1 \neq x_2$  și  $M_1, N_1, P_1$ , proiecțiile pe axa absciselor a punctelor  $M, N, P$  (fig. IV.3).

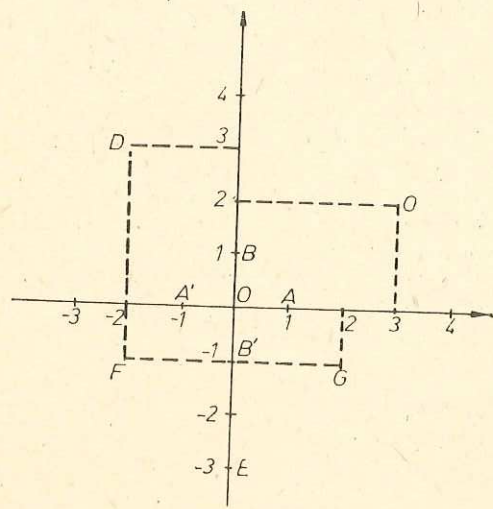


Fig. IV.2

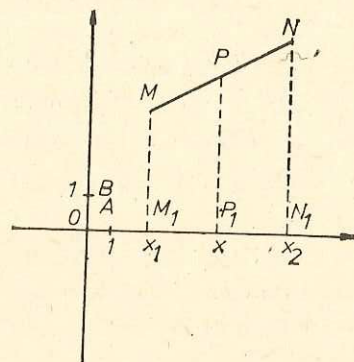


Fig. IV.3

Proprietatea liniei mijlocii în trapez ne arată că  $P_1$  este mijlocul lui  $(M_1N_1)$  și prima formulă (1) rezultă din teorema 4, Cap. I. § 8. Analog se arată și a doua formulă.

### Exerciții

4. Să se afle coordonatele mijlocului segmentului  $(CD)$ , știind că  $C(1, 6), D(5, 3)$ .
5. Fie  $M(2, -1)$  și  $N(4, 3)$ . Să se afle coordonatele simetricilor lui  $M$  față de originea  $O$  și față de punctul  $N$ . Să se arate că abscisele și ordonatele a două puncte simetrice față de originea  $O$  a axelor de coordonate sînt numere opuse.

**Teorema 2.** Distanța dintre punctele  $M(x_1, y_1)$  și  $N(x_2, y_2)$  este dată de formula

$$(2) \quad MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

*Demonstrație.* Fie  $M_1, N_1$  și  $M_2, N_2$  proiecțiile punctelor  $M$  și  $N$  pe cele două axe de coordonate (fig. IV.4) și  $\{Q\} = MM_2 \cap NN_1$ . Dacă  $x_1 = x_2$ , atunci dreptele  $MN$  și  $OB$  sînt paralele și  $|x_2 - x_1| = 0$ . În acest caz, formula rezultă astfel:

$$MN = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Cazul  $y_2 = y_1$  se demonstrează în mod analog.

Să presupunem că  $x_1 \neq x_2$  și  $y_1 \neq y_2$ . Triunghiul  $MNQ$  (fig. IV.4) este dreptunghic în  $Q$  și  $MQ = |x_2 - x_1|$ ,  $QN = M_2N_2 = |y_2 - y_1|$ . Conform teoremei lui Pitagora,  $MN^2 = MQ^2 + QN^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$  și formula (2) rezultă imediat.

**Exemple. 1.** Aflați distanța dintre punctele  $M(a+2, b-3)$  și  $N(a-5, b+7)$ .

*Soluție.* Aplicînd formula demonstrată, rezultă:

$$MN^2 = (a-5 - a-2)^2 + (b+7 - b+3)^2 = 149.$$

Deci  $MN = \sqrt{149}$ .

2. Să se arate că triunghiul cu virfurile în punctele  $M(a, 2a-1), N(5, -1)$  și  $P(1, 1)$  este dreptunghic în  $P$ , oricare ar fi numărul real  $a \neq 1$ .

*Soluție.* Se calculează lungimile laturilor:

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{(a-1)^2 + (2a-2)^2} = \\ &= |a-1| \sqrt{5}, \quad PN = 2\sqrt{5} \text{ și} \\ MN &= \sqrt{(a-5)^2 + (2a)^2} = \\ &= \sqrt{5a^2 - 10a + 25}. \end{aligned}$$

Deoarece  $PM^2 + PN^2 = 5a^2 - 10a + 25 = MN^2$ , conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic, oricare ar fi valorile lui  $a, a \neq 1$ . În cazul cînd  $a = 1$ , punctele  $P$  și  $M$  coincid și nu există triunghiul.

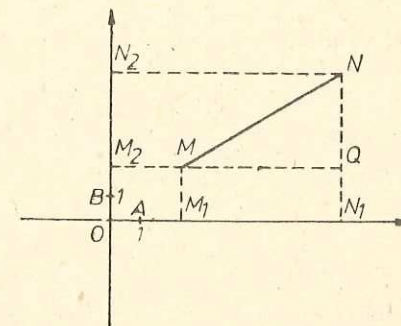


Fig. IV.4



### Exerciții

6. Aflați distanța dintre punctele:

a)  $M(-2, 7)$  și  $N(5, -2)$ ; b)  $P\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$  și  $Q\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ ;

c)  $S(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$  și  $T(6\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ ;

d)  $P(a, b+1)$  și  $Q(a-3, b)$ .

7. Să se determine  $x$  știind că distanța dintre punctele  $P(-5, 2)$  și  $Q(7, x)$  este 13.

8. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele  $M(1, 2)$ ,  $N(3, -4)$ , și  $P(5, -2)$  este dreptunghic.

9. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele  $M(1, 2)$ ,  $N(4, 5)$ ,  $P(a, 6-a)$  este isoscel, oricare ar fi  $a$  numărul real,  $a \neq \frac{5}{2}$ .

10. Să se arate că patrulaterul cu vîrfurile în punctele  $M(1, 5)$ ,  $N\left(\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right)$ ,  $P(2, 3)$ ,  $Q\left(\frac{13}{5}, \frac{21}{5}\right)$  este dreptunghi.

*Indicație.* Se arată că laturile opuse sînt congruente și că diagonalele sînt și ele congruente.

**Teorema 3. (Condiție de perpendicularitate.)** Fie  $P_0(x_0, y_0)$  punctul de intersecție al dreptelor  $d_1$  și  $d_2$ , iar  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  cîte un punct pe  $d_1$ , respectiv,  $d_2$ , diferite de  $P_0$  (fig. IV.5). Atunci  $d_1 \perp d_2$  dacă și numai dacă

$$(3) \quad (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0.$$

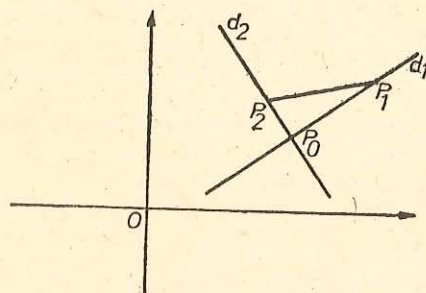


Fig. IV.5

*Demonstrație.* Avem  $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow P_1P_0P_2$  triunghi dreptunghic  $\Leftrightarrow P_0P_1^2 + P_0P_2^2 = P_1P_2^2$ , ceea ce se scrie conform cu (2) sub forma

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

efectuînd calculele, se obține relația (3).

### Exerciții

11. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile  $M(1, 2)$ ,  $N(6, -1)$  și  $P(5, -2)$  este dreptunghic.

12. Fie  $M(2, 3)$ ,  $N(3, 2)$ . Să se afle punctul  $P(x, 0)$ , știind că  $MP \perp MN$ .

13. Fie  $M(1, 3)$ ,  $N(-3, 5)$ . Să se afle intersecția axei ordonatei cu mediatoarea segmentului  $(MN)$ .

## § 2. Ecuația dreptei

**Problema 1.** Se dau punctele  $P_1(3, 1)$ ,  $P_2(5, 2)$  și se notează cu  $d$  perpendiculara pe  $P_1P_2$ , dusă prin  $P_1$  (fig. IV.6). Ce condiție trebuie să verifice  $x$  și  $y$  pentru ca punctul  $P(x, y)$  să fie situat pe dreapta  $d$ ?

*Soluție.* Să ne ocupăm mai întîi de punctele  $P$ ,  $P \neq P_1$ . Atunci  $P \in d \Leftrightarrow P_1P_2 \perp P_1P$  și putem aplica teorema 3, § 1:  $P \in d \Leftrightarrow (5-3)(x-3) + (2-1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) + (y-1) = 0$ . Așadar un punct  $P(x, y)$ , diferit de  $P_1(3, 1)$  atunci și numai atunci se află pe dreapta  $d$  dacă

$$(4) \quad 2x + y - 7 = 0.$$

Deoarece și coordonatele lui  $P_1$  verifică această ecuație, am aflat soluția problemei:

$$(5) \quad P(x, y) \in d \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Echivalența (5) poate fi citită în mai multe feluri, de exemplu:

a)  $P(x, y) \in d$  dacă și numai dacă  $2x + y - 7 = 0$ .

b) Coordonatele  $x, y$  ale unui punct aparținînd dreptei  $d$  satisfac ecuația (4), iar cele ale unui punct nesituat pe  $d$  nu o satisfac.

Putem să scriem

$$d = \{P(x, y) \mid 2x + y - 7 = 0\},$$

adică dreapta  $d$  este locul geometric al punctelor din plan ale căror coordonate verifică ecuația  $2x + y - 7 = 0$ .

**Definiție.** Fie  $\mathcal{L}$  un loc geometric. O relație în  $x$  și  $y$ , care este satisfăcută dacă și numai dacă  $P(x, y) \in \mathcal{L}$ , se numește *ecuația lui  $\mathcal{L}$* , iar  $\mathcal{L}$  se numește *graficul* ecuației respective.

Echivalența (5) arată că ecuația lui  $d$  este  $2x + y - 7 = 0$ . Graficul ecuației (4) este dreapta  $d$ .

**Problema 2.** Să se afle ecuația cercului  $\mathcal{C}(0, 1)$  (fig. IV.7).

*Soluție.* Deoarece  $P(x, y) \in \mathcal{C}(0, 1) \Leftrightarrow OP = 1$  și  $OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ , găsim imediat:

$$P(x, y) \in \mathcal{C}(0, 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Așadar ecuația cercului  $\mathcal{C}(0, 1)$  este

$$(6) \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Spre deosebire de acest rezultat, dreapta din problema 1 are o ecuație de gradul 1 în  $x$  și  $y$  (ecuație liniară). Vom arăta că același lucru este valabil pentru o dreaptă oarecare.

**Teorema 1.** Orice dreaptă are o ecuație de forma

$$(7) \quad ax + by + c = 0,$$

unde  $a$  și  $b$  nu sînt ambele nule.

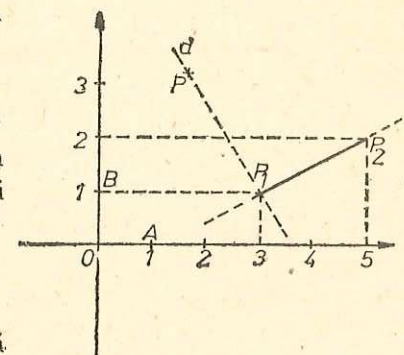


Fig. IV.6

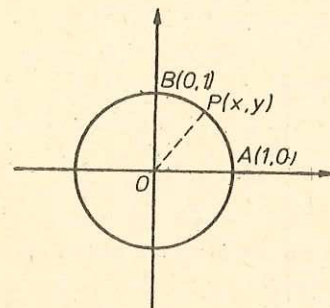


Fig. IV.7



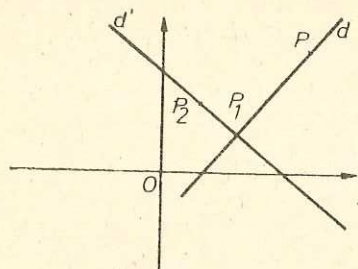


Fig. IV.8

*Demonstrație.* Fie  $d$  o dreaptă și  $P_1(x_1, y_1) \in d$ . Luăm un punct  $P_2(x_2, y_2) \neq P_1$ , aparținând perpendicularei pe  $d$ , dusă prin  $P_1$  (fig. IV. 8). Atunci numerele  $x_2 - x_1$  și  $y_2 - y_1$  nu sînt ambele nule. Un punct  $P(x, y) \neq P_1$  se găsește pe  $d$  dacă și numai dacă  $P_1P_2 \perp P_1P$ , ceea ce conform teoremei 3, § 1 se scrie

$$(8) (x_2 - x_1)(x - x_1) + (y_2 - y_1)(y - y_1) = 0.$$

Deoarece relația (8) este verificată și de  $P_1(x_1, y_1)$ , ea este ecuația dreptei  $d$ . Dacă notăm  $x_2 - x_1 = a$ ,  $y_2 - y_1 = b$  și  $-ax_1 - by_1 = c$ , obținem ecuația (7).

*Observație.* Dacă se cunosc două puncte distincte  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  și dacă  $P_1$  este situat pe o dreaptă  $d$ , iar  $P_1P_2 \perp d$ , atunci ecuația dreptei  $d$  este de forma (8).

Demonstrăm reciproca teoremei 1.

**Teorema 2.** Graficul unei ecuații de forma (7), unde  $a, b$  nu sînt ambele nule, este o dreaptă.

*Demonstrație.* Putem găsi numere reale  $x_1, y_1$  care satisfac ecuația (7). Într-adevăr, dacă  $a \neq 0$  putem lua  $y_1$  arbitrar și  $x_1 = -\frac{by_1 + c}{a}$ ; dacă  $a = 0$  luăm  $x_1$  în mod arbitrar și  $y_1 = -\frac{c}{b}$ . În toate cazurile avem  $ax_1 + by_1 + c = 0$ , deci

$$(9) \quad -ax_1 - by_1 = c.$$

Dacă punctul  $P_1$  are coordonatele  $(x_1, y_1)$  determinate în acest fel, fie  $P_2(x_1 + a, y_1 + b)$  (fig. IV.9). Atunci ecuația perpendicularei  $d$  pe  $P_1P_2$ , dusă prin  $P_1$  are, conform observației, următoarea formă:

$$(x_1 + a - x_1)(x - x_1) + (y_1 + b - y_1)(y - y_1) = 0$$

sau

$$ax + by - ax_1 - by_1 = 0$$

și în virtutea lui (9)

$$ax + by + c = 0.$$

Astfel am pus în evidență o dreaptă  $d$  a cărei ecuație este tocmai (7) și teorema este demonstrată.

*Cazuri speciale.* 1) În ecuația (8) putem avea  $x_1 = x_2$ ; atunci  $y_1 \neq y_2$  (căci  $P_1 \neq P_2$ ). În acest

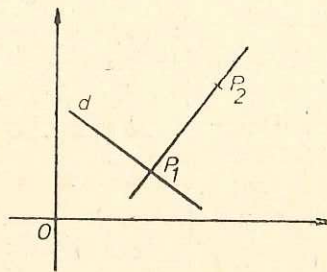


Fig. IV.9

caz  $P_1P_2 \parallel OB$  (fig. IV.10) și  $d \parallel OA$ , iar ecuația (8) se reduce la  $y = y_1$ . Prin urmare, ecuația unei drepte paralele cu axa absciselor este

$$(10) \quad y = y_1$$

și în particular axa absciselor are ecuația  $y = 0$ .

2) Analog, o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor are o ecuație de forma

$$(11) \quad x = x_1$$

(fig. IV.11) și ecuația axei ordonatelor este  $x = 0$ .

3) Dacă dreapta  $d$  trece prin originea  $O(0, 0)$  (fig. IV.12) în ecuația (8), avem  $x_1 = 0, y_1 = 0$ , deci conform cu (7),  $c = 0$ . Ecuația lui  $d$  se scrie în acest caz

$$(12) \quad ax + by = 0.$$

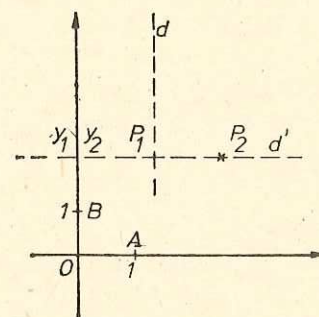


Fig. IV.11

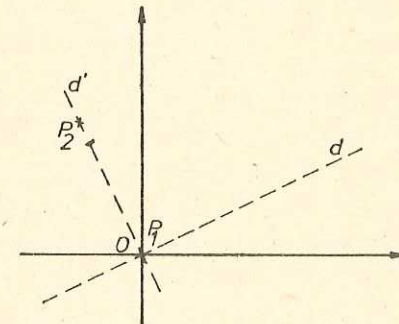


Fig. IV.12

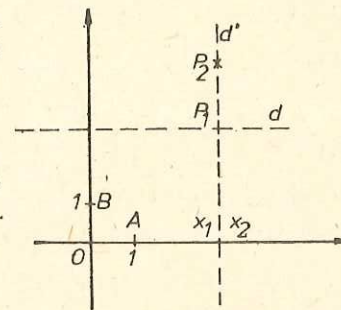


Fig. IV.10

### Exerciții

14. Să se reprezinte grafic ecuațiile

- a)  $2x - 3y = 1$ ;      b)  $2x = 3$ ;      c)  $5y - 4 = 0$ ;  
d)  $3x - y = 0$ .

15. Să se determine  $a$  și  $b$  astfel ca punctele  $P_1(2, 3)$  și  $P_2(1, -5)$  să fie situate pe dreapta de ecuație  $3x - ay - b = 0$ .

16. Fie  $P_1$  punctul de abscisă 5 al dreptei  $d$  de ecuație  $2x - 3y = 7$ . Să se determine ecuația dreptei  $d'$  perpendiculară pe  $d$  în  $P_1$ .

*Soluție.* Din  $P_1 \in d$ , rezultă  $2 \cdot 5 - 3y = 7$ , deci  $y = 1$  și  $P_1(5, 1)$ . Pentru a scrie ecuația dreptei  $d' \perp d$  mai avem nevoie de un punct  $P_2$  al dreptei  $d$  diferit de  $P_1$ . Din ecuația dreptei  $d$  pentru  $x = 8$ , de exemplu, se obține  $y = 3$  și  $P_2(8, 3)$ . Ecuația dreptei  $d'$ , conform formulei (8), este  $3x + 2y - 17 = 0$ .

17. Fie  $x - 2y = 5$  ecuația dreptei  $P_1P_2$ , unde  $P_1(2, y_1)$  și  $P_2(x_2, 3)$ . Să se scrie ecuația dreptei perpendiculare pe dreapta  $P_1P_2$  în  $P_1$ .



### § 3. Coeficientul unghiular al drepte

**Teorema 1.** Ecuția unei drepte  $d$  neperalele cu axa ordonatelor se poate scrie sub forma

$$(13) \quad y = mx + n.$$

*Demonstrație.* Ecuția drepte  $d$  este o ecuație liniară în  $x$  și  $y$  de forma (7). Deoarece  $d$  nu este paralelă cu axa ordonatelor,  $b \neq 0$ . Așadar ecuația (7) este echivalentă cu  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ . Punând  $m = -\frac{a}{b}$  și  $n = -\frac{c}{b}$ , ecuația obținută are forma (13).

**Teorema 2.** Dacă  $d$  este graficul ecuației  $y = mx + n$ , iar  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  sînt două puncte distincte pe  $d$ , atunci

$$(14) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

*Demonstrație.* Într-adevăr, deoarece  $P_1$  și  $P_2$  sînt puncte pe  $d$ , avem  $y_2 = mx_2 + n$  și  $y_1 = mx_1 + n$ . Așadar  $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ . Dreapta  $d$  nefiind paralelă cu axa ordonatelor,  $x_2 \neq x_1$  și împărțind cu  $x_2 - x_1 \neq 0$ , rezultă formula (14).

Coeficienții  $a, b, c$  în ecuația (7) nu sînt determinați în mod unic, cînd dreapta  $d$  este dată. Putem, de exemplu, să înmulțim ambii membri ai ecuației (4) cu un factor nenul și atunci  $a, b, c$  se schimbă.

Alta este situația în cazul ecuației (13).

Coeficientul  $m$  este determinat în mod unic cînd dreapta  $d$  este dată. Într-adevăr, dacă avem pentru  $d$  și ecuația  $y = m'x + n'$ , din formula (14) rezultă

$$m' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

Numărul  $m$  se numește *panta* sau *coeficientul unghiular al drepte  $d$* .

*Observație.* O dreaptă paralelă cu axa ordonatelor nu are coeficient unghiular, iar dreptele paralele cu axa absciselor au coeficientul unghiular egal cu zero.

**Teorema 3.** Fie  $d$  și  $d'$  drepte neperalele cu axele de coordonate, de coeficienți unghiulari  $m$ , respectiv,  $m'$ . Dreptele  $d$  și  $d'$  sînt perpendiculare dacă și numai dacă

$$(15) \quad m' = -\frac{1}{m}.$$

*Demonstrație.* Dacă  $P_0(x_0, y_0) \in d \cap d'$ ,  $P_1(x_1, y_1) \in d$  și  $P_2(x_2, y_2) \in d'$  sînt puncte distincte, atunci  $x_1 \neq x_0$ ,  $x_2 \neq x_0$  și conform teoremei 3, § 1,  $d \perp d'$  dacă și numai dacă

$$1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = 0.$$

Ținînd seama de (12), această condiție devine  $1 + mm' = 0$ , adică  $m' = -\frac{1}{m}$ .

*Intersecția a două drepte.* Fie dreptele  $d$  și  $d'$  de ecuații

$$d) \quad y = mx + n,$$

$$d') \quad y = m'x + n'.$$

Punctul lor de intersecție  $P(x_0, y_0)$ , dacă există, satisface, ambele ecuații, deci se obține prin rezolvarea acestui sistem de ecuații. Avem

$$(16) \quad (m - m')x_0 + n - n' = 0.$$

1) Dacă  $m \neq m'$ , obținem

$$x_0 = -\frac{n - n'}{m - m'}, \quad y_0 = mx_0 + n$$

și cele două drepte sînt secante.

2) Dacă  $m = m'$ ,  $n \neq n'$ , ecuația (16) devine  $0 \cdot x = n' - n$ , care nu are soluție. În acest caz  $d \parallel d'$ .

3) Dacă  $m = m'$ ,  $n = n'$ , ecuația (16) devine  $0 \cdot x = 0$ , care este verificată de orice  $x \in \mathbb{R}$ . Evident  $d = d'$ .

#### Exerciții

18. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele  $P_1(1, -1)$  și  $P_2(-3, -3)$ .

*Soluție.* Deoarece  $P_1P_2$  nu este paralelă cu axa ordonatelor are ecuația de forma  $y = mx + n$  (teorema 1). Din  $P_1 \in P_1P_2$  și  $P_2 \in P_1P_2$ , rezultă  $-1 = m \cdot 1 + n$  și  $-3 = m \cdot (-3) + n$ . Rezolvînd sistemul format cu aceste două ecuații, se obține

$$m = \frac{1}{2} \text{ și } n = -\frac{3}{2}, \text{ deci ecuația dreptei } P_1P_2 \text{ este } x - 2y - 3 = 0.$$

19. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul  $M(1, -5)$  și care este paralelă cu dreapta de ecuație  $5x + 2y - 1 = 0$ .

20. Să se arate că punctele  $M(1, 2)$ ,  $N(-5, 7)$  și  $P(-1, 2)$  nu sînt coliniare.

*Indicație.* Se scrie ecuația dreptei determinată de două din aceste puncte și se arată că nu este verificată de coordonatele celui de-al treilea punct.

21. Sînt coliniare punctele  $M(1, 1)$ ,  $N(-5, 5)$ ,  $P\left(0, \frac{5}{3}\right)$ ?

22. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul  $M(-1, 3)$  și care este perpendiculară pe dreapta  $3x - 5y = 0$ .

23. Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$ , astfel ca dreapta  $ax + by - 1 = 0$  să conțină punctul  $P(2, 1)$  și să fie perpendiculară pe dreapta  $ax + y - 5 = 0$ .

24. Fie punctele  $P_1(2, a + 1)$ ,  $P_2(0, 1 - a)$ ,  $P_3(1 - 2a, 3)$  și  $P_4(1 + 2a, -1)$ . Să se arate că dreptele  $P_1P_2$  și  $P_3P_4$  sînt perpendiculare, oricare ar fi numărul real  $a$ .

25. Să se arate că punctele  $P_1(a, 2a + 3)$ ,  $P_2(1 + a, 2a + 5)$ ,  $P_3(b, 2b - 5)$  și  $P_4(1 + b, 2b - 3)$  sînt vîrfurile unui paralelogram.

*Indicație.* Se arată, de exemplu, că segmentele  $(P_1P_2)$  și  $(P_3P_4)$  sînt paralele și au aceeași lungime.

26. Să se arate că ecuația unei drepte care conține punctul  $P_1(x_1, y_1)$  și care are coeficientul unghiular  $m$  este

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$



*Soluție.* Se scrie că  $P_1(x_1, y_1)$  verifică ecuația (13), deci  $y_1 = mx_1 + n$ . De aici se exprimă  $n$  și se înlocuiește în (13).

27. Fie  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), x_1 \neq x_2$ . Să se arate că ecuația lui  $P_1P_2$  este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

28. Fie  $P_1(a, 0), a \neq 0$  și  $P_2(0, b), b \neq 0$ . Să se arate că ecuația dreptei  $P_1P_2$  este  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ . (Se numește ecuația dreptei dată prin tăieturi. De ce?)

#### § 4. Funcțiile sin și cos definite pe intervalul $[0, \pi]$

În acest paragraf vom introduce funcțiile sin și cos definite pe  $[0, \pi]$ . Funcțiile sin și cos, definite pe  $\mathbf{R}$ , vor fi studiate în capitolul următor. Studiul lor va face obiectul trigonometriei.

Termenul trigonometrie provine de la cuvintele grecești trigon „triunghi” și metron „măsură”. Pentru a stabili poziția corpurilor cerești grecii antici au descoperit relații între măsurile laturilor și măsurile unghiurilor triunghiurilor sferice.

**Definiții.** Să considerăm în plan un sistem de coordonate, reperul ales fiind  $(O, A, B)$ . Notăm cu  $S$  mulțimea punctelor din plan de ordonată  $y \geq 0$ . Punctele  $A(1,0), B(0,1), A'(-1, 0)$  se găsesc pe cercul  $C = \mathcal{C}(O, 1)$  de centru  $O$  și rază 1 numit *cerc unitate*. Notăm cu  $s$  semicercul  $S \cap C$ .

Fie numărul  $t \in [0, \pi]$ . Pe semicercul  $s$  există un singur punct  $M$  (fig. IV.13), astfel ca  $\mu(\widehat{AOM}) = t$  (rezultă din axioma de construcție a unghiurilor). Am definit astfel o funcție care asociază fiecărui număr real  $t \in [0, \pi]$  un punct al semicercului  $s$ . Numărul 0 este asociat cu punctul  $A$ , numărul  $\frac{\pi}{2}$  cu punctul  $B$ , numărul  $\pi$  cu punctul  $A'$  și așa mai departe. Dacă  $(x, y)$  sînt coordonatele punctului  $M$ , prin această funcție, fiecare număr real  $t \in [0, \pi]$  este asociat cu o pereche ordonată de numere reale  $(x, y)$ .

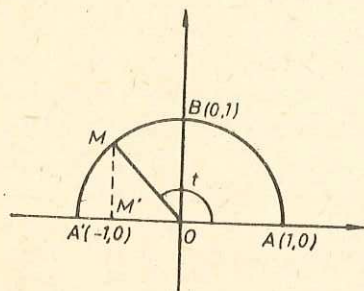


Fig. IV.13

Este util să se considere separat coordonatele  $x$  și  $y$  ale punctului  $M$  și să definim două funcții, una numită „cosinus” și alta numită „sinus”, notate prescurtat prin cos și sin. Aceste două funcții sînt cos:  $[0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\cos t = x$  și sin:  $[0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\sin t = y$ , unde  $(x, y)$  sînt coordonatele punctului  $M \in s$ , asociat cu numărul real  $t \in [0, \pi]$ .

În definiția funcțiilor cos și sin intervine cercul unitate ales, dar valorile  $\cos t$  și  $\sin t$  nu depind de această alegere (căci considerînd două cercuri unitate, triunghiurile respective  $OMM'$ , unde  $M'$  este proiecția lui  $M$  pe  $OA$ , figura IV.13, sînt congruente). Așadar funcțiile cos și sin sînt bine definite pe intervalul real  $[0, \pi]$ .

Cîteva valori particulare ale acestor funcții sînt:

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1;$$

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0.$$

Funcția cos se anulează numai în  $\frac{\pi}{2}$  deoarece pe  $s$  nu există, în afară de  $B$ , alte puncte care au abscisa 0. De asemenea, funcția sin se anulează numai în 0 și  $\pi$ .

Cu ajutorul funcțiilor cos și sin se definesc funcțiile numite „tangenta” și „cotangenta”, notate prescurtat cu tg și ctg. Aceste funcții sînt:

$$\text{tg}: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow \mathbf{R}, \quad \text{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

și

$$\text{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}, \quad \text{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Avem:  $\text{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0$ ,  $\text{tg} \frac{\pi}{2}$  nu este definit,  $\text{tg} \pi = \frac{0}{-1} = 0$  și  $\text{ctg} 0$  nu este definit,  $\text{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$ ,  $\text{ctg} \pi$  — nu există.

De menționat este faptul că semicercul  $s$  este mulțimea punctelor  $M(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , unde  $t = \mu(\widehat{AOM}) =$  lungimea arcului mic  $\widehat{AM}$ .

Deoarece abscisele acestor puncte sînt cuprinse în intervalul  $[-1, 1]$ , iar ordonatele în intervalul  $[0, 1]$ , putem scrie

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{și} \quad 0 \leq \sin t \leq 1,$$

oricare ar fi  $t \in [0, \pi]$ .

După cadranul în care este situat punctul  $M$  se poate stabili semnul funcției cos: dacă  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos t \geq 0$ , iar dacă  $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ,  $\cos t < 0$ . Se constată ușor că funcțiile tg și ctg au același semn cu funcția cos, deoarece funcția sin are numai valori numerice pozitive.

Funcția  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  este bijectivă. Într-adevăr, numere distincte din  $[0, \pi]$  sînt asociate cu punctele de pe  $s$  de abscise distincte, deci cos este injectivă. Funcția este și surjectivă pentru că, oricare ar fi  $x \in [-1, 1]$ , există  $t \in [0, \pi]$ , astfel ca  $x = \cos t$ . Într-adevăr, oricare ar fi  $x \in [-1, 1]$ , pe axa  $OA$  există un punct de abscisă  $x$  și, ducînd prin acest punct o paralelă la axa ordonatelor, aceasta intersectează semicercul  $s$  în  $M$ , abscisa acestui punct fiind  $x = \cos t$  unde  $t = \mu(\widehat{AOM})$ .



Vom nota  $(\cos t)^2$  cu  $\cos^2 t$ ,  $(\sin t)^2$  cu  $\sin^2 t$  etc. Deoarece  $OM = 1$ , unde  $M(\cos t, \sin t)$ , rezultă

$$(17) \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad \forall t \in [0, \pi].$$

Dacă  $m(\widehat{hk}) = \alpha^\circ = \beta^{\text{rad}}$ , fără să se producă confuzii se fac convențiile de notații.

$$\sin \beta = \sin \alpha = \sin \widehat{hk}, \quad \cos \beta = \cos \alpha = \cos \widehat{hk} \quad \text{etc.}$$

De exemplu:  $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\text{rad}} = 1$ ,

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\text{rad}}$$

Folosind anumite proprietăți geometrice, se pot calcula unele valori ale funcțiilor introduse.

*Exemplu.* Fie  $M$  punctul de intersecție al semicercului  $s$  cu dreapta de ecuație  $3x + 4y = 0$ . Să se calculeze  $\sin a$ ,  $\cos a$ ,  $\text{tg } a$  și  $\text{ctg } a$ , unde  $a = \mu(\widehat{AOM})$ .

*Soluție.* Punctul  $M$  are coordonatele  $(\cos a, \sin a)$ . Deoarece coordonatele lui  $M$  verifică ecuația  $3x + 4y = 0$ , numerele  $\cos a$  și  $\sin a$  se obțin rezolvind sistemul

$$\begin{cases} \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \\ 3 \cos a + 4 \sin a = 0 \end{cases}$$

Ținând seama de faptul că  $\sin a \geq 0$ , rezultă  $\cos a = -\frac{4}{5}$ ;  $\sin a = \frac{3}{5}$ .

$$\text{tg } a = -\frac{3}{4}, \quad \text{ctg } a = -\frac{4}{3}.$$

### Exerciții

29. Notăm cu  $M$  punctul de intersecție al dreptei de ecuație  $x - 3y = 0$  cu semicercul  $s$ . Dacă  $t = \mu(\widehat{AOM})$ , să se calculeze numerele  $\cos t$ ,  $\sin t$ ,  $\text{tg } t$ ,  $\text{ctg } t$ .

30. Dacă  $\cos a = -\frac{3}{5}$ , să se calculeze  $\sin a$ ,  $\text{tg } a$ ,  $\text{ctg } a$ .

31. Dacă  $\text{tg } a = -\frac{5}{12}$ , să se calculeze  $\sin a$ ,  $\cos a$ ,  $\text{ctg } a$ .

Unele valori ale funcțiilor  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{tg}$ ,  $\text{ctg}$ . Valorile acestor funcții sînt trecute în tabele speciale, întilnite în clasele anterioare. Unele valori pot fi determinate fără a utiliza aceste tabele.

1.  $t = \frac{\pi}{4}$ . Punctul  $M\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$  este situat atât pe semicercul  $s$ , cât și pe bisectoarea unghiului  $\widehat{AOB}$  (fig. IV.14). Deci  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ . Dacă

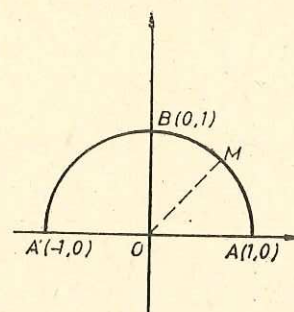


Fig. IV.14

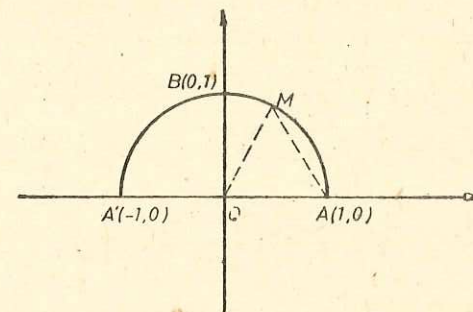


Fig. IV.15

$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = x$ , din  $OM = 1$ , rezultă  $x^2 + x^2 = 1$  sau  $x^2 = \frac{1}{2}$ . Deoarece

$x > 0$  (punctul  $M$  este în cadranul întâi), se obține  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  și

$$\text{tg } \frac{\pi}{4} = \text{ctg } \frac{\pi}{4} = 1.$$

2.  $t = \frac{\pi}{3}$ . Fie  $M\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$ . Triunghiul  $AOM$  este echilateral (fig. IV.15). Înseamnă că  $AM = OA = 1$ . Conform formulei (2), din  $AM = 1$

și  $A(1, 0)$ , rezultă  $\left(\cos \frac{\pi}{3} - 1\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3} - 0\right)^2 = 1$  sau  $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} -$

$2 \cos \frac{\pi}{3} + 1 = 1$ . Ținând seama de egalitatea (17), se obține  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ,

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \text{ctg } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.  $t = \frac{\pi}{6}$ . Dacă  $M\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right)$ , triunghiul  $BOM$  (fig. IV.16) este echilateral, deci  $MB = OB = 1$ .

În mod analog se obține

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{ctg } \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

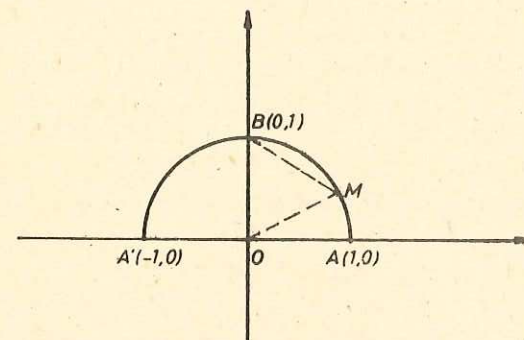


Fig. IV.16



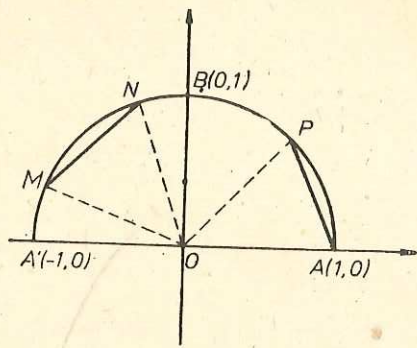


Fig. IV.17

**Teoremă.** Dacă  $a, b \in [0, \pi]$ ,  $a \geq b$ , atunci

$$(16) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

**Demonstrație.** Fie  $M, N \in s$ , astfel ca  $\mu(\widehat{AOM}) = a$  și  $\mu(\widehat{AON}) = b$ . (fig. IV.17).

Avem  $\mu(\widehat{MON}) = \mu(\widehat{AOM}) - \mu(\widehat{AON}) = a - b$ . Conform teoremei de construcție a unghiurilor, pe semicercul  $s$  există punctul  $P$ , astfel ca

$$\widehat{AOP} \equiv \widehat{MON}, \text{ deci } \mu(\widehat{AOP}) = a - b.$$

Triunghiurile isoscele  $MON$  și  $AOP$  fiind congruente, rezultă  $MN = AP$ . Coordonatele punctelor  $M, N, P$  sunt, respectiv,  $(\cos a, \sin a)$ ,  $(\cos b, \sin b)$ ,  $(\cos(a - b), \sin(a - b))$ , deci  $MN^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$  și  $AP^2 = [1 - \cos(a - b)]^2 + [0 - \sin(a - b)]^2 = 2 - 2 \cos(a - b)$ . Egalând cele două rezultate, se obține egalitatea (18).

**Consecință.** Dacă  $x \in [0, \pi]$ , atunci  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ,  $\sin(\pi - x) = \sin x$ .

**Demonstrație.** Avem succesiv  $\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = (-1) \cos x + 0 \cdot \sin x = -\cos x$  și  $\sin(\pi - x) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi - x)} = \sqrt{1 - (-\cos x)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x$ .

În plus, dacă  $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg} x$  și dacă  $x \in (0, \pi)$ ,  $\text{ctg}(\pi - x) = -\text{ctg} x$ .

Utilizând consecința, se pot calcula mai repede unele valori ale funcțiilor  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\text{tg}$  și  $\text{ctg}$ . De exemplu:

a)  $\cos \frac{2\pi}{6} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ;

b)  $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ;

c)  $\text{tg} 135^\circ = -\text{tg}(180^\circ - 135^\circ) = -\text{tg} 45^\circ = -1$ ;

d)  $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ ;

e)  $\sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ;

f)  $\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

Dăm mai jos un tabel cu valorile funcțiilor  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{tg}$  și  $\text{ctg}$  pentru câteva numere reale din intervalul  $[0, \pi]$ .

Numărul $a$	$\sin a$	$\cos a$	$\text{tg} a$	$\text{ctg} a$	Unghiul corespunzător lui $a$
0	0	1	0	nu există	$0^\circ$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$30^\circ$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$45^\circ$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$60^\circ$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	nu există	0	$90^\circ$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$120^\circ$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$135^\circ$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$150^\circ$
$\pi$	0	-1	0	nu există	$180^\circ$

**Exerciții**

32. Să se calculeze: a)  $\text{tg} \frac{\pi}{12}$ ; b)  $\sin \frac{7\pi}{12}$ ; c)  $\text{tg} \frac{7\pi}{12}$ ; d)  $\text{ctg} \frac{11\pi}{12}$ .

33. Dacă  $\cos a = 0,8$ ,  $\cos b = \frac{1}{3}$ , să se calculeze  $\cos(a - b)$ .

34. Dacă  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , să se demonstreze că:  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ . În plus, dacă  $x \neq 0$  și  $x \neq \frac{\pi}{2}$ , să se arate că  $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{ctg} x$  și  $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{tg} x$ .

**§ 5. Unghiul unei drepte cu axa absciselor**

Fie  $d$  o dreaptă neparalelă cu axa  $OA$  (fig. IV.18). O paralelă prin originea  $O$  a axelor la dreapta  $d$  intersectează semicercul  $s$  în punctul  $M$ . Dacă  $d \parallel OA$ , atunci  $M = A$ .



Prin definiție, unghiul dreptei  $d$  cu axa  $OA$  este  $\widehat{AOM}$ . Notăm acest unghi cu  $(\widehat{d, OA})$ .

**Teoremă.** Dacă o dreaptă  $d$  nu este paralelă cu axa ordonatelor, coeficientul său unghiular este  $\operatorname{tg} a$ , unde  $a = \mu(\widehat{d, OA})$ .

*Demonstrație.* Ecuația dreptei  $d$  poate fi scrisă sub forma  $y = mx + n$ . Dreapta  $OM$  (fig. IV.18) are același coeficient unghiular  $m$ , deoarece  $OM \parallel d$ . Punctul  $M$  are coordonatele  $(\cos a, \sin a)$ . Conform formulei (14), § 3, coeficientul unghiular al dreptei  $OM$  este

$$\frac{\sin a - 0}{\cos a - 0} = \operatorname{tg} a.$$

Deci  $m = \operatorname{tg} a$ , și teorema este demonstrată.

Se constată că, dacă  $m > 0$ , unghiul  $(\widehat{d, OA})$  este ascuțit, iar dacă  $m < 0$ , acest unghi este obtuz.

**Consecință.** Fie triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ . Dacă  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $\mu(\widehat{ABC}) = B$ , atunci

$$\sin B = \frac{b}{a}; \quad \cos B = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}.$$

*Demonstrație.* Alegem un sistem de axe cu originea în vârful  $B$  al triunghiului (fig. IV.19), cu axele paralele cu catetele triunghiului, în așa fel încât vârful  $C$  să fie în cadranul I. Cu notațiile din enunț, punctul  $C$  are coordonatele  $(c, b)$ . Conform teoremei, coeficientul unghiular al dreptei  $BC$  este  $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$  și egalitatea a treia este demonstrată. Ultima egalitate rezultă imediat din  $\operatorname{ctg} B = \frac{a}{\operatorname{tg} B}$ . Pentru demonstrarea primei egalități pornim de la  $c = b \operatorname{ctg} B$ , de unde rezultă  $c^2 = b^2 \operatorname{ctg}^2 B$ . Folosind definiția funcției  $\operatorname{ctg}$ , ajungem la  $(b^2 + c^2) \sin^2 B = b^2$ . Dar  $b^2 + c^2 = a^2$ , deci  $a^2 \sin^2 B = b^2$ . Din această egalitate rezultă prima formulă. Cea de-a doua egalitate rezultă din  $a^2 \sin^2 B = b^2$  și din  $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$ , ținând seama de egalitatea  $a^2 - b^2 = c^2$ .

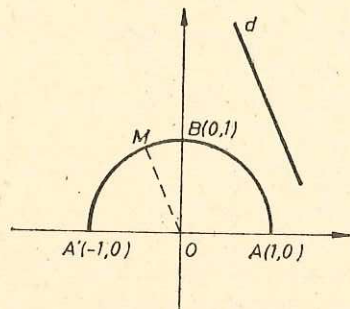


Fig. IV.18

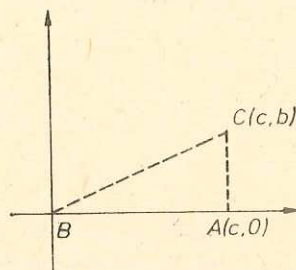


Fig. IV.19

Consecința se poate formula într-un enunț ușor de reținut. „Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este egală cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și sinusul unghiului opus sau cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și cosinusul unghiului alăturat“.

**Aplicații. 1.** Să se determine unghiul dreptei  $d$  de ecuație  $3x + y\sqrt{3} + 2 = 0$  cu axa absciselor.

*Soluție.* Din  $y = -\sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , rezultă  $m = -\sqrt{3}$ . Dacă  $a = \mu(\widehat{d, OA})$ , din  $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$ , rezultă  $\cos^2 a = \frac{1}{4}$ . Deci  $\cos a = -\frac{1}{2}$ . Funcția  $\cos$  fiind bijectivă, din tabel găsim  $a = \frac{2\pi}{3}$ . Deci  $m = (\widehat{d, OA}) = 120^\circ$ .

**2.** Să se determine unghiurile triunghiului cu laturile de lungimi 8, 4,  $4\sqrt{3}$ .

*Soluție.* Deoarece  $(4\sqrt{3})^2 + 4^2 = 8^2$ , triunghiul este dreptunghic (fig. IV.19).  $\cos B = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ , deci  $\mu(\widehat{B}) = \frac{\pi}{3}$  sau  $m(\widehat{B}) = 60^\circ$ . Apoi  $\mu(\widehat{C}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$  sau  $m(\widehat{C}) = 30^\circ$ .

### Exerciții

**35.** Să se determine unghiul următoarelor drepte cu axa absciselor:

a)  $y = 0$ ; b)  $x = 0$ ; c)  $y = x\sqrt{3} + 1$ ; d)  $y + x = 1$ .

**36.** Se dă punctul  $P\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}\right)$ ,  $a > 0$ .

Să se afle  $m(\widehat{AOP})$  și  $\mu(\widehat{AOP})$ .

**37.** Dreptele de ecuații  $x\sqrt{7} + y\sqrt{2} = 0$  și  $3x - 4y = 0$  intersectează semicercul  $s$ , respectiv, în punctele  $M$  și  $N$ . Să se calculeze  $\cos t$ , unde  $t = \mu(\widehat{MON})$ .



## Funcții trigonometrice

Acele indicatoare ale ceasului, în mișcarea lor continuă, indicând la nesfârșit repetarea orelor, constituie un model simplu pentru toate fenomenele care se repetă periodic. În acest capitol se vor studia funcții ale căror valori se repetă în mod periodic. În special vor fi studiate funcțiile trigonometrice, o categorie de funcții definite prin intermediul unui cerc de rază 1. Aceste funcții sînt folosite ca modele matematice a mai multor feluri de situații practice. Vom vedea apoi cum se deduc formule referitoare la diferite valori ale acestor funcții și cum formulele stabilite pentru unele din ele pot fi folosite pentru a determina formule pentru alte funcții.

### § 1. Funcția de acoperire universală a cercului unitate

**Lema 1.** Orice număr real  $t$  poate fi scris în mod unic sub forma

$$(1) \quad t = t^* + 2k\pi, \text{ unde } t^* \in [0, 2\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

*Demonstrație.* Fie  $k$  partea întreagă a numărului  $\frac{t}{2\pi}$ , adică

$$k \leq \frac{t}{2\pi} < k + 1.$$

Atunci  $2k\pi \leq t < 2k\pi + 2\pi$ , din care se obține imediat că  $t^* = t - 2k\pi \in [0, 2\pi)$ . Am determinat în acest fel numerele  $k$  și  $t^*$  verificînd condițiile (1)

Pentru a arăta unicitatea, să presupunem că mai avem și  $t = t_1 + 2k_1\pi$ ,  $t_1 \in [0, 2\pi)$ ,  $k_1 \in \mathbf{Z}$ . Rezultă că  $t^* - t_1 = 2(k_1 - k)\pi$ . Deoarece  $t^* - t_1 \leq t^* < 2\pi$  și  $t^* - t_1 \geq -t_1 > -2\pi$ , rezultă  $-2\pi < t^* - t_1 < 2\pi$  sau  $-2\pi < (k_1 - k)2\pi < 2\pi$ . Deci  $-1 < k_1 - k < 1$  și în mod necesar  $k_1 - k = 0$ . Așadar  $t_1 = t^*$  și  $t^*$  este unic.

*Exemple.* 1. Dacă  $t = -\frac{112\pi}{17}$ , atunci  $\frac{t}{2\pi} = -\frac{56}{17}$ . Din  $-4 < \frac{t}{2\pi} < -3$ , rezultă  $0 < \frac{t}{2\pi} + 4 < 1$ . Deci  $\frac{t}{2\pi} + 4 = 4 - \frac{56}{17} = \frac{12}{17}$ . Așadar  $t = \frac{24\pi}{17} + 2(-4)\pi$ , unde  $t^* = \frac{24\pi}{17}$ ,  $k = -4$ .

2. Dacă  $t = 31,45$ , atunci  $5 < \frac{t}{2\pi} < 6$ . Deci  $t = (31,45 - 10\pi) + 2 \cdot 5 \cdot \pi$ , unde  $t^* = 31,45 - 10\pi$ ,  $k = 5$ .

3. Dacă  $t = -5$ , atunci  $-1 < \frac{t}{2\pi} < 0$ . În acest caz  $k = -1$  și  $t = (2\pi - 5) + 2(-1)\pi$ . Numărul  $t^*$  este  $2\pi - 5$ .

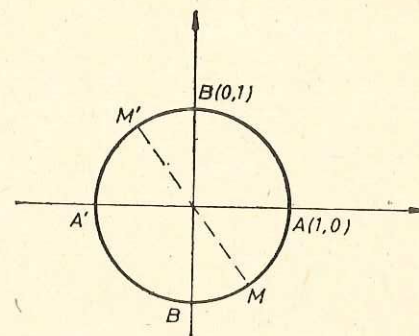


Fig. V.1

În capitolul IV, § 4 a fost prezentată o funcție care asociază fiecărui număr  $t \in [0, \pi]$  un punct unic  $M \in s$ , astfel încît lungimea arcului mic  $\widehat{AM}$  să fie egală cu  $t$ .

Lema care urmează ne indică modul în care putem asocia unui număr  $t \in (\pi, 2\pi)$ , un punct  $M \in C - s$ .

**Lema 2.** Dacă  $t \in (\pi, 2\pi)$ , și  $x = -\cos(t - \pi)$ ,  $y = -\sin(t - \pi)$ , atunci punctul  $M$  de coordonate  $(x, y)$  este situat pe  $C - s$ , iar arcul mare  $\widehat{AM}$  are lungimea  $t$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $x^2 + y^2 = \cos^2(t - \pi) + \sin^2(t - \pi) = 1$  (coordonatele lui  $M$  verifică ecuația cercului unitate  $C$ ) punctul  $M$  este situat pe  $C$ . Din  $t \in (\pi, 2\pi)$ , rezultă că  $t - \pi \in (0, \pi)$ . Fie  $M'(x', y')$ , unde  $x' = \cos(t - \pi)$  și  $y' = \sin(t - \pi)$ . Înseamnă că  $M' \in s$ , conform definiției funcțiilor

$\cos$  și  $\sin$ . Avînd abscisele, respectiv, ordonatele numere opuse, punctele  $M$  și  $M'$  sînt simetrice față de originea axelor de coordonate (fig. V.1). Deci  $M$  și  $M'$  sînt diametral opuse în  $C$ . Din  $M' \in s$  rezultă  $M \in C - s$ .

Arcul mic  $\widehat{AM'}$  are lungimea  $t - \pi$  (conform definiției funcțiilor  $\cos$  și  $\sin$ ); iar arcul  $\widehat{M'A'M}$  are lungimea  $\pi$ , deci arcul mare  $\widehat{AM}$  are lungimea  $(t - \pi) + \pi = t$  și lema este demonstrată.

Conform acestei leme, numărului  $\frac{4\pi}{3}$  i se asociază pe  $C - s$  punctul de coordonate  $(-\cos \frac{\pi}{3}, -\sin \frac{\pi}{3})$  sau  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

Fie  $d$  tangenta în  $A$  la cercul unitate  $C$  (fig. V.2.) și  $E \in d$ , astfel ca  $B$  și  $E$  să fie în același semiplan față de  $OA$ . Considerăm un sistem de coordonate pentru  $d$ , astfel încît  $A$  să aibă

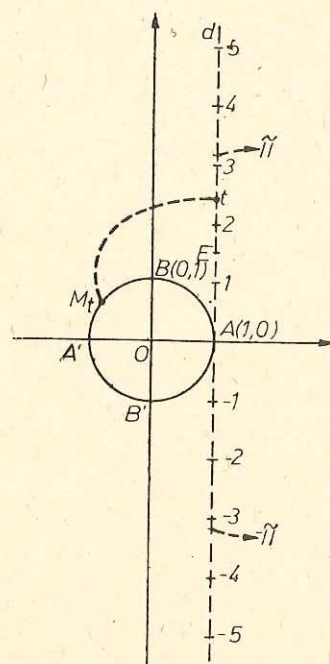


Fig. V.2



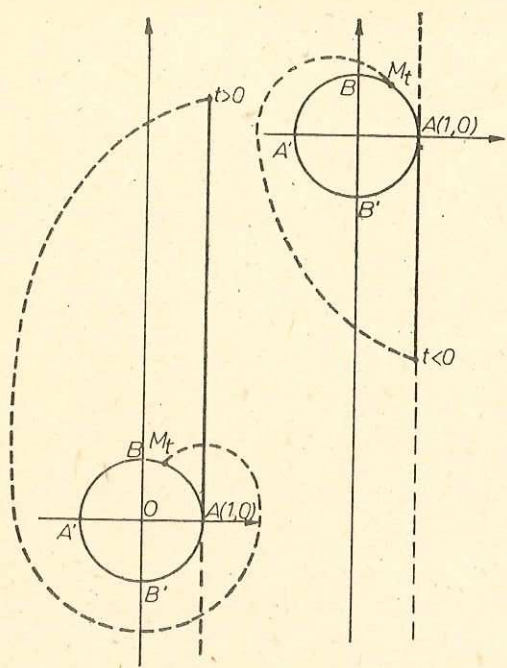


Fig. V.3

un punct  $M_t \in C$ . Am definit astfel o funcție  $f: d \rightarrow C$ , care asociază lui  $t \in \mathbb{R}$  punctul  $f(t) = M_t$  de pe cerc. Știind că lungimea lui  $C$  este  $2\pi$ , punctele  $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$  ale drepte  $d$  și, de asemenea, punctele  $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$  ajung în  $A'$ ; punctele  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$  și  $-2\pi, -4\pi, \dots$  ajung în  $A$ , punctele  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \dots$  ajung în  $B$  etc. În general, punctele  $t, t + 2\pi, t - 2\pi, t + 4\pi, t - 4\pi, \dots$  ajung în același punct  $M_t$ , adică

$$(2) \quad f(t + 2k\pi) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Se observă că un segment cu originea în  $A$  și cu extremitatea într-un punct oarecare  $t$  (fig. V. 3) prin înfășurare, într-un sens sau altul, poate acoperi de mai multe ori cercul, punctul  $t$  ajungând în  $M_t \in C$ .

Folosind definiția funcțiilor  $\cos$  și  $\sin$  și lemele 2 și 1 putem defini o funcție  $F$ , care asociază oricărui număr real  $t$  un punct de pe cercul unitate  $C$ , fără a folosi procedeul intuitiv al înfășurării. Vom arăta că această funcție  $F$  va avea proprietățile funcției  $f$ .

Definim funcția

$$F: \mathbb{R} \rightarrow C, \quad F(t) = M(x, y)$$

prin următoarele condiții:

- 1° Dacă  $t \in [0, \pi]$ , atunci  $x = \cos t, y = \sin t$ .
- 2° Dacă  $t \in (\pi, 2\pi)$ , atunci  $x = -\cos(t - \pi), y = -\sin(t - \pi)$ .
- 3° Dacă  $t = t^* + 2k\pi, t^* \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}$ , atunci  $F(t) = F(t^*)$ .

coordonata 0, iar  $x_E > 0$ . Pentru a simplifica notațiile, un punct al lui  $d$  va fi notat cu coordonata sa. Dreapta  $d$  devine o axă a numerelor reale.

Pentru a pregăti definiția unei funcții importante facem următoarele considerații intuitive. Dacă ne imaginăm că dreapta  $d$  este suficient de flexibilă, putem accepta procesul de înfășurare a ambelor și jumătăți în jurul cercului. Semiaxa numerelor reale pozitive se înfășoară în sensul invers mișcării acelor de ceasornic, iar semiaxa numerelor reale negative în sensul mișcării acelor de ceasornic.

Prin acest procedeu de înfășurare, fiecare punct de pe axa  $d$  ajunge într-un punct determinat pe  $C$ , deci fiecărui număr real  $t$  îi corespunde

Funcția  $F$  poartă numele de funcția de acoperire universală a cercului unitate.

Avem:  $F(0) = M(\cos 0, \sin 0) = M(1, 0) = A$  (fig. V.4),  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = M(0, 1) = B$ ,  $F(\pi) = M(\cos \pi, \sin \pi) = M(-1, 0) = A'$ ,  $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = M\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right), -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)\right) = M\left(-\cos \frac{\pi}{2}, -\sin \frac{\pi}{2}\right) = M(0, -1) = B'$ ,

$$F\left(\frac{7\pi}{3}\right) = F\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dacă nu se fac alte precizări, conform definiției funcției  $F$ , prin  $\widehat{AF}(t)$  vom înțelege arcul mic de lungime  $t$ , dacă  $t \in [0, \pi]$ , respectiv, arcul mare de lungime  $t$ , dacă  $t \in (\pi, 2\pi)$ .

**Teorema 1.** Avem proprietatea

$$(3) \quad F(t + 2k\pi) = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstrație.* Conform lemei 1, există numerele unice

$$t^* \in [0, 2\pi) \text{ și } l \in \mathbb{Z}, \text{ astfel ca } t = t^* + 2l\pi.$$

Atunci

$$F(t + 2k\pi) = F(t^* + 2(k + l)\pi) = F(t^*) = F(t^* + 2l\pi) = F(t),$$

deci formula (3) este demonstrată.

**Lemma 3.** Oricare ar fi  $t \in \mathbb{R}$ ,  $AF(t) = AF(-t)$ .

*Demonstrație.* Dacă  $t = t^* + 2k\pi, t^* \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}$ , atunci  $-t = 2\pi - t^* - 2(k + 1)\pi$ . Deoarece  $F(t) = F(t^*)$  și  $F(-t) = F(2\pi - t^*)$ , demonstrația se reduce la a arăta că  $AF(t^*) = AF(2\pi - t^*)$ .

Dacă  $t^* \in [0, \pi]$ , atunci  $2\pi - t^* \in [\pi, 2\pi]$ . Arcul  $\widehat{AF}(t^*)$  (fig. V.5) are lungimea  $t^*$ , iar arcul mare  $\widehat{AF}(2\pi - t^*)$  are lungimea  $2\pi - t^*$ , deci arcul mic  $\widehat{AF}(2\pi - t^*)$  are lungimea  $2\pi - (2\pi - t^*) = t^*$ . Deoarece arcele mici  $\widehat{AF}(t^*)$  și  $\widehat{AF}(2\pi - t^*)$  au aceeași lungime, coardele corespunzătoare lor sînt congruente și teorema este demonstrată în acest caz.

Cazul  $t^* \in (\pi, 2\pi)$  se tratează în mod analog (se schimbă doar rolurile numerelor  $t^*$  și  $2\pi - t^*$ ).

**Teorema 2.** Oricare ar fi  $t, u \in \mathbb{R}$ , avem

$$(4) \quad F(t)F(u) = AF(t - u).$$

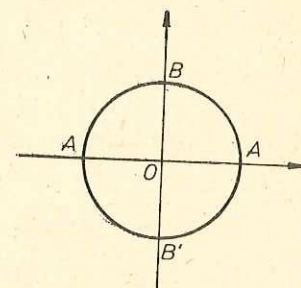


Fig. V.4

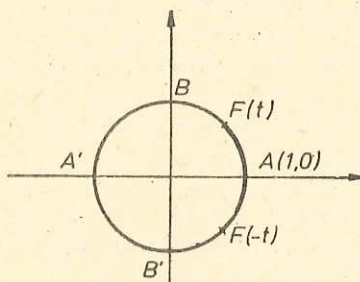


Fig. V.5



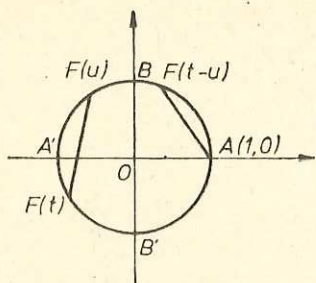


Fig. V.6

**Demonstrație.** Scriem numerele  $t$  și  $u$  sub forma  $t = t^* + 2k\pi$ ,  $t^* \in [0, 2\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  și  $u = u^* + 2l\pi$ ,  $u^* \in [0, 2\pi)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ , conform lemei 1. Deoarece  $F(t) = F(t^*)$ ,  $F(u) = F(u^*)$  și  $F(t - u) = F(t^* - u^*)$ , demonstrația se reduce la a arăta că  $F(t^*)F(u^*) = AF(t^* - u^*)$ .

Dacă  $0 \leq u^* \leq t^* < 2\pi$ , rezultă imediat (fig. V.6) că arcul  $\widehat{F(t^*)F(u^*)}$  care nu-l conține pe  $A$  are lungimea  $t^* - u^*$ , ca și arcul  $\widehat{AF(t^* - u^*)}$ . Din congruența celor două arce rezultă congruența coar-

dorilor corespunzătoare, și teorema este demonstrată.

Dacă  $0 \leq t^* \leq u^* < 2\pi$ , se demonstrează în mod analog că  $F(t^*)F(u^*) = AF(u^* - t^*)$  și ținând seama de lema 3, teorema este demonstrată în toate cazurile.

**Definiție.** Fie  $M$  o mulțime oarecare. O funcție  $f: \mathbf{R} \rightarrow M$  se numește *periodică* dacă există  $T \neq 0$ , astfel încât

$$(5) \quad f(x + T) = f(x) \text{ pentru orice } x \text{ din } \mathbf{R}.$$

Numărul  $T$  se numește *perioadă* a lui  $f$ . Dacă printre perioadele strict pozitive ale lui  $f$  există un cel mai mic număr  $T_0$ , atunci  $T_0$  se numește *perioada principală*.

**Teorema 4.** Dacă  $T_0$  este perioada principală a lui  $f$ , atunci perioadele lui  $f$  sînt numerele  $kT_0$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Demonstrație.** Avem

$$f(x) = f(x + T_0) = f(x + T_0 + T_0) = \dots = f(x + T_0 + T_0 + \dots + T_0).$$

Pe de altă parte,  $f(x - T_0) = f(x - T_0 + T_0) = f(x)$ , deci

$$f(x) = f(x - T_0) = f(x - T_0 - T_0) = \dots = f(x - T_0 - T_0 - \dots - T_0).$$

Așadar numerele  $kT_0$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ , sînt perioade. Rămîne de demonstrat că orice perioadă  $T$  este de forma  $kT_0$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Fie  $k$  partea întreagă a numărului  $\frac{T}{T_0}$ , adică

$$k \leq \frac{T}{T_0} < k + 1.$$

De aici  $kT_0 \leq T < kT_0 + T_0$  sau  $0 \leq T - kT_0 < T_0$ . Există deci numerele  $k \in \mathbf{Z}$  și  $T^* \in [0, T_0]$ , astfel ca

$$(6) \quad T = T^* + kT_0.$$

Numărul  $T^*$  este și el perioadă, deoarece  $f(x + T^*) = f(x + T - kT_0) = f(x + T) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ . Cum  $0 \leq T^* < T_0$  și  $T_0$  este cea mai mică perioadă strict pozitivă, rezultă  $T^* = 0$ . Deci, conform cu (6), orice perioadă  $T$  este de forma  $kT_0$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , și lema este demonstrată.

**Teorema 3.** Funcția  $F$  de acoperire universală a cercului unitate este periodică de perioadă principală  $2\pi$ .

**Demonstrație.** Formula (3) arată că  $F$  admite ca perioade numerele  $2k\pi$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ . Dintre acestea, cel mai mic număr strict pozitiv este  $2\pi$ . O perioadă  $T \in (0, 2\pi)$  nu poate exista, căci  $F(0)$  și  $F(T)$  fiind puncte diferite pe  $C$ , pentru  $x = 0$ ,  $F(x + T) \neq F(x)$ . Rezultă că  $2\pi$  este perioada principală a lui  $F$ .

### Exerciții

1. Să se determine coordonatele punctelor:

$$F(5\pi), F(-7\pi), F\left(\frac{13\pi}{4}\right), F\left(-\frac{15\pi}{4}\right), F(103\pi), F\left(\frac{103\pi}{2}\right), F\left(\frac{103\pi}{4}\right).$$

2. Punctele  $P_1, P_3$  și  $P_2, P_4$  sînt respectiv pe bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate și pe cercul unitate  $C$  (fig V.7). Să se afle toate numerele reale  $t$  pentru care:

a)  $F(t) = P_1$ , b)  $F(t) = P_2$ , c)  $F(t) = P_3$ , d)  $F(t) = P_4$ .

3. Să se arate că  $F(t)$  și  $F(-t)$  sînt simetrice față de dreapta  $OA$ .

4. Să se arate că  $F(t)$  și  $F(\pi - t)$  sînt simetrice față de  $OB$ .

5. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  și  $F\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ .

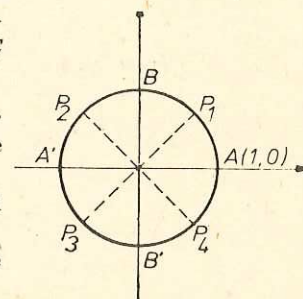


Fig. V.7

## § 2. Funcțiile trigonometrice sin și cos

Prin funcția  $F$  de acoperire universală fiecărui număr real  $t$  i se asociază un punct unic  $F(t) = M(x, y)$  de pe cercul unitate  $C$ . Coordonatele  $x$  și  $y$  sînt și ele unic determinate, dacă  $t$  este dat. Vom nota

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

definind astfel două funcții

$$\cos: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ și } \sin: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

numite *funcții trigonometrice*, care prelungesc funcțiile  $\cos$  și  $\sin$ , introduse în Cap. IV, § 4, de la  $[0, \pi]$  la  $\mathbf{R}$ .

Avem ca exemple de valori numerice ale acestor funcții:

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{2} = -\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{11\pi}{6} = -\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \pi\right) = -\cos \frac{5\pi}{6} = \\ &= -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \pi \cos \frac{\pi}{6} - \sin \pi \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{57\pi}{7} = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$



Deoarece  $(\cos t, \sin t)$  sînt coordonatele unui punct de pe cercul  $C$ ,  $\cos t$  respectiv  $\sin t$  au valoarea maximă 1 și valoarea minimă  $-1$ , deci

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \text{ și } -1 \leq \sin t \leq 1.$$

Funcția  $F$  fiind periodică, funcțiile  $\cos$  și  $\sin$  sînt și ele periodice și orice perioadă a lui  $F$  este o perioadă pentru  $\cos$  și  $\sin$ . Deci

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \text{ și } \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Arătăm acum că funcțiile  $\cos$  și  $\sin$  nu mai au alte perioade.

### **Teorema 1. Funcțiile $\sin$ și $\cos$ au perioada principală $2\pi$ .**

*Demonstrație.* Să presupunem că funcția  $\sin$  ar admite o perioadă  $T' \in (0, 2\pi)$ . Am avea  $\sin(t + T') = \sin t$ , oricare ar fi  $t \in \mathbf{R}$ . În particular, pentru  $t = 0$ , am avea  $\sin T' = \sin 0 = 0$ . Singurul număr care satisface condițiile  $0 < T' < 2\pi$  și  $\sin T' = 0$  este  $\pi$ . Dar  $\pi$  nu este perioadă pentru  $\sin$ , deoarece, de exemplu numerele  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  și  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$  sînt distincte. Deci cea mai mică perioadă strict pozitivă a funcției  $\sin$  este  $2\pi$ .

Să presupunem că funcția  $\cos$  admite perioada  $T'' \in (0, 2\pi)$ . Am avea  $\cos(t + T'') = \cos t$ , oricare ar fi  $t \in \mathbf{R}$ . În particular, pentru  $t = 0$ ,  $\cos T'' = \cos 0 = 1$ . Deoarece nu există un număr  $T''$  astfel ca  $0 < T'' < 2\pi$  și  $\cos T'' = 1$ , perioada cea mai mică strict pozitivă a funcției  $\cos$  este  $2\pi$  și teorema este demonstrată.

Orice punct  $F(t)$  fiind pe  $C$ , numerele  $x = \cos t$  și  $y = \sin t$  verifică ecuația cercului  $C$ :  $x^2 + y^2 = 1$  (Cap. IV. § 2), deci

$$(1) \quad \boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \forall t \in \mathbf{R}.$$

### **Teorema 2. Oricare ar fi, $a, b \in \mathbf{R}$ ,**

$$(2) \quad \boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

*Demonstrație.* Conform teoremei 2, § 1 din acest capitol,  $F(a)F(b) = AF(a - b)$ . Avem  $F(a) = M(\cos a, \sin a)$ ,  $F(b) = M(\cos b, \sin b)$ ,  $F(a - b) = M(\cos(a - b), \sin(a - b))$ . Aplicînd formula distanței dintre două puncte pentru  $F(a)F(b)$ ,  $AF(a - b)$  (calculule sînt aceleași ca la demonstrația teoremei din capitolul IV, § 4) și egalînd rezultatele se obține formula (2).

### **Consecință. Oricare ar fi numărul $x$ avem**

$$(3) \quad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ și } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

*Demonstrație.* Într-adevăr

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \sin x = \sin x$$

și

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \\ &= \cos\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \end{aligned}$$

**Definiție.** O funcție  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *pară* dacă

$$f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$$

și se numește *impară* dacă

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

**Teorema 3. Funcția trigonometrică  $\cos$  este pară, iar funcția trigonometrică  $\sin$  este impară.**

*Demonstrație.* Deoarece

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x,$$

funcția  $\cos$  este pară.

Din (3), (2) și paritatea funcției  $\cos$  avem

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos x + \\ &+ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin x = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) \sin x = \\ &= \sin\frac{3\pi}{2} \sin x = -\sin x, \end{aligned}$$

rezultă că funcția  $\sin$  este impară.

*Observație.* Utilizînd definițiile funcțiilor  $\sin$  și  $\cos$ , consecințele teoremelor 2 și 3, numerele  $\sin x$  și  $\cos x$  pot fi calculate cu ajutorul unor numere de forma  $\cos t$  sau  $\sin t$ , unde  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Acest procedeu de calcul poartă numele de *reducere la primul cadran*,

deoarece puncte de pe  $C$  corespunzătoare numerelor  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  se află în cadranul întâi al axelor de coordonate.

*De exemplu:*  $\sin\frac{121\pi}{14} = \sin\left(8\pi + \frac{9\pi}{14}\right) = \sin\frac{9\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{14}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{14}\right) = \cos\frac{\pi}{7}$  și  $\sin\frac{121\pi}{14}$  se calculează cu ajutorul numărului  $\cos\frac{\pi}{7}$  (care se citește cu aproximație din tabelele trigonometrice), unde  $\frac{\pi}{7} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Aplicație.* Știînd că  $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ,  $\cos a = \frac{3}{5}$ ,  $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\sin b = \frac{5}{13}$ , să se calculeze  $\cos(a - b)$ .



*Soluție.* Deoarece  $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  punctul  $F(a)$  este situat în cadranul IV, deci  $\sin a < 0$ . Știind că  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$  și  $\cos a = \frac{3}{5}$ , rezultă  $\sin a = -\frac{4}{5}$ . În mod analog se obține  $\cos b = \frac{12}{13}$ . Așadar

$$\cos(a - b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{16}{65}.$$

### Exerciții

1. Să se calculeze:

- |                                      |  |   |
|--------------------------------------|--|---|
| a) $\sin \frac{13\pi}{2}$ ,          | e) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ ,  | i) $\cos 4125\pi$ ,                               |
| b) $\cos \frac{18\pi}{5}$ ,          | f) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ , | j) $\sin 2115\pi$ ,                               |
| c) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | g) $\sin 18\pi$ ,                        | k) $\cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{23\pi}{3}$ , |
| d) $\cos(-\pi)$ ,                    | h) $\cos 13\pi$ ,                        | l) $\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{20\pi}{3}$ . |

2. Dacă  $x \in (\pi, 2\pi)$  și  $\cos x = \frac{7}{25}$ , să se calculeze  $\sin x$ .

3. Să se stabilească care din următoarele funcții este pară și care este impară:

- a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin^3 x$   
 b)  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^n, n \in \mathbf{N}^*$ ,  
 c)  $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = x^3 + 1$ ,  
 d)  $i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, i(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

4. Să se calculeze:

- a)  $\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{13\pi}{28} + \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{13\pi}{28}$ ,  
 b)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x$ .

5. Dacă  $\sin x > 0$ ,  $\cos y < 0$ ,  $\cos x = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin y = \frac{5}{13}$ , să se calculeze  $\cos(x - y)$ .

6. Să se arate că, oricare ar fi  $a \in \mathbf{R}$ :

- a)  $1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$ ,  
 b)  $2(1 + \cos a) - \sin^2 a = (1 + \cos a)^2$ ,  
 c)  $\cos^2 a + \sin^2 a = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a)$ .

7. Știind că  $a, b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\cos a = -0,8$ ,  $\sin b = 0,96$ , să se determine coordonatele punctului  $F(a - b)$ .

8. Să se determine coordonatele punctului  $F(x)$  știind că  $\sin x + \cos x = 0,2$  și  $\cos x < 0$ .

### § 3. Formule pentru $\cos(a + b)$ , $\sin(a - b)$ , $\sin(a + b)$ și formule deduse din acestea

*Cosinusul sumei.* Să demonstrăm că, oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$  avem:

$$(4) \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{aligned}$$

(S-a ținut seama de paritatea funcției  $\cos$  și imparitatea funcției  $\sin$ .)  
*Sinusul diferenței.* Oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$  avem:

$$(5) \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Formula rezultă din

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

În demonstrație au fost folosite formulele (3) din paragraful 2.  
*Sinusul sumei.* Dacă  $a, b \in \mathbf{R}$ , atunci

$$(6) \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Pentru a obține egalitatea se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin[a - (-b)] = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{aligned}$$

### Exerciții

1. Să se calculeze:

- a)  $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20}$ ,  
 b)  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \sin x$ .

2. Să se arate că oricare ar fi numerele reale  $x$  și  $y$ , avem:

- a)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} = \sin x$ ,  
 b)  $\cos(x - y) \cos y - \sin(x - y) \sin y = \cos x$ ,



- c)  $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$ ,  
 d)  $\cos(x+y) - \cos(x-y) = 2 \sin x \sin(-y)$ ,  
 e)  $\cos^2(x-y) - \cos^2(x+y) = 4 \sin x \cos x \sin y \cos y$ ,  
 f)  $\cos^2 x + \cos^2 y - (\cos x - \cos y)^2 = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ ,  
 g)  $\cos(x-y) \cdot \cos(x+y) = \cos^2 x - \sin^2 y$ ,

h)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x - y\right) = \cos x \sin y - \sin x \cos y$ ,

i)  $\sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ ,

j)  $(\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 = 2(\sin(x+y) + 1)$ ,

k)  $\sin(x+y) + \cos(x-y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y)$ .

3. Știind că  $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin b = \frac{1}{2}$ ,  $\cos c = \frac{5,6}{20}$ ,  $\cos a < 0$ ,  $\cos b > 0$ ,  $\sin c < 0$ , să se calculeze numerele  $\cos(a+b+c)$  și  $\cos(a+b-c)$ .

4. Să se arate că oricare ar fi  $x$  număr real și  $k$  număr întreg avem:

a)  $\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^k \cos x$ ,

b)  $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^{k+1} \sin x$ .

Din formulele (2), (4), (6) se obțin alte formule utile în aplicații.

Formule pentru  $\cos 2x$  și  $\sin 2x$ . Dacă în formulele (4) și respectiv (6) punem  $a = b = x$ , rezultă

$$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

și

$$\sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x.$$

Obținem formulele

(7)  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

și

(8)  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Formula (8) se mai utilizează și sub formele

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{ sau } \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Tot din (8) se deduc formulele

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \text{ și } |\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}.$$

Aplicație. Să se arate că  $\sin 3x$  se poate exprima în funcție de  $\sin x$ .

Soluție. Avem  $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ .

În plus, procedând în mod analog se obține

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

### Exerciții

5. Să se calculeze:

a)  $\cos \frac{\pi}{8}$ ,      b)  $\sin \frac{3\pi}{8}$ ,      c)  $\sin \frac{11\pi}{8}$ ,

d)  $\cos \frac{5\pi}{24}$ ,      e)  $\cos \frac{7\pi}{8}$ .

6. Să se verifice identitățile:

a)  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ ,      b)  $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \sin x$ ,

c)  $\cos 2x + 2 \sin^2 x = 1$ ,      d)  $1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin 2x$ ,

e)  $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,

f)  $3 \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2\sqrt{3} \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

7. Să se arate că

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ și } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Indicație. Se scrie  $\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right) = \sin \pi$  sau

$$\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} = 0$$

și se obține

$$16 \cos^4 \frac{\pi}{5} - 12 \cos^2 \frac{\pi}{5} + 1 = 0.$$

8. Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{10}$  și  $\cos \frac{\pi}{10}$ .

9. Să se arate că

$$\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

10. Să se arate că expresia

$$E = \cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b$$

este constantă.



## § 4. Funcțiile tg și ctg

Cu ajutorul funcțiilor  $\sin$  și  $\cos$  se pot defini alte funcții trigonometrice. Au utilitate mai mare funcțiile tangentă și cotangentă notate respectiv cu  $\text{tg}$  și  $\text{ctg}$ .

**Funcția tg.** Fie  $\mathcal{A}$  mulțimea numerelor reale de forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ . Funcția  $\text{tg}$  se definește astfel:

$$\text{tg} : \mathbf{R} - \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}, \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Se verifică ușor că funcția  $\text{tg}$  este o funcție impară.

**Teorema 1.** Fie  $M = F(t)$ ,  $t \in \mathbf{R} - \mathcal{A}$ , punctul asociat cu  $t$  prin funcția  $F$  de acoperire universală a cercului unitate,  $d$  dreapta tangentă la  $C$  în  $A(1, 0)$  și  $\{T\}$  intersecția dreptelor  $OM$  și  $d$ . Atunci  $T$  are coordonatele  $(1, \text{tg } t)$ .

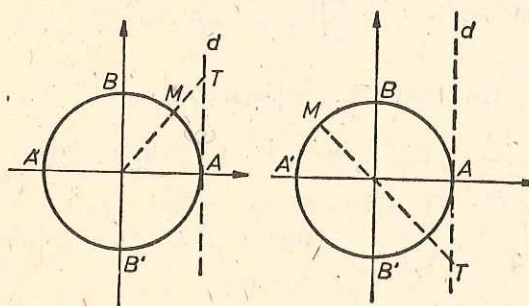


Fig. V.8

*Demonstrație.* Deoarece  $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ , punctul  $M$  nu poate coincide cu  $B$  sau cu  $B'$ , deci dreptele  $OM$  și  $d$  (fig. V.8) sunt concurente. Coordonatele punctului  $T$  se obțin rezolvând sistemul format cu ecuațiile dreptelor  $OM$  și  $d$ . Deoarece  $M$  are coordonatele  $(\cos t, \sin t)$  ecuația dreptei  $OM$  este  $y = \frac{\sin t}{\cos t} x$ . Ecuația dreptei  $d$  este  $x = 1$ . De aici rezultă că  $T$  are coordonatele  $(1, \frac{\sin t}{\cos t})$  și teorema este demonstrată.

**Teorema 2.** Funcția  $\text{tg}$  are perioada principală  $\pi$ .

*Demonstrație.* Deoarece, oricare ar fi  $x$  real,

$$\text{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \text{tg } x,$$

numărul  $\pi$  este perioadă. Se pune problema de a decide dacă există perioade strict pozitive mai mici decât  $\pi$ . Ar însemna că, dacă  $T$  este o asemenea perioadă,  $\text{tg}(x + T) = \text{tg } x$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ . Pentru  $x = 0$ , rezultă  $\text{tg } T = \text{tg } 0 = 0$ . Am ajuns la o contradicție, deoarece nu există  $T \in (0, \pi)$ , astfel ca  $\text{tg } T = 0$ . În consecință mulțimea perioadelor funcției  $\text{tg}$  este  $\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ , perioada principală a ei fiind  $\pi$ .

**Funcția ctg.** Fie  $\mathcal{B}$  mulțimea numerelor reale de forma  $k\pi$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ . Funcția  $\text{ctg}$  se definește astfel:

$$\text{ctg} : \mathbf{R} - \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Se verifică imediat că funcția  $\text{ctg}$  este impară.

De asemenea, se demonstrează în mod analog că are perioada principală  $\pi$ , deci are aceeași mulțime a perioadelor ca și funcția  $\text{tg}$ .

Din  $\text{ctg } x = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$ , rezultă că funcția  $\text{ctg}$  nu necesită un studiu separat deoarece este același cu studiul funcției

$$\text{ctg} : \mathbf{R} - \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ctg } x = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - x).$$

*Formule în care apare funcția tg:* Atunci când sînt considerate expresii în care apar funcțiile  $\text{tg}$  și  $\text{ctg}$ , sau în care apar funcțiile  $\text{tg}$ ,  $\text{ctg}$ ,  $\sin$  și  $\cos$  la numitori, vom presupune că sînt excluse din considerații acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. Elevii vor determina în fiecare caz mulțimea valorilor care trebuie excluse.

Avem

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Simplificînd fracția cu  $\cos a \cos b$  se obține:

$$(9) \quad \text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{tg } b}$$

Procedînd în mod analog ca în cazul formulei (9) se obține formula

$$(10) \quad \text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{tg } b}$$

Din formula (9) pentru  $a = b = x$  se deduce

$$(11) \quad \text{tg } 2x = \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$$

De asemenea, din

$$\text{tg } \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

rezultă

$$(12) \quad \text{tg } \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$



În continuare vom arăta că numerele  $\sin x$  și  $\cos x$  se exprimă fără radicali cu ajutorul numărului  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Avem

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1.$$

Din  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$  deducem  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ . Înlocuind, se obține

(13)

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

De asemenea, pornind de la formula  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  se obține

(14)

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

*Aplicație.* Să se calculeze  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$ .

*Soluție.* Avem, conform formulei (12),

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{1 + \cos \frac{\pi}{12}}. \text{ Cum } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ și } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Rămâne ca exercițiu să se obțină acest rezultat utilizând formula (11).

### Exerciții

1. Aflați  $\operatorname{tg}(a + b)$ , dacă  $\sin a = \frac{1}{2}$ ,  $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos a > 0$ ,  $\sin b < 0$ .

2. Să se verifice identitățile:

a)  $\frac{\cos(a + b)}{\cos a \cos b} = 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b;$

b)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x;$

c)  $\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x};$

d)  $\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{1 + \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b};$

e)  $\operatorname{ctg}(a + b) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b};$  f)  $\frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \operatorname{ctg} 2x;$

g)  $2 \sin 2x - \frac{\sin 3x}{\cos x} = \operatorname{tg} x;$  h)  $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a.$

3. Se dau  $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} b = \frac{1}{5}$ ,  $\operatorname{tg} c = \frac{1}{8}$ . Să se calculeze  $\operatorname{tg}(a + b + c)$ .

4. Știind că  $\operatorname{tg} x = \frac{m}{n}$ ,  $n \neq 0$  să se calculeze expresia

$$E = m \sin 2x + n \cos 2x.$$

5. Dacă  $5 \cos x + 10 \sin x - 11 = 0$ , să se calculeze  $\cos x$ ,  $\sin x$  și  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

### § 5. Transformarea sumelor în produse

Folosind formule corespunzătoare, deducem

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b,$$

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b,$$

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b,$$

$$\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \sin a \sin b.$$

Dacă  $a + b = p$  și  $a - b = q$ , atunci  $a = \frac{p + q}{2}$ ,  $b = \frac{p - q}{2}$ .

Obținem următoarele formule de transformare a sumelor în produse:

(15)

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

(16)

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

(17)

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

(18)

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

Prin calcule simple se deduc formule de transformare a sumei și diferenței de tangente în produs.

(19)

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$$



În exerciții, uneori este util să se transforme produsele în sume. Asemenea formule se obțin din cele de mai sus:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2},$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2},$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

Formulele numerotate și puse în chenar trebuie memorate de către elev. Pentru a le aplica cu ușurință, este necesar să fie reținut și modul în care pot fi deduse.

### Exerciții

1. Să se transforme în produs:

a)  $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ$ ,                      b)  $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ ,

c)  $\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$ ,                      d)  $\sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}$ ,

e)  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x$ ,              f)  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$ .

2. Să se verifice identitățile:

a)  $\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x$ . b)  $\frac{1 + \cos 4x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{\cos 2x}{\sin x}$ ,

c)  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 6 \cos x \cos 2x \cos 3x$ ,

d)  $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} = \operatorname{tg} 5x$ ,

e)  $1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sin \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ .

3. Să se transforme în produse următoarele sume:

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x,$$

$$T = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x + \cos 7x.$$

*Indicație.* Se recomandă, de exemplu, pentru suma  $S$ , să se calculeze  $S \sin \frac{x}{2}$ , să se transforme fiecare produs în sumă și așa mai departe.

## § 6. Graficele funcțiilor sin, cos și tg

În paragrafele precedente am văzut cum fiecare număr real  $t$  poate fi asociat cu una sau alta dintre coordonatele punctelor de pe cercul unitate  $C$  pentru a defini funcțiile cos și sin. În acest paragraf vom învăța să trasăm graficul funcțiilor trigonometrice sin, cos și tg.

*Graficul funcției sin.* Să considerăm într-un plan un sistem de coordonate de reper  $(O, A, B)$ . Ne propunem să trasăm locul geometric al punctelor  $M$  din acest plan care au coordonatele de forma  $x = t, y = \sin t$ . Deoarece, din aceste egalități deducem  $y = \sin x$ , acest loc geometric este graficul funcției

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \sin x.$$

Proprietatea de periodicitate a acestei funcții dă graficului ei caracteristici speciale. Faptul că punctele de abscise  $x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , au aceeași ordonată  $\sin x$ , face posibilă trasarea graficului în intervalul  $[0, 2\pi]$  și apoi să reproducem acest grafic în ambele sensuri de-a lungul axei absciselor pentru a obține cit dorim din el.

Când  $x$  parcurge intervalul  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin x$  crește de la valoarea  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$  la valoarea  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Într-adevăr avem

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dacă  $x_1 > x_2, x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , atunci

$$0 < \frac{x_1 - x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ și } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2},$$

deci

$$\sin \frac{x_1 - x_2}{2} > 0, \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$$

și astfel  $\sin x_1 - \sin x_2 > 0$ . Așadar în cazul  $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x_1 > x_2 \Rightarrow \sin x_1 > \sin x_2$ .

Se arată în mod analog că funcția sin este descrescătoare pe intervalul  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  (în formula de mai sus factorul  $\cos \frac{x_1 + x_2}{2}$  este negativ).

Ținând seama de periodicitate, funcția sin este crescătoare pe fiecare interval de forma  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$  și este descrescătoare pe intervalele  $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ . Acestea sînt intervalele de monotonie ale funcției sin.

În tabelul următor sînt trecute valorile lui  $x$  multiplii de  $\frac{\pi}{6}$  și valorile corespunzătoare lui  $\sin x$ . Săgețile  $\nearrow$  și  $\searrow$  indică creșterea, respectiv descreșterea valorilor funcției sin.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\nearrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow 1$	$\searrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow \frac{1}{2}$	$\searrow 0$	$\searrow -\frac{1}{2}$	$\searrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow -1$	$\nearrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow -\frac{1}{2}$	$\nearrow 0$



Punctele ale căror coordonate se află în tabel sint reprezentate în figura V.9, iar graficul funcției sin cind  $x \in [0, 2\pi]$  este trasat în figura V.10. Reproducînd cît dorim din graficul din figura V.10 în ambele sensuri de-a

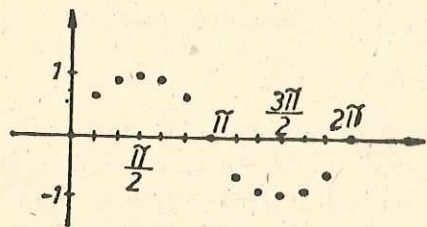


Fig. V.9

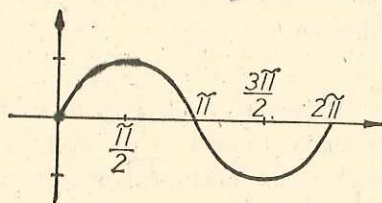


Fig. V.10

lungul axei absciselor se obține graficul funcției sin, figura V.11. Graficul funcției sin este inclus în porțiunea de plan cuprinsă între dreptele de ecuații  $y = 1$  și  $y = -1$ .

**Semnul funcției sin.** Funcția sin are valori numerice pozitive pe fiecare interval de forma  $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  și are valori numerice negative pe fiecare interval de forma  $(\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi)$ .

**Amplitudinea.** Dacă  $M$  este valoarea maximă a unei funcții periodice, iar  $m$  este valoarea minimă, numărul  $\frac{1}{2}(M - m)$  se numește *amplitudinea* acelei funcții. Rezultă că, deoarece  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , amplitudinea funcției sin este  $\frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$ .

### Aplicații

1. Să se stabilească semnul:

a)  $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{12}$ . b)  $\sin \frac{\pi}{1,5} - \sin \frac{8\pi}{7}$ . c)  $\sin 2 - \sin \frac{2\pi}{3}$ .

**Soluție.** a) Deoarece pe intervalul  $[0, \frac{\pi}{7}]$  funcția sin este crescătoare și deoarece  $\frac{\pi}{7} > \frac{\pi}{12}$ , rezultă:  $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{12} > 0$ . b) Din  $\sin \frac{\pi}{1,5} > 0$  și  $\sin \frac{8\pi}{7} = \sin(\pi + \frac{\pi}{7}) < 0$ , rezultă:  $\sin \frac{\pi}{1,5} - \sin \frac{8\pi}{7} > 0$ . c) Din  $3,141 < \pi < 3,142$ , rezultă  $2,096 < \frac{2\pi}{3} < 2,097$ . Deci  $2 < \frac{2\pi}{3}$  și  $\sin 2 - \sin \frac{2\pi}{3} < 0$ .

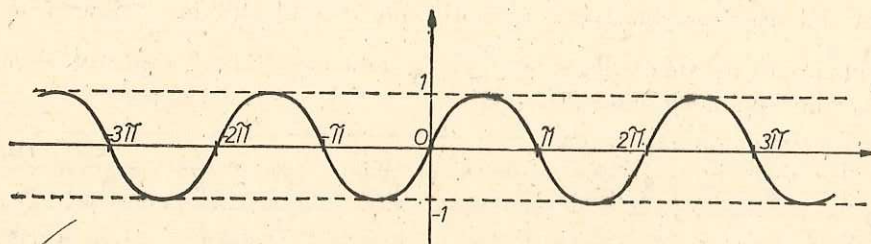


Fig. V.11

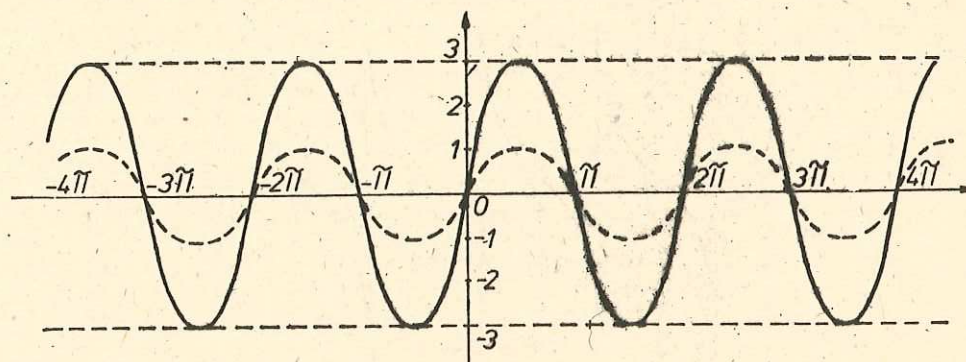


Fig. V.12

2. Să se reprezinte grafic funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3 \sin x.$$

**Soluție.** Funcția  $f$  are aceeași perioadă ca funcția sin și aceleași intervale de monotonie. Amplitudinea ei este

$$\frac{\max f - \min f}{2} = \frac{3 - (-3)}{2} = 3.$$

Valorile funcției  $f$  se obțin din valorile funcției sin prin înmulțirea cu 3, adică graficul funcției  $f$  este dilatat în lungul axei ordonate față de graficul funcției sin. Graficul funcției  $f$  este reprezentat în figura V.12 prin linie continuă pentru a-l deosebi de graficul funcției sin care este reprezentat prin linie întreruptă.

**Graficul funcției cos.** În tabelul următor sint trecute câteva perechi ordonate de numere de forma  $(x, \cos x)$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Funcția cos are aceeași perioadă principală și aceeași amplitudine ca și funcția sin. Graficul ei este schițat în figura V.13.

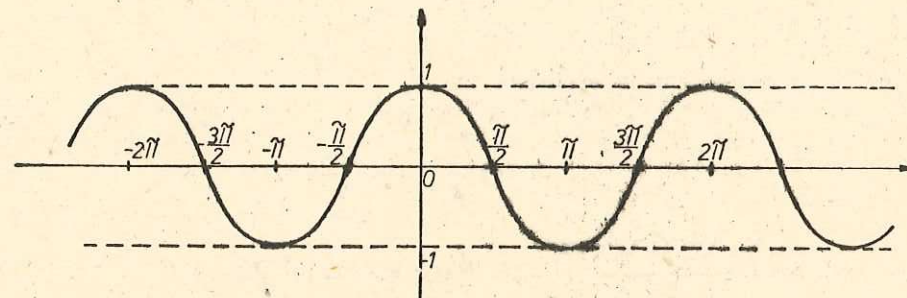


Fig. V.13



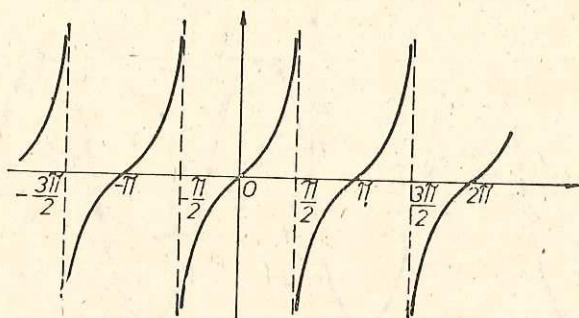


Fig. V.14

**Intervale de monotonie.** Funcția cos este strict crescătoare pe fiecare interval de forma  $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  și este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma  $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Semnul funcției cos. Funcția cos are valori numerice pozitive pe fiecare interval de forma  $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  și este negativă pe fiecare interval de forma  $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Graficul funcției tg.** Funcția tg fiind periodică de perioadă principală  $\pi$  se comportă la fel pe orice interval de lungime  $\pi$  de forma  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Monotonia.** Dacă  $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $x_1 < x_2$ , atunci  $x_1 - x_2 \in (-\pi, 0)$ .

Din  $\text{tg } x_1 - \text{tg } x_2 = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2}$ ,  $\sin(x_1 - x_2) < 0$ ,  $\cos x_1 > 0$  și  $\cos x_2 > 0$ , rezultă  $\text{tg } x_1 < \text{tg } x_2$ .

Funcția tg este deci strict crescătoare pe orice interval din domeniul ei de definiție.

**Graficul.** Din proprietatea de periodicitate rezultă că este suficient să construim graficul pe intervalul  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  și apoi să-l reproducem în ambele sensuri de-a lungul axei absciselor (figura V.14).

### Exerciții

1. Să se precizeze semnul numerelor:

a)  $\sin 5 + \sin 4$ ,

b)  $\cos 2 + \cos 4$ ,

c)  $\sin \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3}$ ,

d)  $\cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{11\pi}{6}$ ,

e)  $\sin 7 \cos 13 \frac{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5}}{\sin \frac{23\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{9}}$ ,

f)  $\text{tg } \frac{\pi}{8} - \text{tg } \frac{9\pi}{14}$ .

2. Folosind graficul funcției sin, schițați graficele funcțiilor

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = |\sin x|$ ,

b)  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = \sin |x|$ .

3. Să se reprezinte grafic funcția

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2} \sin x - 2.$$

4. Folosind graficul funcției tg, să se schițeze graficul funcției

$$f: \mathbf{R} - \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |\text{tg } x|.$$

## § 7. Identități condiționate

Unei egalități între două funcții  $i$  se mai spune *identitate*. De exemplu, toate formulele din § 2 — § 5, puse în chenare, sînt identități.

Dacă valorile funcțiilor  $f$  și  $g$  sînt egale numai pentru o submulțime din domeniul lor de definiție, atunci  $g(x) = f(x)$  se numește *identitate condiționată*. Această noțiune se extinde și la cazul mai multor variabile.

### Exemple

1. Dacă  $a, b, c$  sînt măsurile unghiurilor unui triunghi, atunci

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$$

**Soluție.** Egalitatea este o identitate condiționată, deoarece este verificată numai de acele valori ale lui  $a, b, c$  pentru care  $a + b + c = \pi$ . Din  $c = \pi - (a + b)$ , rezultă

$$\cos a + \cos b + \cos c = (\cos a + \cos b) - \cos(a + b) =$$

$$= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \left( 2 \cos^2 \frac{a+b}{2} - 1 \right) =$$

$$= 1 + 2 \cos \frac{a+b}{2} \left( \cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b}{2} \right) =$$

$$= 1 + 4 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$$

**Observație.** Identitatea putea fi demonstrată și pornind de la transformarea sumei  $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a + b + c)$  în produs, așa cum se va proceda în exemplul următor.

2. Să se transforme în produs suma

$$S = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$$

și să se scrie identitatea condiționată de  $x + y + z = \pi$ .



*Soluție.* Se scrie succesiv

$$\begin{aligned} S &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \cos \frac{x+y+2z}{2} \sin \frac{x+y}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left( \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y+2z}{2} \right) = \\ &= 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x+z}{2} \sin \frac{y+z}{2}. \end{aligned}$$

Scrind sub această formă suma, se obține identitatea condiționată dacă  $x + y + z = \pi$ , atunci

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}.$$

Identitatea condiționată poate fi demonstrată prin procedeul de la exemplul 1, fără a folosi suma  $S$ .

3. Dacă  $a + b + c = \frac{\pi}{2}$  și  $a, b, c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  atunci

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = 1.$$

*Soluție.* Dacă  $a + b \neq \frac{\pi}{2}$ , rezultă  $c \neq 0$ . Deci

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \\ + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - a - b \right) &= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a+b)} = \\ = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b &= 1. \end{aligned}$$

Dacă  $a + b = \frac{\pi}{2}$ , rezultă  $c = 0$ . Din  $a = \frac{\pi}{2} - b$ , rezultă  $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - b \right) = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} b = 1$ .

4. Dacă  $a + b + c + d = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , să se arate că  $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = (-1)^{k+1} 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{a+d}{2}$ .

*Soluție.* Din  $d = 2k\pi - (a + b + c)$ , rezultă  $\sin d = -\sin(a + b + c)$ . Conform exemplului 2 avem

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}.$$

Deoarece  $\frac{b+c}{2} = k\pi - \frac{a+d}{2}$ , rezultă

$$\sin \frac{b+c}{2} = \sin \left( k\pi - \frac{a+d}{2} \right) = -\cos k\pi \sin \frac{a+d}{2} = -(-1)^k \sin \frac{a+d}{2}$$

și egalitatea este demonstrată.

## Exerciții

1. Dacă  $x = y + z$ , să se arate că:

a)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z$  pentru  $\cos x \neq 0, \sin y \neq 0, \sin z \neq 0$ .

b)  $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$ .

2. Dacă  $a + b + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , atunci:

a)  $\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^{k+1} 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$ .

b)  $\cos a + \cos b + \cos c + 1 = (-1)^k 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$ .

3. Dacă  $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$ , atunci  $3 \operatorname{tg} t + 4 \operatorname{ctg} t - 7 = 0$ .

*Indicație.* Dacă  $x = \cos t$  și  $y = \sin t$ , rezolvând sistemul  $3x + 4y + 5 = 0$  și  $x^2 + y^2 = 1$ , se obține  $\cos t = -\frac{3}{5}$  și  $\sin t = -\frac{4}{5}$ . Cu aceste valori egalitatea a doua este verificată.

4. Dacă  $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$ , să se arate că  $\sin 2t = \frac{24}{25}$ . Reciproca este adevărată?

*Indicație.* Prima egalitate este aceeași ca și în exercițiul precedent, deci  $\cos t = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin t = -\frac{4}{5}$ . Deoarece egalitatea  $\sin 2t = \frac{24}{25}$  este adevărată și pentru  $\cos t = \frac{3}{5}, \sin t = \frac{4}{5}$ , reciproca nu este adevărată.



§ 1. Relații, funcții

Fie două mulțimi  $M_1$  și  $M_2$  și o proprietate referitoare la perechile ordonate  $(x, y)$ , unde  $x \in M_1$  și  $y \in M_2$ . Mulțimea tuturor perechilor ordonate  $(x, y)$  ale produsului cartezian  $M_1 \times M_2$  care fac adevărată proprietatea dată se numește relație.

*Exemple. 1.* Dacă  $x \in \{-2, 1, 2, 3\}$ ,  $y \in \{-1, 2, 5, 8, 12, 15\}$  și proprietatea dată este  $y = 3x - 1$ , avem relația

$$R_1 = \{(1,2), (2,5), (3,8)\}.$$

2. Dacă  $x \in \mathbf{R}$ ,  $y \in \mathbf{R}$  și proprietatea dată este  $y = 3x - 1$ , avem relația

$$R_2 = \{(x,y) \mid y = 3x - 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

3. Dacă  $x \in \mathbf{R}$ ,  $y \in [0, +\infty)$  și proprietatea dată este  $y = x^2$ , avem relația

$$R_3 = \{(x,y) \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}, y \in [0, +\infty)\}.$$

4. Dacă  $x \in \{-3, 3, 4\}$ ,  $y \in \{-4, -3, 3, 4\}$  și proprietatea dată este  $x^2 + y^2 = 25$ , avem relația

$$R_4 = \{(-3, -4), (-3, 4), (3, -4), (3, 4), (4, -3), (4, 3)\}.$$

Relațiile  $R_1, R_2, R_3$  din exemplele 1, 2, 3 sînt relații funcționale sau funcții, deoarece orice element din prima mulțime este asociat cu un singur element din mulțimea a doua. Relația  $R_4$  din exemplul 4 nu este funcție, deoarece un element din prima mulțime, de exemplu 3, este asociat atît cu  $-4$  cît și cu 4. Deci în timp ce orice funcție este o relație, nu orice relație este funcție.

Dacă într-o relație se schimbă între ele elementele componente ale fiecărei perechi ordonate se obține așa-numita *relație inversă* a relației respective. Dacă  $R$  este o relație, inversa ei se notează cu  $R^{-1}$ . Relațiile inverse ale relațiilor din exemplele 1, 2, 3, 4 sînt:  $R_1^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (8, 3)\}$ ,

$$R_2^{-1} = \{(x, y) \mid x = 3y - 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

$$R_3^{-1} = \{(x, y) \mid x = y^2, y \in \mathbf{R}, x \in [0, +\infty)\},$$

$$R_4^{-1} = \{(-4, -3), (4, -3), (-4, 3), (4, 3), (-3, 4), (3, 4)\}.$$

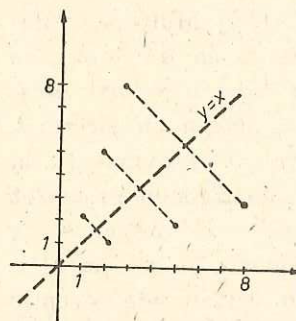


Fig. VI.1

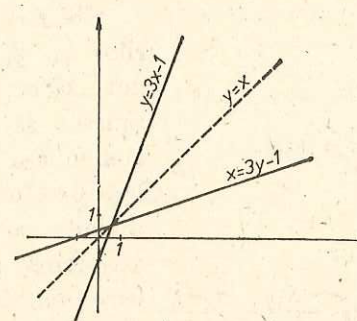


Fig. VI.2

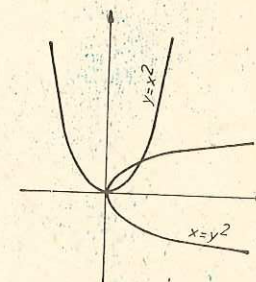


Fig. VI.3

Funcțiile fiind relații, ele au relație inversă. Dacă și aceasta este funcție, atunci ea este funcția inversă a funcției date.

De menționat este faptul că, deși  $R_3$  este funcție, inversa ei  $R_3^{-1}$  nu este funcție. Într-adevăr, de exemplu, numărul 9 este asociat prin  $R_3^{-1}$  atît cu  $-3$  cît și cu 3 și nu se respectă cerințele definiției unei funcții.

Relațiile ale căror elemente sînt perechi de numere se numesc relații numerice. În acest capitol ne vom ocupa numai cu relații numerice.

Locul geometric al punctelor din plan ale căror coordonate sînt elementele unei relații se numește graficul relației.

Graficele relațiilor  $R$  și  $R^{-1}$  sînt simetrice față de prima bisectoare (dreapta de ecuație  $y = x$ ). Într-adevăr dacă  $P(a, b)$  este punct al graficului lui  $R$ , atunci  $P'(b, a)$  este punct al graficului lui  $R^{-1}$  și ecuația dreptei perpendiculare pe dreapta  $PP'$  prin mijlocul segmentului  $(PP')$  este  $y = x$ .

Graficele relațiilor  $R_1$  și  $R_1^{-1}$  din exemplul 1 sînt reprezentate în figura VI.1, cele ale relațiilor  $R_2$  și  $R_2^{-1}$  din exemplul 2 în figura VI.2 și cele ale relațiilor  $R_3$  și  $R_3^{-1}$  din exemplul 3 în figura VI.3.

§ 2. Inversarea funcțiilor trigonometrice

Funcția  $\sin: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $y = \sin x$  nu admite funcție inversă. Într-adevăr în relația

$$\sin^{-1} = \{(x, y) \mid x = \sin y, x \in [-1, 1], y \in \mathbf{R}\}$$

aceiași număr, de exemplu  $\frac{1}{2}$ , este asociat cu o infinitate de numere distincte de forma  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  și de asemenea, cu  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  și se contrazice definiția funcției.

Graficele funcției  $\sin$  și cel al relației  $\sin^{-1}$  sînt reprezentate în figura VI.4 (sînt simetrice față de prima bisectoare). Din grafic rezultă că unei valori date lui  $x$  din intervalul  $[-1, 1]$  i se asociază o infinitate de valori ale lui  $y$  astfel ca  $x = \sin y$ .



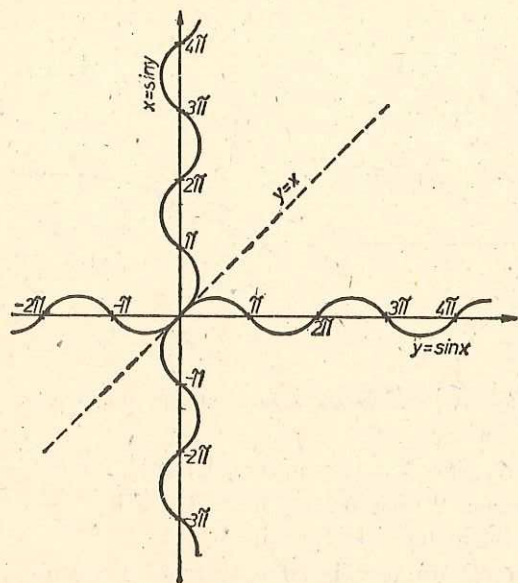
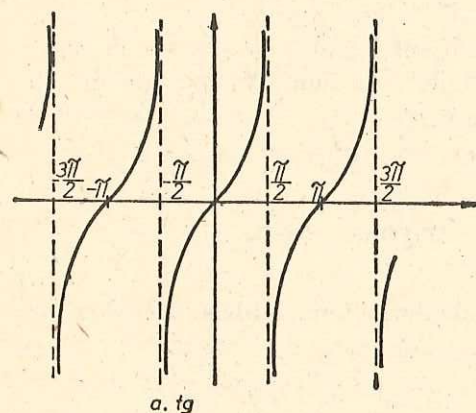


Fig. VI.4

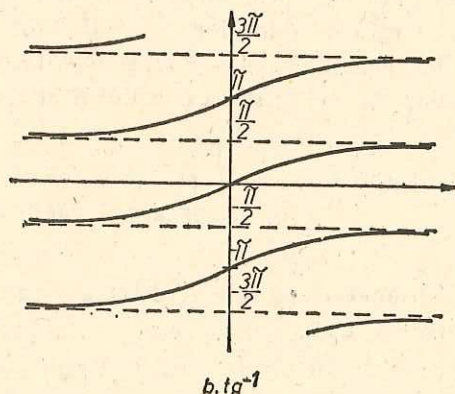
Fie  $a \in [-1, 1]$ . Mulțimea valorilor lui  $y$ , astfel ca  $a = \sin y$ , se notează cu  $\sin^{-1} a$  sau se mai obișnuiește să se noteze cu  $\text{Arcsin } a$ . Denumirea  $\text{Arcsin}$  provine de la faptul că funcțiile trigonometrice sînt definite cu ajutorul funcției  $F$  de acoperire universală a cercului, care aplică intervale ale dreptei reale  $\mathbb{R}$  pe arce ale cercului unitate  $C$ .

În mod analog, funcția  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $y = \cos x$ , nu admite funcție inversă. Vom folosi notații analoge cu cele de la funcția  $\sin$ . Mulțimea valorilor lui  $y$  astfel ca  $b = \cos y$  se notează cu  $\cos^{-1} b$  sau  $\text{Arccos } b$ .

Graficul funcției  $\text{tg}: \mathbb{R} - \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \text{tg } x$  și cel al relației  $\text{tg}^{-1} = \{(x, y) \mid x = \text{tg } y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} - \mathcal{A}\}$  sînt reprezentate în figura VI.5, a și respectiv VI.5, b. Se observă că relația  $\text{tg}^{-1}$  nu este funcție. Dacă  $c = \text{tg } y$ , atunci  $y \in \text{tg}^{-1} c$  sau  $y \in \text{Arctg } c$ .



a. tg



b.  $\text{tg}^{-1}$

Fig. VI.5

### § 3. Funcțiile arcsin, arccos, arctg

Fie numerele reale date  $a, b, c$ , ( $a, b \in [-1, 1]$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ). Mulțimile  $\text{Arcsin } a$ ,  $\text{Arccos } b$ ,  $\text{Arctg } c$  introduse în paragraful precedent au o infinitate de elemente. Ne propunem să distingem în fiecare din aceste mulțimi cite un element, cu ajutorul căruia să putem exprima toate celelalte elemente. Rezol-

varea acestei probleme se poate face folosind alte funcții care sînt restricții potrivite ale funcțiilor  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{tg}$  și care să fie inversabile. Aceste restricții sînt:

$$\overline{\sin}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], y = \overline{\sin} x = \sin x,$$

$$\overline{\cos}: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], y = \overline{\cos} x = \cos x,$$

$$\overline{\text{tg}}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, y = \overline{\text{tg}} x = \text{tg } x.$$

Dacă numărul real  $x$  parcurge intervalul  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  de la  $-\frac{\pi}{2}$  la  $\frac{\pi}{2}$  numărul  $\overline{\sin} x$  parcurge intervalul  $[-1, 1]$ , de la  $-1$  la  $1$ , trecînd prin fiecare punct al acestui interval o singură dată. Deci funcția  $\overline{\sin}$  este bijectivă și admite inversa  $\overline{\sin}^{-1}$ , care se notează cu  $\text{arcsin}$  și se scrie

$$\text{arcsin}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y = \text{arcsin } x.$$

În mod analog se poate arăta că există funcțiile inverse ale funcțiilor  $\overline{\cos}$  și  $\overline{\text{tg}}$ , care se notează cu  $\text{arccos}$  și  $\text{arctg}$  și se scriu astfel:

$$\text{arccos}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], y = \text{arccos } x \text{ și } \text{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y = \text{arctg } x.$$

Graficele funcțiilor  $\text{arcsin}$ ,  $\text{arccos}$  și  $\text{arctg}$  sînt trasate cu linie continuă respectiv în figurile VI.6, VI.7, VI.8. Cu linie întreruptă sînt trasate graficele funcțiilor  $\overline{\sin}$ ,  $\overline{\cos}$  și  $\overline{\text{tg}}$  pentru a se vedea simetria față de dreapta de ecuație  $y = x$ .

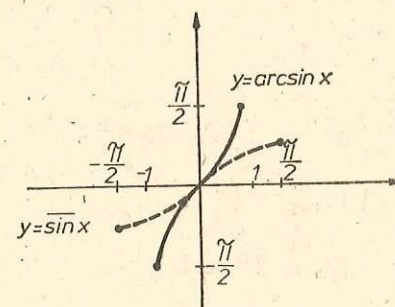


Fig. VI.6

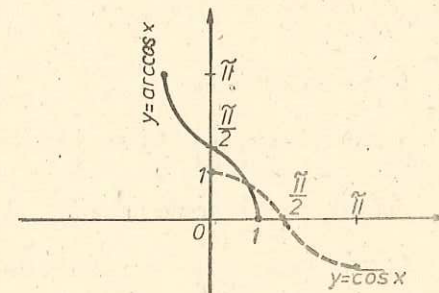


Fig. VI.7

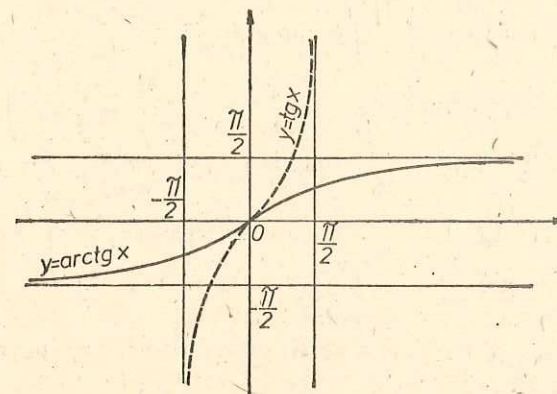


Fig. VI.8



### Aplicații

1. Să se calculeze:

a)  $\arcsin 1$ , b)  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , c)  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ , d)  $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

*Soluție.* a) Din  $\arcsin 1 = y$ , rezultă  $\sin y = 1$ ,  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Deci  $y = \frac{\pi}{2}$  și  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ .

b) Din  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ , rezultă  $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Dar  $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Deci  $y = \frac{\pi}{3}$  și  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

c) Din  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = y$ , rezultă  $\cos y = -\frac{1}{2}$  și  $y \in [0, \pi]$ . Dar  $(-1) \cos y = -\frac{1}{2}$  și  $-1 = \cos \pi$ ,  $0 = \sin \pi$ . Deci  $\cos \pi \cos y + \sin \pi \sin y = \cos \frac{\pi}{3}$ ,

$\cos(\pi - y) = \cos \frac{\pi}{3}$ ,  $\pi - y = \frac{\pi}{3}$ . Așadar  $y = \pi - \frac{\pi}{3}$  și  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ .

d) Din  $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = y$ , rezultă  $\operatorname{tg} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  și  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Dar  $-\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\operatorname{tg}(-y) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $-y = \frac{\pi}{6}$ . Deci  $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -y = -\frac{\pi}{6}$ .

2. Să se calculeze:

a)  $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$ , b)  $\sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$ , c)  $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{24}\right)$ .

*Soluție.* a) Deoarece  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ , rezultă  $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

b) Din  $\arccos \frac{5}{13} = x$ , rezultă  $\cos x = \frac{5}{13}$  și  $x \in [0, \pi]$ . Deoarece  $\sin x \geq 0$ ,  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{12}{13}$ . Deci

$$\sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right) = \sin x = \frac{12}{13}.$$

c) Dacă  $\arcsin \frac{4}{5} = x$ , atunci  $\sin x = \frac{4}{5}$  și  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Deoarece  $\cos x \geq 0$ ,  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{5}$ . Deci  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$ . La fel, din  $\operatorname{arctg} \frac{7}{24} = y$ , rezultă  $\operatorname{tg} y = \frac{7}{24}$ . Așadar  $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{24}\right) = \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{3\left(\frac{4}{3} + \frac{7}{24}\right)}{72 - 28} = \frac{117}{44}$ .

3. Dacă  $a \in [-1, 1]$ ,  $b \in [-1, 1]$ ,  $c \in \mathbf{R}$ , să se arate că: a)  $\sin(\arcsin a) = a$ , b)  $\cos(\arccos b) = b$ ,

c)  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} c) = c$ . d)  $\sin(\arccos b) = \sqrt{1 - b^2}$ ,

e)  $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$ . f)  $\operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$ ,  $a \neq 0$ .

g)  $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ .

*Soluție.* a) Din  $\arcsin a = x$ , rezultă  $\sin x = a$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Deci  $\sin(\arcsin a) = \sin x = a$ .

Egalitățile b) și c) se demonstrează în mod analog.

d) Din  $\arccos b = x$  rezultă  $\cos x = b$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

Deci  $\sin x \geq 0$  și  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - b^2}$ . Așadar  $\sin(\arccos b) = \sin x$  și egalitatea este demonstrată.

e) Se demonstrează ca în cazul d).

f) Din  $\arccos a = y$ , rezultă  $\cos y = a$ ,  $y \in [0, \pi]$ . Deci  $\sin y \geq 0$ .

Dar  $a \neq 0$ , deci  $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . Așadar

$$\operatorname{tg}(\arccos a) = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

g) Egalitatea rezultă din  $\sin(\arcsin a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = a$ .

4. Să se arate că, dacă  $a \in [-1, 1]$ ,  $b \in [-1, 1]$ ,  $c \in \mathbf{R}$ , atunci:

a)  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ , b)  $\arccos(-b) = \pi - \arccos b$ , c)  $\operatorname{arctg}(-c) = -\operatorname{arctg} c$ , d)  $\cos(4 \arccos b) = 8b^4 - 8b^2 + 1$ .

*Soluție.* a) Din  $\arcsin(-a) = x$ , rezultă  $\sin x = -a$ ,  $-\sin x = a$ ,  $\sin(-x) = -a$ ,  $-x = \arcsin a$ . Deci  $\arcsin(-a) = x = -\arcsin a$ .

b) Din  $\arccos(-b) = x$ , rezultă  $\cos x = -b$ ,  $-\cos x = b$ ,  $\cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = b$ ,  $\cos(\pi - x) = b$ . Deci  $\pi - x = \arccos b$  și  $\arccos(-b) = x = \pi - \arccos b$ .

c) Se demonstrează ca în cazul a).

d) Din  $\arccos b = x$ , rezultă  $\cos x = b$ . Deci

$$\cos(4 \arccos b) = \cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 = 8b^4 - 8b^2 + 1.$$

5. Dacă  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , să se arate că:

$$\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

*Soluție.* Se observă că  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x^2) = x^2$  și  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$ .

Înseamnă că  $\operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , egalitate care se mai scrie:

$$\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$



Deoarece  $x^2 > 0$ ,  $\operatorname{arctg} x^2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Deci  $\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \in (0, \pi)$ . Așadar egalitatea poate avea loc numai pentru  $k = 0$ .

6. Dacă  $x \geq 1$ , să se arate că

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi.$$

*Soluție.* Pentru  $x = 1$ , egalitatea este verificată. Presupunem că  $x > 1$  și fie  $y = 2 \operatorname{arctg} x$ ,  $z = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ . Atunci  $\operatorname{tg} y = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1-x^2}$  și  $\operatorname{tg}(\pi - z) = -\operatorname{tg} z$ . Deoarece  $x > 1$ ,  $z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos z > 0$ . Avem  $\sin z = \frac{2x}{1+x^2}$  și  $\cos z = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ . Deci  $\operatorname{tg} z = \frac{2x}{x^2 - 1}$  și  $\operatorname{tg}(\pi - z) = -\frac{2x}{x^2 - 1}$ . Din  $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\pi - z)$ , rezultă  $y = \pi - z + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Singura posibilitate este  $k = 0$ , deoarece  $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ , iar  $z$  este situat în intervalul  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Așadar egalitatea este demonstrată.

Enunțul se putea da și sub forma: Să se arate că

$$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

este o funcție constantă.

Rămine ca exercițiu să se arate că

$$g: (-\infty, -1] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

este o funcție constantă și să se determine acea constantă.

Funcția  $h: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$  nu este constantă. Într-adevăr se pot găsi două valori distincte ale ei. De exemplu,  $h(0) = 0$  și  $h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$ .

### Exerciții

1. Să se afle numerele:

- a)  $\arccos \frac{1}{2}$ , b)  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , c)  $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$ ,  
d)  $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , e)  $\sin \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5}\right)$ ,  
f)  $\sin \left(3 \arcsin \frac{1}{4}\right)$ .

2. Dacă  $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$  să se calculeze  $\sin x$  și  $\cos x$ .

3. Să se determine  $x$  astfel ca

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Să se arate că:

a)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,

b)  $\arcsin \frac{7}{25} + \arccos \frac{24}{25} = \arcsin \frac{336}{625}$ .

c) Dacă  $a$  și  $b$  sînt numere reale,  $a \neq 0$ , să se arate că

$$\arcsin \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} + \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2} = \frac{\pi}{2},$$

d)  $\arcsin \frac{\sqrt{330}}{22} + \arccos \frac{\sqrt{154}}{22} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{105}}{4} = \pi$ ,

e)  $\arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

f\*)  $\operatorname{arctg} \frac{4x}{5-3x} - \operatorname{arctg} \frac{5x-3}{4} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ ,  $x < \frac{5}{3}$ . (De ce?)

g)  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = \operatorname{tg}(x + \operatorname{arctg} 2)$ ,  $\operatorname{tg} x \neq \frac{1}{2}$ .

5. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $\arcsin \frac{1}{1+x^2} + \arccos \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$ ,

b)  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$ ,

c)  $\cos(3 \arccos x) = \cos(2 \arccos x) + 1$ .

## § 4. Ecuații trigonometrice fundamentale

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $y = f(x)$ , unde  $E \subset \mathbf{R}$ , iar  $f(x)$  depinde de  $x$  numai prin intermediul funcțiilor  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ . O egalitate de forma

$$f(x) = 0$$

se numește *ecuație trigonometrică*.

Există ecuații trigonometrice verificate pentru orice valori date variabilei (identitățile), ecuații verificate numai pentru anumite valori date variabilei și ecuații care nu sînt verificate pentru nici o valoare dată variabilelor (de exemplu  $\sin x = 2$ ).

Valorile variabilei care verifică ecuația trigonometrică se numesc soluții ale ecuației. A rezolva ecuația înseamnă a-i afla soluțiile.

Ecuațiile trigonometrice  $\sin t = a$ ,  $\cos t = b$ ,  $\operatorname{tg} t = c$  se numesc *ecuații trigonometrice fundamentale*. Conform paragrafului 2, soluțiile acestor ecuații sînt respectiv elementele mulțimilor  $\operatorname{Arcsin} a$ ,  $\operatorname{Arccos} b$ ,  $\operatorname{Arctg} c$ .

Ecuația  $\sin t = a$ . Deoarece  $\sin t \in [-1, 1]$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , ecuația are soluții dacă și numai dacă  $a \in [-1, 1]$ . Pentru fiecare valoare dată lui  $a$ , pe cercul



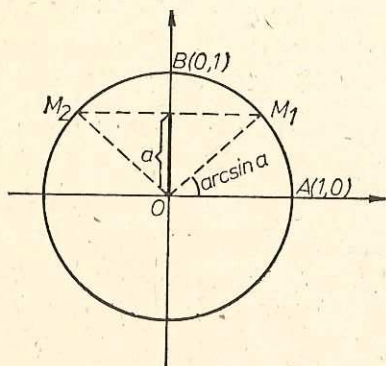


Fig. VI.9

unitate  $C$  există cel mult două puncte de ordonată  $a$ . Într-adevăr, din  $\sin t = a$ , rezultă  $\cos t = \pm \sqrt{1 - a^2}$ . Deci cele două puncte sînt  $M_1(\sqrt{1 - a^2}, a)$ ,  $M_2(-\sqrt{1 - a^2}, a)$  și avînd abscisele numere opuse și aceeași ordonată, sînt simetrice față de axa ordonatelor (figura VI.9 pentru  $0 \leq a < 1$  și figura VI.10 pentru  $-1 < a < 0$ ). Există un singur punct cînd  $a = 1$  sau  $a = -1$ .

Dacă se cunosc două soluții ale ecuației, corespunzătoare celor două puncte  $M_1$  și  $M_2$ , celelalte soluții se pot scrie cu ajutorul lor. Conform definiției funcției arcsin, o soluție a ecuației  $\sin t = a$ , este  $t_1 = \arcsin a$ , deoarece  $\sin t_1 = \sin(\arcsin a) = a$ . Deci  $F(t_1) = M_1(\sqrt{1 - a^2}, a)$ . De asemenea, deoarece  $\sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a$ ,  $t_2 = \pi - t_1 = \pi - \arcsin a$  este o a doua soluție și  $F(t_2) = M_2(-\sqrt{1 - a^2}, a)$ . Ținînd seama de periodicitatea funcției  $F$ , soluțiile ecuației  $\sin t = a$ , sînt  $\text{Arcsin } a = \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ .

În particular, ecuația  $\sin t = 1$  are soluțiile

$$\text{Arcsin } 1 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\},$$

ecuația  $\sin t = -1$  are soluțiile

$$\text{Arcsin } (-1) = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$$

și ecuația  $\sin t = 0$  are soluțiile

$$\text{Arcsin } 0 = \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

*Exemple. 1.*  $\sin x = \frac{3}{4}$ . Ecuația are ca mulțime a soluțiilor  $\text{Arcsin } \frac{3}{4} = \sin^{-1} \frac{3}{4} = \left\{ \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ .

*2.*  $\sin x = -\frac{1}{2}$ . Deoarece  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ , ecuația are ca mulțime a soluțiilor.

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

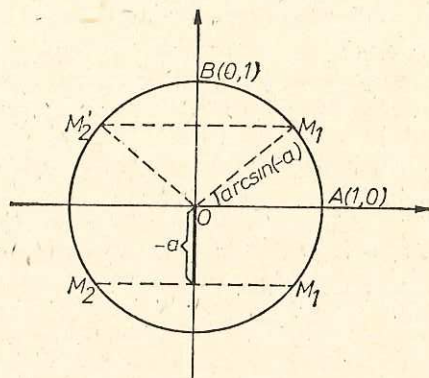


Fig. VI.10

*Observație.* Deoarece

$\text{Arcsin } a = \{(-1)^{2k} \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{(-1)^{2k+1} \arcsin a + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$  prin efectuarea operației de reuniune, rezultă

$$(1) \quad \text{Arcsin } a = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

De multe ori este comod ca mulțimea soluțiilor ecuației  $\sin t = a$ ,  $a \in [-1, 1]$  să se rețină sub forma (1).

*Exemplu 3.*  $\sin x = -\frac{1}{3}$ . Deoarece  $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arcsin \frac{1}{3}$ , avem

$$x \in \left\{ (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

*Ecuația*  $\cos t = b$ . Deoarece  $\cos t \in [-1, 1]$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ , ecuația are soluții dacă și numai dacă  $b \in [-1, 1]$ .

Dacă  $b$  este dat, din  $\cos t = b$ , rezultă  $\sin t = \pm \sqrt{1 - b^2}$ . Înseamnă că pe cercul unitate  $C$  există numai două puncte  $M_1(b, \sqrt{1 - b^2})$  și  $M_2(b, -\sqrt{1 - b^2})$  de abscisă  $b$ . Aceste puncte sînt simetrice față de axa absciselor (figura VI.11, pentru  $b \geq 0$  și figura VI.12, pentru  $b < 0$ ). Deoarece  $\cos t = b$  și  $\cos(-t) = \cos t = b$ , numerele  $t_1 = \arccos b$  și  $t_2 = -t_1 = -\arccos b$  aparțin mulțimii  $\text{Arccos } b$  și  $F(t_1) = M_1$ ,  $F(t_2) = M_2$ . Periodicitatea funcției  $F$  ne dă posibilitatea să scriem

$$(2) \quad \text{Arccos } b = \{\arccos b + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{-\arccos b + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

În particular, soluțiile ecuațiilor  $\cos t = 1$ ,  $\cos t = -1$  și  $\cos t = 0$  sînt respectiv:

$$\text{Arccos } 1 = \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}, \quad \text{Arccos}(-1) = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \text{ și}$$

$$\text{Arccos } 0 = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

*Exemple. 1.*  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Deoarece  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ , rezultă

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

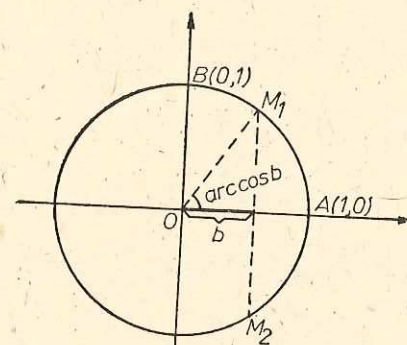


Fig. VI.11

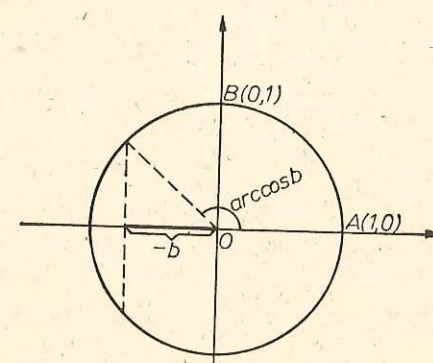


Fig. VI.12



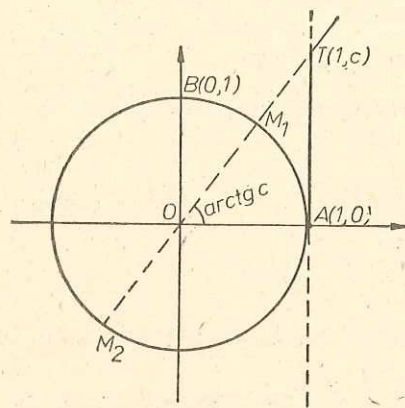


Fig. VI.13

2.  $\cos x = -\frac{3}{4}$ . Deoarece  $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{4}$ , rezultă

$$x \in \left\{ \pi - \arccos\frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\pi + \arccos\frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

*Ecuatia*  $\operatorname{tg} t = c$ . Deoarece  $\operatorname{tg} t$  ia toate valorile reale cind  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , ecuația are soluții, oricare ar fi valorile reale ale lui  $c$ . Atunci cind  $c$  este dat, pe dreapta de ecuație,  $x = 1$ , există un singur punct  $T$ , care are coordonatele  $(1, c)$ . Dreapta  $OT$  (figura VI.13 pentru  $c \geq 0$  și figura VI.14 pentru  $c < 0$ ) intersectează cercul  $C$  în punctele  $M_1$  și  $M_2$ . Dacă  $t_1 = \operatorname{arctg} c$ , atunci  $F(t_1) = M_1$  și  $F(\pi + t_1) = M_2$ . Deci  $\operatorname{tg} t_1 = c$  și  $\operatorname{tg}(\pi + t_1) = c$ . Ținind seama de periodicitatea funcției  $\operatorname{tg}$ , soluțiile ecuației  $\operatorname{tg} t = c$  sînt

$$(3) \quad \operatorname{Arctg} c = \{ \operatorname{arctg} c + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \}.$$

*Exemple.* 1.  $\operatorname{tg} x = 5$ . Mulțimea soluțiilor este

$$\operatorname{Arctg} 5 = \{ \operatorname{arctg} 5 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \}.$$

2.  $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$ . Deoarece  $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$  rezultă

$$t \in \operatorname{Arctg}(-\sqrt{3}) = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

3.  $\operatorname{ctg} x = -4$ . Din  $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -4$ , rezultă  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}$  și

$$x \in \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) = \left\{ -\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

4.  $\operatorname{ctg} x = 0$ . În acest caz nu se poate apela la funcția  $\operatorname{tg}$ , dar  $\frac{\cos x}{\sin x} = 0$ . De aici  $\cos x = 0$  și  $\sin x \neq 0$ , sau

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

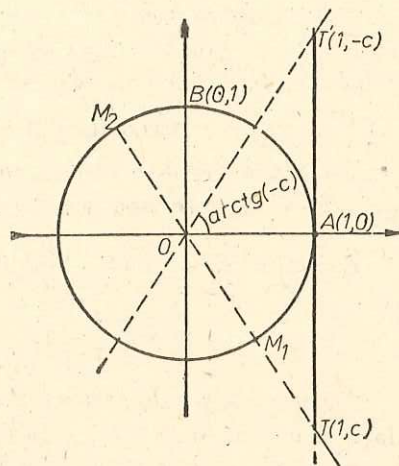


Fig. VI.14

*Aplicații.* 1. Să se rezolve ecuațiile

a)  $\sin f(x) = \sin g(x)$ , b)  $\cos f(x) = \cos g(x)$ , c)  $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$ , unde  $f$  și  $g$  sînt funcții definite pe aceeași mulțime  $A \subset \mathbf{R}$ .

*Soluție.* a) Ecuația se scrie succesiv:  $\sin f(x) - \sin g(x) = 0$ ,  
 $2 \cos \frac{f(x) + g(x)}{2} \sin \frac{f(x) - g(x)}{2} = 0$ . Ecuația are soluții dacă și numai dacă există un număr întreg  $k$  astfel ca

$$f(x) + g(x) = \pi + 2k\pi \quad \text{sau} \quad f(x) - g(x) = 2k\pi.$$

b) Scriem ecuația succesiv:  $\cos f(x) - \cos g(x) = 0$ ,

$$2 \sin \frac{f(x) + g(x)}{2} \sin \frac{g(x) - f(x)}{2} = 0.$$

Constatăm că are soluții dacă și numai dacă există numărul întreg  $k$  astfel ca

$$f(x) + g(x) = 2k\pi \quad \text{sau} \quad g(x) - f(x) = 2k\pi.$$

c) Ecuația se scrie  $\frac{\sin[f(x) - g(x)]}{\cos f(x) \cos g(x)} = 0$ . Are soluții dacă și numai dacă există numărul întreg  $k$  astfel ca

$$f(x) - g(x) = k\pi, \quad \cos f(x) \neq 0, \quad \cos g(x) \neq 0.$$

2. Să se determine mulțimea valorilor lui  $x$  astfel ca:

- a)  $\cos 4x = \cos x$ ,                      b)  $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$ ,  
c)  $\sin 5x = \cos 2x$ ,                      d)  $\sin(x^2 + x) = \sin(x + 1)$ .

*Soluție.* a) Conform aplicației 1. obținem  $4x_k = \pm x_k + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Deci  $x_k = \frac{2k\pi}{3}$  sau  $x_k = \frac{2k\pi}{5}$ . Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{ \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

b) Se obține  $3x_k = x_k + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  sau  $x_k = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Dar  $\cos x \neq 0$  și  $\cos 3x \neq 0$ . Așadar  $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ .

c) Din  $\sin 5x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ , rezultă  $5x_k = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} - 2x_k\right) + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{ \frac{(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi}{5 + 2(-1)^k} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

d) Avem  $x_k^2 + x_k = x_k + 1 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  sau  $x_k^2 + x_k = \pi - x_k - 1 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Rezolvind ecuațiile de gradul doi și punind condițiile de existență ale radicalilor, soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{ \sqrt{1 + 2k\pi} \mid k \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ -\sqrt{1 + 2k\pi} \mid k \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ -1 + \sqrt{(2k+1)\pi} \mid k \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ -1 - \sqrt{(2k+1)\pi} \mid k \in \mathbf{N} \right\}.$$



### Exerciții

Să se rezolve ecuațiile:

a)  $\cos 4x = -\frac{1}{2}$ ,

b)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ ,

c)  $\sin 3x = \cos x$ ,

d)  $\operatorname{tg} 5x = -1$ ,

e)  $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ,

f)  $\sin(x^2) = \sin x$ ,

g)  $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

*Soluție.* Calculând  $\sin 5x$ , se obține  $\sin 5x = 1$ , deci  $x_k = \frac{(4k+1)\pi}{10}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Deoarece  $0 < \sin x < \frac{1}{2}$ , se păstrează din intervalul  $[0, 2\pi]$  numai soluțiile  $x_1 = \frac{\pi}{10}$

și  $x_2 = \pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$ . Ținând seama de periodicitatea funcției  $\sin$ , soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{\frac{\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{9\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

### § 5. Ecuații trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebră

Cîteva exemple sînt suficiente pentru a lămuri unele situații mai importante care apar atunci cînd se rezolvă asemenea ecuații.

1.  $2 \sin^2 x + \sin x + 3 = 0$ . Se notează  $\sin x = y$ . Rezultă  $2y^2 + y + 3 = 0$ . Deoarece  $\Delta = (-1)^2 - 24 = -23 < 0$  și deoarece  $\sin x$  este număr real, ecuația nu are soluții.

2.  $\cos^2 x - 5 \cos x + 6 = 0$ . Dacă  $\cos x = y$ , rezultă  $y^2 - 5y + 6 = 0$ . Deoarece  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 3$  și deoarece  $\cos x \neq 2$ ,  $\cos x \neq 3$ , ecuația nu are soluții.

3.  $2 \cos^2 t - 11 \cos t + 5 = 0$ . Dacă  $\cos t = x$ , rezultă  $2x^2 - 11x + 5 = 0$ . Așadar  $x_1 = \frac{1}{2}$  și  $x_2 = 5$ . Cum  $\cos t \neq 5$ , rezultă  $\cos t = \frac{1}{2}$  și ecuația are soluții. Deci

$$t \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

4.  $\sin^2 t - 14 \cos^2 t - 11 \sin t + 16 = 0$ . Ecuația se mai scrie  $\sin^2 t - 14(1 - \sin^2 t) - 11 \sin t + 16 = 0$ ,  $15 \sin^2 t - 11 \sin t + 2 = 0$ . Punind  $\sin t = x$ , rezultă  $15x^2 - 11x + 2 = 0$ . Deci  $x_1 = \frac{1}{3}$  sau  $x_2 = \frac{2}{5}$ . Din  $\sin t = \frac{1}{3}$  și  $\sin t = \frac{2}{5}$ , rezultă că soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k \arcsin \frac{2}{5} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

5.  $\operatorname{tg}^2 t - 3 \operatorname{tg} t + 2 = 0$ . Dacă  $\operatorname{tg} t = x$ , rezultă  $x^2 - 3x + 2 = 0$ . Deci  $x_1 = 1$  și  $x_2 = 2$ . Rezolvînd ecuațiile  $\operatorname{tg} t = 1$  și  $\operatorname{tg} t = 2$ , rezultă

$$t \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

6.  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$ . Ecuația se poate scrie sub forma  $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2}$  sau  $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 2 = 0$ . Se obține  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$  și  $\operatorname{tg} x = 2$ . Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

7.  $a \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{a+2}{2}$ ,  $a \in [2, +\infty)$ . Făcînd substituția  $\operatorname{tg} x = y$  se obține ecuația  $2y^4 - ay^2 + a - 2 = 0$ . Rezolvînd ecuația în  $y^2$  și apoi revenind la substituția făcută, rezultă  $\operatorname{tg}^2 x = 1$  sau  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{a-2}{2}$ . Deoarece  $a \in [2, +\infty)$ , rezultă că  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $\operatorname{tg} x = -1$ ,  $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a-2}{2}}$ ,  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{\frac{a-2}{2}}$ . Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii:

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-2}{2}} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-2}{2}} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

### Exerciții

Să se rezolve ecuațiile:

1.  $3 \sin^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$

2.  $2 \cos^2 x - (2a+1) \cos x + a = 0$

*Indicație.* Rezolvînd ecuația de gradul doi se obține  $\cos x = \frac{1}{2}$  sau  $\cos x = a$ . Soluțiile acestor două ecuații sînt și soluții ale ecuației date (ecuația  $\cos x = a$  are soluții dacă și numai dacă  $a \in [-1, 1]$ ).

3.  $\cos 2x + 2 \sin x - \frac{3}{2} = 0$ . 4.  $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}$ . 5.  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ .

6.  $\operatorname{tg} x + \sin 2x - 2 = 0$ .

*Indicație.* Se face substituția  $\operatorname{tg} x = y$  și se obține

$$(y-1)(y^2-y+2) = 0.$$

Rezultă

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

7.  $6 \operatorname{ctg} x + 6 \operatorname{tg} 2x + 5 = 0$ .

8.  $\sin x + 2 \cos^2 x + \frac{1}{\sin x} = 2$ ,  $\sin x \neq 0$ .



*Indicație.* Se face substituția  $\sin x = t$  și se obține

$$(t - 1)(2t^2 + t + 1) = 0.$$

Rezultă

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

$$9. \cos x + \sin^2 x + \frac{2}{1 + \cos x} = 3.$$

## § 6. Ecuații de forma $a \cos t + b \sin t + c = 0$

Presupunem că  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ . În caz contrar ecuația ar fi de tip fundamental.

Pentru rezolvarea acestei ecuații există mai multe metode. Prezentăm numai unele dintre ele.

**Metoda I.** Constă în determinarea punctelor  $F(t) = M(\cos t, \sin t)$  situate pe dreapta de ecuație  $ax + by + c = 0$ . Deoarece  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , punând  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , determinarea numerelor  $\cos t$  și  $\sin t$  se reduce la rezolvarea sistemului format din ecuațiile  $ax + by + c = 0$  și  $x^2 + y^2 = 1$ . Sistemul este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)x^2 + 2acx + c^2 - b^2 = 0, \\ y = -\frac{ax + c}{b}. \end{cases}$$

Ecuația de gradul doi în  $x$  are soluții reale dacă și numai dacă  $(ac)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 - b^2) \geq 0$  sau

$$(4) \quad a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Dacă  $a^2 + b^2 > c^2$  sistemul are două soluții distincte  $(x_1, y_1)$  și  $(x_2, y_2)$ , iar dacă  $a^2 + b^2 = c^2$  sistemul are o singură soluție  $(x_0, y_0)$ . Soluțiile ecuației se determină ținând seama de poziția punctului corespunzător fiecărei soluții pe cercul unitate  $C$ .

*Exemple.* 1.  $\cos t + 8 \sin t - 7 = 0$ . În acest caz  $a = 1$ ,  $b = 8$ ,  $c = -7$ ,  $a^2 + b^2 = 65$  și  $c^2 = 49$ . Ecuația are soluții deoarece  $a^2 + b^2 > c^2$ . Rezolvând sistemul format din ecuațiile  $x + 8y - 7 = 0$  și  $x^2 + y^2 = 1$ , unde  $x = \cos t$  și  $y = \sin t$ , se obțin soluțiile  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  și  $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ . Punctul  $M_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  este situat în cadranul I al axelor de coordonate, iar punctul  $M_2\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$  în cadranul II. Din  $\sin t = \frac{4}{5}$ , rezultă  $t \in \left\{ \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ , iar din  $\sin t = \frac{12}{13}$ , rezultă  $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{12}{13} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ . Soluțiile ecuației date sînt elementele mulțimii

$$\left\{ \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{12}{13} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

2.  $\sqrt{5} \cos t - 2 \sin t - 3 = 0$ . Avem  $a = \sqrt{5}$ ,  $b = -2$ ,  $c = -3$ ,  $a^2 + b^2 = 9$ ,  $c^2 = 9$ . Deoarece  $a^2 + b^2 = c^2$ , sistemul  $x\sqrt{5} - 2y - 3 = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ , unde  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  are singura soluție  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ . Punctul corespunzător acestei soluții este situat în cadranul IV, deci

$$t \in \left\{ -\arcsin \frac{2}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

3.  $(m^2 - n^2) \cos t + 2mn \sin t - 1 - m^2 - n^2 = 0$ . Avem  $a = m^2 - n^2$ ,  $b = 2mn$ ,  $c = -1 - m^2 - n^2$ ,  $a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)^2$ ,  $c^2 = (1 + m^2 + n^2)^2$ . Deoarece  $a^2 + b^2 < c^2$ ,  $\forall m \in \mathbf{R}$ ,  $\forall n \in \mathbf{R}$ , ecuația nu are soluții.

**Metoda II. Teoremă.** Oricare ar fi numerele reale  $t, a, b, a^2 + b^2 \neq 0$ , există numărul real unic  $\alpha \in [0, 2\pi)$  astfel ca  $a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha)$ .

*Demonstrație.* Dacă  $S = a \cos t + b \sin t$ , rezultă

$$\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t.$$

Numerele  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  și  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  reprezintă sinusul respectiv cosinusul aceluiași număr real  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$  deoarece suma pătratelor lor este egală cu 1. Așadar  $\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha \cos t + \cos \alpha \sin t = \sin(\alpha + t)$  și existența lui  $\alpha$  este demonstrată. Unicitatea lui  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$  rezultă înlocuind  $t = 0$  și  $t = \frac{\pi}{2}$  în relația  $a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha)$ .

Ca aplicație a acestei teoreme este metoda II de rezolvare a ecuației  $a \cos t + b \sin t + c = 0$ .

*Exemplu.*  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$ . Avem  $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ . Înseamnă că

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sau } \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$ . Așadar  $x_k + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  sau  $\pi - \left(x_k + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Un exemplu pentru cazul cînd ecuația nu are soluții este următorul:  $2 \sin t + 3 \cos t + 15 = 0$ . Condiția de existență a soluțiilor stabilită la metoda I arată că această ecuație nu are soluții. Folosind metoda II, ecuația



se scrie sub forma  $\sin(\alpha + t) = -\frac{15}{\sqrt{13}}$ , unde  $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$ . Deoarece  $-\frac{15}{\sqrt{13}}$  nu aparține intervalului  $[-1, 1]$  ecuația nu are soluții.

*Observații.* 1° De la caz la caz se utilizează prima sau a doua metodă în funcție de dificultatea calculului numeric.

2° Se poate utiliza o a treia metodă, făcând substituția  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$ , dacă ecuația are necunoscuta  $x$ . Prin această metodă se pot pierde eventualele soluții de forma  $x_k = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , dat fiind faptul că funcția  $\operatorname{tg}$  nu este definită pe toată mulțimea numerelor reale.

*Exemplu.*  $\cos x + 2 \sin x + 1 = 0$ . Dacă  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , atunci  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  și  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  (formulele (13) și (14) Cap. V). Ecuația se scrie succesiv  $\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 1 = 0$ ,  $t = -\frac{1}{2}$ . Din  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ , ar rezulta că mulțimea soluțiilor ecuației este  $\left\{-2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . Rezolvînd însă ecuația, de exemplu prin prima metodă, se obțin și soluțiile  $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , soluții, care prin substituția făcută au fost pierdute deoarece  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  este nedefinită pentru  $x_k = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . În concluzie, înainte de a rezolva ecuația prin această metodă se verifică dacă  $x_k = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sînt sau nu soluții ale ecuației pentru a evita pierderea lor.

3° În unele cazuri este indicat ca, după ce se găesc numerele  $\sin x$  și  $\cos x$  prin prima metodă, să se aplice formula  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  pentru a scrie soluțiile ecuației sub o formă mai potrivită. De exemplu, dacă avem ecuația

$$(2 + \sqrt{3}) \cos x - \sin x - \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) = 0,$$

utilizînd prima metodă rezultă  $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ,  $\sin x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ .

Punctul  $M\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$  este situat în cadranul IV. Deoarece

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{1}{2}$ , s-ar părea că soluțiile ecuației sînt elementele

mulțimii  $\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . În realitate, deoarece  $\cos x > 0$  și

$\sin x < 0$  și deoarece  $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$ , soluțiile ecuației se obțin din so-

luția particulară  $2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$  a ecuației  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$  pentru  $k = 4$ .

Deci

$$x \in \left\{\frac{23\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

### Exerciții

Să se rezolve ecuațiile:

1.  $2 \cos t - \sin t + 2 = 0$ .
2.  $(\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \cos t - \sin t + 1 = 0$ .
3.  $\cos t + \sin t + \sqrt{2} = 0$ .
4.  $5(4 + \sqrt{21}) \cos t - 5 \sin t + 8 + 3\sqrt{21} = 0$ .
5.  $\sqrt{3} \cos t - \sin t - 2 = 0$ .
6.  $\sqrt{3} \cos t - \sin t - \sqrt{3} = 0$ .

### Aplicații

1. Să se reprezinte grafic funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 2x.$$

*Soluție.* Funcția este periodică de perioadă principală  $\pi$ . Într-adevăr din  $\sin 2(x + T) = \sin 2x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , punînd  $2x = y$ , se obține  $\sin(y + 2T) = \sin y$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ . Deci, dacă  $T$  este perioadă pentru  $f$ ,  $2T$  este perioadă pentru  $\sin$ . Funcția  $\sin$  avînd perioada principală  $2\pi$ , funcția  $f$  are perioada principală  $\pi$ .

Funcția  $f$  are amplitudinea egală cu 1. Punctele de pe grafic care sînt de ordonată maximă 1 au abscisele  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Graficul lui  $f$  se obține din graficul funcției  $\sin$  printr-o contracție de-a lungul axei absciselor. În figura VI.15 este reprezentat acest grafic.

*Observație.* Mișcarea oscilatorie armonică simplă este descrisă complet cu ajutorul unui model matematic implicînd mișcarea circulară uniformă. Pot fi considerate cu aproximație mișcări armonice simple următoarele: mișcarea geamandurii în apă în sus și în jos, pistonul unui motor cu combustie internă, particula de aer în timpul trecerii unei unde sonore simple etc. Toate acestea și multe altele cer schițarea graficului unei funcții de forma

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \cos(\omega x + b), \omega \neq 0,$$

unde  $a$  este amplitudinea,  $\omega$  se numește pulsație, iar  $b$  se numește fază inițială. Perioada principală a acestei funcții este  $\frac{2\pi}{|\omega|}$ .

2. Să se arate că funcția

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin 6x + \cos 15x$$

este periodică și are perioada principală  $\frac{2\pi}{3}$ .

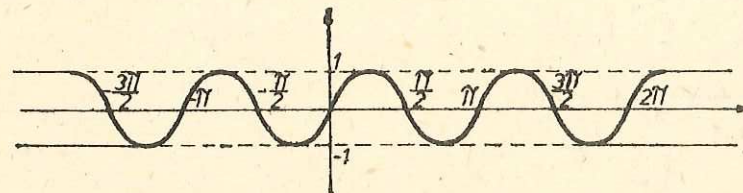


Fig. VI.15



**Soluție.** Fie  $T$  o perioadă. Atunci

$$\sin 6(x + T) + \cos 15(x + T) = \sin 6x + \cos 15x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În particular, pentru  $x = 0$  și respectiv pentru  $x = \frac{\pi}{9}$  se obține

$$\begin{cases} \sin 6T + \cos 15T = 1 \\ \sin 6T - \cos 15T = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 6T = 0 \\ \cos 15T = 1. \end{cases}$$

Din  $\sin 6T = 0$ , rezultă  $T = \frac{k'\pi}{6}$ ,  $k' \in \mathbb{Z}$ , iar din  $\cos 15T = 1$ , rezultă

$$T = \frac{2k''\pi}{15}, \quad k'' \in \mathbb{Z}. \text{ Prin egalare se obține } k' = \frac{4k''}{5}. \text{ Deoarece } k' \in \mathbb{Z},$$

rezultă  $k'' = 5k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Așadar  $T = \frac{2k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Rezultă că orice pe-

rioadă a funcției  $g$  este un număr de forma  $\frac{2k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Să arătăm că toate numerele de această formă sînt perioade:

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{2k\pi}{3}\right) &= \sin 6\left(x + \frac{2k\pi}{3}\right) + \cos 15\left(x + \frac{2k\pi}{3}\right) = \\ &= \sin(6x + 6k\pi) + \cos(15x + 10k\pi) = \\ &= \sin 6x + \cos 15x = g(x). \end{aligned}$$

Perioada principală este  $\frac{2\pi}{3}$ .

**3.** Să se reprezinte grafic funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \cos x + \sin x$ .

**Soluție.** Pentru a localiza punctul  $(x, \cos x + \sin x)$  se adună ordonatele punctelor  $(x, \cos x)$  și  $(x, \sin x)$  pentru fiecare valoare a lui  $x$ . În figura VI.16 se poate observa cum se obțin punctele graficului funcției  $h$  din graficele funcțiilor  $\sin$  și  $\cos$ , iar în figura VI.17 este trasat graficul funcției  $f$  pentru  $x \in [0, 2\pi]$ . Perioada principală a acestei funcții fiind  $2\pi$ , pentru a obține cit dorim din graficul ei se reproduce în lungul axei absciselor graficul din figura

VI.17. Aceeași figură ne indică faptul că  $\max h = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ , iar

$$\min h = h\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}. \text{ Într-adevăr, din } h(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ rezultă că amplitudinea acestei}$$

funcții este  $\sqrt{2}$ , adică  $\frac{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})}{2}$ .

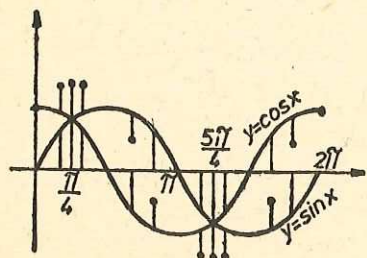


Fig. VI.16

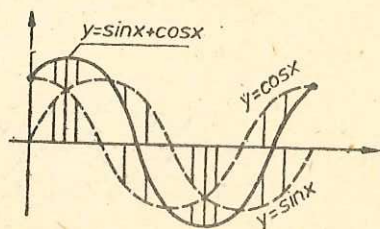


Fig. VI.17

**Observație.** Balansarea pendulei, oscilațiile dintr-un circuit electric, vibrațiile corzilor vioarei sau ale altor instrumente muzicale generatoare de unde sonore, mișcările electronilor în atomi și multe alte fenomene fizice și biologice pot fi descrise, cel puțin în parte, prin funcții de forma

$$H_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

$$H_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_2(x) = H_1(x) + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x,$$

$$H_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_3(x) = H_2(x) + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x$$

și celelalte, funcții ale căror grafice se pot schița ca în cazul funcției  $h$ .

**4.** Să se reprezinte grafic funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{3} \sin 4x - 8 \sin^2 x \cos^2 x.$$

**Soluție.** Deoarece  $8 \sin^2 x \cos^2 x = 2(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) = 2(1 - \cos^2 2x) = 2 - 2 \cos^2 2x = 2 - (1 + \cos 4x) = 1 - \cos 4x$ ,  $f(x)$  se scrie sub forma  $f(x) = \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x - 1$ .

$$\text{Deci } f(x) = 2\left(\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x\right) - 1 =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos 4x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 4x\right) - 1 = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

Amplitudinea funcției este

$$\frac{\max f - \min f}{2} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2.$$

Funcția este periodică. Într-adevăr, dacă  $T$  este o perioadă, din

$$2 \cos\left[4(x + T) - \frac{\pi}{3}\right] - 1 = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ și din } 4x - \frac{\pi}{3} = y, \text{ rezultă}$$

$$\cos(y + 4T) = \cos y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Perioada principală a funcției  $\cos$  fiind  $2\pi$ , rezultă că perioada principală a funcției  $f$  este  $\frac{\pi}{2}$ .

Se figurează mai întâi punctele ale căror coordonate sînt trecute în tabelul:

$x$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	1	0	-2	-3	-2	0

Graficul funcției pentru  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  este trasat în figura VI.18.

### Exerciții

**7.** Să se determine perioada principală a funcțiilor:

a)  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = \sin 5x$ ,

b)  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \cos \frac{x}{5}$ ,

c)  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_3(x) = \sin 35x + \cos 42x$ .

**8.** Să se arate că funcția

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sin 4x + \cos \sqrt{2}x$  nu este periodică.

**9.** Să se reprezinte grafic funcția

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 4 \sin x \cos x - 4\sqrt{3} \cos^2 x + 2\sqrt{3} - 3$ .

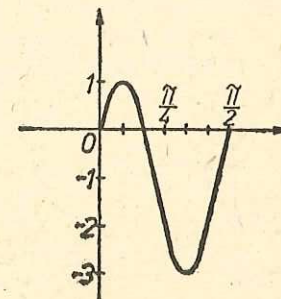


Fig. VI.18



## Probleme recapitulative

1. Fie  $A$  și  $B$  două puncte distincte,  $M$  un punct situat pe dreapta  $AB$  și numărul real  $a \geq \frac{1}{2} AB$ . Să se arate că există un singur punct  $M \in AB$  astfel ca  $AM = a$  și  $AM \geq BM$ . Să se studieze și cazul  $0 < a < \frac{1}{2} AB$ .

2. Să se arate că punctele  $A, B, C$  sînt coliniare dacă și numai dacă

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0,$$

unde s-a notat  $a = BC, b = CA, c = AB$ .

3. Dacă  $A, B, C, D$  sînt patru puncte coliniare și  $F, G, H, I$  sînt respectiv mijloacele segmentelor  $(AB), (BC), (CD), (DA)$ , atunci segmentele  $(FH)$  și  $(IG)$  au același mijloc.

4. Se consideră o dreaptă  $d$  și un punct  $A$  nesituat pe dreapta  $d$ . Din  $A$  se duce  $AB \perp d (B \in d)$  și oblicile  $(AM)$  și  $(AN)$  astfel ca  $M$  să fie mijlocul segmentului  $(BN)$

$(B, M, N, \in d)$ . Să se arate că  $\widehat{BAM} > \widehat{MAN}$ .

5\*. Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$ . Dacă  $D$  este piciorul înălțimii duse din vîrfurile  $A$ , să se arate că punctul  $D$  este între punctele  $B$  și  $C$ .

6\*. Fie  $AM$  o mediană în triunghiul  $ABC$ . Dacă  $(AB) < (AC)$ , să se arate că  $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$ .

7\*. Să se arate că punctul de intersecție al diagonalelor unui patrulater convex este acel punct din plan ale cărui distanțe la cele patru vîrfuri ale patrulaterului au suma minimă. Rămîne valabilă această proprietate pentru un patrulater concav?

8\*. Fie  $ABC$  un triunghi, iar  $O$  un punct din planul triunghiului. Dacă punctele  $B$  și  $C$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $AO$ , iar punctele  $C$  și  $A$  de o parte și de alta a dreptei  $OB$ , atunci  $A$  și  $B$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $OC$ .

9. Fie  $O$  un punct în interiorul triunghiului  $ABC$ . Dreptele  $BO$  și  $CO$  intersectează  $AC$  și  $AB$  în  $D$  respectiv  $E$ . Știind că unghiul  $\widehat{BAC}$  este obtuz, să se arate că

$$BD + CE > BE + ED + DC.$$

10. Fie  $(AD)$  cea mai mare, iar  $(BC)$  cea mai mică latură a patrulaterului convex  $ABCD$ . Să se arate că:

$$\widehat{ABC} > \widehat{ADC} \text{ și } \widehat{BCD} > \widehat{BAD}.$$

11. Se dă un triunghi  $OAB$ , un punct  $C$  pe semidreapta opusă lui  $(OA)$  și un punct  $D \in (OB)$ . Să se demonstreze că semidreapta  $(CD)$  și segmentul  $(AB)$  au un punct comun.

12. Fie  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{A'O'B'}$  unghiuri opuse la vîrf ( $O \in (AA')$ ),  $C \in \text{Int } \widehat{A'O'B'}$ ,  $D \in (OA)$  și  $P \in CD$ . Să se arate:

$$P \in \text{Int } \widehat{AOB} \Leftrightarrow D \in (CP).$$

13\*. Să se arate că două diagonale oarecare ale unui pentagon convex, considerate ca segmente închise, au un punct comun.

14. Să se arate că două triunghiuri dreptunghice care au respectiv înălțimile și medianele corespunzătoare unghiurilor drepte congruente, sînt congruente.

15. Se consideră trapezul  $ABCD$  ( $(AB)$  baza mare,  $(CD)$  baza mică) și se notează cu  $O$  intersecția diagonalelor, iar cu  $E, F$  punctele în care paralela prin  $O$  la baze intersectează respectiv pe  $AD$  și  $BC$ . Pe bazele trapezului se construiesc în exterior pătratele  $AA'B'B$  și  $CC'D'D$ . Să se demonstreze că:

- dreptele  $A'B'$  și  $B'D'$  conțin punctul  $O$ ,
- dreptele  $A'D'$  și  $B'C'$  conțin respectiv punctele  $E$  și  $F$ .

16. Prin vîrfurile  $C$  al triunghiului  $ABC$ , se construiesc o dreaptă  $d_1$  care nu mai are alte puncte comune cu triunghiul și se notează cu  $A_1, B_1, G_1$  proiecțiile pe dreapta  $d_1$ , respectiv ale punctelor  $A, B, G$  unde  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . Să se arate că:

- $AA_1 + BB_1 = 3GG_1$ ,
- dacă  $d_2$  este o dreaptă ce nu are nici un punct comun cu triunghiul  $ABC$  iar  $A_2, B_2, C_2, G_2$  sînt proiecțiile pe  $d_2$  respectiv ale punctelor  $A, B, C, G$  atunci:

$$AA_2 + BB_2 + CC_2 = 3GG_2.$$

17. Un trapez dreptunghic în care distanța dintre baze este medie proporțională între lungimile bazelor este ortodiagonal (diagonalele sînt perpendiculare).

18\*. Într-un triunghi isoscel  $ABC$  ( $(AB) \equiv (AC)$ ),  $AB > BC$  se construiesc înălțimea  $AD$ ,  $D \in BC$  și bisectoarea  $BE$ ,  $E \in (AC)$ . Dreptele  $AB$  și  $DE$  se intersectează în  $F$ . Să se arate că

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AB - BC}{AB + BC}.$$

19\*. Pe laturile triunghiului  $ABC$  se construiesc, cu vîrfurile în exterior, triunghiurile  $ADB, BEC$  și  $CFA$  astfel încît

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k \text{ și } m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{CFA}) = \alpha$$

Să se demonstreze că:

i) mijloacele  $M, N, P, O$  ale segmentelor  $(AC), (DC), (BC)$  și  $(EF)$  sînt vîrfurile unui paralelogram.

ii) în acest paralelogram două unghiuri au măsura  $\alpha$  și raportul lungimilor a două laturi este  $k$ .

*Indicație.*  $S$  și  $T$  fiind mijloacele segmentelor  $(CE), (CF)$ , se va arăta că triunghiurile  $SPO$  și  $TOM$  sînt asemenea cu  $CBA$ .

20\*. Se dau punctele  $A$  și  $B$ . Să se construiască un pătrat pe ale cărui laturi să se afle punctele  $A, B$  și suma distanțelor de la punctul  $A$  la vîrfurile pătratului să fie minimă.

21. Fie  $M$  un punct în interiorul sau exteriorul unui cerc. Notăm cu  $(AB)$  diametrul ce trece prin  $M (M \in (OA))$ . Să se demonstreze că pentru orice punct  $N$  al cercului, distinct de  $A$  și de  $B$  avem:  $MA < MN < MB$ .



22. Fie  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $\mathcal{C}(O', r')$  două cercuri tangente în  $A$ ; o dreaptă  $h$  care conține pe  $A$  mai taie cercurile respectiv în  $B$  și  $B'$ . Să se demonstreze că dreptele  $OB$  și  $O'B'$  sînt paralele.

23. Fie  $\mathcal{C}$  și  $\mathcal{C}'$  două cercuri tangente în  $A$ ,  $h$  tangenta comună la  $\mathcal{C}$  și  $\mathcal{C}'$  care conține pe  $A$ ;  $M$  fiind un punct al lui  $h$ , diferit de  $A$ , cercul de centru  $M$  și rază  $MA$  taie pe  $\mathcal{C}$  în  $A$  și  $B$ , iar pe  $\mathcal{C}'$  în  $A$  și  $B'$ . Să se demonstreze că dreptele  $MB$  și  $MB'$  sînt respectiv tangente la  $\mathcal{C}$  și  $\mathcal{C}'$ .

24. Într-un cerc se înscrie triunghiul isoscel  $ABC$  cu  $(AB) \equiv (AC)$ . Două drepte ce trec prin  $A$  intersectează latura  $(BC)$  în  $M$  și  $N$  și cercul în  $M'$  și  $N'$ . Să se arate că patrulaterul  $MM'N'N$  este inscriptibil.

25. Se dă cercul cu centrul în  $O$  și diametrul  $(AB)$  care se prelungește cu  $(BC) \equiv (OA)$  ( $AC = 3OA$ ). Perpendiculara în mijlocul lui  $(AC)$  taie cercul în  $D$  și  $D'$ . Să se arate că  $CD$  este tangentă la cerc.

26. Fie  $A$  un punct fix, iar  $P$  un punct variabil al unui cerc. Să se afle locul geometric al punctului  $M$  de intersecție a bisectoarei unghiului  $\widehat{POA}$  cu cercul circumscris triunghiului  $POA$ .

27\*. Trei cercuri congruente care au un punct comun  $H$ , se mai intersectează două câte două în punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$ . Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului  $ABC$  este congruent cu cercurile date („problema piesei de 5 lei a lui Gh. Țițeica“).

28. Virfurile  $B$  și  $C$  ale triunghiului  $ABC$  sînt fixe și  $m(\widehat{BAC})$  este constantă. Să se afle locul geometric al proiecției  $M$  al ortocentrului triunghiului  $ABC$  pe mediana  $(AD)$ .

29. În patrulaterul inscriptibil  $ABCD$  are loc relația  $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$  (Teorema lui Ptolemeu).

30. Se dau cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ . Fie  $CD$  o tangentă comună exterioară,  $C$   $D$  fiind punctele de tangență. Să se demonstreze că cercul de diametru  $CD$  intersectează dreapta  $O_1O_2$  dacă și numai dacă cercurile  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  sînt exterioare.

31. Se dau punctele  $A(1 - a, 1 + a)$ ,  $B(5 - a, 1 + 5a)$ ,  $C(1 - 5a, 5 + a)$ ,  $D(5 - 5a, 5 + 5a)$ . Să se arate că segmentele  $(AD)$  și  $(BC)$  sînt congruente și să se explice geometric acest rezultat.

32. Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului determinat de dreptele  $y = 2x$ ,  $y = 10x$ ,  $y = ax + b$ ,  $a \neq 2$ ,  $a \neq 10$ ,  $b \neq 0$ . Să se verifice că mediatoarele acestui triunghi sînt concurente.

33. Să se determine numerele reale  $t \in (0, 6\pi)$ , astfel ca  $F(t) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

34. Să se determine numerele reale  $t$  astfel ca:

a)  $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,                      b)  $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

c)  $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,                      d)  $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

35 Să se reprezinte grafic funcțiile:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4 \sin x$ ,  
 b)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sin x - |\sin x|$ ,  
 c)  $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i(x) = 2 \cos x - |\cos x|$ ,  
 d)  $j: \mathbb{R} \rightarrow \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$   $j(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ ,  
 e)  $k: \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(x) = \sin x + 2 \cos x$ ,  
 f)  $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $l(x) = \max(\sin x, \cos x)$ .

36. Dacă  $\operatorname{tg} x = \frac{2}{5}$ , să se calculeze:  $\sin 2x$ ,  $\cos 4x$ ,  $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ .

37. Să se verifice identitățile:

a)  $\cos a + \sqrt{3} \sin a = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$ ,

b)  $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{ctg}(a + b) = 1$ ,

c)  $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a = 2 \frac{3 + \cos 4a}{1 - \cos 4a}$ ,

d)  $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2}}{1 + \cos \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{4}}{1 + \cos \frac{a}{4}} = \operatorname{tg} \frac{a}{8}$ .

38. Să se transforme în produs:

a)  $\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) + \cos(b + c - a)$ ,

b)  $1 + \cos a + \cos 2a$ , c)  $1 + \cos a + \sin a$ , d)  $1 - \sin a - \cos 2a$ .

39. Să se calculeze:

a)  $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$ ,

b)  $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$ ,

c)  $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$ ;

d)  $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12}$ .

40. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $\sin 2x = \cos^2 x$ ,                      b)  $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 2x$ ,

c)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$ ,                      d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ .

e)  $4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cos x - 3 \sin x - 1 = 0$ .

41. Să se discute și să se rezolve ecuațiile:

a)  $\cos 2x + (2m - 1) \sin x + m - 1 = 0$ ,

b)  $m \cos x - (m + 1) \sin x - m = 0$ ,

c)  $3m \sin 2x + (m - 1) \cos 2x - 1 = 0$ .

42. După ce se aduc la forma  $a \cos 2x + b \sin 2x + c = 0$  să se rezolve și să se discute, atunci cînd este cazul, ecuațiile:

a)  $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0$ ,

b)  $2\sqrt{3} \sin^2 x + 8 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 5 = 0$ ,

c)  $\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 2 = 0$ ,

d)  $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = m$ ,

e)  $4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = m$ .



*Indicație.* Deoarece  $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ ,  $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ ,  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ , ecuația se scrie sub forma  $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = m - 3$ . Deci  $\cos 2x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin 2x = m - 3$ . Se obține  $\cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{m - 3}{2}$ . Ecuația are soluții dacă și numai dacă  $1 \leq m \leq 5$ .

43. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $4 \sin t \cos t - 2(\sin t + \cos t) + 1 = 0$ .

*Soluție.* Dacă  $\sin t + \cos t = x$ , atunci  $\sin t \cos t = \frac{x^2 - 1}{2}$ . Deci  $4 \frac{x^2 - 1}{2} - 2x + 1 = 0$ . Ecuația  $2x^2 - 2x - 1 = 0$  are soluțiile  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  și  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ . Revenind la substituție, din  $\sin t + \cos t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , rezultă  $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos t = \frac{1}{2}$  sau  $\sin t = \frac{1}{2}$ ,  $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . De asemenea, din  $\sin t + \cos t = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ , rezultă  $\cos t = \frac{1}{2}$ ,  $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , sau  $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin t = \frac{1}{2}$ .

Soluțiile ecuației sînt elementele mulțimii

$$\left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

b)  $25 \sin t \cos t - 35(\sin t + \cos t) + 37 = 0$ .

c)  $\sin^3 t + \cos^3 t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

*Indicație.* Din  $\sin^3 t + \cos^3 t = 1$ , rezultă  $(\sin t + \cos t)^3 - 2 \sin t \cos t = 1$  sau  $2 \sin t \cos t = (\sin t + \cos t)^3 - 1$ . Se face substituția  $\sin t + \cos t = x$  și se obține  $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$  sau  $(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x - 1) = 0$

d)  $\sin^3 t + \cos^3 t + \sin t \cos t = \frac{5}{16}$ .

*Indicație.* Ecuația se scrie sub forma

$(\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) + \sin t \cos t = \frac{5}{16}$ . Dacă  $\sin t + \cos t = x$  se obține

$(2x - 1)(8x^2 - 4x - 26) = 0$ , cu soluțiile  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{53}}{4}$ ,  $x_3 = \frac{1 - \sqrt{53}}{4}$ .

Deoarece  $\sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right)$ , rezultă  $x \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ . Singura soluție situată în acest interval este  $x_1$ . Soluțiile ecuației rezultă deci din rezolvarea ecuației  $\sin t + \cos t = \frac{1}{2}$ .

44. Se dau punctele  $M \left( \frac{a\sqrt{3} - a}{2}, \frac{3a - a\sqrt{3}}{2} \right)$  și  $N \left( \frac{a - a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3} - a}{2} \right)$ .

Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului  $OMN$ , unde  $O$  este originea axelor de coordonate.

45. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului determinat de dreptele de ecuații:

$$2x - y + 3 = 0, \quad 5x + y - 2 = 0, \quad y = 1.$$

46. Fie  $P$  punctul de intersecție al dreptelor  $d'$  și  $d''$  de ecuații  $x + 4y - 5 = 0$  și  $2x + 5y - 7 = 0$ . Dacă  $M \in d'$  și  $N \in d''$  sînt două puncte de abscise mai mari decît abscisa lui  $P$ , să se calculeze numărul  $t = \mu(\widehat{MPN})$ .

*Indicație.* Punctul  $P$  are coordonatele  $(1, 1)$ . Numărul  $t$  nu depinde de poziția punctelor  $M$  și  $N$  respectiv pe cele două drepte. Luînd ca puncte  $M$  și  $N$  punctele de intersecție ale celor două drepte cu axa absciselor, din triunghiul  $MNP$  se obține  $t = \operatorname{arctg} \frac{3}{22}$ .



## Indicații și răspunsuri

### Capitolul I

#### § 2.

2. Dacă am avea  $AB = BC$ , ar rezulta că  $A, B, C \in AB$  în contradicție cu ipoteza; în mod analog nici  $AB = AC$ , nici  $AC = BC$  nu este posibil.  
 4. 8; dacă  $A \in DE$ , șase drepte sînt distincte.  
 5. Nu. Se ține seama de exerc. 4.

#### § 3.

1. Nu, căci  $AB = 4 \neq |x_B - x_A| = 3$ .  
 2.  $AB = 5, AC = 12, BC = 7$ .  
 3. a)  $x_B = -2$ , b)  $x_C = 5$ .  
 4.  $x_M = 2, x_N = 3$ .  
 5.  $x_M = 2, x_N = 6$ .

#### § 4.

9. Alegem un sistem de coordonate pe  $AB$  astfel ca  $x_A < x_B$ . Atunci  $x_A < x_C < x_B$  și  $x_A < x_D < x_C$ , din care rezultă  $x_A < x_D < x_C < x_B$ .  
 10. Fie  $D$  un punct oarecare pe  $(AC)$ . Atunci din exerc. 9 rezultă că  $D \in (AB)$ .  
 13. Fie  $(AB)$  un segment,  $x_A = 0, x_B = b > 0$ . Punctele cu abscisele  $\frac{b}{2}, \frac{b}{3}, \dots, \frac{b}{n}$ , ... aparțin segmentului  $(AB)$ .

#### § 5.

3.  $d$  separă  $B, A$  și nu separă  $A, C$ , deci separă  $B, C$ . Pe de altă parte separă  $C, D$ , așadar conform teoremei 1 nu separă  $B, D$ .  
 4. Nu.  
 5. Fie  $M \in (AB)$  și să presupunem că  $M \notin S$ . Atunci există  $N \in [AM] \cap d$ ; dar  $N \in (AB)$  (§ 4, exerc. 9), ceea ce este în contradicție cu  $A, B \in S$ . Așadar  $(AB) \subset S$  și  $[AB] \subset S$ .

8. Deosebim cazurile: a)  $d$  este inclusă în semiplanul  $S$  sau în cel opus  $S'$ ; atunci intersecția este  $d$  sau  $\emptyset$ ; b)  $d$  are un punct în  $S$  și un punct în  $S'$ ; atunci  $d$  intersectează frontiera lui  $S$  și se aplică exerc. 7.

10. Se deduce că  $C$  și  $C'$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $BB'$ , deci  $(CC') \cap (BB') = \{Q\}$ . Se va arăta că  $Q \in (BB')$ .

#### § 6.

3. Fie  $S$  un semiplan deschis limitat de dreapta  $d$ .  $P, Q \in S$  implică  $(PQ) \subset S$  (§ 5, exerc. 5), deci  $S$  este o mulțime convexă. Pentru a arăta că  $\bar{S} = S \cup d$  este o mulțime convexă se consideră cazurile: 1°  $P, Q \in d$ , atunci evident  $(PQ) \subset d \subset \bar{S}$ ; 2° Dacă  $P, Q \in S$ , precum am văzut,  $(PQ) \subset S \subset \bar{S}$ ; 3°  $P \in d, Q \in S$ , atunci conform exercițiului 6, § 5  $(PQ) \subset S \subset \bar{S}$ .

4. a) Fie  $b = AB, c = AC$ ; avem  $(BC) \subset (bC)$  și  $(BC) \subset (cB)$  (§ 5, exerc. 6), deci  $(BC) \subset (bC \cap cB = \text{Int } \widehat{BAC})$ . b) Se aplică exerc. 7, § 5.

11. Conform exercițiului 10 avem  $AP \cap [BC] = \{A'\}$  și  $P \in (AA')$ . Se aplică corolarul teoremei 1, § 5 triunghiurilor  $ABA'$  și  $AA'C$ .

12. Dreapta  $BB'$  taie segmentul  $(AC)$  într-un punct  $P$  și  $P \in \text{Int } \widehat{AOC}$  (vezi exerc. 4a). Cum  $O \notin AC$ , avem  $P \in (OB)$  sau  $P \in (OB')$  și se aplică exerc. 4b).

13. Fie  $A'B'$  astfel ca  $O \in (AA'), O \in (BB')$ . Cazurile  $Q \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$ ,  $Q \in \text{Int } \widehat{AOB'}$ ,  $Q \in (OA')$ ,  $Q \in (OB')$  se rezolvă ușor. Fie  $Q \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$ . Atunci există  $\{R\} = AA' \cap (PQ)$  și  $\{R_1\} = BB' \cap (PQ)$ . Dacă am avea  $R \in (OA')$  și  $R_1 \in (OB')$ , atunci întreaga mulțime  $\text{Int } \widehat{AOB'}$  s-ar găsi de aceeași parte a dreptei  $RR_1$ , ceea ce este imposibil deoarece  $P \in RR_1$ .

14. Deoarece patrulaterul este convex,  $C \in \text{Int } \widehat{BAD}$ . Din teorema transversalei rezultă că există  $\{O\} \in (AC \cap (BD))$ . Folosind același raționament cu alt vîrf se deduce că  $O \in (AC)$ .

15. Fie  $\{O\} = [AC] \cap [BD]$ . Cum  $(OC) \cap AB = \emptyset$  și  $(OD) \cap AB = \emptyset$ , punctele  $C$  și  $D$  sînt de aceeași parte a dreptei  $AB$ . La fel se arată proprietatea analogă pentru dreptele  $BC, CD$  și  $DA$ .

16. Fie  $I$  intersecția considerată. Este clar că  $\text{Int } P \subset I$ ; iar din convexitatea poligonului rezultă că  $P \subset I$ , așadar  $\text{Int } P \cup P \subset I$ . Pentru a demonstra incluziunea contrară se ia un punct  $M \in I$ . Dacă  $M$  nu aparține suportului unei laturi evident  $M \in \text{Int } P$ . Dacă  $M \in P_k P_{k+1}$ , unde  $[P_k P_{k+1}]$  este o latură a lui  $P$ , atunci  $\hat{M}$  și  $P_{k+1}$  sînt de aceeași parte a dreptei  $P_{k-1} P_k$  sau  $M = P_k$ , deci  $M \in [P_k P_{k+1}]$  și analog  $M \in [P_{k+1} P_k]$ , deci  $M \in [P_k P_{k+1}] \subset P$ .

17. Se folosește exerc. 17 și Teorema 1.

18. Avem  $P_{n+1} \notin (dP_1)$  și  $P_1 \in (dP_1)$ . Fie  $k$  cel mai mic indice pentru care  $P_k \notin (dP_1)$ . Atunci  $k \geq 2$  și  $[P_{k-1} P_k] \cap d \neq \emptyset$ .



19. Presupunind că  $d$  are în comun cu poligonul dat punctele distincte  $A, B, C$ , unul dintre aceste puncte este situat între celelalte două, de exemplu  $B \in (AC)$ . Punctul  $B$  se află pe o latură  $[P_k P_{k+1}]$  a poligonului și din ipoteză rezultă că  $[P_k P_{k+1}] \not\subset d$ . Așadar  $d \cap [P_k P_{k+1}] = \{B\}$  și  $(AC) \cap P_k P_{k+1} = \{B\}$ , deci  $A$  și  $C$  sînt de o parte și de alta a lui  $P_k P_{k+1}$ , ceea ce nu e posibil la un poligon convex.

20. Notind  $d = P_2 P_n$ , avem  $[P_3 P_4] \cap d = \emptyset$ , căci altfel  $d$  ar avea trei puncte comune cu poligonul, în contradicție cu exerc. 20. Rezultă că  $P_4 \in (d P_3)$  și la fel  $P_5 \in (d P_4) = (d P_3)$  etc. Așadar punctele  $P_3, P_4, \dots, P_{n-1}$  se găsesc de aceeași parte a lui  $P_2 P_n$ .

### § 7.

1. Nu.

2. a), b).

5.  $m(\widehat{AOB'}) = 180^\circ - m(\widehat{AOB})$ ,  $m(\widehat{B'OC}) = 180^\circ - m(\widehat{BOC})$ , deci din  $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) < 180^\circ$  se obține:

$$360^\circ - m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{BOC}) < 180^\circ \text{ și } m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) > 180^\circ$$

în contradicție cu ipoteza. Rezultă că  $(OB \subset \text{Int } \widehat{AOC})$ .

### § 8.

3. Fie  $(AB) > (CD)$ , adică  $AB > CD$ . Există un punct unic  $M \in (AB)$  astfel ca  $AM = CD$ . Dacă am avea  $B \in [AM]$ , ar rezulta  $CD = AM = AB + BM > AB$  în contradicție cu ipoteza. Deci  $M \in (AB)$ . Reciproca rezultă ușor.

12. Se construiește semidreapta  $(OM$  în semiplanul limitat de  $OA$  și conținnd  $B$  în așa fel încît  $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$  și se folosește teorema semidreptei interioare unui unghi.

14.  $m(\widehat{DOC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AOC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{COB}) = m(\widehat{COE})$  și  $m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{COE}) = 2m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{AOC}) < 180^\circ$ ; ținînd seama și de faptul că  $D$  și  $E$  sînt de o parte și de alta a lui  $OC$ , din exerc. 5 § 7 rezultă că  $(OC \subset \text{Int } \widehat{DOE})$ , ceea ce împreună cu  $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{COE})$  demonstrează că  $(OC$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{DOE}$ .

15. Fie unghiurile opuse la vîrf  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{A'OB'}$  ( $O \in (AA')$ ),  $[OC$  bisectoarea unghiului  $\widehat{AOB}$  și  $[OD$  semidreapta opusă cu  $[OC$ . Se deduce ușor că  $(OD \subset \text{Int } \widehat{A'OB'})$ .  $\widehat{A'OD} \equiv \widehat{AOC} \equiv \widehat{COB} \equiv \widehat{DOB'}$ , deci  $[OD$  este bisectoarea lui  $\widehat{A'OB'}$ . Deoarece prin ipoteză  $[OD$  și  $[OC$  sînt opuse, proprietatea este demonstrată.

18. Dacă  $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ , rezultatul este imediat. Tratăm cazul în care  $B \in \text{Int } \widehat{AOA'}$  și  $B, A', B'$  se găsesc de aceeași parte a lui  $OB$ ; celelalte cazuri revin ușor la acesta. Avem  $B \in \text{Int } \widehat{AOA'}$ , deci  $\widehat{BOA'} < \widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'}$  și de aici se deduce că  $(OA' \subset \text{Int } \widehat{BOB'})$ . Cu ajutorul axiomei U.3 se obține  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$ .

### § 9.

7. Deoarece pentagonul este convex,  $A$  și  $D$  sînt de aceeași parte a lui  $BC$  și  $A, B$  de aceeași parte a lui  $CD$ , deci  $(CA \subset \text{Int } \widehat{BCD})$  și analog  $(DA \subset \text{Int } \widehat{CDE})$ . Rezultă că  $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BCD}) - m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{CDE}) - m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{EDA})$ , adică  $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EDA}$ .

10. Conform exerc. 10, § 5  $(BE) \cap (CD) = \{M\}$ . Se arată succesiv  $BD = CE$ ,  $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$ ,  $\widehat{DCB} \equiv \widehat{ECB}$ ,  $(BM) \equiv (CM)$ ,  $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ ,  $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ .

11. Se demonstrează pe rînd:  $(CD) \cap AB = \{O\}$ ,  $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ ,  $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$  (L.L.L.),  $\triangle ACO \equiv \triangle BDO$  (U.L.U.),  $(AO) \equiv (BO)$ .

12.  $\triangle AOB \equiv \triangle A'OB'$ ,  $\triangle BOC \equiv \triangle B'OC'$ ,  $\triangle COA \equiv \triangle C'OA'$ , deci  $(AB) \equiv (A'B')$ ,  $(BC) \equiv (B'C')$ ,  $(CA) \equiv (C'A')$  și  $\widehat{OCA} \equiv \widehat{OC'A'}$ ,  $\widehat{OCB} \equiv \widehat{OC'B'}$ . Deoarece punctele  $A, B, C$  nu sînt coliniare  $\widehat{OCA} \not\equiv \widehat{OCB}$ . Rezultă  $\widehat{OC'A'} \not\equiv \widehat{OC'B'}$ , din care se deduce că  $A', B', C'$  nu sînt coliniare.  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$  pe baza teoremei L.L.L.

### § 10.

1. Presupunind contrariul se ajunge la o contradicție cu teorema 1.

2. Se folosește teorema 1.

4. Deoarece  $(AC \subset \text{Int } \widehat{MAN})$  (de ce?),  $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{CAN})$  și cum  $(AB \subset \text{Int } \widehat{MAC})$ , avem  $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAN})$ . În continuare, se folosește teorema 1 pentru triunghiurile  $ABM$  și  $ACN$ .

5. Fie  $\widehat{hk} \equiv \widehat{MAN}$ ; pe segmentul  $(MN)$  se iau două puncte  $B, C$  astfel încît  $m(\widehat{BAC}) < m(\widehat{pq})$ .

Triunghiului  $ABC$  i se aplică exerc. 4.

7. Se folosește exerc. 3.

8.  $m(\widehat{ABM}) > m(\widehat{ACM}) > m(\widehat{MDC})$  (de ce?);  $MA'$  fiind semidreapta opusă lui  $(MA)$ , arătați că  $MD \subset \text{Int } \widehat{A'MC}$  și  $m(\widehat{BMA}) = m(\widehat{A'MC}) > m(\widehat{CMD})$ .

11. Fie  $P' = AP_1 P_2 \dots P_n B$  și  $P'' = AQ_1 Q_2 \dots Q_m B$  cele două poligoane convexe. Deoarece  $P_1 \in \text{Int } \widehat{BAQ_1}$ , punctele  $B$  și  $Q_1$  sînt de o parte și de alta a lui  $AP_1$ , prin urmare folosind exerc. 18, § 6, dreapta  $AP_1$  intersecționează linia poligonală  $Q_1 Q_2 \dots Q_m B$  într-un punct  $R_1$ ,  $R_1 \in [Q_k Q_{k+1}]$ . Conform exerc. 10,  $AP_1 + P_1 R_1 < AQ_1 + Q_1 Q_2 + \dots + Q_k R_1$ ; se repetă procedeul și se adună inegalitățile obținute.

12. Se ia  $E$  astfel ca  $D$  să fie mijlocul lui  $(AE)$  și se aplică teorema 2 triunghiului  $AEC$ .

13. Din  $AA_1 > AC - \frac{BC}{2}$  și din relațiile analoge se obține prima inegalitate. Pentru cea de-a doua se va utiliza exerc. 12.

### § 11.

1. L.U.U.

3. Se aplică teorema 2.

5. Se arată că  $(AB) \equiv (CD)$ , apoi se aplică teorema 2 triunghiurilor  $ABC$  și  $ADC$ .



§ 12.

1. Se folosește exerc. 2, § 10. Presupunând de exemplu  $C \in (BA_1)$ , rezultă că  $\widehat{ACA_2}$  este ascuțit, deci  $\widehat{ACB}$  obtuz.

2. Se consideră mai întâi cazul  $B \in (A'C)$ ; atunci  $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ , deci  $AC > AB$ .

3. Unul dintre unghiurile  $\widehat{ADB}$ ,  $\widehat{ADC}$  este obtuz; acestuia i se opune o latură mai mare decât  $(AD)$ .

7. a) Rezultă cu ajutorul exerc. 6. b) Axele de simetrie ale dreptei  $d$  sînt toate dreptele perpendiculare pe  $d$  și dreapta  $d$ . c) Fie  $M \in (AM)$   $A', B', M'$  simetricele punctelor  $A, B, M$  față de dreapta  $d$  și  $\{A''\} = AA' \cap d$ ,  $\{B''\} = BB' \cap d$ . Se arată că  $M \in (AB) \Rightarrow M' \in (A'B')$  și implicația inversă. Pentru a arăta că  $(AB) \equiv (A'B')$ , se observă mai întâi că  $\triangle A''BB'' \equiv \triangle A''B'B''$ , apoi că  $\triangle A''AB \equiv \triangle A''A'B'$ .

§ 13.

2. Locul geometric se compune din două semidrepte simetrice față de  $AB$ .

4. Fie  $d'$  mediatoarea segmentului  $(AB)$ . a) Dacă  $d \cap d' = \{C\}$   $C$  este punctul căutat; b) Dacă  $d \cap d' = \emptyset$ , problema nu are soluție; c) Dacă  $d = d'$ , orice punct al lui  $d$  este o soluție.

§ 14.

2.  $\widehat{CBA}$  și  $\widehat{DAB}$  sînt unghiuri alterne interne congruente.

Exerciții recapitulative

4. Determinăm punctul  $D \in (BC)$  astfel ca  $(BD) \equiv (B'C')$ . Dacă  $D = C$ , proprietatea este evidentă. Dacă  $D \neq C$ , triunghiul  $ADC$  este isoscel și  $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ , ceea ce este imposibil deoarece unul dintre aceste unghiuri este ascuțit, celălalt obtuz.

8. Se va arăta că simetricul segmentului  $(BC)$  față de mediatoarea  $d$  coincide cu  $(AD)$ , de unde rezultă că  $C$  și  $D$  sînt simetrice față de  $d$ .

10. Fie  $B$  și  $C$  două puncte fixe pe  $d$  și  $B', C', P'$  simetricele lui  $B, C, P$  față de punctul  $A$ . Folosind exerc. 12. § 9 rezultă că  $P' \in B'C'$ .

12. Fie  $S$  semiplanul limitat de  $MN$  care conține pe  $D$ . Avem  $A, C, D \in S$ , deci  $P, Q \in S$ .

Capitolul II

§ 1.

8.  $D$  fiind simetricul lui  $A$  față de  $M$  se obține un dreptunghi  $ABDC$ .

12. a) Se va arăta că triunghiul  $BCD$  este isoscel. b) și c) Fie  $F$  simetricul lui  $A$  față de  $D$ ; din exerc. 9 rezultă că  $m(\widehat{ABF}) = 90^\circ$  și  $(BF) = (BE)$ , deci  $F = E$ .

13.  $ABCD$  fiind patrulaterul,  $A$  și  $C$  sînt de o parte și de alta a lui  $BD$  căci în caz contrar laturile  $(BC)$  și  $(AD)$  s-ar intersecta. Așadar  $\widehat{ABD}$  și  $\widehat{BDC}$  sînt unghiuri alterne interne.  $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ .

§ 2.

12. Dacă  $Q = pr_{PA}N$ , arătați că  $\triangle OPM \equiv \triangle MQN$ . Atunci  $(MQ) \equiv (OP) \equiv (PA)$  din care rezultă  $(AQ) \equiv (PM) \equiv (NQ)$ , adică triunghiul  $QAN$  este isoscel. Astfel  $N \in (AB)$ . Arătați că oricare ar fi  $N' \in (AB)$ , punctul  $N'$  aparține locului geometric (trebuie să se determine o poziție convenabilă pentru punctul  $M$ ).

13. Fie  $A$  și  $C$  unghiurile obtuze ale patrulaterului convex  $ABCD$  și  $M$  mijlocul segmentului  $BD$ . Arătați că exerc. recap. 1 de la Cap. I se aplică triunghiurilor  $ABD$  și  $BCD$ .

§ 3.

1.  $MQ \parallel BD \parallel NP$ ;  $MN \parallel AC \parallel QP$ .

7. i) Se proiectează  $P$  pe  $BC$  în  $P'$ , se intersectează paralela prin  $Q$  la  $PP'$  cu  $BC$  în  $Q$ , și cu paralela prin  $A$  la  $BC$  în  $Q''$ ;  $\triangle BPP' \equiv \triangle AQQ''$ ; se aplică teorema 3 trapezului  $PP'Q'Q$ . ii) O paralelă la  $BC$  prin mijlocul segmentului  $(AB)$ .

§ 4.

4. Fie  $A''$  simetricul lui  $B$  față de  $C$ .  $\triangle HA'B' \equiv \triangle CA''A$ ; rezultă  $A'B' = AA'' = 2CP$ . ii) Fie  $\{D\} = A'B' \cap CH$  și  $E$  intersecția lui  $AA''$  cu perpendiculara prin  $C$  pe  $CH$ . Demonstrați că  $\triangle HA'D \equiv \triangle CA''E$  și  $(AE) \equiv (EA'')$ .

5. Folosiți teorema 2.

6. Se observă că  $CF$  și  $AD$  sînt înălțimi în triunghiul  $AHC$ .

§ 6.

3. Fie  $\{O\} = (AC) \cap (BD)$ . Din teorema 2 rezultă

$$\frac{AO}{OE} = \frac{DO}{OB} \text{ și } \frac{CO}{OA} = \frac{BO}{OF}.$$

5. iii) Se ia  $D' \in (AC)$  astfel ca  $DD' \parallel BJ$ .

§ 7.

1. Fie de exemplu  $C \in (BD)$ . Intersectăm paralela prin  $C$  la  $AD$  cu  $AB$  în  $E$ . Se folosește teorema lui Thales și faptul că triunghiul  $AEC$  este isoscel.

§ 8.

8. Folosind exerc. 7, arătați mai întâi că proprietatea are loc pentru  $M = D$ , apoi aplicați teorema fundamentală a asemănării.

9. Fie tabla triunghiulară  $ABC$ . Pe latura cea mai mare  $[BC]$  se construiește în exteriorul triunghiului  $ABC$  pătratul  $BCDE$ . Fie  $\{M\} = AE \cap BC$  și  $\{N\} = AD \cap BC$ . Arătați că  $[MN] \subset [BC]$  și că  $[MN]$  este o latură a pătratului cerut.

12. Fie trapezul  $ABCD$ ,  $E \in (AD)$ ,  $F \in (BC)$ ;

$$\frac{EO}{AB} = \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA} = \frac{OF}{AB}, \text{ deci } EO = OF.$$

13. Folosiți exerc. 12.

§ 9.

1. Dacă  $M \in (AB)$ , fie  $M' = pr_d M$ . Din faptul că  $AC \parallel BD \parallel MM'$  rezultă că  $M' \in (CD)$ . În mod asemănător rezultă implicația inversă.



2. Se ține cont de exercițiul precedent și de faptul că reuniunea a două segmente închise având același suport și un punct comun este un segment închis.

3. Se scrie teorema catetei pentru  $(AB)$  și  $(AC)$  și teorema înălțimii pentru  $(AD)$ .

5. Se disting două cazuri: a) unghiul  $\hat{B}$  este ascuțit; atunci  $D \in (BC)$ ,  $BD = 5$ ,  $DC = 16$ ,  $AC = 20$ ,  $BC^2 < AB^2 + AC^2$ , rezultă că  $\hat{A}$  este unghi ascuțit și că  $C \in (BE)$ . Se exprimă  $AE$  din triunghiurile dreptunghice  $ADE$  și  $ABE$ , din  $AE^2 = AE^2$  se obține  $CE = 12,8$  și  $AE = 31,2$ , deci perimetrul  $ACE = 64$ . b) unghiul  $\hat{B}$  este obtuz; atunci  $B \in (DC)$ ,  $DC = 26$ ,  $AC = 2\sqrt{205}$  și  $D \in (EB)$ . Se obține  $DE = \frac{72}{13}$  și  $AE = \frac{12}{13}\sqrt{205}$ .

7. Din triunghiul  $ABD$  rezultă că  $AB^2 = BD \cdot BM$ , unde  $\{M\} = AF \cap BD$ , iar din faptul că  $\triangle BMF \sim \triangle BCD$  rezultă  $BD \cdot BM = BF \cdot BC$ .

8. Folosind teorema lui Pitagora se determină  $AB = 24$ ,  $AC = 18$ , iar din teorema bisectoarei (vezi ex. 2 § 7) se obține  $AD = 9$  și  $DB = 15$ .

9. Se exprimă  $BE^2$  și  $BF^2$  din triunghiurile dreptunghice  $ABE$  și  $BCF$  folosind și ipoteza rezultă  $BE^2 = AB^2 + DC^2$  și  $BF^2 = BC^2 + AD^2$ , dar, pentru că  $AB^2 = AD^2 + BC^2 - DC^2$ , rezultă  $BE = BF$ .

### Exerciții recapitulative

1. i) Fie trapezul  $ABCD$  cu  $AD \parallel BC$  și  $AD = b$ ,  $BC = a$ .  $\{E\} = AB \cap DC$  și  $x = d(E, AD)$ ;  $\triangle ADE \sim \triangle BCE$  deci  $\frac{b}{a} = \frac{x}{x+h}$ , de unde rezultă că  $x = \frac{bh}{a-b}$ .

ii) fie  $\{O\} = AC \cap BD$  și  $y = d(O, BC)$ ;  $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ , deci  $\frac{a}{b} = \frac{y}{h-y}$ , de unde rezultă că  $y = \frac{ah}{a+b}$ .

2. Se exprimă  $AB^2$  și  $AC^2$  folosind teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile  $ABM$  și  $AMC$  și se adună cele două expresii.

3. Fie  $\{M\} = AD \cap BE$ . Aplicând teorema bisectoarei pentru  $(AD)$  și  $(BM)$  se obține  $BD = 20$  și  $\frac{AM}{MD} = 2$ .

4. Fie  $M'$  astfel încât  $m(\widehat{ABM'}) = 60^\circ$ ,  $M' \in \text{Int } ABCD$  și  $(BM') \equiv (BA)$ . Atunci  $ABM'$  este un triunghi echilateral, triunghiurile  $M'BC$  și  $M'AD$  sînt isoscele.  $m(\widehat{M'CB}) = m(\widehat{M'DA}) = 75^\circ$  și  $m(\widehat{M'CD}) = m(\widehat{M'DC}) = 15^\circ$  din semidreptele  $(CM)$  și  $(CM')$  coincid, la fel  $(DM)$  și  $(DM')$ , deci  $M = M'$ .

5.  $EG = 2AE$ ,  $AE = 2EH$ ,  $\triangle EDH \sim \triangle ECA$ .

6. Se exprimă  $CB^2$  și  $CD^2$  prin teorema lui Pitagora generalizată, din triunghiurile  $ABC$  și  $ADC$  și se adună membru cu membru.

7. i)  $\triangle ADC \equiv \triangle BCF$  (C.U.) și  $\triangle ADB \equiv \triangle CBE$  (C.U.), deci  $(FC) \equiv (DC)$  și  $(BD) \equiv (BE)$ .

ii)  $\widehat{EDA} \equiv \widehat{BED} \equiv \widehat{EDB}$ ,  $\widehat{ADF} \equiv \widehat{DFC} \equiv \widehat{FCD}$ .

8. Se arată că laturile patrulaterului  $ABCD$  sînt paralele două câte două cu diagonalele rombului ( $A, B, C, D$  fiind mijloacele diagonalelor pătratelor) și că două laturi vecine sînt congruente ca laturi de triunghiuri congruente.

9. Se determină  $AC = 50$ , folosind formula care dă lungimea medianei (ex. 2), iar pentru calcularea distanței  $d(M, BC)$  se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul  $BMC$ .

10. Fie  $E = \text{pr}_{BC}A$ . Atunci  $AE = 12$ ,  $BE = 16$ , deci  $AB = 20$ . În triunghiul dreptunghic  $BAD$  se aplică teorema catetei și se obține  $AB^2 = BD \cdot BE$ , de unde  $BD = 25$ . Rezultă  $\frac{CD}{BD} = \frac{7}{25}$ .

11. Din  $M \in (NC)$  rezultă  $N \in (AP)$  în contradicție cu  $(AP) \equiv (PN)$ . Deci  $M \in (NB)$ ;  $(MP)$  este linie mijlocie în triunghiul  $ABN$ , deci  $M$  este mijlocul lui  $(BN)$ . În triunghiul  $ABN$ ,  $(AM)$  este înălțime și mediană deci este isoscel și  $(AB) \equiv (AN)$ . Pe de altă parte,  $(AN)$  fiind mediană în triunghiul dreptunghic  $ABC$  rezultă  $(AN) \equiv (BN)$ , deci triunghiul  $ABN$  este echilateral. Rezultă  $m(\hat{B}) = 60^\circ$ ,  $m(\hat{C}) = 30^\circ$ .

15. Se calculează  $AE$ ,  $EF$ ,  $AF$  și se arată că  $AF^2 = AE^2 + EF^2$ .

18. Fie  $O$  punctul de intersecție al diagonalelor trapezului și  $E \in (AB)$ ,  $F \in (DC)$ .  $\frac{EO}{AD} = \frac{BE}{BA}$  și  $\frac{EO}{BC} = \frac{AE}{BA}$ , deci  $\frac{EO}{AD} + \frac{EO}{BC} = 1$ . Ținînd seama că  $EF = 2EO$  (exerc. 12, § 8), rezultă relația cerută.

19. Fie  $M, N, P, Q$  respectiv mijloacele segmentelor  $(AF)$ ,  $(CE)$ ,  $(BF)$ ,  $(DE)$  și  $O$  mijlocul segmentului  $(EF)$ ;  $(MP)$  este linie mijlocie în triunghiurile  $ABF$ ,  $AFE$ ,  $EFB$ , deci trece prin  $O$  și  $(OM) \equiv (OP)$ . Analog,  $(QN)$  este linie mijlocie în triunghiurile  $DEC$ ,  $DEF$  și  $FEC$ , deci trece de asemenea prin  $O$  și  $(OQ) \equiv (ON)$ . Rezultă că  $MQPN$  este paralelogram.

20. Se aplică teorema lui Thales pentru triunghiurile  $BAM$  ( $AM \parallel ED$ ) și  $AMC$  ( $FD \parallel AM$ ).

21. Triunghiul  $ADC$  este isoscel, deci  $AD = BC = 2b$ , iar  $AC$  se calculează cu teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul  $ABC$ .

### Capitolul III

#### § 1.

1. Mediatoarea segmentului determinat de punctele date.

3.  $A, B, C$  fiind cele trei puncte comune, centrele cercurilor coincid cu punctul de intersecție  $O$  al mediatoarelor triunghiului  $ABC$  și cele două raze sînt egale cu  $OA$ .

5. Fie  $\mathcal{C}(O, r)$  un cerc și  $M'$  simetricul unui punct oarecare  $M$  față de  $O$ , adică  $O \in (MM')$  și  $OM = OM'$ . Arătați că  $M \in \mathcal{C}(O, r) \Rightarrow M' \in \mathcal{C}(O, r)$ . Ținînd seama că  $(M')' = M$ , de aici rezultă  $M \in \mathcal{C}(O, r) \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(O, r)$ .

8. Arătați că se poate aplica teorema 2, cazul a.

9. Presupunînd contrariul, există  $A \in \mathcal{C}(O, r)$  astfel ca  $A$  și  $O$  să fie de o parte și de alta a dreptei  $d$ . Atunci există  $C \in d \cap (OA)$ . Deduceți că  $d$  conține un punct din  $\text{Int } \mathcal{C}(O, r)$  și folosiți exerc. 8.

11.  $\mathcal{C}(A, AB)$ .



12.  $P$  și  $C$  fiind mijloacele segmentelor  $(AM)$  și  $(OA)$ , punctul  $P$  se află pe cercul  $e\left(C, \frac{r}{2}\right)$ . Reciproc, dacă  $P' \in e\left(C, \frac{r}{2}\right)$ , fie  $M'$  simetricul lui  $A$  față de  $P'$ . Se arată că  $OM' = r$ , deci  $M' \in e(O, r)$  și astfel orice punct al lui  $e\left(C, \frac{r}{2}\right)$  aparține locului geometric. Rezultă că locul geometric căutat este cercul  $e\left(C, \frac{r}{2}\right)$ .

13. Dacă  $A, B, C, D$  sînt puncte pe un cerc astfel încît dreapta  $AC$  separă punctele  $B$  și  $D$ , atunci segmentele  $(AC)$  și  $(BD)$  au un punct comun.

§ 2.

3. Cazul a):  $C$  și  $D$  se găsesc de aceeași parte a dreptei  $AB$ . Atunci, din teorema semi-drepte interioare unui unghi rezultă că sau  $(AC \subset \text{Int } \widehat{BAD})$  sau  $(AD \subset \text{Int } \widehat{BAC})$ . În primul caz se duce diametrul  $MN \perp AD$  și din  $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$  și  $\widehat{AM} \equiv \widehat{MD}$  se deduce că  $B$  și  $C$  sînt de o parte și de alta a lui  $MN$ ,  $\widehat{BN} \equiv \widehat{NC}$  și  $BC \perp MN$ ; în cazul al doilea se procedează analog schimbînd rolul lui  $C$  și  $D$ . Cazul b)  $C$  și  $D$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $AB$ . Arătați că există punctul  $P \in (AB) \cap (CD)$  și că arcele mici  $\widehat{AC}$  și  $\widehat{BD}$  sînt congruente, reducînd astfel problema la cazul a).

4. Se va folosi că  $OM \perp AB$ .

6. Un cerc concentric cu cercul dat.

7. Dreaptă simetrică cu  $d$  față de mijlocul segmentului  $AB$ , din care se scoate punctul situat pe  $AB$ .

8. Fie  $O, O'$  centrele ( $M$  pe cercul cu centrul  $O$ ),  $Q$  și  $Q'$  proiecțiile lui  $O, O'$  pe  $MN$ . Atunci  $QQ' = \frac{1}{2} MN = PM$  deci  $QA = PQ'$  și segmentele  $(QQ')$  și  $(AP)$  au același mijloc  $R$  (vezi și exerc. 8, Cap. I. § 8). Notînd cu  $C$  mijlocul segmentului  $(OO')$ ,  $(CR)$  este linie mijlocie în trapezul  $OQQ'O'$ , deci  $CR \perp AP$  și  $CP \equiv CA$ . Locul geometric al punctului  $P$  este cercul  $e(C, AC)$ .

§ 3.

1. Se folosește teorema 2 și teorema de construcție a unui unghi.

2.  $NM'$  și  $NM''$  coincid cu perpendiculara prin  $N$  la  $NM$ .

8. Se va arăta că  $\widehat{BAO} \equiv \widehat{CBO}$  și  $\widehat{ECF} \equiv \widehat{CBO}$ .

9. Se tratează separat cazurile:  $A$  și  $O$  de aceeași parte sau de o parte și de alta a lui  $BC$  respectiv  $O \in BC$ .

10. b)  $MN$  paralel cu dreapta centrelor.

11. Locul geometric este cercul de diametru  $(OA)$ , dacă  $A \in \text{Int } e(O, r)$ , respectiv un arc al unui cerc analog, dacă  $A \notin \text{Int } e(O, r)$ .

12. Fie  $(CD)$  diametrul perpendicular pe  $AB$ . Dacă  $M \in \widehat{ACB} - \{C\}$ ,  $\triangle OMM' \equiv \triangle COP$ , unde  $M' = \text{pr}_{AB} M$  (L.U.L.). Locul geometric se compune din cercurile de diametre  $(OC)$  și  $(OD)$ .

13. Se vor considera cazurile: 1)  $P, Q \in$  arcul mare  $\widehat{AB}$ , 2)  $P \in$  arcul mare  $\widehat{AB}$ ,  $Q \in$  arcul mic  $\widehat{AB}$ , 3)  $P, Q \in$  arcul mic  $\widehat{AB}$  (în cazul  $PQ < AB$ ). Se obțin arce capabile de  $(\alpha + \beta)^\circ$ ,  $(180 - \alpha - \beta)^\circ$ ,  $|\alpha - \beta|^\circ$  și  $(180 - |\alpha - \beta|)^\circ$ , unde  $\alpha = m(\widehat{AB})$ ,  $\beta = m(\widehat{CD})$ , care împreună formează două cercuri care trec prin  $A$  și  $B$ .

14. Două arce de cerc avînd capetele  $A$  și  $B$ .

15. Dacă  $PQ$  taie din nou cercul dat în  $R$ , arcul  $\widehat{APR}$  este de măsură constantă și punctul  $R$  este mereu de aceeași parte a diametrului cu un capăt în  $A$ . Se deduce că  $R$  este un punct fix.

16. Dacă  $CD$  este tangentă la cercul  $C$  circumscris triunghiului  $ABC$ ,  $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$ . Reciproc, dacă  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$ , luăm pe tangenta în  $C$  la

cercul  $C$  un punct  $E \in \text{Int } \widehat{ACB}$ . Atunci  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACE})$ , deci în virtutea teoremei de construcție a unui unghi ( $CD = CE$ ).

17. Se va arăta că tangentele în  $F$  la cele două cercuri coincid și în acest scop se va folosi exercițiul 16. Mai întîi se observă că  $B$  și  $C$  sînt de aceeași parte a dreptei  $DE$  (căci  $CB \parallel DE$ ); luăm de partea cealaltă a lui  $DE$  punctul  $G$  astfel încît  $\widehat{EFG} \equiv \widehat{ECF}$ . Rezultă că  $FG$  este tangentă cercului  $(FCE)$ . Dar  $\widehat{FBD} \equiv \widehat{ECF}$ , deci  $\widehat{DFG} \equiv \widehat{FBD}$  și astfel  $FG$  este tangentă și cercului  $(FBD)$ .

18. a) Cercul simetric cu  $e(O, r)$  din care lipsesc punctele  $A$  și  $B$ . b)  $I$  fiind centrul cercului înscris, avem  $m(\widehat{AIB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AMB}) + 90^\circ$ ; locul lui  $I$  se compune din două arce de cerc deschise, cu capetele  $A$  și  $B$ . c) Fie  $C$  mijlocul lui  $(AB)$  și  $D \in (OC)$ ,  $OD = 2DC$ ; atunci  $DG = \frac{1}{3} OM$  și locul lui  $G$  este cercul  $e\left(D, \frac{r}{3}\right)$ .

§ 4.

8. Fie  $(AB)$  o latură a poligonului înscris,  $M$  mijlocul arcului mic  $\widehat{AB}$  și  $P, Q$  punctele de intersecție ale tangentei în  $M$  ca  $OA$ , respectiv  $OB$ . Atunci  $l_n = AB$  și  $L_n = PQ$ . Folosiți triunghiurile asemenea  $OAB$  și  $OPQ$  și teorema lui Pitagora pentru triunghiul  $OMP$ .

13. Se va observa că  $(C'D)$  este o mediană în triunghiul dreptunghic  $DAB$  și se va deduce că  $(C'D) \equiv (B'A)$ . Rezultă că  $C'B'A'D'$  este un trapez isoscel sau paralelogram. Arătați că al doilea caz numai atunci e posibil cînd  $\hat{B}$  sau  $\hat{C}$  este un unghi drept.

14.  $A'B' \parallel AB$ ,  $A_1B' \parallel HC$  (linii mijlocii în triunghiuri), deci  $m(\widehat{A'B'A_1}) = 90^\circ$ . Acest raționament este valabil în fiecare dintre cazurile a), b), c).

15. Conform exercițiului 13, cercul  $C$  circumscris triunghiului  $A'B'C'$  conține pe  $D$  și analog  $E \in C$ ,  $F \in C$ . Conform exercițiului 14, punctele  $A', B', D$  și  $A_1$  se află pe un cerc, care avînd trei puncte comune cu  $C$ , coincide cu  $C$ . Deci  $A_1 \in C$ , analog  $B_1, C_1 \in C$ .

16. Deoarece  $m(\widehat{A'DA_1}) = 90^\circ$ ,  $(A'A_1)$  este un diametru în cercul lui Euler al triunghiului  $ABC$ . Deci centrul acestui cerc coincide cu mijlocul lui  $(A'A_1)$  și analog cu mijloacele lui  $(B'B_1)$  și  $(C'C_1)$ . Așadar dreptele  $A'A_1, B'B_1, C'C_1$  au un punct comun.

19.  $R$  fiind centrul pătratului, patrulaterul  $OMRN$  este inscriptibil. Locul lui  $R$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{AOB}$  (fără punctul  $O$ ).

20. Se va arăta că patrulaterul  $BCPA$  este inscriptibil. Deci  $P$  este situat pe arcul mic deschis  $\widehat{AC}$  al cercului circumscris triunghiului  $ABC$ . Pentru a arăta că orice punct  $P'$  al acestui arc aparține locului geometric se va demonstra că există un punct  $M' \in (AE)$ , astfel ca  $D'CP'M'$  să fie inscriptibil; se intersectează  $DM'$  cu  $AB$  în  $N'$  și se demonstrează că patrulaterul  $AM'P'N'$  este inscriptibil.



22. Să presupunem că  $M$  se află pe arcul  $\widehat{AC}$  care nu-l conține pe  $B$ ;  $m(\widehat{ABC}) < 90^\circ$ , deci  $\widehat{AC}$  este un arc mic și  $Q \in (AC)$ . Deoarece  $\widehat{BAM}$  și  $\widehat{BCM}$  sînt unghiuri suplementare, unul este obtuz, să zicem  $\widehat{BAM}$ ; atunci  $A \in (BR)$ . Punctele  $Q$  și  $R$  aparțin cercului de diametru  $(AM)$  și cum  $Q \in (AC)$ , punctele  $Q, R$  sînt de o parte și de alta a dreptei  $AM$ ; rezultă că  $AQMR$  este un patrulater convex inscribit. Același lucru este valabil și pentru patrulaterul  $BPMR$ . Așadar  $\widehat{MRQ} \equiv \widehat{MAQ} \equiv \widehat{MBP} \equiv \widehat{MRP}$ . Din convexitatea patrulatereleor amintite deducem ușor că punctele  $P$  și  $Q$  sînt de aceeași parte a lui  $RM$ , ceea ce împreună cu  $\widehat{MRP} \equiv \widehat{MRQ}$  implică  $(RP = RQ)$ .

§ 5.

5. Fie cercurile  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $\mathcal{C}(O', r')$ ,  $r < r'$ . Se construiesc tangentele  $OA$  și  $OB$  la cercul  $\mathcal{C}(O', r' - r)$  se intersectează  $(O'A$  și  $O'B$  cu  $\mathcal{C}(O', r')$  în  $A'$  și  $B'$ ; paralelele prin  $A'$  respectiv  $B'$  la  $OA$  respectiv  $OB$  vor fi tangentele comune „exterioare”. Ducînd tangentele din  $O$  la cercul  $\mathcal{C}(O', r + r')$  se obțin în mod analog tangentele comune „interioare”.

6.  $d = O_1O_2 < O_1A + O_2A < r_1 + r_2$ . Pentru a demonstra că  $d > |r_1 - r_2|$ , presupuneți contrariul și arătați că punctele lui  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  sînt fie toate în interiorul lui  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ , fie toate în exteriorul lui, ceea ce în condițiile problemei nu este posibil.

8. vezi 5.

10. Fie  $d$  dreapta dată. a)  $A \in d$ ; centrul se găsește la intersecția mediatoarei lui  $(AB)$  cu perpendiculara în  $A$  pe  $d$ ; b)  $B \in d$ ; analog; c)  $AB \parallel d$ : punctul de tangență se găsește la intersecția lui  $d$  cu mediatoarea segmentului  $(AB)$ . d) există  $C \in d \cap AB$ ; dacă  $C \in (AB)$  problema nu are soluție; dacă  $B \in (CA)$ , construim pe  $d$  punctele  $T_1$  și  $T_2$  astfel ca  $CT_1^2 = CT_2^2 = CA \cdot CB$ . Problema are două soluții: cercurile circumscrise triunghiurilor  $ABT_1$  și  $ABT_2$ .

13. Se aplică exerc. 16, § 3.

§ 6.

$$4. \mu_{\widehat{AB}} = \mu(\widehat{AB}) = 1, m(\widehat{AOB}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \mu(\widehat{AOB}) = \frac{180}{\pi}.$$

5.  $A$  și  $B$  fiind punctele de intersecție ale cercurilor, se observă că triunghiul  $O_1OA$  este dreptunghic în  $A$  și  $m(\widehat{O_1O_2A}) = 30^\circ$ .

### Exerciții recapitulative

$$2. \frac{25}{2}.$$

3. Fie  $(AB)$  coarda,  $M \in$  arcul mic  $\widehat{AB}$ ,  $P, Q, R$  proiecțiile lui  $M$  pe tangentele în  $B$  și  $A$  și pe  $AB$ ; dreapta  $MR$  taie cercul din nou în  $N$ .  $\triangle NBR \sim \triangle AMR$ ,  $\triangle AMQ \sim \triangle NAR$ , din care se deduce că  $\frac{MR}{MQ} = \frac{RB}{RA} \cdot \frac{AN}{BN}$ . Analog  $\frac{MR}{MP} = \frac{RA}{RB} \cdot \frac{BN}{AN}$ , deci  $MR^2 = MP \cdot MQ$ .

4. Se va folosi puterea punctului  $A$  față de cerc.

5.  $\triangle HBA' \sim \triangle HAB'$  implică  $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$ ; sau se observă că punctele  $A, B, A', B'$  sînt pe un cerc și se scrie puterea lui  $H$  față de acest cerc în două moduri.

7.  $\pi$

8. Se va arăta că  $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{AEB}) = 180^\circ - m(\widehat{ABC})$ .

10. Folosind patrulaterele inscribitabile  $ABDE$  și  $ACDF$ , se va arăta că  $\widehat{FDE} \equiv \widehat{BAC}$ .

12. Fie  $r_1 < r_2$ .  $C = \text{pr}_{O_1O_2} A$  și  $D = \text{pr}_{AD} O_1$ ; folosind triunghiuri congruente, se arată că  $O_1C = AD = r_1$ .

## Capitolul IV

§ 1.

2. Dreapta paralelă cu axa absciselor, care conține punctul de coordonate  $(0, 2)$ .

3. Dreapta paralelă cu axa ordonatelor, care conține punctul de coordonate  $(5, 0)$ .

4.  $\left(3, \frac{9}{2}\right)$ . 5.  $(-2, 1), (6, 7)$ . 6. b)  $\pi$ , c)  $10\sqrt{5}$ , d)  $\sqrt{10}$ . 7.  $x \in \{-3, 7\}$ . 8. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora.

9. Se arată că lungimile a două laturi sînt egale.

11. Punctul  $P$  corespunde lui  $P_0$  din teorema 3. Se poate aplica și reciproca teoremei lui Pitagora. 12.  $x = -1$ . 13. Punctul de coordonate  $(0, 6)$ .

§ 2.

$$15. a = \frac{3}{8}, b = \frac{39}{8}. 17. 4x + 2y - 5 = 0.$$

§ 3.

$$19. 5x + 2y + 5 = 0. 21. \text{Da. } 22. 5x + 3y = 4. 23. a = 1, b = -1.$$

24. Dacă  $a = 0$ , dreptele  $P_1P_2$  și  $P_3P_4$  sînt respectiv paralele cu axele de coordonate. Dacă  $a \neq 0$ , coeficientul unghiular al dreptei  $P_1P_2$  este  $a$ , iar coeficientul unghiular al dreptei  $P_3P_4$  este  $-\frac{1}{a}$ . Cele două drepte sînt evident perpendiculare. 28. Se numește ecuația dreptei prin tăieturi deoarece  $P_1$  și  $P_2$  sînt punctele de intersecție ale dreptei respectiv cu axele de coordonate.

§ 4.

$$29. \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{3}, 3. 30. \frac{4}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}. 31. \frac{5}{13}, -\frac{12}{13}, -\frac{12}{5}.$$

$$32. a) 2 - \sqrt{3}, b) \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, c) -2 - \sqrt{3}, d) -2 - \sqrt{3}. 33. \frac{4 + 6\sqrt{2}}{15}.$$



85. Măsurile în radiani ale unghiurilor cerute sînt respectiv: a) 0, b)  $\frac{\pi}{2}$ , c)  $\frac{\pi}{3}$ ,  
d)  $\frac{3\pi}{4}$ . 86. 150,  $\frac{5\pi}{6}$ . 87.  $\frac{3\sqrt{7}-4\sqrt{2}}{15}$ .

## Capitolul V

## § 1.

1.  $(-1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  
 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ .

2. a)  $\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , b)  $\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , c)  $\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  
d)  $\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . 5.  $(2 + \sqrt{3})x + y - 1 = 0$ .

## § 2.

1. a) 1, b)  $\cos \frac{2\pi}{5}$ , c) -1, d) -1, e)  $\frac{1}{2}$ , f)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , g) 0, h) -1, i) -1, j) 0,  
k)  $-\sqrt{3}$ , l)  $-\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ .

2.  $-\frac{24}{25}$ . 3. a) pară, b) pară pentru  $n$  par și impară pentru  $n$  impar, c) nici pară  
nici impară, d) impară. 4. a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , b)  $\frac{1}{2}$ . 5.  $\frac{56}{65}$ . 7. Figurînd pe cercul unitate  $C$   
punctele  $F(a) = P(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$  și  $F(b) = Q(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ , se constată că  $a > b$  și  
 $a - b \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Se calculează  $\cos(a - b)$  cu ajutorul formulei (2), iar  $\sin(a - b)$  cu  
ajutorul formulei (1). Coordonatele punctului  $F(a - b)$  sînt  $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ . 8. Rezolvînd sis-  
temul format din  $\sin x + \cos x = 0,2$  și  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  și ținînd seama de  $\cos x < 0$ ,  
se obține  $\cos x = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin x = \frac{4}{5}$ . Coordonatele punctului  $F(x)$  sînt  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ .

## § 3.

1. a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 3.  $\frac{24 - 7\sqrt{3}}{50}$ ,  $-\frac{24 + 7\sqrt{3}}{50}$ .

5. a)  $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ , b)  $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ , c)  $-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ , d)  $\frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}}{4}$ .

e)  $-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ . 6. e) Se împart ambii membri cu 2 și se cunoaște că  $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

și  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$  etc. 8.  $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ ,  $\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ . 9. Se observă mai întîi că

$\cos^4 \frac{7\pi}{8} = \cos^4 \frac{\pi}{8}$  și  $\cos^4 \frac{5\pi}{8} = \cos^4 \frac{3\pi}{8}$ . În continuare rămîne de arătat că  $\cos^4 \frac{\pi}{8} +$

$+\cos^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}$ . Dar  $\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$  etc. 10. Se scrie  $E = \frac{1 + \cos 2(a + b)}{2} +$

$+\frac{1 + \cos 2(a - b)}{2} - \cos 2a \cos b$  și după aplicarea formulelor (4) și (2) se obține  $E = 1$ .

Deci  $E$  nu depinde de  $a$  și  $b$  deoarece are valoarea 1, oricare ar fi valorile reale ale  
lui  $a$  și  $b$ .

## § 4.

1. 0. 2. h) Se scrie  $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a - \frac{\sin 3a}{\cos 2a \cos a} = \operatorname{tg} 3a -$   
 $-\operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\cos 3a}{\cos 2a \cos a} = \operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\cos 2a \cos a - \cos 3a}{\cos 2a \cos a}$  etc. 3. 1. 4. n. 5. Rezolvînd

sistemul format cu ecuațiile  $5 \cos x + 10 \sin x - 11 = 0$  și  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , se obțin  
două soluții  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  și  $(\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ . Așadar, problema are două soluții:  $\cos x = \frac{3}{5}$ ,

$\sin x = \frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$  sau  $\cos x = \frac{7}{25}$ ,  $\sin x = \frac{24}{25}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$ .

## § 5.

1. a)  $\frac{\sqrt{6 + \sqrt{2}}}{2}$ , b)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , c)  $-\sqrt{2}$ , d) 0, e)  $4 \sin 3x \cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6})$ ,

f)  $4 \cos 4x \cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6})$ . 2. e)  $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}$ , conform formulei (12).

Deci  $1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = 1 + \cos a + \frac{1 + \cos a}{\sin a} = (1 + \cos a) \left(1 + \frac{1}{\sin a}\right) =$

$= \frac{1 + \cos a}{\sin a} (1 + \sin a) = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} (\sin a + \sin \frac{\pi}{2})$  etc. 3. Dacă  $\sin \frac{x}{2} = 0$ , atunci  $S = 0$ .

Presupunem că  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ . Se obține, conform indicației,  $2S \sin \frac{x}{2} = 2 \sin 3x \sin \frac{5x}{2}$ .

$\frac{\sin 3x \sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ . Pentru transformarea sumei  $T$  se procedează în mod analog.

Se obține  $T = \frac{\cos 4x \sin \frac{7x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ .



§ 6.

1. a) minus, b) minus, c) plus, d) negativ, e) minus, f) plus. 2. Graficele sînt trasate în figurile care urmează

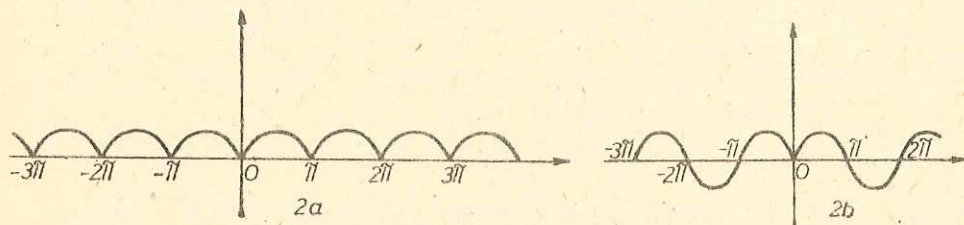


Fig. R. 2a, 2b

3. Graficul este trasat în figura care urmează, pentru  $x \in [0, 2\pi]$ :

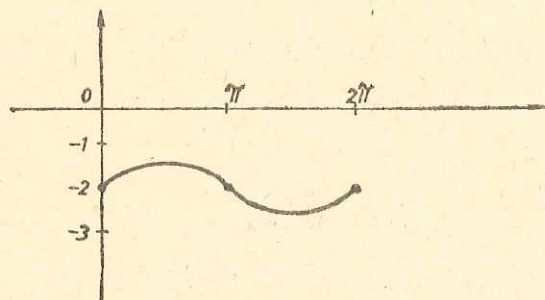


Fig. R 3

Capitolul VI

§ 3.

1. a)  $\frac{\pi}{3}$ , b)  $-\frac{\pi}{3}$ , c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , d)  $\frac{11}{16}$ , e) 1, f)  $\frac{4}{5}$ . 2.  $\sin x = \frac{3}{5}$ ,  $\cos x = \frac{4}{5}$ .

3.  $x = 5$ . 4. f) Deoarece  $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{4x}{5-3x} - \operatorname{arctg} \frac{5x-3}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)$ , s-ar părea că egalitatea este verificată oricare ar fi  $x \neq \frac{5}{3}$ . Dar pentru  $x > \frac{5}{3}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{4x}{5-3x} - \operatorname{arctg} \frac{5x-3}{4} < 0$  deoarece  $\frac{4x}{5-3x} < 0$  și  $\frac{5x-3}{4} > 0$ , iar  $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} > 0$ . g) Dacă  $\cos x = 0$ , pentru  $\sin x = 1$  și pentru  $\sin x = -1$ , egalitatea este verificată. Dacă  $\cos x \neq 0$ , atunci  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = \frac{\operatorname{tg} x + 2}{1 - 2 \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)} = \operatorname{tg}(x + \operatorname{arctg} 2)$ .

5. a)  $x \in \left\{-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ , b)  $\left\{\frac{5\sqrt{3}-8}{11}\right\}$ , c)  $x \in \left\{0, \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right\}$ .

§ 4.

a)  $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ ,

b)  $x \in \left\{\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} - 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

c)  $x \in \left\{\frac{2k + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2}}{3 + (-1)^k} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ , d)  $x \in \left\{-\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

e)  $x \in \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

f)  $x \in \left\{\frac{(-1)^k + \sqrt{1+4k\pi}}{2} \mid k \in \mathbf{N}\right\} \cup \left\{\frac{(-1)^k - \sqrt{1+4k\pi}}{2} \mid k \in \mathbf{N}\right\}$ .

§ 5.

1.  $x \in \left\{\arccos \frac{1-\sqrt{7}}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\arccos \frac{1-\sqrt{7}}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

3.  $x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

4.  $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

5.  $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

7. Ecuația se scrie  $(\operatorname{tg} x - 2)(5 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{tg} x + 3) = 0$ . Se obține  $x \in \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ .

9. Se face substituția  $\cos x = y$ . Se obține  $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

§ 6.

1.  $t \in \left\{\pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

2.  $t \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

3.  $t \in \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$

4.  $t \in \left\{\pi - \arcsin \frac{\sqrt{21}}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pi + \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

5.  $t \in \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

6.  $t \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ .

7. a)  $\frac{2\pi}{5}$ , b)  $10\pi$ , c)  $\frac{2\pi}{7}$ .

8. Dacă  $T$  ar fi perioadă, ar însemna că  $f(x+T) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ . Pentru  $x = 0$ , am avea  $\sin 4T + \cos \sqrt{2}T = 1$ , iar pentru  $x = -T$ ,  $-\sin 4T + \cos \sqrt{2}T = 1$ .



Din cele două egalități se obține  $\sin 4T = 0$  și  $\cos \sqrt{2}T = 1$ . În primul caz, din  $\sin 4T = 0$ , rezultă  $T = \frac{k\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , iar din  $\cos \sqrt{2}T = 1$ , rezultă  $T = k'\pi\sqrt{2}$ ,  $k' \in \mathbb{Z}$ .

Deoarece nu există numere întregi  $k$  și  $k'$  astfel ca cele două valori ale lui  $T$  să fie egale, am ajuns la o contradicție.

9. Se scrie  $h(x) = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3}(1 + \cos 2x) + 2\sqrt{3} - 3 = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x - 3 = 4 \left( \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \right) - 3 = 4 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) - 3$  și se continuă ca la aplicația 4.

### Probleme recapitulative

4. Fie  $C$  simetricul lui  $A$  față de  $M$ ;  $\triangle MNC \equiv \triangle MBA$ ,  $AN > AB = NC$ , deci  $\widehat{BAM} = \widehat{MCN} > \widehat{MAN}$ .

7. Fie  $ABCD$  patrulaterul și  $\{O\} = AC \cap BD$ . Dacă  $ABCD$  este convex și  $M$  un punct din plan,  $MA + MC > AC$ ,  $MB + MD \geq BD$ . Dacă  $ABCD$  este concav, fie de exemplu  $C \in \text{Int } \widehat{ABD}$ ; atunci  $CA + CB + CD < CA + (BO + OC) + (CO + OD) = OA + OB + OC + OD$ , deci suma distanțelor de la  $C$  la vîrfuri este mai mică decît de la  $O$ . Așadar proprietatea nu rămîne valabilă pentru acest caz.

8.  $(AC) \cap BO = \{E\}$ ,  $(BC) \cap AO = \{D\}$ ,  $(AD \subset \text{Int } \widehat{BAC}$ ,  $\{O\} = (BE) \cap (AD)$ ,  $O \in (BE) \subset \text{Int } \widehat{ACB}$ , deci  $(CO$  intersectează segmentul  $(AB)$ .

12. Notînd  $a = OA$ , semiplanele  $(aB$  și  $(aC$  sînt opuse.  $P \in \text{Int } \widehat{AOB}$  implică  $(BP) \cap a = \emptyset$  și  $(CP) \cap a = \{D\}$ , deci  $D \in (CP)$ . Reciproc, din  $D \in (CP)$  rezultă  $P \in (aB$ ; pe de altă parte există  $E \in (CD) \cap OB$  și  $E \in (CP)$ , deci  $P$  și  $D$  sînt de aceeași parte a lui  $OB$ . Așadar  $P \in \text{Int } \widehat{AOB}$ .

17.  $ABCD$  fiind trapezul dat ( $(AB) =$  baza mare), se ia punctul  $E$  astfel încît  $A \in (EB)$  și  $(EA) \equiv (DC)$ . Triunghiul  $DEB$  va fi dreptunghic.

19. Asemănarea  $\triangle SPQ \sim \triangle CBA$  rezultă în modul următor:  $PS$  și  $SQ$  sînt linii mijlocii în  $CBE$ ,  $CFE$ , deci  $PS = \frac{1}{2} BE$ ,  $SQ = \frac{1}{2} CF$ . Dar  $\frac{BE}{CF} = \frac{BC}{AC}$  și notînd

$\{R\} = BE \cap CF$ , avem  $\widehat{PSQ} \equiv \widehat{BRC} \equiv \widehat{BCA}$ . Analog se arată că  $\triangle TOM \sim \triangle CBA$ . Putem scrie:

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{PS}{BC} = \frac{BE}{2BC} = \frac{1}{2} \frac{AD}{AB} = \frac{NM}{AB},$$

deci  $PQ = NM$  și analog  $QM = PN$ .

20. Fie  $A$  pe latura  $[CD]$  a pătratului  $CDEF$ ; putem presupune că  $AE \geq AB$  (schimbînd la nevoie rolul lui  $E$  cu cel al lui  $F$ ). Atunci  $AC + AD + AE + AF \geq CD + AB + AF \geq AB + 2CD \geq AB(1 + \sqrt{2})$ . Dacă  $A$  și  $B$  sînt vîrfuri opuse în pătrat, relația de mai sus devine o egalitate, deci aceasta este soluția problemei.

21.  $OM - ON < MN < ON + OM$ .

27. Se va observa că  $AO_1, HO_2$  este romb și se va arăta că triunghiul  $ABC$  și  $O_1O_2O_3$  sînt congruente, unde  $O_1, O_2, O_3$  sînt centrele celor trei ceruri.

28. Fie  $A'$  simetricul lui  $A$  față de punctul  $D$ . Punctele  $A', B, H, C$  sînt situate pe un cerc de diametru  $A'H$ , care conține și punctul  $M$ .

29. Luăm  $M \in (BD)$  astfel încît  $\widehat{MCB} \equiv \widehat{ACD}$ . Se obține:  $\triangle CMB \sim \triangle CDA$  și  $\triangle CMD \sim \triangle CBA$ .

31. Cele patru puncte sînt vîrfurile unui dreptunghi.

32. Ecuațiile înălțimilor sînt  $x + ay = 0$ ,  $(10 - a)x + 2(10 - a)y - b - 20b = 0$ ,  $(2 - a)x + 10(2 - a)y - b - 20b = 0$ . Se determină coordonatele punctului de intersecție a două din mediatoare și se verifică că este situat pe a treia.

33.  $t \in \left\{ \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4} \right\}$ .

34. a)  $\left\{ t \mid t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,

b)  $\left\{ t \mid t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,

c)  $\left\{ t \mid t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,

d)  $\left\{ t \mid t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

36.  $\frac{20}{29}, \frac{41}{841}, \frac{541}{641}$ .

38. a)  $4 \cos a \cos b \cos c$ ,

b)  $4 \cos a \cos \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{a}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$

c)  $2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left( \frac{a}{4} - \frac{\pi}{4} \right)$ ,

d)  $4 \sin a \sin \left( \frac{a}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{12} \right)$ .

39. a) 2, b) 3, c)  $\frac{3}{2}$ , d) 14.



40. a)  $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arctg \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ , b) Se trece totul în membrul sting și se dă factor comun  $\sin x - \cos x$ , c) Se aplică formula (12) și se ajunge la  $\sin x - \cos x = 1$ , d) După ce se transformă în sumă produsul de cosinusuri se ajunge la  $2 \cos 2x = 1$ , e) Se aplică formulele (7) și (8) și se obține  $3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} = 0$  sau  $\cos \frac{x}{2} (3 \cos x - \sin x + 1) = 0$ .

Deci  $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .

41. a) Ecuația este echivalentă cu  $2 \sin^2 x - (2m - 1) \sin x - m = 0$ ,

b) Ecuația are soluții oricare ar fi valorile reale ale lui  $m$ ,

c) Ecuația are soluții dacă  $m \in (-\infty, 0] \cup \left[ \frac{1}{5}, +\infty \right)$ .

42) a), b), c), d). Se folosește indicația de la punctul e).

44. Se observă că  $(OM) \equiv (ON)$ . Deci unghiurile triunghiului au măsurile  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$ .

## Cuprins

Prefața	3
<b>Cap. I. Incidentă, ordonare, congruență</b>	5
§ 1. Studiul axiomatic al geometriei	5
§ 2. Axiomele de incidentă ale geometriei în plane	6
§ 3. Distanța și axioma riglei	7
§ 4. Segmente, semidrepte și unghiuri	10
§ 5. Axioma de separare a planului	14
§ 6. Mulțimi convexe	17
§ 7. Axiomele unghiului	21
§ 8. Proprietăți de congruență	24
§ 9. Congruența triunghiurilor	30
§ 10. Inegalități geometrice	34
§ 11. Alte cazuri de congruență a triunghiurilor	38
§ 12. Distanța de la un punct la o dreaptă	40
§ 13. Mediatoare. Bisectoare. Locuri geometrice	43
§ 14. Drepte neconconurente	45
Exerciții recapitulative	47
<b>Cap. II. Paralelism. Asemănare</b>	50
§ 1. Axioma paralelelor	50
§ 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	52
§ 3. Linia mijlocie	54
§ 4. Concurența unor drepte în triunghi	56
§ 5. Paralele echidistante	58
§ 6. Teorema lui Thales	60
§ 7. Teorema bisectoarei	64
§ 8. Asemănarea triunghiurilor	65
§ 9. Relații metrice	70
Exerciții recapitulative	75
<b>Cap. III. Cercul</b>	77
§ 1. Definiții	77
§ 2. Coarde. Arce. Unghiuri la centru	79
§ 3. Unghi înscris	84
§ 4. Poligoane înscrise și circumscrise	90
§ 5. Poziția relativă a două cercuri	94
§ 6. Lungimea cercului	99
Exerciții recapitulative	101



Cap. IV. Elemente de geometrie analitică .....	103
§ 1. Coordonate în plan .....	103
§ 2. Ecuația dreptei .....	106
§ 3. Coeficientul unghiular al dreptei .....	110
§ 4. Funcțiile sin și cos definite pe intervalul $[0, \pi]$ .....	112
§ 5. Unghiul unei drepte cu axa absciselor .....	117
Cap. V. Funcțiile trigonometrice .....	120
§ 1. Funcția de acoperire universală a cercului unitate .....	120
§ 2. Funcțiile trigonometrice sin și cos .....	125
§ 3. Formule pentru $\cos(a + b)$ , $\sin(a - b)$ , $\sin(a + b)$ și formulele deduse din acestea .....	129
§ 4. Funcțiile tg și ctg .....	132
§ 5. Transformarea sumelor în produse .....	135
§ 6. Graficele funcțiilor sin, cos și tg .....	136
§ 7. Identități condiționate .....	141
Cap. VI. Ecuații trigonometrice .....	144
§ 1. Relații, funcții .....	144
§ 2. Inversarea funcțiilor trigonometrice .....	145
§ 3. Funcțiile arcsin, arccos și arctg .....	146
§ 4. Ecuații trigonometrice fundamentale .....	151
§ 5. Ecuații trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebră .....	156
§ 6. Ecuații de forma $a \cos t + b \sin t + c = 0$ .....	158
Aplicații .....	161
Probleme recapitulative .....	164
Indicații și răspunsuri .....	170



Nr. colilor de tipar : 12  
Bun de tipar : 4.IV.1988



Com. nr. 70 448/34 113  
Combinatul poligrafic  
„CASA ȘCINTEII“  
București — R.S.R.