Lei 11,10

ISBN 973-30-0643-2

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

XII

Matematică

Manual pentru clasa a XII-a

Elemente de analiză matematică

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI — 1990

MINISTERUL ÎNVĂŢĂMÎNTULUI

NICU BOBOC ION COLOJOARĂ

XII Matematică

Manual pentru cl. a XII-a

Elemente de analiză matematică

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei şcolare aprobate de Ministerul Învăţămîntului cu nr. 39490/1978.

Referenţi: Prof. univ. dr. **O. Stănăşilă**
prof. **M. Păltineanu**
prof. **M. Rădulescu**
prof. **S. Rădulescu**
prof. **V. Tomuleanu**

ISBN 973-30-0643-2

Redactor: Prof. **Valentin Radu**
Tehnoredactor: **Sanda Dumitraşcu**
Corector: **Theodor Ţugulea**
Coperta: **Nicolae Sîrbu**

I. Primitive

§ 1. PRIMITIVE

Fiind dată o funcţie $f : I \to \mathbf{R}$ (J un interval $\subset \mathbf{R}$), se pun următoarele probleme:

(A) Există (şi în ce condiţii) o funcţie $F : J \to \mathbf{R}$ a cărei derivată să fie funcţia dată f?

(B) Cum se poate determina o asemenea funcţie F, pornind de la f?

În acest capitol vom studia cîteva metode de obţinere a funcţiilor F care verifică relaţia $F' = f$.

Răspunsul la problema (A) este afirmativ pentru o clasă destul de largă de funcţii, în particular pentru funcţiile continue. Acest lucru va fi arătat în capitolul II.

1.1. Definiţie. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$ şi $f : J \to \mathbf{R}$. Spunem că f admite primitivă pe J dacă există o funcţie $F : J \to \mathbf{R}$ astfel încît:

1) F **este derivabilă pe** J,
2) $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in J$.

Funcţia F se numeşte **primitivă** a funcţiei f.

Dacă intervalul J este închis la stînga şi a este extremitatea sa stîngă, atunci prin derivata lui F în punctul a se subînţelege derivata la dreapta a lui F în a. O convenţie analoagă se face cînd J este închis la dreapta.

1.2. *Exemple*

1) Fie $n \in \mathbf{N}$ şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin relaţia

$$f(x) = x^n, \qquad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Atunci pentru orice număr real fixat c, funcţia

$$F_c(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \qquad (\forall)x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a lui f.

2) Funcţia

$$F(x) = (\sin x)^2, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a funcţiei

$$f(x) = 2\sin x \cos x, \qquad (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

3) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci funcţia

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, \qquad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

este o primitivă a funcţiei

$$f(x) = a^x, \qquad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

1.3. Propoziţie. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$ şi $f : J \to \mathbf{R}$. Dacă $F_1, F_2 : J \to \mathbf{R}$ sînt două primitive ale funcţiei f, atunci există o constantă $c \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \qquad (\forall)\ x \in J.$$

Demonstraţie. F_1 şi F_2 fiind primitive ale lui f, ele sînt derivabile pe J şi verifică relaţiile

$$F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \qquad (\forall)\ x \in J,$$

deci

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \qquad (\forall)\ x \in J.$$

Funcţia $F_1 - F_2$, avînd derivata nulă pe intervalul J, este constantă pe acest interval, adică există $c \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \qquad (\forall)\ x \in J.$$

1.4. *Observaţii*:

a) Dată fiind o primitivă F_0 a unei funcţii $f : J \to \mathbf{R}$, atunci orice altă primitivă F a lui f este de forma

$$F = F_0 + c,$$

unde c este o funcţie constantă pe J. Aceasta înseamnă că dacă o funcţie f admite primitivă, atunci f admite o infinitate de primitive. Datorită acestui fapt vom spune adeseori:

„f admite primitive"

în loc de

„f admite primitivă"

b) Definiţia primitivei, dată la punctul 1.1, s-ar putea extinde şi la funcţii definite pe reuniuni finite de intervale disjuncte, deoarece condiţiile din definiţia 1.1 au sens şi în acest caz mai general. Însă nu mai este adevărat că două astfel de primitive diferă printr-o constantă.

De exemplu, fie $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = x^2.$$

Atunci funcţiile $F, G : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \qquad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

respectiv

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + 1 & \text{dacă } x < 0, \\ \dfrac{x^3}{3} + 2 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

sînt derivabile pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ şi verifică relaţiile

$$F'(x) = f(x) = G'(x), \qquad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Totuşi, diferenţa $G - F$ nu este o constantă.

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x < 0, \\ 2 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

c) *O funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux.* Într-adevăr, dacă $f : J \to \mathbf{R}$ admite primitive, atunci există o funcţie derivabilă $F : J \to \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$F' = f.$$

Se ştie însă (vezi, Elemente de analiză matematică, cl. a XI-a), că derivata oricărei funcţii derivabile are proprietatea lui Darboux. Aşadar, f are proprietatea lui Darboux.

d) *Dacă J interval $\subset \mathbf{R}$ şi $f : J \to \mathbf{R}$ este o funcţie astfel încît mulţimea*

$$f(J) \overset{\text{def.}}{=} \{f(x) \mid x \in J\} \text{ (imaginea lui } J \text{ prin } f)$$

nu este interval, atunci funcţia f nu admite primitive.

Într-adevăr, dacă f ar admite primitive, atunci (în baza punctului precedent) f ar avea proprietatea lui Darboux, adică odată cu două valori ar lua orice valoare intermediară, deci imaginea lui J prin f ar fi un interval. Contradicţie cu ipoteza făcută asupra lui f.

e) *Orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ admite primitive.*

Demonstraţia acestui rezultat va fi dată în capitolul II, teorema 4.8.

1.5. Definiţie. Fie $f : J \to \mathbf{R}$ (J interval din $\mathbf{R}$) o funcţie care admite primitive. Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte integrala nedefinită a funcţiei f şi se notează prin simbolul

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Operaţia de calculare a primitivelor unei funcţii (care admite primitive) se numeşte integrare.

Menţionăm că simbolul $\int f(x)\mathrm{d}x$ trebuie privit ca o notaţie indivizibilă, deci părţilor $\int$ sau $\mathrm{d}x$, luate separat, nu li se atribuie aici nici o semnificaţie.

În cele ce urmează vom defini operaţiile de „adunare" şi „înmulţire cu scalari" între părţi (submulţimi) ale mulţimii funcţiilor $\varphi : J \to \mathbf{R}$. Vom face acest lucru în scopul de a da un sens precis notaţiilor frecvent utilizate în calculul de primitive:

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lambda\int f(x)\mathrm{d}x,$$

unde $\int f(x)\mathrm{d}x$ (respectiv $\int g(x)\mathrm{d}x$) înseamnă mulţimea tuturor primitivelor lui f (respectiv g).

1.6. *Notaţii.* Fie J un interval din $\mathbf{R}$ şi

$$\mathcal{F}(J) \overset{\text{def.}}{=} \{f : J \to \mathbf{R}\}$$

mulţimea funcţiilor definite pe J cu valori reale. Reamintim că pe mulţimea $\mathcal{F}(J)$ se introduc operaţiile
„adunarea funcţiilor":

$$(f+g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x) + g(x), \qquad (\forall)\, x \in J$$

şi *„înmulţirea funcţiilor cu scalari"*:

$$(\lambda f)(x) \overset{\text{def.}}{=} \lambda f(x), \qquad (\forall)\, x \in J,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Deci $f+g$ este funcţia $x \to f(x) + g(x)$ care asociază fiecărui $x \in J$ numărul real $f(x) + g(x)$, iar funcţia λf este funcţia $x \to \lambda f(x)$ care asociază fiecărui $x \in J$ numărul real $\lambda f(x)$.

Dacă $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ sînt părţi nevide ale lui $\mathcal{F}(J)$ şi $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci punem prin definiţie

(D_1) $$\mathcal{F} + \mathcal{G} \overset{\text{def.}}{=} \{f + g \mid f \in \mathcal{F} \text{ şi } g \in \mathcal{G}\},$$

(D_2) $$\lambda\mathcal{F} \overset{\text{def.}}{=} \{\lambda f \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Dacă $\mathcal{F}$ este formată dintr-un singur element f_0, atunci în loc de

$$\mathcal{F} + \mathcal{G}$$

sau

$$\{f_0\} + \mathcal{G}$$

vom scrie simplu

$$f_0 + \mathcal{G}.$$

Deci

(D_3) $$f_0 + \mathcal{G} \overset{\text{def.}}{=} \{f_0 + g \mid g \in \mathcal{G}\}.$$

1.7. *Observaţie.* Notînd cu $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor constante definite pe J cu valori reale

$$\mathcal{C} \overset{\text{def.}}{=} \{f : J \to \mathbf{R} \mid f \text{ constantă}\},$$

se observă că această mulţime are, faţă de operaţiile de „adunare" şi „înmulţirea cu numere reale diferite de zero", definite pe părţile lui $\mathcal{F}(J)$, următoarele proprietăţi:

a) $\lambda\mathcal{C} = \mathcal{C} \qquad (\forall)\lambda \in \mathbf{R},\ \lambda \neq 0;$

b) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$

c) dacă $f : J \to \mathbf{R}$ este o funcţie care admite primitive şi dacă F_0 este o primitivă a lui f, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F_0 + \mathcal{C}$$

sau

$$\int F_0'(x)\mathrm{d}x = F_0 + \mathcal{C}.$$

Într-adevăr, produsul λf, dintre o funcţie constantă $f : J \to \mathbf{R}$ şi un număr real λ fiind tot o funcţie constantă, rezultă incluziunea

$$\lambda\mathcal{C} \subset \mathcal{C}.$$

Reciproc, dacă f este o funcţie constantă şi $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcţia

$$g \overset{\text{def.}}{=} \lambda^{-1} f$$

este constantă, deci

$$f = \lambda g \in \lambda\mathcal{C}.$$

Aşadar, are loc şi incluziunea

$$\mathcal{C} \subset \lambda\mathcal{C}$$

şi deci egalitatea $\mathcal{C} = \lambda\mathcal{C}$.
Suma a două funcţii constante fiind tot o funcţie constantă, rezultă incluziunea

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} \subset \mathcal{C}.$$

Reciproc, dacă f este constantă, atunci $\frac{1}{2} f$ este constantă, deci

$$f = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f \in \mathcal{C} + \mathcal{C}.$$

Aşadar, are loc şi incluziunea $\mathcal{C} \subset \mathcal{C} + \mathcal{C}$ şi deci egalitatea

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Am văzut (observaţia 1.4 a)) că dacă F este o primitivă a lui f, atunci orice altă primitivă F a lui f este de forma

$$F = F_0 + c,$$

unde c este o funcţie constantă pe J. Deci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F \in \mathcal{F}(J) \mid F = \text{primitivă a lui } f\} =$$
$$= \{F_0 + c \mid c \in \mathcal{C}\} = F_0 + \mathcal{C}$$

1.8. Teoremă. Dacă $f, g : J \to \mathbf{R}$ sînt funcţii care admit primitive şi $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcţiile $f + g$ şi λf admit de asemenea primitive şi au loc relaţiile:

(a) $$\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

(b) $$\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx,$$

(c) $$\int f(x)dx = \int f(x)dx + \mathcal{C}.$$

Demonstraţie. Dacă F este o primitivă a lui f iar G o primitivă a lui g, atunci F şi G sînt derivabile pe J şi

$$F' = f,\ G' = g.$$

De aici deducem că $F + G$ şi λF sînt derivabile pe J şi

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$
$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f,$$

adică $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$ şi λF este o primitivă a lui λf.

Funcţiile $F, G, F + G, \lambda F$ fiind primitive ale lui $f, g, f + g, \lambda f$ respectiv, rezultă (observaţia 1.7c))

(1) $$\int f(x)dx = F + \mathcal{C},$$

(2) $$\int g(x)dx = G + \mathcal{C},$$

(3) $$\int (f(x) + g(x))dx = F + G + \mathcal{C},$$

(4) $$\int \lambda f(x)dx = \lambda F + \mathcal{C}.$$

Din egalităţile (1), (2), (3) şi observaţia 1.7. b) obţinem

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F + \mathcal{C} + G + \mathcal{C} = F + G + \mathcal{C} + \mathcal{C} =$$
$$= F + G + \mathcal{C} =$$
$$= \int (f(x) + g(x))\,dx.$$

Analog, folosind egalităţile (1), (4) şi observaţia 1.8a), se obţine

$$\lambda\int f(x)dx = \lambda(F + \mathcal{C}) = \lambda F + \lambda\mathcal{C} = \lambda F + \mathcal{C} = \int \lambda f(x)dx.$$

1.9. *Observaţie.* În demonstrarea faptului că λf admite primitive (teorema 1.8) nu s-a folosit ipoteza $\lambda \neq 0$. Totuşi, *ipoteza $\lambda \neq 0$ este esenţială în demonstrarea egalităţii*:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx.$$

Într-adevăr, dacă $\lambda = 0$, atunci

$$\lambda f(x) = 0,\ (\forall)\ x \in J,$$

deci orice funcţie constantă este primitivă a lui λf, în particular funcţia constantă 0 este o primitivă a lui $\lambda f = 0$. Aşadar (observaţia 1.7)

$$\int \lambda f(x)dx = 0 + \mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Pe de altă parte, daca $\lambda = 0$, atunci

$$\lambda\int f(x)dx = \lambda\{F \mid F = \text{primitivă a lui } f\} = \{\lambda F \mid F = \text{primitivă a lui } f\} = \{0\}.$$

Deci, în general, are loc incluziunea

$$\lambda\int f(x)dx \subset \int \lambda f(x)dx,$$

incluziune care este strictă cînd $\lambda = 0$.

1.10. *Exemple de funcţii care nu admit primitive*

a) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

Într-adevăr, imaginea $f(\mathbf{R})$, a lui $\mathbf{R}$ prin f, este egală cu mulţimea $\{-1, 1\}$ formată din punctele -1 şi 1. Cum această mulţime nu este un interval, rezultă (observaţia 1.4 d)) că funcţia f nu admite primitive.

b) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = [x] \overset{\text{def.}}{=} \max\ \{n \in Z \mid n \leqslant x\}$$

($[x]$ = partea întreagă a lui x) nu admite primitive.

Într-adevăr, imaginea $f(\mathbf{R})$ a lui $\mathbf{R}$ prin f, fiind egală cu mulţimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi, nu poate fi un interval. Deci observaţia 1.4 d)) f nu admite primitive.

c) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

Se observă că funcţiile

$$f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbf{R},\quad f_2 : (0, \infty) \to \mathbf{R}$$

definite prin

$$f_1(x) = 0,\quad f_2(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},$$

admit, respectiv, ca primitive funcţiile:

$$F_1(x) = c,\quad F_2(x) = x\sin\frac{1}{x}.$$

Dacă funcţia f ar admite o primitivă: $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, atunci ar rezulta (observatia 1.4. a)) că

$$F|_{(-\infty,0]} = F_1 + c_1 = k \text{ şi } F|_{(0,\infty)} = F_2 + c_2.$$

Orice primitivă este funcţie derivabilă, deci continuă, prin urmare, primitiva F este continuă în origine,

deci

$$F(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\leqslant 0}} F(x) = k,$$

$$F(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x> 0}} F(x) = c_2,$$

de unde

$$k = c_2$$

Aşadar, funcţia F va fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} k, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ k + x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Observînd că

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \; (\forall) x > 0$$

şi ţinînd seamă de faptul că funcţia $x \to \sin \frac{1}{x}$ nu are limită în 0, deducem că funcţia F nu este derivabilă în 0.
Contradicţie cu derivabilitatea lui F pe toată mulţimea $\mathbf{R}$.

1.11 Tabel de integrale nedefinite

Peste tot în acest tabel J este un interval $\subset \mathbf{R}$

1.	$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^n;\ n \in \mathbf{N}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}.$
2.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset (0,\infty)$ $f(x) = x^a;\ a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}.$
3.	$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = a^x;\ a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}.$

4.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R}^*$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + \mathcal{C}.$
5.	$f: J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \{-a, a\}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2},\ \{a \neq 0\}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + \mathcal{C}$
6.	$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2};\ a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}.$
7.	$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}.$
8.	$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}.$
9.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle\vert\, k \in Z \right\}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}.$
10.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}.$
11.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle\vert\, k \in z \right\}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$	$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert + \mathcal{C}.$
12.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln \lvert \sin x \rvert + \mathcal{C}.$
13.	$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}};\ a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}.$
14.	$\begin{matrix} f : J \to \mathbf{R} \\ a > 0 \end{matrix} \begin{cases} J \subset (-\infty, -a) \\ \text{sau} \\ J \subset (a, \infty) \end{cases}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \rvert + \mathcal{C}.$
15.	$f : J \to \mathbf{R};\ J \subset (-a, a), a > 0,$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}.$

Exemplele 13 şi 14 nu sînt evidente şi sînt mai puţin utilizate decît celelalte exemple. Dăm în continuare justificarea exemplului 13 (exemplul 14 se justifică în mod analog).

Derivînd funcţia

$$g(x) \overset{\text{def.}}{=} x + \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad (g(x) > 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R})$$

obţinem

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = g(x) f(x),$$

deci

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = (\ln g(x))',$$

adică funcţia $x \to \ln g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ este o primitivă a funcţiei $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

1.12. *Exerciţii*

I. Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii:

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3, \qquad x \in \mathbf{R};$

2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \qquad x \in (0, \infty);$

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \qquad x \in (-\infty, 0);$

4. $f(x) = a \sin x + b \cos x, \qquad x \in \mathbf{R};$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}, \qquad x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right);$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \qquad x \in (-2, 2);$

7. $f(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}, \qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}, \qquad x \in \mathbf{R};$

10. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 1}, \qquad x \in \mathbf{R};$

11. $f(x) = 2^x + e^x, \qquad x \in \mathbf{R};$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}, \qquad x \in (-1, 1);$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}, \qquad x \in (-\infty, -1);$

14. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x \in (0, \infty);$

15. $f(x) = x\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x^2}, \qquad x \in (0, \infty).$

II. Să se arate că următoarele funcţii *nu* posedă primitive pe **R**:

1. $f(x) = [x] - x, \qquad x \in \mathbf{R},$

unde $[x]$ înseamnă partea întreagă din x.

Indicaţie: Se va folosi acelaşi procedeu ca la exemplul 1.10.

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ x^3, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$

III. Ţinînd seama de faptul că orice funcţie continuă pe un interval I are o primitivă, să se arate că următoarele funcţii au primitive pe **R**:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

IV.

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ și $c \in (a, b)$. Se presupune că f admite primitive pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$. Să se arate că f admite primitive pe $[a, b]$.

2. Fie $f_1 : [a, b] \to \mathbf{R}$, $f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții care admit primitive. Presupunem că există o mulțime finită A de puncte din $[a, b]$ astfel încît

$$(\forall)\ x \in [a, b] \setminus A \Rightarrow f_1(x) = f_2(x).$$

Să se arate că $f_1(x) = f_2(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

3. Să se arate că dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este astfel încît $f^2(x) = 1$ pentru orice x, atunci f are o primitivă dacă și numai dacă $f = 1$ sau $f = -1$.

4. Se consideră o funcție $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ care coincide cu funcția $\sin \dfrac{1}{x}$ dacă $x \neq 0$. Să se arate că pentru ca f să posede o primitivă este necesar și suficient ca $f(0) = 0$.

5. Se consideră funcția $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -1 + \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Să se arate că f nu admite primitive.

6. Să se arate că funcția $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nu admite primitive. Să se deducă de aici că dacă o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ admite primitive nu rezultă, în general, că funcția f^2 admite primitive.

7. Fie $[a, b]$ un interval din $\mathbf{R}$. Să se construiască o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ care să posede următoarele proprietăți:
   i) să fie mărginită,
   ii) să fie continuă în orice punct din intervalul deschis (a, b) și să fie discontinuă în punctele a și b,
   iii) să posede o primitivă,
   iv) să fie egală cu zero în punctele a și b.

8. Fie $[a, b]$ un interval și A o mulțime finită conținută în $[a, b]$. Să se arate că există o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ cu proprietățile:
   i) să fie mărginită,
   ii) să fie continuă pe $[a, b] \setminus A$ și discontinuă în orice punct din A,
   iii) să admită primitive,
   iv) să se anuleze pe A.

9. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție strict crescătoare care admite primitive și fie F o primitivă a lui f. Să se arate că pentru orice $\xi \in (a, b)$ există $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel încît

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = f(\xi).$$

§ 2. INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

În acest paragraf și în următorul admitem următorul rezultat (a cărui demonstrație se va da în capitolul II, teorema 4.8; demonstrație care nu se bazează pe rezultatele din aceste paragrafe):

„*Orice funcție continuă f:* J → R *admite primitive*"

Folosind acest rezultat și formula de derivare a produsului a două funcții, obținem următoarea:

2.1. Teoremă. Formula de integrare prin părți. Dacă $f, g : J \to \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile cu derivate continue, atunci funcțiile fg, $f'g$ și fg' admit primitive și mulțimile lor de primitive sînt legate prin relația:

$$\int f(x) g'(x) \mathrm{d}x = fg - \int g(x) f'(x) \mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Se știe că orice funcție derivabilă este continuă, deci din ipoteză rezultă că funcțiile $f'g$ și fg' sînt continue, prin urmare și funcția

$$(1) \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

este continuă. Atunci, pe baza rezultatului menționat mai sus, funcțiile $f'g$, fg' și $(fg)'$ admit primitive. Aplicînd teorema 1.8 (a) egalității (1), obținem:

$$(2) \qquad \int (fg)'(x)\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Însă (observația 1.7)

$$(3) \qquad \int (fg)'(x)\mathrm{d}x = fg + \mathcal{C}.$$

Din (2), (3) și teorema 1.8 (c) rezultă

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = fg + \mathcal{C} - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x = fg - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

2.2. *Exemple*

1) $\int x \cos x \,\mathrm{d}x = \int x(\sin x)' \,\mathrm{d}x = x \sin x - \int (\sin x)x' \,\mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x =$

$= x \sin x + \cos x + \mathcal{C}.$

2) $$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,(\sin x)'\mathrm{d}x =$$

$$= \cos x \sin x - \int \sin x \,(\cos x)' \,\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x \cos x + \int 1 \,\mathrm{d}x - \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + \mathcal{C}.$$

Analog se arată că

2') $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + \mathcal{C}.$

3) $$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = -\int x^2 (\cos x)'\mathrm{d}x =$$

$$= -x^2 \cos x + \int (\cos x)(x^2)'\mathrm{d}x =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + \mathcal{C}) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + \mathcal{C}.$$

În exemplele (4) și (5) funcțiile sînt considerate pe intervale $I \subset (0, \infty)$.

4) Pentru $n \in \mathbf{N}$, avem $\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x = \int (\ln x)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \mathrm{d}x =$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}(\ln x)'\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \mathcal{C} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + \mathcal{C}.$$

5) $$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \int \cos(\ln x)\cdot(x)'\mathrm{d}x =$$

$$= x \cos(\ln x) - \int x(\cos(\ln x))'\mathrm{d}x =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x.$$

Calculînd

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x \sin(\ln x) - \int x(\sin(\ln x))'\mathrm{d}x =$$

$$= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

și înlocuind în egalitatea de mai sus se obține

$$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + \mathcal{C}.$$

6) Se consideră un interval I din $\mathbf{R}$ astfel încît

$$\sin x \neq 0, \qquad (\forall) x \in I$$

și se cere să se calculeze primitivele funcției

$$x \longrightarrow \frac{1}{\sin^n x}, \quad n \geqslant 2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Scriind

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

avem

$$\frac{1}{\sin^n x} = \frac{1}{\sin^{n-2} x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}$$

și deci

$$\int \frac{1}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x.$$

În a doua integrală din membrul drept aplicăm metoda integrării prin părți, observînd că

$$\frac{\cos x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right)'.$$

Deci

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{1}{n-1}\int\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right)'\cos x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}\int\frac{1}{\sin^{n-1} x}\cdot\sin x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}\int\frac{1}{\sin^{n-2} x}\,dx.$$

De aici deducem

$$\int\frac{1}{\sin^n x}\,dx = \frac{n-2}{n-1}\int\frac{1}{\sin^{n-2} x}\,dx - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}.$$

Notînd, pentru $n \geqslant 1$,

$$I_n = \int\frac{1}{\sin^n x}\,dx$$

relaţia de mai sus devine, pentru $n \geqslant 2$,

$$I_n = \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$$

ceea ce permite să calculăm I_n pentru n par şi să reducem calculul lui I_n pentru n impar la calculul lui

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sin x};$$

I_1 va fi calculată în paragraful următor (exemplul 3.3 (2)).
Vom avea

$$I_2 = \int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + \mathcal{C},$$

$$I_4 = \int\frac{1}{\sin^4 x}\,dx = \frac{2}{3}I_2 - \frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} = -\frac{2}{3}\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \mathcal{C},$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x}\,dx - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$I_5 = \frac{3}{4}I_3 - \frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x} = \frac{3}{8}\int\frac{1}{\sin x}\,dx - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x}.$$

7) Să se calculeze $\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx$, unde funcţia

$$x \longrightarrow \sqrt{x^2+\alpha}$$

se consideră definită pe un interval I pe care $x^2+\alpha > 0$; $\alpha \neq 0$.

Avem

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx + \int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx.$$

Pentru a calcula integrala

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx$$

vom aplica metoda integrării prin părţi. Avem

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \int x\cdot(\sqrt{x^2+\alpha})'\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx.$$

Prin urmare s-a obţinut relaţia

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx + \int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx$$

şi deci

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx.$$

Întrucît

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right) + \mathcal{C},$$

deducem

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right) + \mathcal{C}.$$

8) Să se calculeze $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$, unde funcţia $x \longrightarrow \sqrt{a^2-x^2}$ este definită pe un interval $I \subset (-a, a)$.

Avem

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

Pentru a calcula integrala

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

vom aplica metoda integrării prin părţi. Avem

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\int x(\sqrt{a^2-x^2})'\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Prin urmare s-a obţinut relaţia

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

sau

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}.$$

2.3. *Exerciţii.* Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii:

1. $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
2. $f(x) = x\ln x$, $x > 0$.
3. $f(x) = \ln^2 x$, $x > 0$.
4. $f(x) = x^2\ln x$, $x > 0$.
5. $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, $x > 0$.
6. $f(x) = x^\alpha \ln x$, $x > 0$ unde α este un număr real oarecare.
7. $f(x) = \ln^n x$, $x > 0$, n număr natural, $n \geqslant 2$.

8. $f(x) = x^3 \ln^2 x, \quad x > 0.$

9. $f(x) = x^\alpha (\ln x)^n, \quad x > 0,$

unde $\alpha \in \mathbf{R}$ iar n este un număr natural.

10. $f(x) = x\,e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$

11. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\,e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$

12. $f(x) = (x^3 - x + 1)\,e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$

13. $f(x) = x^n e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbf{R},$

unde n este un număr natural și $\alpha \in \mathbf{R}$.

14. $f(x) = x^2 \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

15. $f(x) = (x^2 - x + 1) \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

16. $f(x) = x^n \sin \alpha x, \quad x \in \mathbf{R}$

unde n este un număr natural iar $\alpha \in \mathbf{R}$.

17. $f(x) = e^x \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

18. $f(x) = e^x \sin 2x, \quad x \in \mathbf{R}.$

19. $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x \in \mathbf{R};\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

20. $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x \in \mathbf{R};\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

21. $f(x) = x\,e^x \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$

22. $f(x) = e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in \mathbf{R}.$

23. $f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbf{R}.$

24. $f(x) = \sin^3 x + 2 \cos^3 x, \quad x \in \mathbf{R}.$

25. $f(x) = 2 \sin^4 x + 3 \cos^4 x, \quad x \in \mathbf{R}.$

26. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty),$

27. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

28. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

29. $f(x) = x^3\sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

30. $f(x) = x^4\sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty).$

31. $f(x) = x^5\sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in (2, +\infty).$

32. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad x \in (-3, 3).$

33. $f(x) = x^2\sqrt{9 - x^2}, \quad x \in (-3, 3).$

§ 3. PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

În multe exemple, funcția $h : I \to \mathbf{R}$, pentru care căutăm o primitivă (funcția care vrem să o „integrăm"), poate fi pusă sub forma

$$(1) \qquad h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall) t \in I,$$

unde $\varphi : I \to J$ este o funcție derivabilă, iar $f : J \to \mathbf{R}$.

Dacă funcția f admite o primitivă F, adică $F' = f$, atunci, ținînd seamă de regula de derivare a funcțiilor compuse, putem scrie

$$h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t)$$

deci $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui h.

Așadar, găsirea unei primitive a lui h s-a redus, în condițiile de mai sus, la găsirea unei primitive a lui f, problemă care (adeseori) este mai simplă decît găsirea unei primitive a lui h.

Se observă deci că o primitivă a lui h se obține compunînd o primitivă F a lui f cu funcția φ.

Să considerăm următorul exemplu:

$$(2) \qquad h(t) = (at + b)^n \quad (\forall) t \in \mathbf{R}$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, n număr natural $\geqslant 1$.

Ținînd seamă că derivata funcției

$$\varphi(t) = at + b \quad (\forall) t \in \mathbf{R}$$

este egală cu constanta a,

$$\varphi'(t) = a \quad (\forall) t \in \mathbf{R}$$

și luînd

$$f(x) = x^n \quad (\forall) x \in \mathbf{R},$$

se observă din (2) că h ar avea forma (1), dacă ar mai fi înmulțită cu constanta a. Deci

$$ah(t) = (at + b)^n \cdot a = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

adică

$$h(t) = \frac{1}{a} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

3.1. Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă). Fie I, J intervale din R și

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

funcții cu proprietățile:

(α) φ derivabilă pe I,

(β) f *admite primitive* (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, adică

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi + \mathscr{C}$$

Demonstrație. Funcția F fiind o primitivă a lui f, este derivabilă pe J și $F' = f$. Însă φ este derivabilă pe I (ipoteza (α)), deci

$$F \circ \varphi \text{ este derivabilă pe } I$$

și

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall) t \in I.$$

Așadar,

funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

3.2. *Observație.* Ținînd seama de faptul că orice funcție continuă admite primitive (observația 1.4. e)), putem aplica teorema precedentă, pentru funcțiile f continue.

3.3. *Observație.* În prima metodă de schimbare de variabilă distingem următoarele date și etape:

a) Se dă o funcție $h : I \to \mathbf{R}$ care are primitive (de exemplu o funcție continuă);

b) Se caută două funcții $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ astfel încît să putem scrie

$$h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (\forall) t \in I;$$

se spune că φ este funcția care schimbă variabila (t în variabila x).

c) Se caută o primitivă F a lui f, adică

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C}.$$

d) În aceste condiții o primitivă H a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ se obține din F prin relația

$$H = F \circ \varphi,$$

adică

$$\int h(t)\mathrm{d}t = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = F \circ \varphi + \mathcal{C}.$$

Uneori se substituie formal

$\varphi(t)$ prin x și $\varphi'(t)\mathrm{d}t$ prin $\mathrm{d}x$

în

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

și se scrie „egalitatea"

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Această „egalitate" nu are sens, deoarece:
membrul stîng reprezintă mulțimea primitivelor funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (care sînt funcții definite pe intervalul I),
iar
membrul drept reprezintă mulțimea primitivelor funcției f (care sînt funcții definite pe intervalul J).
Cele două mulțimi pot fi diferite

chiar în cazul cînd $I = J$ și φ nu este funcția identică.

„Egalitatea" menționată mai înainte este o preluare formală, fără sens, a formulei de schimbare de variabilă în integrala definită:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x,$$

formulă care va fi demonstrată în capitolul II (teorema 4.1.2).

3.4. *Tabel de integrale nedefinite*

$\varphi : I \to \mathbf{R}$ derivabilă cu derivata continuă.

1.	$\int \varphi^n(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + \mathcal{C},$	$n \in \mathbf{N}.$
2.	$\int \varphi^a(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + \mathcal{C},$	$a \in \mathbf{R}\setminus\{-1\},\ \varphi(I) \subset (0, \infty).$
3	$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + \mathcal{C},$	$a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}.$
4.	$\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln \mid \varphi(x) \mid + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \neq 0,\ (\forall) x \in I.$
5.	$\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a} \right\rvert + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \neq \pm a,\ (\forall) x \in I,\ a \neq 0.$
6.	$\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C},$	$a \neq 0.$
7.	$\int \sin\varphi(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos\varphi(x) + \mathcal{C}.$	
8.	$\int \cos\varphi(x)\,\varphi'(x)\mathrm{d}x = \sin\varphi(x) + \mathcal{C}.$	
9.	$\int \dfrac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}\varphi(x) + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \,\middle\vert\, k \in \mathbf{Z}\right\}\ (\forall)\ x \in I.$
10.	$\int \dfrac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}\varphi(x) + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\},\ (\forall)\ x \in I.$
11.	$\int \operatorname{tg}(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\ln \mid \cos \varphi(x) \mid + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \,\middle\vert\, k \in \mathbf{Z}\right\} (\forall)\, x \in I.$
12.	$\int \operatorname{ctg}(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \ln \mid \sin \varphi(x) \mid + \mathcal{C},$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}\ (\forall) x \in I.$
13.	$\int \dfrac{\varphi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}} = \ln\left[\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2}\right] + \mathcal{C},$	$a \neq 0.$
14.	$\int \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln \left\lvert \varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2} \right\rvert + \mathcal{C},$	$a > 0 \begin{cases} \varphi(I) \subset (-\infty, -a) \\ \text{sau} \\ \varphi(I) \subset (a, \infty). \end{cases}$
15.	$\int \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \arcsin \dfrac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C},$	$a > 0,\ \varphi(I) \subset (-a, a).$

3.5. *Exemple care utilizează prima metodă de schimbare de variabilă*

1) Să se calculeze $\int (at+b)^n\, dt$, unde

$$a, b \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 1.$$

Am văzut la începutul acestui paragraf că funcţia aceasta poate fi pusă sub forma

$$\frac{1}{a} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{a}(at+b)^n \cdot a,$$

unde

$$\varphi(t) = at + b, \qquad t \in \mathbf{R},\ (\varphi \text{ este derivabilă})$$

şi

$$f(x) = x^n, \qquad x \in \mathbf{R},\ (f \text{ admite primitive})$$

O primitivă a lui f este funcţia

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

deci, în baza teoremei 3.1 funcţia

$$F(\varphi(t)) = \frac{(at+b)^{n+1}}{n+1}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

este o primitivă a funcţiei

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (at+b)^n \cdot a.$$

Aşadar

$$\int (at+b)^n dt = \frac{(at+b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathcal{C}.$$

Pentru un calcul rapid se procedează astfel

$$\int (at+b)^n dt = \int \frac{1}{a}(at+b)^n \cdot a\, dt = \frac{1}{a}\int (at+b)^n \cdot a\, dt =$$

$$= \frac{1}{a}\int \left[\frac{(at+b)^{n+1}}{n+1}\right]' dt = \frac{(at+b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathcal{C}.$$

2) Fie $u : I \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietăţile:

(α) $\quad u(t) \neq 0,\ (\forall)\ t \in I,$

(β) $\quad u$ derivabilă.

Se cere să se calculeze

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt.$$

Funcţia u' avînd proprietatea lui Darboux (vezi Elemente de analiză matematică cl. a XI-a) şi ţinînd seama că nu se anulează nicăieri (ipoteza (α)), deducem că u' păstrează semn constant pe I, deci

$$\begin{cases} \text{sau } u'(t) > 0 & (\forall)\ t \in I \\ \text{sau } u'(t) < 0 & (\forall)\ t \in I. \end{cases}$$

Dacă $u' > 0$, atunci u este strict crescătoare. Însă u nu se anulează nicăieri (ipoteza (α)), deci

$$\begin{cases} \text{sau } u(t) > 0 & (\forall)\ t \in I \\ \text{sau } u(t) < 0 & (\forall)\ t \in I. \end{cases}$$

Printr-un raţionament similar se ajunge la aceeaşi concluzie şi în cazul cînd $u' < 0$.

Luînd funcţia

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

definită pe $(0, \infty)$ dacă $u > 0$,
sau
definită pe $(-\infty, 0)$ dacă $u < 0$, rezultă că

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = f(u(t)) \cdot u'(t) \qquad t \in I.$$

O primitivă a funcţiei f fiind funcţia

$$F(x) = \ln |x|$$

rezultă, aplicînd teorema 3.1, că funcţia

$$(F \circ u)(t) = \ln |u(t)| \qquad t \in I$$

este o primitivă a funcţiei $\frac{u'}{u}$. Aşadar,

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \ln u + \mathcal{C}.$$

Pe scurt, se poate proceda astfel

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \int (\ln |u(t)|)' dt = \ln \circ u + \mathcal{C}.$$

3) Să se calculeze $\int \frac{\sin 2t\, dt}{1+\sin^2 t}$.

Luăm

$$I = \mathbf{R},\ J = [1,2]$$

şi

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

definite prin

$$\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=\!=} 1 + \sin^2 t,$$

respectiv

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{1}{x}.$$

Atunci f este continuă pe J, φ este derivabilă, iar derivata sa

$$\varphi'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$$

este continuă pe I. Deci sînt îndeplinite condiţiile teoremei 3.1,

$$\int \frac{\sin 2t\, dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Funcţia

$$F(t) \overset{\text{def.}}{=\!=} \ln t,\ t \in [1,2]$$

fiind o primitivă a lui f, rezultă (în baza teoremei 3.1) că

$$\int \frac{\sin 2t\, dt}{1+\sin^2 t} = \ln$$

4) Să se calculeze

$$\int \frac{dt}{\sin t}$$

unde funcţia

$$h(t) = \frac{1}{\sin t}$$

este considerată pe un interval $I \subset \mathbf{R}$ astfel încît

$$\sin t \neq 0 \qquad (\forall) t \in I$$

(de exemplu $I = (0, \pi)$).

Funcţia considerată în acest exemplu nu pare, la prima vedere, a fi de forma

$$(f \circ \varphi)\varphi'.$$

Pentru a o aduce la această formă (sau la combinaţie liniară de funcţii de această formă), vom face unele transformări. De exemplu, scriind

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{t}{2}}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\dfrac{t}{2}\right)}{\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}}$$

şi observînd că

$$\left(\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}\right),$$

obţinem

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}\right)'}{\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}} = \frac{u'(t)}{u(t)},$$

adică funcţia de sub integrală este de tipul considerat în exemplul precedent, unde

$$u(t) = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}.$$

Deci, în baza exemplului precedent, avem

$$\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right| + \mathcal{C}.$$

Se mai poate face şi transformarea

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t}{\sin^2 t} = \frac{\sin t}{1-\cos^2 t} = \frac{\sin t}{(1-\cos t)(1+\cos t)} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin t}{1-\cos t} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin t}{1+\cos t}.$$

Deci

$$\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{1-\cos t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{1+\cos t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(1-\cos t)'}{1-\cos t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{(1+\cos t)'}{1+\cos t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1-\cos t| - \frac{1}{2}\ln(1+\cos t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + \mathcal{C} =$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|^{\frac{1}{2}} + \mathcal{C} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right| + \mathcal{C}.$$

5) Să se calculeze integrala

$$\int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}\,dt,$$

unde funcţia de sub integrală este definită pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$$\int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}\,dt = \int \frac{1+\mathrm{tg}^2 t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}\,dt.$$

Punînd

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R},$$

unde

$$\varphi(t) = \mathrm{tg}\,t,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

deducem că

$$\varphi'(t) = 1 + \mathrm{tg}^2 t$$

şi deci

$$\int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}\,dt = \int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1+\varphi^2(t)}}\,dt = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Întrucît

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \mathcal{C},$$

obținem

$$\int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}\,dt = \ln\left(\mathrm{tg}\, t + \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}\right) + \mathcal{C}.$$

6) Să se calculeze:

$$\int \frac{t^2+1}{t\sqrt{t^4+1}}\,dt,$$

unde funcția

$$t \longrightarrow \frac{t^2+1}{t\sqrt{t^4+1}}$$

este definită pe un interval $I \subset (0, \infty)$.

Punînd

$$I \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R},$$

unde

$$\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=\!=} t - \frac{1}{t}$$

și

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$$

avem

$$\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2}$$

și

$$\frac{t^2+1}{t\sqrt{t^4+1}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi^2(t)+2}} = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Deoarece

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right) + \mathcal{C}$$

deducem, aplicînd teorema 3.1,

$$\int \frac{t^2+1}{t\sqrt{t^4+1}}\,dt = \ln\left(\varphi(t)+\sqrt{2+\varphi^2(t)}\right) + \mathcal{C} =$$

$$= \ln\left(t-\frac{1}{t}+\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}\right) + \mathcal{C} = \ln\frac{t^2-1+\sqrt{t^4+1}}{t} + \mathcal{C}.$$

7) Să se calculeze $\int \sqrt{at^2+bt+c}\,\mathrm{d}t$, $a>0$,

unde funcția

$$t \longmapsto \sqrt{at^2+bt+c}$$

este definită pe un interval I pe care at^2+bt+c este strict pozitivă.

Dacă at^2+bt+c nu are rădăcini reale, atunci I poate fi $\mathbf{R}$, dacă at^2+bt+c are rădăcinile reale α, β cu $\alpha<\beta$, atunci avem

$$I \subset (-\infty, \alpha) \text{ sau } I \subset (\beta, +\infty).$$

Deoarece $a>0$, avem

$$at^2+bt+c = \frac{1}{4a}\left[(2at+b)^2+4ac-b^2\right]$$

și deci

$$t\in I \Rightarrow (2at+b)^2 > b^2-4ac.$$

Considerăm acum funcția

$$\varphi : I \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$\varphi(t) = 2at+b.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\varphi^2(t) > b^2-4ac,$$

$$\varphi'(t) = 2a, \quad t\in I.$$

Punînd

$$f(x) = \sqrt{x^2+4ac-b^2},$$

observăm că f este definită pe orice interval pentru care $x^2 > b^2-4ac$. Deoarece

$$t\in I \Rightarrow \varphi^2(t) > b^2-4ac$$

rezultă că f este definită pe intervalul $\varphi(I)$; avem

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{(2at+b)^2+4ac-b^2} = 2\sqrt{a}\sqrt{at^2+bt+c}$$

și deci

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = 4a\sqrt{a}\sqrt{at^2+bt+c}.$$

Din exemplul 2.2 (7) deducem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4ac-b^2} + \frac{4ac-b^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+4ac-b^2}\right| + \mathcal{C}$$

și deci din teorema 3.1, obținem

$$\int\sqrt{at^2+bt+c}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4a}\Big[(2at+b)\sqrt{at^2+bt+c} +$$

$$+\frac{4ac-b^2}{2\sqrt{a}}\ln\left|2at+b+2\sqrt{a}\sqrt{at^2+bt+c}\right|\Big] + \mathcal{C}.$$

8) Să se calculeze

$$\int\sqrt{at^2+bt+c}\,\mathrm{d}t,\ a<0,$$

unde funcția

$$t\mapsto\sqrt{at^2+bt+c}$$

este definită pe un interval I pe care at^2+bt+c este strict pozitivă.

Aceasta are sens numai dacă rădăcinile trinomului sînt reale și distincte. În acest caz dacă rădăcinile sînt α și β, $\alpha<\beta$, atunci

$$I\subset(\alpha,\beta)$$

și

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Deoarece $a < 0$, avem

$$at^2 + bt + c = -\frac{1}{4a}(\delta^2 - (2at + b)^2),$$

unde

$$\delta = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Considerăm acum funcţia

$$\varphi : I \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$\varphi(t) = 2at + b.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\varphi^2(t) < \delta^2, \quad t \in I,$$

$$\varphi'(t) = 2a.$$

Punînd

$$f(x) = \sqrt{\delta^2 - x^2},$$

observăm că f este definită pe orice interval pe care $x^2 < \delta^2$. Deoarece

$$t \in I \Rightarrow \varphi^2(t) < \delta^2$$

rezultă că f este definită pe intervalul $\varphi(I)$ şi avem

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{\delta^2 - (2at + b)^2} = 2\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c}$$

şi deci

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 4a\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c}.$$

Din exemplul (2.8) deducem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{\delta^2 - x^2} + \frac{\delta^2}{2}\arcsin\frac{x}{\delta} + \mathcal{C}$$

şi deci, din teorema 3.1, obţinem

$$\int\sqrt{at^2 + bt + c}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4a\sqrt{-a}}\left[(2at + b)\sqrt{-a}\sqrt{at^2 + bt + c} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2 - 4ac}{2}\arcsin\frac{2at + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right] + \mathcal{C},$$

sau

$$\int\sqrt{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \right.$$

$$\left. + \frac{4ac - b^2}{2\sqrt{a}}\ln\left(2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\right] + \mathcal{C}.$$

3.6. *Exerciţii*

I. Să se calculeze, utilizînd prima metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcţii:

1. $f(x) = \dfrac{4x + 2}{x^2 + x + 3}$, $x \in \mathbf{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{8x^3 + 6x}{2x^4 + 3x^2 + 5}$, $x \in \mathbf{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$, $x \in \mathbf{R}$.
4. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
6. $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
7. $f(x) = 2x\sin(x^2 + 1)e^{\cos(x^2 + 1)}$ $x \in \mathbf{R}$.
8. $f(x) = x^2 e^{x^3}$, $x \in \mathbf{R}$.
9. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
10. $f(x) = \sin x \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.
11. $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.
12. $f(x) = \sin^3 x$, $x \in \mathbf{R}$.
13. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
14. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
15. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
16. $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^3}}$, $x \in (0, 1)$.
18. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^4}$, $x \in \mathbf{R}$.
19. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^6}$, $x \in \mathbf{R}$.
20. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$, $x \in (-1, 1)$.
21. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$, $x \in (-\infty, 0)$.
22. $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$, $x \in (e, \infty)$.

23. $f(x) = \cos x \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$.

24. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$, $x \in (0, \pi)$.

25. $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$, $x \in (0, \infty)$.

26. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

27. $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$, $x \in (2, \infty)$.

28. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, $x \in \mathbf{R}$.

29. $f(x) = \sqrt{-x^2+3x-2}$, $x \in (1, 2)$.

30. $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$, $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

31. $f(x) = x^2\sqrt{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbf{R}$.

32. $f(x) = x\sqrt{(x-1)^3}$, $x \in (1, \infty)$.

33. $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, \infty)$.

34. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$, $x \in (0, 1)$.

35. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$, $x \in (0, \infty)$.

§4. A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

Am văzut că în prima metodă de schimbare de variabilă se căuta să se pună funcţia de integrat, h, sub forma

$$h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

şi o primitivă H a lui h se obţinea compunînd o primitivă F a lui f cu funcţia φ:

$$H = F \circ \varphi.$$

Există situaţii în care este mai uşor de găsit o primitivă a funcţiei $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ decît o primitivă a funcţiei f.

În a doua metodă de schimbare de variabilă se cunoaşte o primitivă H a funcţiei $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ şi se cere să se găsească o primitivă F a funcţiei f; F se obţine din H astfel

$$F = H \circ \varphi^{-1}.$$

4.1. Teoremă (A doua metodă de schimbare de variabilă). Fie I, J intervale din $\mathbf{R}$ şi

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

funcţii cu proprietăţile:

a) **φ bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I,**

b) **funcţia $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (*fie H o primitivă a sa*).**

Atunci

(1) **funcţia f admite primitive,**

(2) **funcţia $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f, adică**

$$\int f(x)\,dx = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C}.$$

Demonstraţie. Funcţia H fiind o primitivă a lui h este derivabilă şi $H' = h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Însă din ipoteza (a) rezultă că funcţia inversă φ^{-1} este derivabilă pe J, deci

$$H \circ \varphi^{-1} \text{ este derivabilă pe } J$$

şi

$$(H \circ \varphi^{-1})' \cdot (x) = H'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})' \cdot (x) =$$
$$= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) =$$
$$= f(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)\ (\forall) x \in J.$$

Aşadar, funcţia $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f.

4.2. *Observaţie.* Ipotezele (a) şi (b) pot fi înlocuite cu următorul grup mai restrictiv de ipoteze:

a') φ bijectivă, derivabilă cu derivata continuă şi nenulă pe I,

b') f continuă pe J.

Ipotezele a'), b') implică atît ipotezele a), b) din a doua metodă de schimbare de variabilă cît şi ipotezele (α), (β) din prima metodă de schimbare de variabilă:

$$((a'), (b')) \begin{array}{l} \nearrow ((a), (b)) \\ \searrow ((\alpha), (\beta)). \end{array}$$

4.3. *Observaţie.* Fie f şi φ funcţii care verifică ipotezele (a') şi (b'). Atunci pentru o funcţie $F\colon J \to \mathbf{R}$ are loc echivalenţa:

F este primitivă a lui $f \Leftrightarrow F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\varphi'$.

Cu alte cuvinte:

„*În ipotezele* a'), b'), *cele două metode de schimbare de variabilă sînt echivalente*".

Implicaţia de la stînga la dreapta reprezintă prima metodă de schimbare de variabilă, iar implicaţia de la dreapta la stînga rezultă din a doua metodă de schimbare de variabilă.

Într-adevăr, să presupunem că funcţia $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\varphi'$ şi să notăm

$$H \overset{\text{def.}}{=} F \circ \varphi.$$

Atunci, în baza celei de-a doua metode de schimbare de variabilă, funcţia

$$H \circ \varphi^{-1} = F \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = F$$

este o primitivă a lui f.

4.4. *Observaţie.* În a doua metodă de schimbare de variabilă se remarcă următoarele date şi etape:

a) Se dă o funcţie $f : J \to \mathbf{R}$ care are primitive (de exemplu o funcţie continuă);

b) Se caută o funcţie $\varphi : I \to J$ care este derivabilă şi cu derivata nenulă. În acest caz, φ' (avînd proprietatea lui Darboux) păstrează semn constant, deci φ este strict monotonă, prin urmare există φ^{-1}; se spune că $\psi = \varphi^{-1} : J \to I$ este funcţia care schimbă variabila (x în variabila t);

c) Se caută o primitivă H a funcţiei

$$(f \circ \varphi)\varphi',$$

adică

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = H + \mathcal{C}.$$

d) În aceste condiţii o primitivă F a lui f se obţine din H prin relaţia

$$F = H \circ \varphi^{-1},$$

adică

$$\int f(x)\mathrm{d}x = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C}.$$

4.5. EXEMPLE CARE UTILIZEAZĂ A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

1) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$

Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{e^{2x}}{1+e^x},$$

este continuă. Luăm funcţia $\varphi : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = \ln t.$$

Această funcţie este bijectivă, inversa sa fiind

$$\varphi^{-1}(x) = e^x \quad (\forall) x \in \mathbf{R},$$

iar derivata sa

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} \quad (\forall),\ t \in (0, \infty)$$

este nenulă pe $(0, \infty)$.

Căutăm o primitivă a funcţiei

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t}.$$

Avem

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t}{1+t}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = t - \ln(1+t) + \mathcal{C}.$$

Notînd cu

$$H(t) = t - \ln(1+t)$$

primitiva lui $h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, rezultă în baza teoremei 4.1 că funcţia

$$(H \circ \varphi^{-1})(x) = e^x - \ln(1 + e^x)$$

este o primitivă a funcţiei f. Deci

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = e^x - \ln(1+e^x) + \mathcal{C},$$

2) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x.$

Luăm $(1, \infty) \xrightarrow{\varphi} (0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, unde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \quad \text{şi } \varphi(t) = t^2 - 1,$$

deci

$$\varphi^{-1}(x) = \sqrt{1+x}, \quad \varphi'(t) = 2t.$$

Avînd

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{(t^2-1)t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\frac{t-1}{t+1} + \mathcal{C}$$

rezultă

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} + \mathcal{C}.$$

3) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Funcţia $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ **definită prin**

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

este continuă. Luăm $I = J = (0, \infty)$ **şi** $\varphi : I \to J$ **definită prin**

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Observăm că φ **este bijectivă, derivabilă, iar** φ' **este continuă şi nenulă pe** I:

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Deci (observaţia 4.2) sînt îndeplinite condiţiile teoremei 4.1. Observăm că

$$(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)=\frac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=-(\sqrt{1+t^2})'$$

deci o primitivă a funcţiei $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ este funcţia $t\to-\sqrt{1+t^2}$, prin urmare

$$\int(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=-\sqrt{1+t^2}+\mathcal{C}.$$

Aplicînd teorema 4.1 şi ţinînd seamă că $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$, obţinem

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\mathcal{C}.$$

4) Să se calculeze

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad(a>0).$$

Funcţia $f:(-a,a)\to\mathbf{R}_+$ definită prin

$$f(x)\overset{\text{def.}}{=\!=}\sqrt{a^2-x^2}$$

este continuă. Funcţia $\varphi:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to(-a,a)$ definită prin

$$\varphi(t)=a\sin t$$

este bijectivă, derivabilă, cu derivata continuă şi

$$\varphi'(t)=a\cos t\neq0,\quad(\forall)t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t=a^2\cos^2 t,$$

deci (vezi exemplul 2.2 (2))

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\cdot\cos t\right)+\mathcal{C}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+\mathcal{C}.$$

Aplicînd teorema 4.1 şi ţinînd seama că

$$\varphi^{-1}(x)=\arcsin\frac{x}{a},$$

obţinem

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\left(\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)^2}\right]+\mathcal{C}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]+\mathcal{C}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+\mathcal{C}.$$

5) Să se calculeze $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x,\ a>0,$

unde funcţia

$$x\to f(x)=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

este definită pe intervalul $(-a,a)$.

Funcţia

$$\varphi:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-a,a)$$

definită prin

$$\varphi(t)=a\sin t$$

este bijectivă, derivabilă şi

$$\varphi'(t)=a\cos t\neq0,\quad(\forall)t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Avem

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=\sqrt{\frac{a-a\sin t}{a+a\sin t}}\cdot a\cos t=$$

$$=a\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}\cos t=a\,\frac{\cos^2 t}{1+\sin t}=a\,(1-\sin t),$$

şi deci

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=a\int(1-\sin t)\mathrm{d}t=a\,(t+\cos t)+\mathcal{C}.$$

Deoarece

$$\varphi^{-1}(x)=\arcsin\frac{x}{a}$$

deducem, aplicînd teorema 4.1

$$\int f(\varphi)(x)\mathrm{d}x=a\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+\mathcal{C}.$$

6) Să se calculeze $\displaystyle\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x,$

unde $a>0$ şi $b^2-4ac<0$.

Funcţia

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

este definită şi continuă pe $\mathbf{R}$.

Considerăm următoarea schimbare de variabilă

$$\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$\Psi(x) = \sqrt{a}\,x + \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Avem

$$\Psi'(x) = \sqrt{a} + \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Să arătăm că $\psi'(x) \neq 0 (\forall) x \in \mathbf{R}$. Dacă ar exista $x_0 \in I$ astfel încît $\psi'(x_0) = 0$, atunci

$$2\sqrt{a}\sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c} + 2ax_0 + b = 0,$$

deci

$$4a(ax_0^2 + bx_0 + c) = (2ax_0 + b)^2,$$

de unde ar rezulta egalitatea

$$b^2 - 4ac = 0$$

care contrazice ipoteza din enunţ. Avînd

$$\psi'(x) \neq 0 \quad (\forall) x \in \mathbf{R}$$

şi

$$\psi'\left(-\frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} > 0$$

rezultă

$$\psi'(x) > 0 \ (\forall) x \in \mathbf{R},$$

deci

(α) ψ este strict crescătoare.

Pe de altă parte, pentru orice $x \neq 0$ avem

$$\psi(x) = \frac{ax^2 - (ax^2 + bx + c)}{\sqrt{a}x - \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{x\left(-b - \frac{c}{x}\right)}{\sqrt{a}x - |x|\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}} =$$

$$= \frac{-b - \frac{c}{x}}{\sqrt{a} - \frac{|x|}{x}\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}},$$

deci

(β) $$\lim_{x \to -\infty} \psi(x) = -\frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Evident

(γ) $$\lim_{x \to \infty} \psi(x) = +\infty.$$

Din (α), (β), (γ) rezultă că

$$\psi(\mathbf{R}) = \left(-\frac{b}{2\sqrt{a}}, \ +\infty\right)$$

iar funcţia

$$\varphi \overset{\text{def.}}{=} \psi^{-1} : \left(-\frac{b}{2\sqrt{a}}, \ +\infty\right) \to \mathbf{R},$$

satisface condiţiile teoremei 4.1. Punînd

$$t = \Psi(x)$$

găsim

$$(t - \sqrt{a}\,x)^2 = ax^2 + bx + c$$

şi deci

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}.$$

Deoarece

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (t - \sqrt{a}\,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

deducem

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{a}}{2}\varphi^2(t) + \int t\varphi'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{a}}{2}\varphi^2(t) + t\varphi(t) - \int \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Dar

$$\int \varphi(t)\mathrm{d}t = \int \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\,t + b}\mathrm{d}t = \frac{1}{4a}\int \frac{4at^2 - b^2}{2\sqrt{at} + b}\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{4a}\int \frac{b^2 - 4ac}{2\sqrt{at} + b}\mathrm{d}t = \frac{1}{4a}\int (2\sqrt{a}t - b)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{4a}(b^2 - 4ac)\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}t + b) + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{1}{4a}(\sqrt{a}t^2 - bt) + \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}t + b) + \mathcal{C},$$

deci

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{a}}{2}\varphi^2(t) + t\varphi(t) - \frac{\sqrt{a}\,t^2}{4a} + \frac{bt}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}t + b) + \mathcal{C}.$$

Aplicînd teorema 4.1 obţinem

$$\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a}}{2}x^2 + x(\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}) -$$

$$-\frac{\sqrt{a}}{4a}(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c})^2+\frac{b}{4a}(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c})+$$

$$+\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}\ln[2\sqrt{a}(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c})+b]+\mathcal{C}=$$

$$=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{1}{2}x\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}-$$

$$-\frac{c\sqrt{a}}{4a}+\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c})+\mathcal{C}$$

adică

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,x\mathrm{d}x=\frac{1}{4a}\Big[(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}+$$

$$+\frac{4ac-b^2}{2\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{x^2+bx+c})\Big]+\mathcal{C}.$$

4.6. *Exerciții*

Să se calculeze, utilizînd a doua metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.
2. $f(x)=\cos^2\sqrt{x}$, $\quad x\in(0,\infty)$.
3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$, $\quad x\in\mathbb{R}$.
5. $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.
6. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.
7. $f(x)=\dfrac{x^4\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$, $\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.
8. $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}}$, $\quad x\in(0,\infty)$.

§5. INTEGRAREA FUNCȚIILOR RAȚIONALE

5.1. Reamintim că o funcție $f:I\to\mathbb{R}$, unde I este un interval din $\mathbb{R}$, se numește *rațională* dacă există două polinoame P și Q cu coeficienți numere reale, astfel încît

$$(\forall)\ x\in I\Rightarrow Q(x)\neq 0 \text{ și } f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

O funcție rațională f se va numi *simplă* dacă este de una din următoarele forme:

i) $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$;

ii) $f(x)=\dfrac{A}{(x-a)^n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$;

iii) $f(x)=\dfrac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$ și $b^2-4ac<0$.

Se arată că orice funcție rațională se scrie ca o sumă finită de funcții raționale simple și prin aceasta calculul primitivelor unei funcții raționale se reduce la calculul primitivelor funcțiilor raționale simple.

Vom da în continuare metode de calcul a primitivelor funcțiilor de tipul ii) și iii) analizînd pe rînd diverse cazuri particulare.

5.2. Dacă funcția rațională $f:I\to\mathbb{R}$ este de forma

$$f(x)=\frac{1}{x-a}$$

și

$$I\subset(a,\infty) \text{ sau } I\subset(-\infty,a)$$

avem

$$\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x=\ln|x-a|+\mathcal{C},$$

adică

$$\int\frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x=\ln(x-a)+\mathcal{C} \text{ dacă } I\subset(a,\infty)$$

și

$$\int\frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x=\ln(a-x)+\mathcal{C} \text{ dacă } I\subset(-\infty,a).$$

Dacă funcția rațională $f:I\to R$ este de forma

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)^n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$$

și

$$I\subset(a,\infty) \text{ sau } I\subset(-\infty,a),$$

avem

$$\int\frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+\mathcal{C}.$$

5.3. Dacă funcția rațională $f:I\to\mathbb{R}$ este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \; a \neq 0$$

şi

$$I \subset \mathbf{R},$$

atunci se ştie că

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}.$$

Dacă funcţia raţională $f : I \to \mathbf{R}$ ($I \subset \mathbf{R}$) este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbf{N}, \; n \geqslant 2$$

vom da o formulă de recurenţă pentru calculul lui

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\,dx.$$

Înmulţind şi împărţind mai întîi cu a^2, apoi adunînd şi scăzînd x^2 la numărător obţinem

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2}{(x^2 + a^2)^n}\,dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n}\,dx\right].$$

Primitiva din paranteză se va calcula prin părţi

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \cdot x + \int (x)' \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Deci

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}\right].$$

Înainte de a trece la calcularea primitivelor celorlalte funcţii de tipul iii) vom face următoarele observaţii.

Observaţii: (α) Funcţiile de tipul iii) pot fi considerate (dacă se dă a factor comun forţat la numitor) ca fiind de forma

$$f(x) = \frac{B'x + C'}{(x^2 + px + q)^n}$$

cu

$$p^2 - 4q = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} < 0.$$

(β) Dacă $p^2 - 4q < 0$, atunci $x^2 + px + q$ se poate scrie ca suma de două pătrate:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = \varphi^2(x) + \delta^2,$$

unde

$$\varphi(x) = x + \frac{p}{2} \text{ şi } \delta = \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}} > 0.$$

5.4. Dacă funcţia $f : I \to \mathbf{R}$ ($I \subset \mathbf{R}$) este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

atunci folosind observaţia (β), avem

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + \delta^2}\,dx = \frac{1}{\delta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi(x)}{\delta} + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + \mathcal{C}.$$

Dacă funcţia raţională f este de tipul

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \; n \geqslant 2,$$

cu $p^2 - 4q < 0$, atunci în baza observaţiei (β), putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n},$$

unde

$$\varphi(x) = x + \frac{p}{2} \quad \text{şi} \quad \delta^2 = \frac{4q - p^2}{4}.$$

Deci

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n}\,dx = \int \frac{\varphi'(x)}{[\varphi^2(x) + \delta^2]^n}\,dx = F \circ \varphi + \mathcal{C}$$

unde F este o primitivă a funcţiei

$$u \to \frac{1}{(u^2 + \delta^2)^n},$$

al cărei calcul a fost descris în 4.3.

Dacă funcţia raţională f este de tipul

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci, înmulţind şi împărţind întîi cu 2, apoi adunînd şi scăzînd p, obţinem

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}.$$

A doua funcţie din membrul drept este, abstracţie făcînd de constanta $\frac{p}{2}$, de tipul precedent.

Pentru a calcula o primitivă a primei funcţii din membrul drept, facem schimbarea de variabilă

$$\Psi(x) = x^2 + px + q,$$

şi obţinem:

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{\Psi'(x)}{\Psi^n(x)} dx = -\frac{1}{(n-1)\Psi^{n-1}(x)} + \mathcal{C} =$$

$$= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \mathcal{C}.$$

5.5. *Exemplu.* Se consideră funcţia raţională

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Avem, aplicînd procedeul de mai sus

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

şi deci

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx.$$

Aplicînd acum procedeul de la 5.4 funcţiei

$$x \to \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

vom avea

$$(2x+1)(x^2+x+1)' = 4(x^2+x+1) - 3$$

şi deci

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{4(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{3} \int (2x+1) \cdot \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} dx.$$

Aplicînd formula integrării prin părţi la termenul al doilea din membrul drept avem

$$\frac{1}{3} \int (2x+1) \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

şi deci

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

Aplicînd acum procedeul de la 5.3 obţinem:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + \mathcal{C}.$$

În final găsim

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C} = \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$

Admitem fără demonstraţie următorul rezultat:

5.6. Teorema (Descompunerea funcţiilor raţionale în funcţii raţionale simple.) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie raţională

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0 \quad (\forall)\ x \in I)$$

unde P şi Q sînt polinoame prime între ele. Presupunem că descompunerea lui Q în factori primi are forma

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_q)^{\alpha_q} \cdot (x^2 + M_1 x + N_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r}.$$

Atunci f se descompune, în mod unic,

$$f(x) = L(x) + \sum_{n=1}^{q} \left[\frac{A_1^n}{(x - a_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_2^n}{(x - a_n)^{\alpha_n - 1}} + \dots + \frac{A_n^n}{x - a_n}\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \left[\frac{B_1^m x + C_1^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m}} + \frac{B_2^m x + C_2^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m - 1}} + \dots + \frac{B_m^m x + C_m^m}{x^2 + M_m x + N_m}\right]$$

unde L este un polinom cu coeficienţi reali, iar a_m, M_m, N_m, A_i^n, B_j^m, C_j^m sînt constante reale şi $M_m^2 - 4N_m < 0$.

5.7. *Observaţii.* Practic, pentru a realiza o descompunere a unei funcţii raţionale ca sumă de funcţii raţionale simple se procedează astfel:

Se face împărţirea cu rest a lui P la Q. Vom avea

$$P = L \cdot Q + R$$

unde R este un polinom de grad strict mai mic decît gradul lui Q şi deci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

i) Se scrie formula de descompunere ca în enunţul teoremei în care coeficienţii $A, \dots, B, \dots, C, \dots$ sînt nedeterminaţi.

ii) Se aduce la acelaşi numitor în membrul drept şi se pune condiţia ca numărătorul fracţiei care rezultă în membrul drept să coincidă cu numărătorul fracţiei din membrul stîng, de fapt aceasta revine la a scrie că două polinoame coincid.

iii) Se obţine un sistem liniar în care necunoscutele sînt coeficienţii cătaţi $A, \ldots, B, \ldots, C, \ldots$.

Deci, existenţa şi unicitatea soluţiei acestui sistem este echivalentă cu existenţa şi unicitatea coeficienţilor din teorema 5.6.

Procedeul descris mai sus de găsire a coeficienţilor $A, \ldots, B, \ldots, C, \ldots$ se numeşte *metoda coeficienţilor nedeterminaţi*.

5.8. *Exemple*

1) Să se calculeze

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

pe un interval I care nu conţine punctul $x = -1$.

Vom avea

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1} = x + \frac{-x+1}{x^3+1}$$

şi din $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ deducem că are loc o descompunere de forma

$$\frac{-x+1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Aducînd la acelaşi numitor în membrul drept obţinem

$$-x + 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1),\ (\forall)x \in I$$

şi deci

$$-x + 1 = x^2(A + B) + x(-A + B + C) + A + C,\ (\forall)x \in I,$$

ceea ce conduce la sistemul

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -A + B + C = -1, \\ A + C = 1. \end{cases}$$

Un calcul simplu ne dă $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{3}$.

Deci

$$f(x) = x + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Prin urmare $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \mathcal{C}.$

2) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{x^3+x^5}\,\mathrm{d}x$$

pe un interval care nu conţine punctul $x = 0$.

Divizorii ireductibili ai lui $x^3 + x^5$ sînt x şi $x^2 + 1$. Primul are ordinul de multiplicitate 3, iar al doilea are ordinul 1. Avem deci

$$\frac{1}{x^3+x^5} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Aducînd la acelaşi numitor în membrul drept obţinem:

$$1 = A_1x^2(x^2+1) + A_2x(x^2+1) + A_3(x^2+1) + x^3(Bx+C)$$

şi deci sistemul

$$\begin{cases} A_1 + B = 0, \\ A_2 + C = 0, \\ A_1 + A_3 = 0, \\ A_2 = 0, \\ A_3 = 1, \end{cases}$$

a cărui soluţie este

$$A_1 = -1,\ A_2 = 0,\ A_3 = 1,\ B = 1,\ C = 0.$$

Deci

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2+1}.$$

Prin urmare $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^5} = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} - \frac{1}{2x^2} + \mathcal{C}.$

3) Să se calculeze

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Divizorii ireductibili ai lui x^4+x^2+1 sînt x^2+x+1 şi x^2-x+1. Fiecare dintre aceşti divizori are ordinul de multiplicitate 1. Avem deci

$$f(x) = \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{B'x+C'}{x^2-x+1}.$$

Aducînd la acelaşi numitor în membrul drept obţinem:

$$x + 1 = (Bx + C)(x^2 - x + 1) + (B'x + C')(x^2 + x + 1)$$

care conduce la sistemul

$$\begin{cases} B + B' = 0 \\ -B + C + B' + C' = 0 \\ B - C + B' + C' = 1 \\ C + C' = 1 \end{cases}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} B + B' = 0, \\ -B + B' = -1, \\ C + C' = 1, \\ -C + C' = 1 \end{cases}$$

a cărui soluţie este

$$B = \frac{1}{2},\ B' = -\frac{1}{2},\ C = 0,\quad C' = 1.$$

Avem

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}\,\frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

de unde

$$\int\frac{x+1}{x^4+x+1}\,dx=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}.$$

4) Să se calculeze

$$\int\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx$$

pe intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

Facem substituţia

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x\in(-\pi,\pi)$$

obţinem

$$x=\varphi(t)=2\operatorname{arctg}t,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$$

şi

$$\varphi'(t)=\frac{2}{1+t^2}.$$

Punînd

$$f(x)=\frac{1}{2\sin x-\cos x+5},\quad x\in(-\pi,\pi),$$

obţinem

$$f(x)=\frac{1}{2\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+5},$$

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=\frac{1}{\dfrac{4t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}=\frac{2}{6t^2+4t+4}=\frac{1}{3t^2+2t+2}.$$

Deoarece

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\int\frac{1}{3t^2+2t+2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+\mathcal{C},$$

obţinem

$$\int f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+\mathcal{C}.$$

5.9. *Exerciţii.* Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii raţionale, utilizînd descompunerea în funcţii raţionale simple:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$, $x\in\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$, $x\in(-\infty,\ 0)$.
3. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x^2-x+1)^2}$, $x\in(-\infty,\ 1)$.
4. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^3(x^2+3x+2)}$, $x\in(-2,\ -1)$.
5. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
6. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
7. $f(x)=\dfrac{x^7+1}{x^2(x-1)^3}$, $x\in(0,\ 1)$.
8. $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$, $x\in(0,\ \infty)$.
9. $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, $x\in(0,\ \infty)$.
10. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+x^2(1-\sqrt{2})+x(1-\sqrt{2})+1}$, $x\in(0,\ \infty)$.
11. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$, $x\in(0,\ \infty)$.
12. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$, $x\in\mathbb{R}$.
13. $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+4x+5}$, $x\in\mathbb{R}$.
14. $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+3)(x+1)}$, $x\in(0,\ \infty)$.
15. $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$, $x\in(0,\ \infty)$.

5.10. *Exerciţii.* Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii reductibile la funcţii raţionale:

I.

1. $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in(-1,\ \infty)$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$, $x\in\left(0,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

5. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(7x - 10 - x^2)^3}}$, $\quad x \in (2,5)$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{1 - 2x - x^2}}$, $\quad x \in (0, -1 + \sqrt{2})$.

7. $f(x) = \dfrac{x}{(1 - x^3)\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad x \in (-1, 1)$.

8. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

9. $f(x) = x^2\sqrt{-x^2 + 4x + 5}$, $\quad x \in (-1,5)$.

10. $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}$, $\quad x \in (-1,5)$.

II.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3 + \cos x}$, $\quad x \in (-\pi, \pi)$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x - 2\cos x + 3}$, $\quad x \in (-\pi, \pi)$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x\,(2 + \cos x - 2\sin x)}$, $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

7. $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}$, $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\sin x - \cos x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. $f(x) = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2 + 2a\sin x}$, $\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

unde a este un număr real $0 < a < 1$.

II.
Funcții integrabile

§ 1. DIVIZIUNI

1.1. D e f i n i ț i e. Fie $[a, b]$ un interval închis și mărginit din $\mathbb{R}$. Se numește d i v i z i u n e a intervalului $[a, b]$ un sistem de puncte

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

din $[a, b]$ astfel încît

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Uneori vom nota diviziunile astfel:

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

se numește n o r m a diviziunii Δ și se notează: $\| \Delta \|$.

Așadar,

$$\| \Delta \| \stackrel{\text{def.}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

1.2. *Exemple.* Sistemele de puncte

$$\Delta_1 = (0, 1),$$

$$\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right),$$

$$\Delta_3 = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

sînt diviziuni ale intervalului $[0, 1]$. Aceste diviziuni au respectiv normele:

$$\| \Delta_1 \| = 1; \quad \| \Delta_2 \| = \frac{1}{2}; \quad \| \Delta_3 \| = \frac{1}{5}.$$

1.3. *Observații*: α) Dacă $[a, b]$ este un interval, atunci $\Delta = (a, b)$ este singura diviziune a lui $[a, b]$ de normă egală cu $b - a$. Orice altă diviziune a intervalului $[a, b]$ va avea norma strict mai mică decît $b - a$.

β) Pentru orice număr real $r > 0$ există diviziuni Δ ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\| \Delta \| < r.$$

Într-adevăr, să notăm cu L lungimea intervalului $[a, b]$:

$$L = b - a$$

și să luăm un număr natural n astfel încît

$$n > \frac{L}{r}.$$

Împărțind intervalul $[a, b]$ în n părți egale, obținem diviziunea

$$\Delta = \left(a,\ a + \frac{L}{n},\ a + 2\frac{L}{n},\ \ldots,\ a + (n-1)\frac{L}{n},\ b\right),$$

care are norma egală cu $\frac{L}{n}$. Deci

$$\| \Delta \| = \frac{L}{n} < r.$$

1.4. *Exerciții.* Determinați normele diviziunilor:

$$\Delta_1 = \left(0,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1\right),$$

$$\Delta_2 = \left(0,\ \frac{2}{13},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right),$$

$$\Delta_3 = (1,\ e,\ e^2, \ldots, e^{11}),$$

$$\Delta_4 = \left(0,\ \frac{1}{2^{10}},\ \frac{1}{2^9},\ \ldots,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2}, 1\right).$$

1.5. Definiție. Fie

$$\Delta_1 = (x_0,\ x_1, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n)$$

și

$$\Delta_2 = (y_0,\ y_1, \ldots,\ y_{m-1},\ y_m)$$

două diviziuni ale unui interval $[a, b]$.

Se spune că Δ_2 este mai fină decît Δ_1 dacă orice punct al diviziunii Δ_1 este și punct al diviziunii Δ_2, adică mulțimea

$$\{x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n\}$$

este inclusă în mulțimea

$$\{y_0,\ y_1, \ldots,\ y_m\}.$$

Dacă Δ_2 este mai fină decît Δ_1 vom scrie

$$\Delta_1 \subset \Delta_2.$$

1.6. *Exemplu.* Fie

$$\Delta_1 = \left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right),$$

$$\Delta_2 = \left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ 1\right),$$

$$\Delta_3 = \left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right)$$

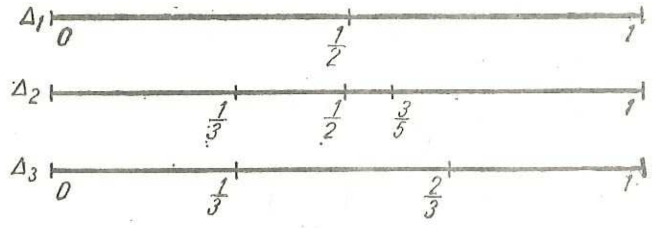


Fig. II.1.

diviziuni ale intervalului [0,1]. Atunci

$$\Delta_1 \subset \Delta_2,\quad \Delta_1 \not\subset \Delta_3,\quad \Delta_2 \not\subset \Delta_3.$$

1.7. *Observații.* α) Dacă Δ, Δ' sînt diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\Delta \subset \Delta',$$

atunci

$$\| \Delta' \| \leqslant \| \Delta \|.$$

Deci, prin trecere la o diviziune mai fină, norma diviziunii se micșorează.

β) Din $\| \Delta' \| < \| \Delta \|$ nu rezultă, în general, că $\Delta \subset \Delta'$. De exemplu, dacă

$$\Delta = \Delta_1 = \left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

$$\Delta' = \Delta_3 = \left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right),$$

atunci

$$\| \Delta' \| = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \| \Delta \|$$

și totuși

$$\Delta \not\subset \Delta'.$$

1.8. Definiție. Fie

$$\Delta_1 = (x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n)$$

și

$$\Delta_2 = (y_0,\ y_1, \ldots,\ y_m)$$

două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Diviziunea formată din mulțimea

$$\{x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n\} \cup \{y_0,\ y_1, \ldots,\ y_m\},$$

ale cărei elemente sînt luate în ordine strict crescătoare, se numește reuniunea diviziunilor Δ_1, Δ_2 și se notează

$$\Delta_1 \cup \Delta_2.$$

1.9. *Exemplu.* Dacă

$$\Delta_1 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\Delta_2 = \left(1, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_3 = (1, \sqrt{3}, 2)$$

sînt diviziuni ale intervalului $[1, 2]$, atunci

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_1 \cup \Delta_3 = \left(1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right),$$

$$\Delta_2 \cup \Delta_3 = \left(1, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2\right).$$

1.10. *Observații.* α) Reuniunea $\Delta_1 \cup \Delta_2$ a două diviziuni este mai fină decît fiecare din diviziunile Δ_1, Δ_2:

$$\Delta_1 \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ și } \Delta_2 \subset \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

β) Dacă

$$\Delta_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\Delta_2 = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$$

și

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = (z_0, z_1, \ldots, z_p),$$

atunci

$$p \leqslant n + m - 1.$$

1.11. *Exerciții.* a) Determinați reuniunea perechilor de diviziuni

(1) $$\Delta' = \left(0, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, 1\right), \quad \Delta'' = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right);$$

(2) $$\Delta' = (0, e, e^2, 10), \quad \Delta'' = (0, 1, 2, 3, .., 10).$$

b) Fie p, q două numere naturale și diviziunile

$$\Delta' = \left(0, \frac{1}{p^n}, \frac{2}{p^n}, \ldots, \frac{k}{p^n}, \ldots, \frac{p^n - 1}{p^n}, 1\right),$$

$$\Delta'' = \left(0, \frac{1}{q^n}, \frac{2}{q^n}, \ldots, \frac{k}{q^n}, \ldots, \frac{q^n - 1}{q^n}, 1\right).$$

Să se arate că:

i) $\Delta' \subset \Delta'' \Leftrightarrow p$ divide pe q;

ii) $\Delta' \cup \Delta'' \subset \Delta$ unde

$$\Delta = \left(0, \frac{1}{(pq)^n}, \frac{2}{(pq)^n}, \ldots, \frac{k}{(pq)^n}, \ldots, \frac{(pq)^n - 1}{(pq)^n}, 1\right).$$

§ 2. FUNCȚII INTEGRABILE

2.1. Definiție. Considerăm următoarele obiecte:

1) **un interval închis și mărginit $[a, b]$;**
2) **o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;**
3) **o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$;**
4) **un sistem de n puncte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ astfel încît**

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

numit sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Numărul real

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numește suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Acest număr va fi notat prin $\sigma_\Delta(f, \xi)$ sau prin $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$.

2.2. *Observație.* Dacă funcția f este pozitivă, atunci suma Riemann $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $x_i - x_{i-1}$ și de înălțime $f(\xi_i)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Deci $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$ aproximează aria mulțimii din plan, denumită **subgraficul** lui f,

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

delimitată de axa Ox, graficul funcției f și dreptele paralele la axa Oy care trec prin punctele de coordonate $(a, 0)$, respectiv $(b, 0)$ (fig. II.2).

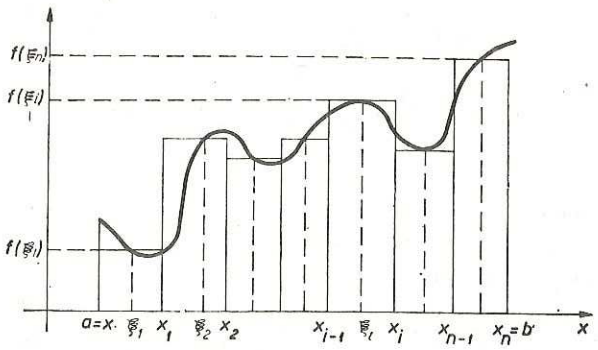


Fig. II.2.

Pînă acum nu ne-am pus problema ce înseamnă că o mulțime mărginită din plan are arie și cum s-ar defini aceasta. Noțiunea de arie va fi studiată în Capitolul III, paragraful 1, unde se va arăta că dacă funcția f este continuă, atunci mulțimea Γ_f are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2.3. **Definiție.** O funcție $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ se numește **integrabilă Riemann** (sau, simplu, **integrabilă**) dacă există un număr real I_f cu proprietatea:

oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ și orice puncte intermediare

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

are loc inegalitatea

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I_f | < \varepsilon.$$

Numărul real I_f se numește **integrala** sau **integrala definită a funcției** f pe **intervalul** $[a, b]$ și se notează

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2.4. *Observații.* (α) Pentru un interval fixat $[a, b]$, *numărul* I_f, *asociat fiecărei funcții integrabile* $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ *este unic determinat de* f.

Într-adevăr, dacă I_1, I_2 ar fi două numere care verifică condițiile din definiția 2.3, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ ar exista $\eta_{k,\varepsilon} > 0$ $(k = 1, 2)$ astfel încît pentru orice diviziune

$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n)$ a lui $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_{k,\varepsilon}$ și orice puncte intermediare $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ să avem

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I_k | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (k = 1, 2).$$

Luînd

$$\eta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=\!=} \min(\eta_{1,\varepsilon}, \eta_{2,\varepsilon})$$

rezultă că pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ și orice sistem (ξ_i) de puncte intermediare asociat lui Δ, avem

$$| \sigma_\Delta(f, \xi) - I_1 | < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } | \sigma_\Delta(f, \xi) - I_2 | < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$| I_1 - I_2 | < | I_1 - \sigma_\Delta(f, \xi) | + | \sigma_\Delta(f, \xi) - I_2 | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă

$$I_1 = I_2.$$

(β) *Orice funcție integrabilă* $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ *este mărginită, adică există o constantă* $M \geqslant 0$ *astfel încît*

$$| f(x) | \leqslant M \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Într-adevăr, să notăm cu I_f integrala lui f pe intervalul $[a, b]$ și să luăm $\varepsilon = 1$. Din definiția integrabilității lui f, rezultă că există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$(1) \qquad | \sigma_\Delta(f, \xi_i) - I_f | < 1$$

oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n)$, cu $\| \Delta \| < \eta$, și oricare ar fi punctele intermediare

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Considerînd o diviziune fixată

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n) \text{ cu } \| \Delta \| < \eta$$

este suficient să arătăm că f este mărginită pe fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$ al acestei diviziuni. În acest scop, considerăm un element arbitrar $x \in [x_{k-1}, x_k]$ și luăm următorul sistem de puncte intermediare

$$(2) \qquad \xi_i = \begin{cases} x_i, & \text{dacă } i \neq k \\ x, & \text{dacă } i = k. \end{cases}$$

Atunci din (1) și (2) rezultă

$$| f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i \neq k} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - I_f | < 1$$

deci

$$| f(x) | \leqslant M_k$$

unde cu M_k am notat numărul real pozitiv

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}}\left(1 + | I_f | + \sum_{i \neq k} | f(x_i) | \ (x_i - x_{i-1})\right).$$

(γ) *Integrala definită a unei funcții* f *este un număr real, spre deosebire de integrala nedefinită a lui* f *care este mulțimea tuturor primitivelor lui* f.

2.5. *Exemple.*

1) Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie constantă

$$f(x) = c, \qquad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Vom arăta că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b-a).$$

Se observă că, oricare ar fi diviziunea

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

a lui $[a, b]$ şi oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

avem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

Deci, luînd $I = c(b-a)$, avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| = 0 < \varepsilon$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Prin urmare f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b-a).$$

2) Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ şi $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \alpha x, \qquad (\forall)\ x \in [a, b]$$

Vom arăta că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2).$$

Pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu norma mai mică ca $\eta > 0$ şi orice puncte intermediare

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

avem

$$(1) \qquad \sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) + $$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\right](x_i - x_{i-1}).$$

Deoarece $f(x) = \alpha x$ pentru orice $x \in [a, b]$, deducem

$$f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = \alpha\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right).$$

Observînd că $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ este mijlocul intervalului $[x_{i-1}, x_i]$, deducem

$$(2) \qquad \left|f(\xi_i) - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\right| < |\alpha|\,\eta.$$

Pe de altă parte avem

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) = \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2);$$

deci din relaţiile (1), (2) şi (3) deducem

$$\left|\sigma_\Delta(f, \xi) - \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2)\right| \leqslant |\alpha|\,\eta(b-a).$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ şi

$$0 < \eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{|\alpha| \cdot |b-a|},$$

obţinem

$$\left|\sigma_\Delta(f, \xi) - \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2)\right| < \varepsilon,$$

pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \eta$ şi orice sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. De aici rezultă că f este integrabilă şi că

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2).$$

3) Să se arate că funcţia

$$f(x) = \cos x$$

este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ şi

$$\int_a^b \cos x\,\mathrm{d}x = \sin b - \sin a.$$

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi fie $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ puncte intermediare arbitrare.

Aplicînd teorema creşterilor finite funcţiei $f(x) = \sin x$ pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, obţinem punctele $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încît

$$\sin x_i - \sin x_{i-1} = (x_i - x_{i-1})\cos c_i, \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Ţinînd seama de aceste egalităţi putem scrie:

$$(1) \qquad \sigma_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \cos \xi_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \cos c_i(x_i - x_{i-1}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}(\cos \xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(\sin x_i - \sin x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}(\cos \xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sin b - \sin a + \sum_{i=1}^{n} (\cos \xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Aplicînd acum teorema creşterilor finite funcţiei $f(x) = \cos x$ pe intervalul $[\xi_i, c_i]$ sau $[c_i, \xi_i]$, obţinem un punct $\theta_i \in (\xi_i, c_i)$ astfel încît

$$\cos\xi_i - \cos c_i = (\xi_i - c_i) \sin\theta_i,$$

deci

$$|\cos \xi_i - \cos c_i| \leqslant |\xi_i - c_i| \cdot |\sin\theta_i| \leqslant \|\Delta\|,$$

prin urmare

(2) $$\left|\sum_{i=0}^{n} (\cos\xi_i - \cos c_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \|\Delta\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \|\Delta\| (b - a).$$

Din (1) şi (2) rezultă:

(3) $$|\sigma_\Delta(f, \xi_i) - (\sin b - \sin a)| \leqslant \|\Delta\| (b - a).$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, luăm η_ε astfel încît

$$0 < \eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Atunci din (3) rezultă că pentru orice diviziune Δ, cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi pentru orice puncte intermediare ξ_i are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i) - (\sin b - \sin a)| < \varepsilon.$$

Aceasta arată că funcţia $f(x) = \cos x$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b \cos x \mathrm{d}x = \sin b - \sin a.$$

2.6. *Exemple de funcţii neintegrabile.* 1) Vom arăta că funcţia lui Dirichlet $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional,} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu este integrabilă.

Fie $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ şi fie

$$\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i], \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

două sisteme de puncte intermediare alese astfel încît

fiecare ξ_i' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ este raţional,

iar

fiecare ξ_i'' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ este iraţional.

Atunci

$$g(\xi_i') = 1 \text{ şi } g(\xi_i'') = 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

deci

(1) $$\sigma_\Delta(g, \xi') = 1, \ \sigma_\Delta(g, \xi'') = 0.$$

Dacă g ar fi integrabilă, atunci ar exista $I \in \mathbf{R}$ care ar verifica condiţiile definiţiei

2.3. În particular, pentru $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ar exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n) \text{ a lui } [0, 1], \text{ cu } \|\Delta\| < \eta_\varepsilon, \text{ avem}$$

(2) $$|\sigma_\Delta(g, \xi') - I| < \varepsilon \text{ şi } |\sigma_\Delta(g, \xi'') - I| < \varepsilon.$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$|1 - I| = |\sigma_\Delta(g, \xi') - I| < \varepsilon.$$

$$|I| = |0 - I| = |\sigma_\Delta(g, \xi'') - I| < \varepsilon,$$

ceea ce conduce la contradicţia

$$1 = |1 - I + I| \leqslant |1 - I| + |I| < 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Aşadar, funcţia g *nu este integrabilă.*

2) Funcţia $g_\alpha : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

fiind nemărginită pentru $\alpha > 0$, rezultă din observaţia 2.4(β) că *nu este integrabilă.*

2.7. *Observaţie. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt două funcţii cu proprietăţile:*

(α) *f este integrabilă pe $[a, b]$;*

(β) *există o parte finită $A \subset [a, b]$ astfel încît*

$$g(x) = f(x), \quad (\forall)\ x \in [a, b] \setminus A,$$

atunci

(1) *g este integrabilă pe $[a, b]$*

şi

(2) $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Este suficient ca demonstraţia să fie dată pentru cazul cînd mulţimea finită A este formată dintr-un singur punct c, deoarece cazul general se poate obţine din acesta prin inducţie. Presupunem deci $A = \{c\}$.

Funcţia f fiind integrabilă, este mărginită (observaţia 2.4(β)), deci există $M_1 \geqslant 0$ astfel încît

$$|f(x)| \leqslant M_1 \quad (\forall) x \in [a, b]$$

luînd

$$M \overset{\text{def.}}{=} \max(M_1, |g(c)|)$$

rezultă

$$|f(x)| \leqslant M \quad (\forall) x \in [a, b]$$

şi

$$|g(x)| \leqslant M \quad (\forall) x \in [a, b]$$

f fiind integrabilă, înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

(1) $$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, cu $\|\Delta\| < \eta'_\varepsilon$, şi oricare ar fi punctele intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Luînd

$$\eta_\varepsilon \overset{\text{def.}}{=\!=} \min\left(\eta'_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{8M}\right)$$

avem $\eta_\varepsilon \leqslant \eta'_\varepsilon$

şi

(2) $$4M\eta_\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă c este un punct al diviziunii Δ, atunci există $0 \leqslant j \leqslant n$ astfel încît $c = x_j$. În acest caz singurele puncte intermediare care ar putea coincide cu $c = x_j$ sînt punctele ξ_j sau ξ_{j+1}.

Deci ţinînd seama de faptul că $f(x) = g(x)$ $(\forall)$ $x \neq c$, obţinem

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \sigma_\Delta(g, \xi_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| f(\xi_j) - g(\xi_j) \right| (x_j - x_{j-1}) + \left| f(\xi_{j+1}) - g(\xi_{j+1}) \right| (x_{j+1} - x_j) \leqslant$$

$$\leqslant 4M \, \|\Delta\| < 4M\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă c nu este un punct al diviziunii Δ, atunci c este conţinut într-un interval deschis (x_{k-1}, x_k). Deci singurul punct intermediar care ar putea coincide cu c este punctul ξ_k, prin urmare

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \sigma_\Delta(g, \xi_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) \right| =$$

$$= \left| f(\xi_k) - g(\xi_k) \right| (x_k - x_{k-1}) \leqslant 2M \, \|\Delta\| < 2M\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din analiza făcută pînă acum rezultă că, oricare ar fi poziţia punctului c, are loc inegalitatea

(3) $$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_i) - \sigma_\Delta(g, \xi_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din inegalităţile (1) şi (3) obţinem

$$\left| \sigma_\Delta(g, \xi_i) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

adică g este integrabilă şi

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.8. *Observaţie.* Observaţia precedentă arată că dacă f este o funcţie integrabilă pe $[a, b]$ şi dacă se modifică valorile funcţiei f într-o mulţime finită de puncte $A =$

$= \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset [a, b]$, atunci funcţia nou-obţinută este încă integrabilă şi integralele celor două funcţii sînt egale.

Dacă modificarea valorilor funcţiei f se face într-o mulţime infinită de puncte, atunci funcţia nou-obţinută poate să nu mai fie integrabilă. Într-adevăr, funcţia constantă

$$f_0(x) = 0, \ (\forall) x \in [0, 1]$$

este integrabilă (exemplul 2.5 (1)). Totuşi funcţia lui Dirichlet (exemplul 2.6 (1))

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap Q, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus Q, \end{cases}$$

care se poate obţine prin modificarea funcţiei f_0 pe mulţimea infinită

$$[0, 1] \cap Q$$

nu este integrabilă.

2.9. Teoremă. Pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(α) f este integrabilă;

(β) există un număr real I astfel încît oricare ar fi şirul de diviziuni

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbf{N})$$

ale intervalului $[a, b]$ cu

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$$

şi oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n; \ n \in \mathbf{N}),$$

şirul sumelor Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n\in\mathbf{N}}$$

converge la I.

Demonstraţie (α) $\Rightarrow$ (β). Presupunem că funcţia f este integrabilă şi vom arăta că are loc afirmaţia (β).

Fie deci

$$\Delta_n = (a = x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n = b)$$

un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

(1) $$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$$

şi fie

$$\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n)$$

puncte intermediare.

Funcţia f fiind integrabilă, există $I_f \in \mathbf{R}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există η_ε astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi oricare ar fi punctele intermediare ξ_i are loc inegalitatea

(2). $$|\sigma_\Delta(f, \xi_i) - I_f| < \varepsilon.$$

Din relaţia (1) rezultă că există un rang $n_\varepsilon = n(\eta_\varepsilon)$ astfel încît

$$\|\Delta_n\| < \eta_\varepsilon, \quad (\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon;$$

deci, ţinînd seamă de (2) obţinem

$$\left|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) - I_f\right| < \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) \text{ există} = I_f.$$

(β) ⇒ (α). Să presupunem că f verifică condiţia (β) şi să arătăm că f este integrabilă, mai precis, numărul I care figurează în condiţia (β) este chiar integrala lui f.

Dacă numărul I n-ar fi integrala lui f, atunci ar exista $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît oricare ar fi $\eta > 0$ există o diviziune

$$\Delta_\eta = \left(x_0^\eta, x_1^\eta, \ldots, x_{k_\eta}^\eta\right)$$

a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta_\eta\| < \eta$ şi există punctele intermediare

$$x_{i-1}^\eta \leqslant \xi_i^\eta \leqslant x_i^\eta \quad (1 \leqslant i \leqslant k_\eta)$$

astfel încît

$$\left|\sigma_{\Delta_\eta}(f, \xi_i^\eta) - I\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Luînd în particular $\eta = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, obţinem o diviziune

$$\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\right)$$

a lui $[a, b]$ cu

(1) $$\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$$

şi un sistem ξ^n de puncte intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n)$$

astfel încît

(2) $$\left|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) - I\right| \geqslant \varepsilon, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Din inegalitatea (1) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0,$$

iar din (2) rezultă că şirul sumelor Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n\in\mathbf{N}}$$

nu converge la I, ceea ce contrazice ipoteza (β).

2.10. *Observaţie.* Condiţia (β) din enunţul teoremei 2.9 este echivalentă cu condiţia următoare (aparent mai slabă)

(β′) oricare ar fi şirul de diviziuni

$$\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\right), \quad (n \in \mathbf{N})$$

ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$, şi oricare ar fi punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n; \quad n \in \mathbf{N}),$$

şirul sumelor Riemann este convergent.

Evident (β) ⇒ (β′).

Demonstraţia implicaţiei (β′) ⇒ (β) revine la a demonstra că toate sumele Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\}_{n\in N}, \text{ cu } \lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$$

au o limită comună.

Presupunem că (β′) are loc; fie

$$\Delta_n' = \left(a = x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n = b\right), \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$\Delta_n'' = \left(a = y_0^n, y_1^n, \ldots, y_{p_n}^n = b\right), \quad (n \in \mathbf{N})$$

două şiruri de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n'\| = \lim_{n\to\infty} \|\Delta_n''\| = 0$$

şi fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n; \ n \in \mathbf{N}),$$

$$y_{i-1}^n \leqslant \eta_i^n \leqslant y_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant p_n; \ n \in \mathbf{N}).$$

Considerăm şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ definit în felul următor

$$(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \overset{\text{def}}{=} (\Delta_0', \Delta_0'', \Delta_1', \Delta_1'', \ldots, \Delta_n', \Delta_n'', \ldots),$$

iar punctele intermediare le luăm astfel

$$\theta_i^n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \xi_i^n, & \text{dacă } n = \text{impar}, \\ \eta_i^n & \text{dacă } n = \text{par}. \end{cases}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$, rezultă din ipoteza (β′) că şirurile de sume Riemann

$$\{\sigma_{\Delta_n'}(f, \xi^n)\}, \ \{\sigma_{\Delta_n''}(f, \eta^n)\}, \ \{\sigma_{\Delta_n}(f, \theta^n)\}$$

sînt convergente; fie I', I'', respectiv I, limitele lor. Însă primele două şiruri sînt subşiruri ale celui de-al treilea şir, deci (Observaţia A 15) au aceeaşi limită. Aşadar,

$$I' = I = I''.$$

2.11. *Observaţie.* În cursul demonstraţiei teoremei 2.9 şi a observaţiei precedente s-a arătat că dacă este îndeplinită una din cele trei condiţii echivalente (α), (β), (β′), atunci integrala lui f este obţinută astfel:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n),}$$

iar limita nu depinde de şirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n)$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ şi nici de punctele intermediare $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, $(1 \leqslant i \leqslant k_n;\ n \in \mathbf{N})$.

2.12. T e o r e m ă. *(Formula lui Leibniz — Newton).*

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).}$$

Demonstraţie. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n)$$

un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0.$$

Aplicînd teorema creşterilor finite funcţiei F pe intervalul $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obţinem $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ cu proprietatea

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Însă, prin ipoteză $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, deci

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = f(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

prin urmare

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} [F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)] =$$

$$= F(b) - F(a), \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Atunci (observaţia 2.11)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = F(b) - F(a).$$

2.13. *Notaţie.* În loc de $F(b) - F(a)$ se foloseşte frecvent notaţia

$$F(x)\Big|_a^b$$

sau

$$[F(x)]_a^b$$

şi se citeşte: $F(x)$ *luat între* a *şi* b.

2.14. *Exemplu de funcţie integrabilă care nu admite primitive.* Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcţia constantă egală cu 1,

$$f(x) = 1, \ (\forall)x \in [a, b]$$

şi $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \neq \dfrac{a+b}{2}; \\ -1, \text{ dacă } x = \dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Atunci (exemplul 2.5 (1)) funcţia f este integrabilă, iar funcţia g se obţine din f, modificînd pe f în punctul $\dfrac{a+b}{2}$. Prin urmare, în baza observaţiei 2.7 şi funcţia g *este integrabilă.*

Dacă g ar admite primitive, atunci g ar avea şi proprietatea lui Darboux (observaţia I. 1.4 (c)). Cum g nu se anulează nicăieri, rezultă că g *nu* are proprietatea lui Darboux.

2.15. *Observaţie.* Din exemplul de mai sus rezultă că *clasa funcţiilor integrabile care admit primitive, nu coincide cu clasa tuturor funcţiilor integrabile.*

Funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

fiind nemărginită, nu este integrabilă (observaţia 2.4(β)).

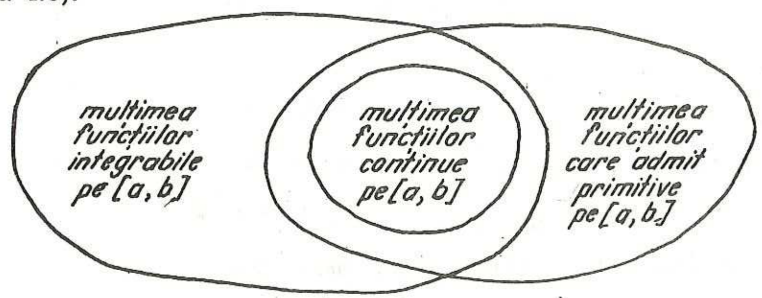
Se observă că funcţia

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă şi $F' = f$, adică f admite primitive.

Există funcţii mărginite care au primitive, dar care nu sînt integrabile. Prezentarea unui astfel de exemplu necesită noţiuni şi rezultate care depăşesc cadrul acestui manual.

Vom vedea în paragrafele următoare că mulţimea funcţiilor continue pe un interval $[a, b]$ este conţinută atît în mulţimea funcţiilor integrabile pe $[a, b]$ (teorema 3.12) cît şi în mulţimea funcţiilor care admit primitive pe $[a, b]$ (teorema 4.8).



2.16. P r o p o z i ţ i e. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt două funcţii integrabile, iar $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, atunci

$$\lambda f + \mu g$$

este integrabilă şi

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n,\ x_1^n,\ \ldots,\ x_{k_n}^n), \quad (n \in \mathbb{N})$$

un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n;\ n \in \mathbb{N}).$$

Avem

$$(1) \quad \sigma_{\Delta_n}(\lambda f + \mu g,\ \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda f(\xi_i^n) + \mu g(\xi_i^n)](x_i^n - x_{i-1}^n) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) + \mu \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \lambda\sigma_{\Delta_n}(f,\ \xi^n) + \mu\sigma_{\Delta_n}(g,\ \xi^n).$$

Funcțiile f și g fiind integrabile, rezultă (observația 2.11) că membrul drept al egalității (1) converge la

$$\lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Prin urmare șirul $\{\sigma_{\Delta_n}(\lambda f + \mu g,\ \xi^n)\}_{n\in N}$ este convergent, și $\lambda f + \mu g$ este integrabilă. Trecînd la limită în (1), obținem

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2.17. Propoziție. Dacă $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă pozitivă

$$f(x) \geqslant 0, \quad (\forall)\ x \in [a,\ b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (x_0^n,\ x_1^n,\ \ldots,\ x_{k_n}^n) \quad n \in \mathbb{N}$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și fie punctele intermediare

$$x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n, \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n;\ n \in \mathbb{N}).$$

Atunci, f fiind pozitivă, avem

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\ \xi^n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \geqslant 0,$$

deci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f,\ \xi^n) \geqslant 0.$$

2.18. Consecință. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcții integrabile astfel încît

$$f(x) \leqslant g(x), \quad (\forall)\ x \in [a,\ b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că funcția $g - f$ este pozitivă. Deci aplicînd propozițiile 2.16 și 2.17, obținem

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

adică

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2.19. Consecință. Dacă $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă și

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad (\forall)\ x \leqslant [a,\ b],$$

atunci

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b - a).$$

Demonstrație. Aplicînd consecința 2.18 funcției f și funcțiilor constante m, M și ținînd seama de exemplul 2.5 (1), obținem

$$m(b - a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x = M(b - a).$$

2.20. *Observație.* Orice funcție integrabilă fiind mărginită (observația 2.4 (β)), există $m, M \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad (\forall)x \in [a, b].$$

2.21. Propoziție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ și $c \in (a, b)$ astfel încît restricțiile lui f la $[a, c]$ și la $[c, b]$ sînt integrabile. Atunci f este integrabilă și

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Notăm cu f_1 restricția lui f la $[a, c]$ și cu f_2 restricția lui f la $[c, b]$ Prin ipoteză funcțiile f_1 și f_2 sînt integrabile deci (observația 2.4 (β)), mărginite. Rezultă că f este mărginită, deci există $M > 0$ astfel încît

$$| f(x) | < M, \quad (\forall)x \in [a, b].$$

Utilizînd din nou integrabilitatea lui f_1 şi f_2 deducem că pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$(1') \qquad \left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi')\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(1'') \qquad \left|\int_c^b f(x)\mathrm{d}x - \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'')\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pentru orice diviziuni Δ' şi Δ'' ale intervalelor $[a, c]$ şi respectiv $[c, b]$ cu $\|\Delta'\| < \eta_\varepsilon$, $\|\Delta''\| < \eta_\varepsilon$ şi orice sisteme ξ' şi ξ'' de puncte intermediare asociate diviziunilor Δ' şi respectiv Δ''. În plus, putem presupune că, micşorînd eventual pe η_ε, avem

$$2M\eta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie acum

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi punctele intermediare

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Vom arăta că

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

unde

$$I = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, dacă c este un punct al diviziunii Δ, atunci

$$\Delta' = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, c)$$

este o diviziune a lui $[a, c]$, iar

$$\Delta'' = (c, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

este o diviziune a lui $[c, b]$ şi avem

$$\|\Delta'\| < \eta_\varepsilon, \ \|\Delta''\| < \eta_\varepsilon.$$

Punînd

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}),$$
$$\xi'' = (\xi_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$$

avem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'')$$

şi deci din $(1') - (1'')$ rezultă

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| \leqslant \left|\sigma_{\Delta'}(f_1, \xi)' - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Dacă c nu este punct al diviziunii Δ, atunci există $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît

$$x_{p-1} < c < x_p.$$

Deducem că

$$\Delta' = (x_0, \ldots, x_{p-1}, c)$$

este o diviziune a lui $[a, c]$, iar

$$\Delta'' = (c, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

este o diviziune a lui $[c, b]$. Punînd

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, c),$$
$$\xi'' = (c, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n),$$

obţinem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi_p)(x_p - x_{p-1}),$$

$$\sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') = \sum_{i=1}^{p-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(c - x_{p-1}),$$

$$\sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') = \sum_{i=p+1}^{n} f(\xi)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(x_p - c)$$

şi deci

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') + f(\xi_p)(x_p - x_{p-1}) - f(c)(x_p - x_{p-1}).$$

De aici şi din relaţiile $(1') - (1'')$ deducem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| \leqslant \left|\sigma_{\Delta'}(f_1, \xi') - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\sigma_{\Delta''}(f_2, \xi'') - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right| +$$
$$+ |f(\xi_p) - f(c)|(x_p - x_{p-1})$$

şi deci

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M \cdot \eta_\varepsilon < \varepsilon.$$

2.22. Definiţie. Dacă $a \leqslant b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci punem prin definiţie

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0, \text{ dacă } a = b$$

şi

$$(\beta) \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2.23. ***Exerciţii.***

I. Să se calculeze sumele Riemann asociate funcţiilor, diviziunilor Δ şi sistemelor ξ de puncte intermediare specificate mai jos:

1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\qquad \Delta = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$,

$f(x) = x^2$, $\qquad \xi = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right)$;

2. $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $\qquad \Delta = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$f(x) = \sin x$, $\qquad \xi = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3. $f:[-1, 1] \to \mathbf{R}$, $\quad \Delta = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$,

$f(x) = e^x$, $\quad \xi = (-\ln 2, 0, \ln 2)$;

4. $f:[0, 3] \to \mathbf{R}$, $\quad \Delta = (0, 1, 2, 3)$,

$f(x) = x^3$, $\quad \xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$;

5. $f:[1, 2] \to \mathbf{R}$, $\quad \Delta = \left(1, \frac{9}{8}, \frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\right)$,

$f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad \xi = \left(\frac{10}{9}, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2\right)$.

II.

1. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încît există o constantă α cu proprietatea: pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puţin un punct $\xi \in (x', x'')$ în care funcţia f ia valoarea α. Să se arate că

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \alpha(b-a).$$

2. Să se arate că funcţia $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{dacă } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

este integrabilă, dar nu posedă nici o primitivă. Să se calculeze integrala lui f.

3. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încît pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puţin un punct $\xi \in (x', x'')$ astfel încît $f(\xi) = 2\xi$. Să se arate că

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b^2 - a^2.$$

4. Se consideră o funcţie $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ integrabilă, astfel încît pentru orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există cel puţin un punct $\xi \in (x', x'')$ astfel încît $f(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$. Să se arate că

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln 2.$$

5. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ astfel, încît în orice interval deschis $(x', x'') \subset [a, b]$, există două puncte $\xi' \in (x', x'')$, $\xi'' \in (x', x'')$ astfel încît

$$f(\xi') = \xi', f(\xi'') = 2\xi''.$$

Să se arate că f nu este integrabilă.

6. Se consideră o funcţie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ pentru care există o diviziune

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

a lui $[a, b]$ astfel încît f este egală cu o constantă α_i pe fiecare interval deschis

(x_{i-1}, x_i). Să se arate că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_{i-1}).$$

7. Să se arate că funcţia

$$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$f(x) = |\sin x|$$

este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

8. Se consideră o funcţie

$$f:[0, 2] \to \mathbf{R}$$

astfel încît

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0, 1], \\ x^2+1, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

9. Se consideră funcţia

$$f:[0, 1] \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$f(x) = [2^5 x],$$

unde $[y]$ înseamnă partea întreagă din y (adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu y). Să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

10. Se consideră funcţia

$$f:[0, 2\sqrt{3}] \to \mathbf{R}$$

definită prin

$$f(x) = x - [x].$$

Să se arate că această funcţie este integrabilă şi să se calculeze integrala sa.

§ 3. INTEGRABILITATEA FUNCŢIILOR MONOTONE ŞI A FUNCŢIILOR CONTINUE

3.1. Definiţie. Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită şi $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Notăm

$$m_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \;(= \textit{marginea inferioară a mulţimii } f[x_{i-1}, x_i]);$$

$$M_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \;(= \textit{marginea superioară a mulţimii } f[x_{i-1}, x_i]);$$

$$s_\Delta(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$S_\Delta(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

$s_\Delta(f)$ (respectiv $S_\Delta(f)$) se numește suma Darboux inferioară (respectiv superioară) asociată funcției f și diviziunii Δ.

3.2. *Observație.* Dacă funcția f este pozitivă, atunci $s_\Delta(f)$ (respectiv $S_\Delta(f)$) reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $[x_i - x_{i-1}]$ și înălțime m_i (respectiv M_i).

Deci aria figurii plane mărginite de axa Ox, graficul lui f și dreptele paralele la axa Oy, care trec prin punctele de coordonate $(a, 0)$, respectiv $(b, 0)$, este aproximată de $s_\Delta(f)$ prin lipsă, iar de $S_\Delta(f)$ prin adaos.

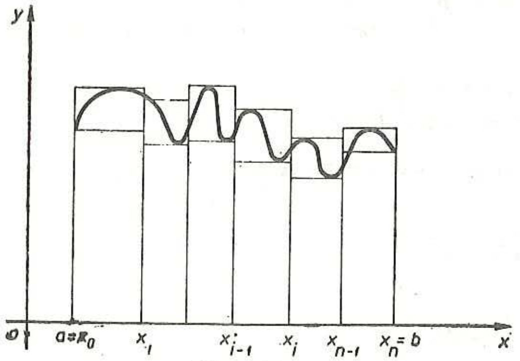


Fig. II.3.

3.3. Propoziție. Sumele Darboux ale unei funcții mărginite $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ au următoarele proprietăți:

(i) $s_\Delta(f) \leqslant \sigma_\Delta(f, \xi_i) \leqslant S_\Delta(f)$, $(\forall)\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$;

(ii) **dacă Δ' este mai fină decît Δ ($\Delta \subset \Delta'$), atunci**

$$s_\Delta(f) \leqslant s_{\Delta'}(f)$$

și

$$S_{\Delta'}(f) \leqslant S_\Delta(f);$$

(iii) **pentru orice pereche de diviziuni Δ_1, Δ_2 ale intervalului $[a, b]$ are loc inegalitatea**

$$s_{\Delta_1}(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f).$$

Demonstrație. (i) Înmulțind în inegalitățile evidente

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i, \quad (\forall)\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

cu $x_i - x_{i-1}$ și însumînd după i, obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

adică

$$s_\Delta(f) \leqslant \sigma_\Delta(f, \xi_i) \leqslant S_\Delta(f).$$

(ii) Fie $\Delta \subset \Delta'$ și să considerăm cazul cel mai simplu: diviziunea Δ' este obținută din diviziunea

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_n)$$

prin adăugarea unui singur punct de diviziune c_j între x_{j-1} și x_j

$$\Delta' = (x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, c_j, x_j, \ldots, x_n).$$

Notînd

$$m_j' \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_{j-1}, c_j]} f(x) \quad \text{și} \quad m_j'' \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [c_j, x_j]} f(x),$$

rezultă

$$m_j \leqslant m_j' \text{ și } m_j \leqslant m_j'',$$

deci

$$s_\Delta(f) = m_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = m_j[(x_j - c_j) + (c_j - x_{j-1})] +$$

$$+ \sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant m_j''(x_j - c_j) + m_j'(c_j - x_{j-1}) + \sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_{\Delta'}(f).$$

Cazul general se reduce la aplicarea succesivă a cazului particular studiat mai sus. În mod analog se demonstrează inegalitatea

$$S_{\Delta'}(f) \leqslant S_\Delta(f).$$

(iii) Fie Δ_1, Δ_2 două diviziuni ale intervalului $[a, b]$ și fie $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_1 \cup \Delta_2$, reuniunea lor. Atunci (observația 1.10 (α))

$$\Delta_k \subset \Delta, \ (\forall)\ k = 1, 2,$$

deci, aplicînd punctul (ii), obținem

(1) $$S_{\Delta_k}(f) \leqslant s_\Delta(f) \text{ și } S_\Delta(f) \leqslant S_{\Delta_k}(f), \ (\forall)\ k = 1,2.$$

Însă (punctul (i))

$$s_\Delta(f) \leqslant S_\Delta(f),$$

prin urmare

$$s_{\Delta_1}(f) \leqslant s_\Delta(f) \leqslant S_\Delta(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f).$$

3.4. *Observație.* Proprietatea 3.3 (ii) se poate exprima astfel:

Prin trecere de la o diviziune la alta mai fină, sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc.

De asemenea, proprietatea 3.3 (iii) mai poate fi formulată și în modul următor: *Orice sumă Darboux inferioară este mai mică decît orice sumă Darboux superioară.* Aceste rezultate pot fi reformulate astfel:

3.5. Propoziție. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție mărginită, atunci:

(α) **mulțimea $\{s_\Delta(f)\}_\Delta$ a tuturor sumelor Darboux inferioare ale funcției f este majorată (de orice sumă Darboux superioară a lui f);**

(β) **mulțimea $\{S_\Delta(f)\}_\Delta$ a tuturor sumelor Darboux superioare este minorată (de orice sumă Darboux inferioară).**

3.6. *Observații:* (α). Mulțimea $\{s_\Delta(f)\}$ fiind majorată, admite (vezi A_8) o margine superioară), notăm $\underline{I}(f)$ această margine superioară

$$\underline{I}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_\Delta s_\Delta(f).$$

(β) Mulțimea $\{S_\Delta(f)\}$ fiind minorată, are (vezi A_8) o margine inferioară; notăm cu $\bar{I}(f)$ această margine inferioară

$$\bar{I}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$

(γ) Pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ au loc inegalităţile

$$s_{\Delta}(f) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \bar{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f).$$

3.7. Teoremă. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon,$$

oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$ cu $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$;

(ii) funcţia f este integrabilă.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Avem inegalităţile

(1) $$s_{\Delta}(f) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \bar{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f), \quad (\forall)\Delta,$$

deci

$$0 \leqslant \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f), \quad (\forall)\ \Delta.$$

Însă prin ipoteză, pentru orice $\varepsilon > 0$ există η_ε astfel încît

(2) $$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon, \quad (\forall)\ \Delta \text{ cu } \|\Delta\| < \eta_\varepsilon,$$

deci

$$0 \leqslant \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leqslant S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon, \quad (\forall)\Delta \text{ cu } \|\Delta\| < \eta_\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că numerele reale $\underline{I}(f)$ şi $\bar{I}(f)$ sînt egale; fie $I(f)$ valoarea lor comună. Atunci din (1) obţinem

(3) $$s_{\Delta}(f) \leqslant I(f) \leqslant S_{\Delta}(f), \qquad (\forall)\Delta.$$

Însă (propoziţia 3.3 (i)) pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[a, b]$ şi orice puncte intermediare $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, au loc inegalităţile,

(4) $$s_{\Delta}(f) \leqslant \sigma_{\Delta}(f, \xi_i) \leqslant S_{\Delta}(f).$$

Din inegalităţile (2) — (4) obţinem

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - I(f)| \leqslant S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon,$$

oricare ar fi diviziunea Δ a lui $[a, b]$ şi oricare ar fi punctele intermediare ξ_i. Aceasta înseamnă că f este integrabilă şi că

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I(f) = \underline{I}(f) = \bar{I}(f).$$

3.8. *Observaţie.* Demonstraţia implicaţiei inverse este relativ simplă şi se bazează pe următoarele relaţii dintre sumele Riemann şi sumele Darboux:

$$s_{\Delta}(f) = \inf \{\sigma_{\Delta}(f, \xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$S_{\Delta}(f) = \sup \{\sigma_{\Delta}(f, \xi) \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

3.9. Teoremă. Orice funcţie monotonă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă.

Demonstraţie. Dacă f este constantă, atunci (exemplul 2.5 (1)) f este integrabilă. Considerăm acum cazul cînd f nu este constantă; în acest caz

$$| f(a) - f(b) | > 0.$$

Presupunem că f este crescătoare şi pentru orice $\varepsilon > 0$ să notăm

(1) $$\eta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

Fie

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

o diviziune a lui $[a, b]$ astfel încît

(2) $$\| \Delta \| < \eta_\varepsilon.$$

Funcţia f fiind crescătoare, avem

(3) $$\begin{cases} f(x_{i-1}) = m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ f(x_i) = M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \end{cases}$$

Din (3), (2) şi (1) obţinem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1})$$

$$\leqslant \| \Delta \| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \| \Delta \| (f(b) - f(a)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon,$$

deci f este integrabilă.

Observaţie: În demonstrarea unor rezultate importante ca

— integrabilitatea funcţiilor continue,

— calculul ariilor (respectiv volumelor) unor mulţimi asociate funcţiilor continue pozitive,

se foloseşte o condiţie mai puternică decît condiţia de continuitate. Această condiţie este îndeplinită de funcţiile continue pe *intervale închise şi mărginite*. Vom admite, deci, fără demonstraţie următorul rezultat:

3.10. Orice funcţie continuă definită pe un interval închis şi mărginit, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, verifică condiţia:

(U) **oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $x', x'' \in [a, b]$ cu $| x' - x'' | < \eta_\varepsilon$ are loc inegalitatea**

$$| f(x') - f(x'') | < \varepsilon.$$

Funcţiile care îndeplinesc condiţia (U) se numesc uniform continue.

3.11. *Exemplu* de funcție continuă, definită pe un interval mărginit neînchis, care *nu* verifică condiția (U).

Fie $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} \cos \frac{1}{x}.$$

Funcția f este continuă pe $(0, 1]$, deoarece este compunerea funcțiilor continue

$$x \to \frac{1}{x} \quad \text{și} \quad t \to \cos t.$$

Să arătăm acum că funcția f nu verifică condiția (U).

Fie $0 < \varepsilon < 1$. Deoarece șirul $\left(\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\right)_{n\in N}$ converge la zero, rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \varepsilon, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Luînd un $n \geqslant n_\varepsilon$ și

$$x = \frac{1}{2n\pi}, \quad y = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

rezultă

$$|x - y| = \left|\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{(2n+1)\pi}\right| = \frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \varepsilon.$$

Însă

$$|f(x) - f(y)| = |\cos 2n\pi - \cos(2n+1)\pi| = |1 - (-1)| = 2,$$

ceea ce arată că funcția f *nu* verifică condiția (U).

3.12. Teoremă. Orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. În baza teoremei precedente f este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

(1) $$(\forall)\ x', x'' \in [a, b],$$

cu

$$|x' - x''| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Fie $\Delta = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ o diviziune a lui $[a, b]$ astfel încît

(2) $$\|\Delta\| < \eta_\varepsilon.$$

Cum orice funcție continuă pe un interval închis și mărginit este mărginită și își atinge marginile, rezultă că există

(3) $$u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

astfel încît

(4) $$\begin{cases} f(u_i) = m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ f(v_i) = M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x). \end{cases}$$

Din (2) și (3) rezultă

$$|u_i - v_i| < \eta_\varepsilon,$$

deci aplicînd (1) pentru $x' = u_i$ și $x'' = v_i$ și ținînd seamă de (4), obținem

$$M_i - m_i = |f(v_i) - f(u_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

de unde rezultă

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Această inegalitate avînd loc pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ de normă $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$, înseamnă (teorema 3.7) că funcția f este integrabilă.

3.13. *Exerciții.*

I. Să se calculeze sumele Darboux asociate următoarelor funcții și diviziuni:

1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\quad \Delta_1 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$, $\quad \Delta_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right)$.

2. $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $f(x) = \sin x$, $\quad \Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad \Delta_2 = \left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $\quad \Delta_1 = \left(1, \frac{9}{8}, \frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\right)$, $\quad \Delta_2 = \left(1, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, 2\right)$.

4. $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$, $\quad \Delta_1 = (0, 1, 2, 3)$, $\quad \Delta_2 = (0, 2, 3)$.

5. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $\quad \Delta_1 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\quad \Delta_2 = (-1, 0, 1)$.

II. Să se arate că următoarele funcții sînt integrabile și să se calculeze integralele lor:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $\qquad x \in [1, 2]$.

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $\qquad x \in [0, 2]$.

3. $f(x) = x^\alpha$, $\qquad x \in [0, a]$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

4. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x = 0, \\ \min\left(x, \ln \dfrac{1}{x}\right) \text{ dacă } x \in (0, 2]. \end{cases}$

3.14. ***Calculul limitelor unor sume cu ajutorul integralelor.***

1. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\ln 2.$$

Pentru a vedea ce funcţie trebuie considerată, transformăm suma de mai sus astfel

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right].$$

Vom considera deci funcţia $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+x}$$

şi, pentru fiecare $n \geqslant 1$, formăm diviziunea echidistantă

$$\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \ldots < x_n = \frac{n}{n} = 1\right)$$

de normă $\|\Delta_n\| = \dfrac{1}{n}$, iar în fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ alegem punctul intermediar

$$\xi_i \overset{\text{def}}{=} x_i = \frac{i}{n}.$$

Se observă că termenul general al şirului din enunţ este chiar suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ_n şi punctelor intermediare ξ_i:

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n}=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=$$

$$=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

2. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=\frac{\pi}{6}.$$

Scriind suma de mai sus sub forma

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right],$$

se observă că această sumă este suma Riemann asociată funcţiei $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}},$$

diviziunii Δ_n şi punctelor intermediare ξ_i definite ca în exemplul precedent. Deci

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i)=$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

3.15. *Exerciţii.* Folosind metoda de calcul de la punctul precedent, să se calculeze limita şirurilor de termen general:

1. $s_n = \dfrac{3}{n}\left[1+\sqrt{\dfrac{n}{n+3}}+\sqrt{\dfrac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\dfrac{n}{n+3(n-1)}}\right].$

2. $s_n = \dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right].$

3. $s_n = \dfrac{\pi}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right].$

4. $s_n = \dfrac{\pi}{2n}\left[1+\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right].$

5. $s_n = n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right].$

§ 4. INTEGRAREA FUNCŢIILOR CONTINUE

4.1. *Observaţie.* În paragraful precedent s-a arătat că orice funcţie continuă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă.

Deci, toate rezultatele, relative la funcţiile integrabile, obţinute în paragraful 3, sînt valabile şi pentru funcţii continue.

Unele rezultate din acest paragraf sînt adevărate numai pentru funcţii continue, iar altele se pot demonstra şi în cazul general al funcţiilor integrabile. Totuşi, pentru simplitate, peste tot în acest paragraf vom lucra cu funcţii continue.

4.2. Teorema de medie. Dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi).$$

Demonstraţie: Funcţia f, fiind continuă pe $[a, b]$, este mărginită şi îşi atinge marginile. Notînd

$$m = \inf_{x \in [a,\ b]} f(x) \quad \text{şi} \quad M = \sup_{x \in [a,\ b]} f(x),$$

există $u,\ v \in [a,\ b]$ astfel încît

$$f(u) = m \quad \text{şi} \quad f(v) = M.$$

Cum pentru orice $x \in [a,\ b]$ avem $m \leqslant f(x) \leqslant M$, aplicînd consecinţa 2.19 obţinem

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

de unde

$$f(u) = m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M = f(v).$$

Cum însă f este continuă pe $[a,\ b]$, f are proprietatea lui Darboux pe $[a,\ b]$; există deci $\xi \in [a,\ b]$ astfel încît

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

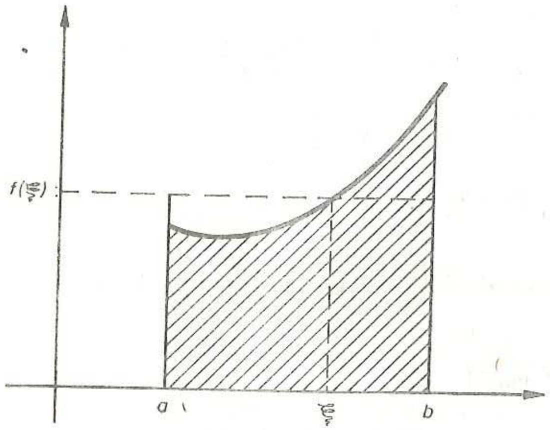


Fig. II. 4.

4.3. *Observaţie.* Scriind teorema de medie sub forma

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

punem în evidenţă următoarea interpretare geometrică:

Dacă f este o funcţie continuă şi pozitivă pe $[a,\ b]$, există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît subgraficul lui f (Γ_f; vezi observaţia 2.2) are aceeaşi arie cu dreptunghiul de bază $b-a$ şi înălţime $f(\xi)$.

4.4. Propoziţie. Dacă $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă, atunci are loc inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Întrucît f este continuă rezultă că $|\,f\,|$ este continuă. Ţinînd seama de inegalităţile

$$-\,|\,f(x)\,| \leqslant f(x) \leqslant |\,f(x)\,|, \qquad (\forall)\ x \in [a,\ b]$$

şi aplicînd consecinţa 2.18, obţinem

$$-\int_a^b |\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x.$$

4.5. *Observaţie.* Rezultatul precedent este adevărat şi pentru funcţii integrabile oarecare.

4.6. Propoziţie. Dacă $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi pozitivă iar $[c,\ d]$ este un interval inclus în $[a,\ b]$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Aplicînd propoziţiile 2.21 şi 2.17, obţinem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d f(x)\mathrm{d}x.$$

4.7. Consecinţă. Dacă $a < b$ şi $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi pozitivă, neidentic nulă pe $(a,\ b)$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

Demonstraţie. Prin ipoteză există un punct $x_0 \in (a,\ b)$ astfel încît

$$f(x_0) > 0.$$

Funcţia f fiind continuă, rezultă (propoziţia $A_{12}(\beta)$) că există un interval deschis J astfel încît $x_0 \in J \subset [a,\ b]$ şi

$$f(x) > 0, \qquad (\forall)\ x \in J.$$

Fie $[c,\ d] \subset J$, $c < d$ şi

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [c,\ d]} f(x).$$

Atunci există $x_1 \in [c,\ d]$ astfel încît

$$m = f(x_1).$$

Însă $x_1 \in [c,\ d] \subset J$, deci $f(x_1) > 0$, prin urmare

$$m > 0.$$

Aplicînd propoziţia precedentă, obţinem

$$0 < m(d-c) \leqslant \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

4.8. Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue. Pentru orice funcţie continuă $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$, funcţia $F : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad (\forall)\ x \in [a,\ b]$$

este o primitivă a lui f care se anulează în punctul a.

Demonstrație. Fie $x_0 \in [a, b]$ și $x \in [a, b]$ cu $x \neq x_0$. Atunci (definiția 2.22(β) și propoziția 2.21)

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Aplicînd teorema de medie integralei $\int_{x_0}^x f(t)dt$, obținem $\xi_x \in [x_0, x]$ sau $\xi_x \in [x, x_0]$, (după cum $x_0 < x$ sau $x > x_0$) astfel încît

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi_x)(x - x_0).$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi_x),$$

deci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(\xi_x) = f(x_0)$$

(deoarece ξ_x este cuprins între x și x_0, iar f este continuă).

Dacă $x_0 = a$ (respectiv $x_0 = b$), atunci

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

$$\left(\text{respectiv } \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)\right).$$

În concluzie F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F' = f$, adică F este o primitivă a funcției f. În baza definiției 2.22(α), avem

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Teorema următoare determină toate primitivele unei funcții continue date, primitive care se anulează în același punct.

4.9. Teoremă. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui f care se anulează într-un punct $x_0 \in [a, b]$. Atunci g are forma

$$g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, \qquad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Demonstrație. Am văzut (teorema 4.8) că funcția

(1) $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

este o primitivă a lui f. Cum diferența a două primitive ale aceleiași funcții este o constantă (propoziția I. 1.3), rezultă că există $k \in \mathbf{R}$ astfel încît

(2) $$F(x) = g(x) + k, \qquad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Însă

$$g(x_0) = 0,$$

deci

(3) $$k = F(x_0).$$

Din relațiile (2), (3), (1) și propoziția 2.21, rezultă că pentru orice $x \in [a, b]$ avem

$$g(x) = F(x) - k = F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

4.10. Teoremă *(formula de integrare prin părți)*. **Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt două funcții derivabile, cu derivate continue, atunci**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Demonstrație. Formula de derivare a produsului a două funcții derivabile

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \qquad (\forall)\ x \in [a, b]$$

arată că funcția produs, $f \cdot g$, este o primitivă a funcției $f' \cdot g + f \cdot g'$. Deci, aplicînd formula lui Leibniz-Newton (teorema 2.12) și propoziția 2.16, obținem:

$$(f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) = \int_a^b (f \cdot g)'(x)dx = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx =$$
$$= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

adică

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

4.11. *Exemple.*

1) Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 x^2 e^x dx.$$

Avem

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (x^2)' dx = e - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2xe^x \Big|_0^1 +$$
$$+ \int_0^1 e^x (2x)' dx = e - 2e + 2\int_0^1 e^x dx = -e + 2e^x \Big|_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2.$$

2) Să se calculeze integrala

$$\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx.$$

Avem

$$\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x (x^2)'\, dx = -2\int_0^\pi x \sin x\, dx =$$

$$= 2x\cos x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\cos x\cdot(x)'\mathrm{d}x = -2\pi - 2\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x = -2\pi - 2\sin x\Big|_0^{\pi} = -2\pi.$$

3) Să se calculeze integrala

$$\int_4^5 \sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x.$$

Utilizînd metoda integrării prin părţi (exemplul 2.2 (7), cap I) deducem că o primitivă a funcţiei

$$x \longrightarrow \sqrt{x^2-9},$$

pe intervalul $[4, 5]$, va fi funcţia

$$g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|$$

şi deci

$$\int_4^5 \sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x = g(x)\Big|_4^5.$$

4) Să se calculeze

$$\int_1^2 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$\int_1^2 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^3(\ln x)'\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

5) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{tg}^2 x\mathrm{d}x.$$

Avem

$$\mathrm{tg}^2 x = (\mathrm{tg}^2 x + 1) - 1 = (tg\ x)' - 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\mathrm{tg}\ x)'\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}x = x\ \mathrm{tg}\ x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\ x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.12. Teoremă. *(Formula de schimbare de variabilă)*
Fie $[a, b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ (J interval din $\mathbb{R}$) două funcţii cu proprietăţile:

1) f este continuă pe J,

2) φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[a, b]$. Atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. **Funcţia f fiind continuă, admite primitive. Dacă F este o primitivă a lui f pe J, atunci**

(1) $$F'(x) = f(x), \quad (\forall)\quad x\in J$$

şi (formula lui Leibniz-Newton)

(2) $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Folosind formula de derivare a funcţiilor compuse şi relaţia (1) deducem că $F\circ\varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t), \qquad (\forall)\ t\in[a,b].$$

Aplicînd formula lui Leibniz-Newton şi ţinînd seama de (2) obţinem

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x..$$

4.13. *Observaţie. Dacă $[a, b]\xrightarrow{\varphi}[c, d]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ sînt două funcţii cu proprietăţile:*

(α) f este continuă pe $[c, d]$,

(β) φ este bijectivă, φ şi φ^{-1} derivabile cu derivate continue,

atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, funcţiile φ şi f fiind continue, rezultă că $f\circ\varphi$ este continuă, deci admite primitive. Fie $P:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încît

(1) $$P' = f\circ\varphi.$$

Atunci (formula lui Leibniz-Newton)

(2) $$\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t = P(b) - P(a).$$

Pe de altă parte, ţinînd seamă că (1) avem

$$(P\circ\varphi^{-1})'(x) = P'(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\cdot(\varphi^{-1})'(x) = f(x)(\varphi^{-1})'(x)$$

deci

(3) $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x = (P\circ\varphi^{-1})(\varphi(b)) - (P\circ\varphi^{-1})(\varphi(a)) = P(b) - P(a).$$

Din (2) şi (3) se obţine egalitatea din enunţ, egalitatea care se mai numeşte şi *a doua formulă de schimbare de variabilă.*

4.14. ***Exemple.***

1) Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x dx$$

Avem

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^4 x \sin x\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\, dx.$$

Considerînd aplicaţia

$$x \to \varphi(x) = \cos x, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right],$$

obţinem

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^5 x dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \varphi^2(x))^2 \cdot \varphi'(x) dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [1 - 2\varphi^2(x) + \varphi^4(x)]\, \varphi'(x) dx =$$

$$= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2 + u^4)\, du = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2 + u^4)\, du =$$

$$= \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right] = \frac{43}{60}\sqrt{2}.$$

2) Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx.$$

Avem, ca în exemplul 3.3 (2), cap. I,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \ln\sqrt{3}.$$

3) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Avem, ca în exemplul 3.3 (1) cap. I,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin^2 x)'}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(1 + \sin^2 x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$$

4) Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^4} dx.$$

Avem

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2)'}{1 + (x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x^2\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

5) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ şi $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}.$$

Se cere să se calculeze

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx.$$

În acest scop definim funcţia $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [\alpha, \beta]$ prin

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha + (\beta - \alpha)\sin^2 t.$$

Avem deci situaţia următoare

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\varphi} [\alpha, \beta] \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

unde f este continuă, iar φ este derivabilă cu derivata continuă; deci sînt îndeplinite condiţiile teoremei 4.12 (formula de schimbare de variabilă). Aplicînd această teoremă, obţinem:

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\varphi(t) - \alpha)(\beta - \varphi(t))} \cdot \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[(\beta - \alpha)\sin^2 t] \cdot [(\beta - \alpha)(1 - \sin^2 t)]}\; 2(\beta - \alpha)\sin t \cos t\, dt =$$

$$= (\beta - \alpha)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\sin t \cos t)^2 dt = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt = \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt =$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\beta - \alpha)^2 \frac{\pi}{8}.$$

Aşadar,

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} dx = (\beta - \alpha)^2 \frac{\pi}{8}.$$

Observăm că funcţia $x \to \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}$ este un caz particular al funcţiei studiate în exemplul 3.5 (4), capitolul I. Însă primitivele găsite acolo nu sînt definite pe întreg intervalul $[\alpha, \beta]$ ci doar pe (α, β).

6) Să se calculeze integrala

$$\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Avem

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} \qquad (\forall) x \in [1, 4]$$

și luăm $\varphi : [1, 2] \to [1, 4]$ definită prin

$$\varphi(t) = t^2.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = 2t$$

și

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sqrt{1+t} \cdot 2t,$$

deci

$$\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} f(x)dx = \int_1^2 f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = 2\int_1^2 t\sqrt{1+t}\,dt.$$

Facem o nouă schimbare de variabilă.

În acest caz notăm

$$g(t) = t\sqrt{1+t} \qquad (\forall)\, t \in [1, 2]$$

și definim u: [2,3] $\to$ [1,2] prin

$$u(s) = s - 1.$$

Atunci

$$u'(s) = 1$$

și

$$g(u)(s))u'(s) = (s-1)\sqrt{s} = s^{3/2} - s^{1/2}$$

deci

$$2\int_1^2 t\sqrt{1+t}\,dt = 2\int_{u(2)}^{u(3)} g(t)dt = 2\int_2^3 g(u(t))u'(t)dt = 2\int_2^3 (s^{3/2} - s^{1/2})\,ds =$$

$$= 2\left[\frac{2}{5}\cdot s^{5/2} - \frac{2}{3}\cdot s^{3/2}\right]\Big|_2^3 = \frac{8}{15}(6\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

7) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx.$$

Avem

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x + 1}$$

și luăm $\varphi : [0, 1] \to \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ definită prin

$$\varphi(t) = \mathrm{Arc\,tg}\, t.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

și

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = \frac{t}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{t^2+1}.$$

Ultima egalitate se obține calculînd coeficienții A, B, C din identitatea

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+1}{t^2+1}.$$

Aceste calcule dau $A = -\frac{1}{2}$ și $B = C = \frac{1}{2}$.

Așadar

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}\, x}\,dx = \int_0^1\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ tg}\, t\right]\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right).$$

4.15. *Observație.* Fie $a > 0$ și $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx.$$

Într-adevăr, aplicînd propoziția 2.21, avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx. \qquad (1)$$

În baza definiției 2.22 (β), are loc relația

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^{-a} f(x)dx. \qquad (2)$$

Luînd funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = -t$$

și aplicînd formula de schimbare de variabilă (teorema 4.12), obținem

$$\int_0^{-a} f(x)dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(a)} f(x)dx = \int_0^a f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = -\int_0^a f(-t)dt. \qquad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3), rezultă

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx.$$

4.16. Definiție. Fie J un interval simetric (adică J este de forma $(-a, a)$ sau $[-a, a]$) și $f : J \to \mathbb{R}$. Spunem că f este o *funcție pară* (respectiv *impară*) dacă

$$f(-x) = f(x) \text{ (respectiv } f(-x) = -f(x)), \quad (\forall)\ x \in J.$$

4.17. *Observație.* Fie $f\colon [-a, a] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{dacă } f \text{ este pară,} \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este impară.} \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă f este pară, atunci

$$f(-x) = f(x), \quad (\forall)\ x \in [-a, a],$$

deci (observația 4.15)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x = \int_0^a 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x).$$

Dacă f este impară, atunci

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad (\forall)\ x \in [-a, a],$$

deci (observația 4.15)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x = 0.$$

4.18. Exerciții.

I.

1. Fie $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și strict crescătoare. Să se arate că există un singur punct $c \in [a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)\cdot f(c).$$

2. Se consideră funcția

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1, 3].$$

Să se determine $c \in (1, 3)$ astfel încît

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2f(c).$$

3. Fie $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă neidentic nulă, astfel încît

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Să se arate că există în $[a, b]$ două puncte $x_1, x_2, x_1 < x_2$ astfel încît

$$f(x_1)\cdot f(x_2) < 0.$$

4. Fie $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Se presupune că pentru orice interval deschis $(a', b') \subset [a, b]$ există un interval $[a_0', b_0'] \subset (a', b')$ astfel încît

$$\int_{a_0'}^{b_0'} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Să se arate că f este identic nulă.

II. Să se verifice egalitățile:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x\,\mathrm{d}x = 0.$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1\right).$ **4.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x = \pi.$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$ **6.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2.$

7. $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{1 + x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{52}{9}.$ **8.** $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9}\,\mathrm{d}x = \frac{98}{3}.$

9. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$ **10.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e} - \frac{\pi}{4}.$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{2} + 1).$ **12.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2 + \sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2 - 4\ln\frac{3}{2}.$

III. Să se calculeze integralele:

1. $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}\mathrm{d}x.$ **2.** $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{4x^2 + 4x + 5}\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\mathrm{d}x.$ **4.** $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x.$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x.$ **6.** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x.$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$ **8.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos 2x\,\mathrm{d}x.$

9. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x.$ **10.** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \sin 3x\,\mathrm{d}x.$

11. $\displaystyle\int_0^2 x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$ **12.** $\displaystyle\int_0^2 x \ln(1 + x)\mathrm{d}x.$

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1}\mathrm{d}x.$ **14.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}\mathrm{d}x.$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x + 1}{\sqrt{2 - x^2}}\mathrm{d}x.$

III

Aplicații ale integralei definite și metode de calcul

§ 1. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A INTEGRALEI DEFINITE A UNEI FUNCȚII POZITIVE

În acest paragraf vom defini clasa mulțimilor din planul $\mathbb{R}^2$ care au arie și vom arăta că dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci mulțimea

$$\Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

numită *subgraficul lui f*, are arie și aria sa este egală cu integrala lui f pe intervalul $[a, b]$:

$$\text{aria}\,(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

1.1. Definiție. O mulțime E din planul $\mathbb{R}^2$ se numește elementară dacă

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

unde D_i sînt dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar oricare două dreptunghiuri diferite D_i, D_j au cel mult o latură comună. Punem prin definiție

$$\text{aria}\,(E) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\,(D_i).$$

1.2. *Observații.* a) Reprezentarea unei mulțimi elementare E sub forma

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

nu este unică.

b) Reuniunea, intersecția și diferența a două mulțimi elementare sînt tot mulțimi elementare.

c) Aria unei mulțimi elementare E nu depinde de scrierea lui E sub forma $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ ca în definiția 1.1, adică dacă

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \quad \text{și} \quad E = \bigcup_{j=1}^{m} G_j,$$

sînt două reprezentări ale lui E ca în definiția 1.1, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \text{aria}\,(D_i) = \sum_{j=1}^{m} \text{aria}\,(G_j).$$

d) Dacă E, F sînt mulțimi elementare disjuncte, sau care au în comun cel mult laturi ale unor dreptunghiuri componente, atunci

$$\text{aria}\,(E \cup F) = \text{aria}\,(E) + \text{aria}\,(F).$$

e) Dacă E, F sînt mulțimi elementare astfel încît $E \subset F$, atunci

$$\text{aria}\,(E) \leqslant \text{aria}\,(F)$$

și

$$\text{aria}\,(F \setminus E) = \text{aria}\,(F) - \text{aria}\,(E).$$

1.3. Definiție. Fie A o mulțime mărginită din plan. Spunem că mulțimea A are arie, dacă există două șiruri $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mulțimi elementare astfel încît:

(1) $$E_n \subset A \subset F_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N},$$

(2) **șirurile de numere reale pozitive**

$$\{\text{aria}\,(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ și } \{\text{aria}\,(F_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

sînt convergente și

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(E_n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(F_n).$$

În acest caz punem

$$\text{aria}\,(A) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(E_n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(F_n).$$

1.4. *Observații.* (α) Definiția ariei lui A este corectă; adică dacă luăm $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alte două șiruri de mulțimi elementare care satisfac condițiile (1) și (2) din definiția 1.3, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(U_n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(V_n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(E_n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\,(F_n).$$

(β) Dacă A și B au arie, atunci $A \cup B$, $A \cap B$ și $A \setminus B$ au arie.

(γ) Dacă A, B au arie și $A \cap B = \emptyset$, atunci

$$\text{aria}\,(A \cup B) = \text{aria}\,(A) + \text{aria}\,(B).$$

(δ) Dacă A, B au arie și $B \subset A$, atunci

$$\text{aria}\,(A \setminus B) = \text{aria}\,(A) - \text{aria}\,(B).$$

Nu demonstrăm aici aceste rezultate.

1.5. *Exemplu de funcție al cărei subgrafic nu are arie.* Fie $g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ funcția lui Dirichlet

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap Q, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus Q \end{cases}$$

și

$$\Gamma_g \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}.$$

Vom arăta că:

(α) dacă E elementară $\subset \Gamma_g$, atunci aria $(E) = 0$,

(β) dacă F elementară $\supset \Gamma_g$, atunci aria $(F) \geqslant 1$.

Din faptul că între două numere reale există întotdeauna un număr irațional, rezultă că orice dreptunghi $D \subset \Gamma_g$ are înălțimea egală cu 0, deci aria sa este egală cu 0

$$\text{aria } (D) = 0.$$

Cum orice mulțime elementară $E \subset \Gamma_g$ este alcătuită din dreptunghiuri $D \subset \Gamma_g$, rezultă afirmația (α).

Pătratul $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ este cea mai mică mulțime elementară care include pe Γ_g; adică dacă F elementară $\supset \Gamma_g$, atunci $F \supset D_1$, așadar,

$$\text{aria } (F) \geqslant \text{aria } (D_1) = 1.$$

Fie acum $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ două șiruri de mulțimi elementare astfel încît șirurile ariilor lor sînt convergente și

$$E_n \subset \Gamma_g \subset F_n, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Atunci din (α) rezultă

$$\text{aria } (E_n) = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

iar din (β) se obține

$$\text{aria } (F_n) \geqslant 1, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria } (E_n) = 0 < 1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \text{aria } (F_n).$$

Așadar, mulțimea Γ_g *nu* are arie.

Din cele arătate mai sus se vede că: *dacă A este o mulțime care are arie, nu rezultă neapărat că orice submulțime B a lui A are arie.*

1.6. Teoremă. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pozitivă atunci

$$(\alpha) \qquad \Gamma_f \text{ are arie}$$

și

$$(\beta) \quad \text{aria } (\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

un șir de diviziuni astfel încît

(1) $$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

și să notăm cu m_i^n (respectiv M_i^n) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției f pe intervalul închis și mărginit $[x_{i-1}^n, x_i^n]$.

Se știe (vezi Elemente de analiză matematică, cl. a XI-a) că orice funcție continuă pe un interval închis și mărginit J, își atinge marginile pe J. Deci, în cazul nostru există

$$u_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n] \quad \text{și} \quad v_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$$

astfel încît

$$f(u_i^n) = m_i^n \quad \text{și} \quad f(v_i^n) = M_i^n.$$

Fie (fig. III.1)

$$D_i^n \stackrel{\text{def}}{=} [x_{i-1}^n, x_i^n] \times [0, m_i^n],$$

$$G_i^n \stackrel{\text{def}}{=} [x_{i-1}^n, x_i^n] \times [0, M_i^n]$$

dreptunghiurile de bază $x_i^n - x_{i-1}^n$ și înălțime m_i^n, respectiv M_i^n. Mulțimile elementare

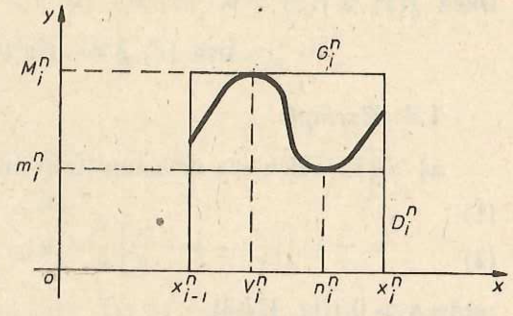


Fig. III.1

$$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{p_n} D_i^n, \text{ respectiv } F_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{p_n} G_i^n$$

verifică incluziunile

(2) $$E_n \subset \Gamma_f \cup F_n,$$

iar ariile lor sînt

(3) $$\text{aria } (E_n) = \sum_{i=1}^{p_n} m_i^n (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{p_n} f(u_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(f, u_i^n)$$

respectiv

(4) $$\text{aria } (F_n) = \sigma_{\Delta_n}(f, v_i^n).$$

Funcția f fiind continuă, este integrabilă (cap. II, teorema 3.12), deci (cap. II, observația 2.11), ținînd seama de relațiile (1), (3) și (4), obținem:

(5) $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, u_i^n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria}(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, v_i^n) = \lim_{n\to\infty} \text{aria } (F_n).$$

Șirurile de mulțimi elementare (E_n) și (F_n) verificînd relațiile (2) și (5), rezultă că mulțimea Γ_f are arie și (definiția 1.3)

$$\text{aria } (\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.7. Consecință. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcții continue astfel încît

$$f(x) \leqslant g(x), \quad (\forall)\ x \in [a, b]$$

atunci mulțimea (fig. III.2)

$$\Gamma_{f,g} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b;\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\},$$

cuprinsă între graficele funcțiilor f, g și dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele a și b respectiv, are arie și

$$\text{aria } (\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

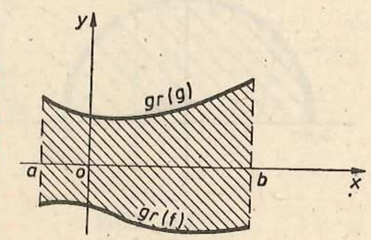


Fig. III.2

Dacă $g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, **atunci**

$$\text{aria}\ (\Gamma_{f,g}) = \text{aria}\ (\Gamma_g) - \text{aria}\ (\Gamma_f).$$

1.8. *Exemple.*

1) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabolele de ecuații:

(1) $$y^2 = ax,$$

(2) $$x^2 = ay,$$

unde $a > 0$ (fig. III.3).

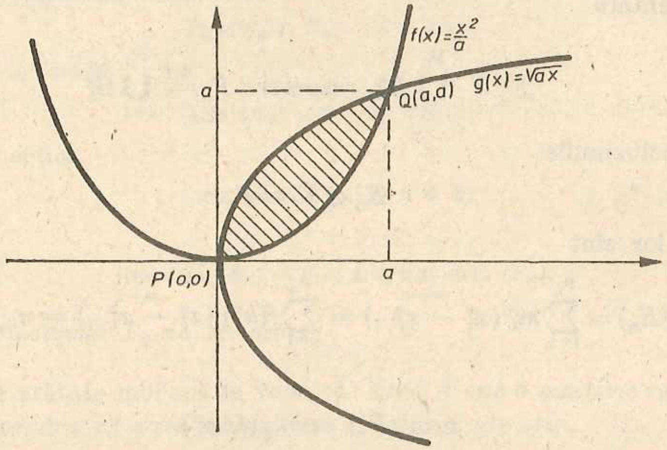


Fig. III.3

Rezolvînd acest sistem de ecuații, obținem punctele de intersecție ale acestor parabole.

$$\text{aria}\ (\Gamma_{f,g}) = \int_0^a (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

$$= \left(\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}\,a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\,a^2 = \frac{a^2}{3}.$$

2) Să se calculeze aria mulțimii (fig. III.4)

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2,\ \ y \geqslant 0\},$$
$$(r > 0).$$

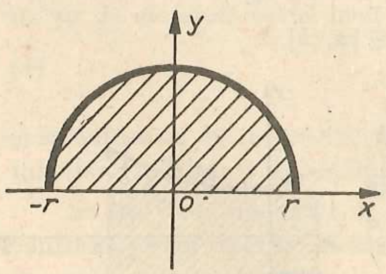


Fig. III.4

Observăm că mulțimea A este subgraficul funcției $f: [-r, r] \to \mathbf{R}_+$ definite prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Am văzut în capitolul I, exemplul 3.5 (2), că funcția

$$F(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left[r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2}\right], \quad (-r \leqslant x \leqslant r)$$

este o primitivă a lui f. Deci

$$\text{aria}\ (A) = \text{aria}\ (\Gamma_f) = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2}\right]\Bigg|_{-r}^{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\,[r^2 \arcsin 1 - r^2 \arcsin(-1)] = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\,\pi r^2.$$

3) Să se găsească aria mulțimii A (fig. III.5) cuprinse între cercul de ecuație

(I) $$x^2 + y^2 = 4px$$

și parabola de ecuație

(II) $$y^2 = 2px.$$

Scriind ecuația (I) sub forma

(I′) $$(x - 2p)^2 + y^2 = (2p)^2,$$

se observă că cercul considerat are centrul în punctul $(2p, 0)$, iar raza sa este $2p$.

Pentru a determina punctele în care parabola intersectează cercul, vom rezolva sistemul format din ecuațiile (I) și (II). Dacă se înlocuiește y^2 din (II) în (I), atunci

$$x^2 = 2\,px,$$

deci se obțin soluțiile

$$x = 0 \text{ și } x = 2p.$$

Înlocuind pe $x = 0$ (respectiv $x = 2p$) în ecuația (II), obținem soluțiile

$$y = 0 \text{ și } y = \pm\, 2p.$$

Așadar, parabola de ecuație (II) și cercul de ecuație (I) se intersectează în punctele

$$O\ (0, 0), \quad P\ (2p, 2p), \quad Q\ (2p, -2p).$$

Este suficient să calculăm aria mulțimii A_1 cuprinse între arcul de parabolă OP și arcul de cerc OP, adică aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor

$$f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{2px}, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2p),$$

$$h(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{4px - x^2}, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2p).$$

Funcțiile f și h fiind pozitive, avem

(1) $$\text{aria}\ (A_1) = \text{aria}\ (\Gamma_{f,h}) = \text{aria}\ (\Gamma_h) - \text{aria}\ (\Gamma_f),$$

(2) $$\text{aria}\ (\Gamma_f) = \int_0^{2p} f(x)\,dx = \sqrt{2p}\int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \sqrt{2p}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2p} = \frac{8}{3}\,p^2.$$

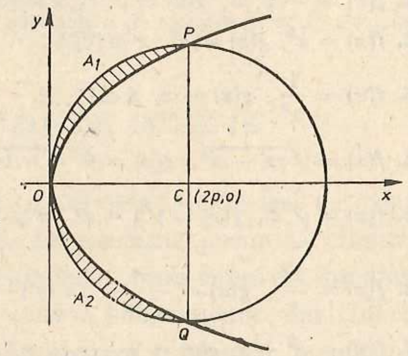


Fig. III.5

Deşi se observă uşor că

$$\text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{4} \text{ aria cercului de rază } 2p = \frac{1}{4}\pi(2p)^2 = \pi p^2,$$

totuşi vom folosi integrala pentru a calcula aria (Γ_h).

Scriind $\sqrt{4px - x^2}$ sub forma

$$\sqrt{x(4p - x)},$$

se vede că avem de integrat o funcţie de forma

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)}.$$

Pentru a putea aplica rezultatul obţinut în exemplul 4.13 (5), din capitolul II, considerăm funcţia h_1 definită pe $[0, 4p]$ (şi nu numai pe $[0, 2p]$ cum era definită h), prin aceeaşi relaţie

(3) $$h_1(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sqrt{x(4p - x)}, \ (\forall)\ x \in [0, 4p].$$

Atunci are loc relaţia

(4) $$\text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{2} \text{ aria } (\Gamma_{h_1}).$$

În exemplul 4.13(5) s-a obţinut egalitatea

(5) $$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)}\, dx = (\beta - \alpha)^2 \frac{\pi}{8}.$$

Din (3), (4) şi (5) (pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 4p$), obţinem:

(6) $$\text{aria } (\Gamma_h) = \frac{1}{2}\int_0^{4p} \sqrt{x(4p - x)}\, dx = \frac{1}{2}(4p)^2 \cdot \frac{\pi}{8} = \pi p^2.$$

În sfîrşit din relaţiile (1), (2) şi (6) rezultă

$$\text{aria } (A) = \text{aria } (A_1) + \text{aria } (A_2) = 2 \text{ aria } (A_2) =$$

$$= 2[\text{aria } (\Gamma_h) - \text{aria } (\Gamma_f)] = 2\pi p^2 - \frac{16}{3} p^2.$$

1.9. *Exerciţii*

I. Să se calculeze aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$:

1. $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$.
2. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$, $x \in [1, 3]$.
4. $f(x) = \sqrt{rx - x^2}$, $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]$.
6. $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in [-1, 1]$.
7. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3 - x$, $x \in [-2, 1]$.
8. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

9. $f(x) = |x|$, $g(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$.
10. $f(x) = 0$, $g(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x \in [0, a]$.
11. $f(x) = \frac{x^2}{4a}$, $g(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $x \in [-2a, 2a]$.

II.

1. Să se calculeze aria mulţimii cuprinsă între parabola de ecuaţie $y^2 = 4x$ şi dreapta de ecuaţie $y = 2x$.
2. Să se calculeze aria mulţimii din semiplanul $\{(x, y) \mid y > 0\}$ cuprinsă între hiperbola echilateră de ecuaţie $xy = a^2$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = a$ şi $x = 2a$.
3. Interiorul cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = 16$ este despărţit de parabola de ecuaţie $y^2 = 6x$ în două regiuni. Să se găsească aria fiecăreia din ele.
4. Interiorul elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ este despărţit de hiperbola de ecuaţie $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ în trei regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.
5. Să se calculeze aria figurii cuprinsă între parabolele de ecuaţii
$$y^2 = 8(2 - x) \quad \text{şi} \quad y^2 = 24(2 + x).$$
6. Interiorul cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = 8$ este despărţit de parabola de ecuaţie $y^2 = 2x$ în două regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.
7. Fie hiperbola echilateră de ecuaţie $x^2 - y^2 = a^2$ şi dreapta de ecuaţie $y = kx$ $(0 < k < 1)$. Să se calculeze aria mulţimii cuprinsă între semidreapta Ox $(x > 0)$, arcul de hiperbolă $x^2 - y^2 = a^2$ $(y > 0)$ şi dreapta $y = kx$.
8. Să se calculeze aria mulţimii cuprinsă între parabola de ecuaţie $y^2 = x$ şi dreapta de ecuaţie $y = 2x - 1$.
9. Să se calculeze aria mulţimii cuprinsă între parabolele de ecuaţie $y^2 = x$, $x^2 = 8y$.

§ 2. VOLUMUL CORPURILOR DE ROTAŢIE

În acest paragraf vom presupune că cititorul este familiarizat cu calculul volumului unor corpuri uzuale ca: paralelipiped, prismă, piramidă, cilindru, con, trunchi de con. Pornind de la volumul cilindrului, vom defini ce înseamnă că un corp de rotaţie (corp obţinut prin rotirea subgraficului unei funcţii pozitive f în jurul axei Ox) are volum şi vom deduce o formulă de calcul al volumului unor astfel de corpuri.

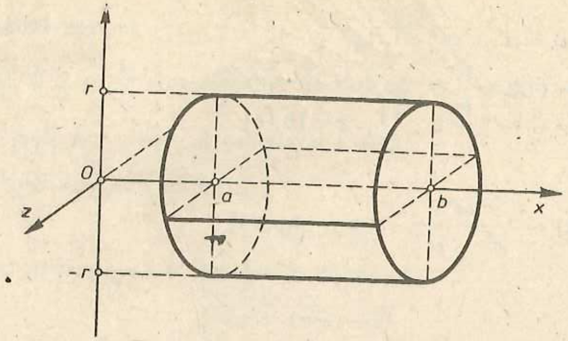


Fig. III.6

Cel mai simplu corp de rotație se obține rotind subgraficul unei funcții constante pozitive:

$$f(x) = r, \ (\forall)\ x \in [a, \ b]$$

în jurul axei Ox (fig. III.6). Această mulțime (care este un cilindru de rază r și înălțime $b - a$) poate fi scrisă sub forma

$$C_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant r, \ a \leqslant x \leqslant b\right\}.$$

Volumul acestui cilindru C_r este

$$\text{vol } (C_r) = \pi r^2(b - a).$$

2.1. Definiție. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$. Mulțimea

$$C_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x), \ a \leqslant x \leqslant b\}$$

se numește corpul de rotație determinat de funcția f sau corpul obținut prin rotirea subgraficului funcției f în jurul axei Ox (fig. III.7).

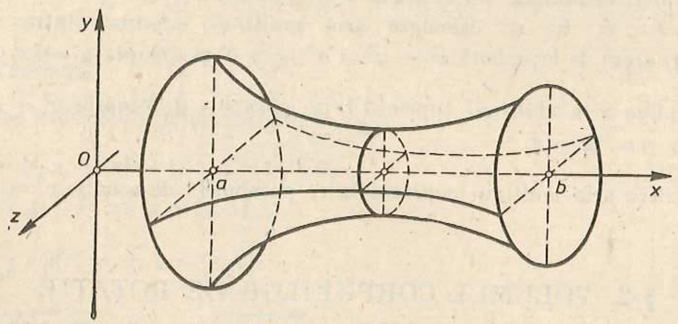


Fig. III.7

2.2. *Observație.* Dacă funcția $g : [a, \ b] \to \mathbf{R}_+$ este *constantă pe porțiuni*, adică dacă există o diviziune $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ a lui $[a, \ b]$ astfel încît g este constantă pe fiecare interval $(x_{i-1}, \ x_i)$:

$$g(x) = c_i, \qquad (\forall)\ x \in (x_{i-1}, \ x_i),$$

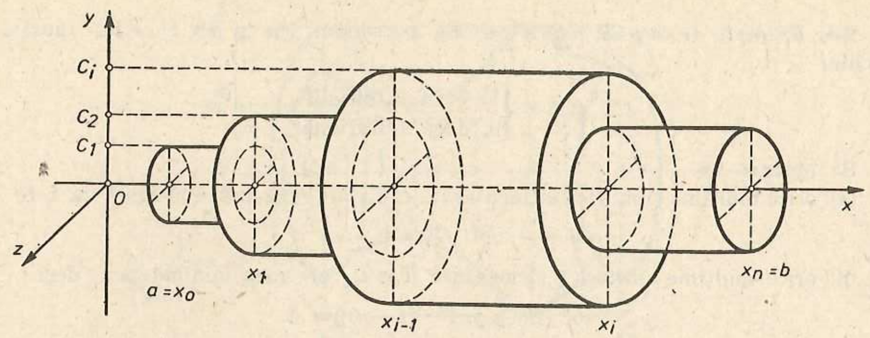


Fig. III.8

atunci corpul de rotație determinat de f are forma următoare (fig. III.8): adică este o reuniune finită de cilindri. Volumul unui asemenea corp de rotație este

$$\text{vol } (C_g) = \pi \sum_{i=1}^{n} c_i^2(x_i - x_{i-1}).$$

Prin analogie cu noțiunea de mulțime elementară introdusă în paragraful precedent, vom numi *mulțime cilindrică elementară*, orice mulțime care se obține prin rotirea subgraficului unei funcții constante pe porțiuni în jurul axei Ox.

Cel mai mic (respectiv cel mai mare) dintre numerele pozitive $c_1, c_2, \ldots, c_n$ va fi numit *raza minimă* (resp. *raza maximă*) a mulțimii cilindrice elementare $C(f)$.

Așa cum am folosit mulțimile elementare pentru a defini aria unei mulțimi din plan, vom folosi mulțimile cilindrice elementare pentru a defini volumul corpurilor de rotație.

2.3. Definiție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ și C_f corpul de rotație determinat de funcția f. Spunem că C_f are volum dacă există două șiruri $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de mulțimi cilindrice elementare (fiecare G_n și H_n fiind determinate de funcțiile constante pe porțiuni $g_n, h_n : [a, b] \to \mathbf{R}$) astfel încît

(1) $$G_n \subset C_f \subset H_n, \qquad (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

și

(2) $$\lim_{n\to\infty} \text{vol}\,(G_n) = \lim_{n\to\infty} \text{vol}\,(H_n).$$

În acest caz volumul lui C_f se definește prin

$$\text{vol}\,(C_f) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \text{vol}\,(G_n) = \lim_{n\to\infty} \text{vol}\,(H_n).$$

2.4. *Observație.* Definiția volumului corpului de rotație C_f nu depinde de șirurile $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ considerate.

2.5. *Exemplu de corp de rotație care nu are volum.* Fie $g:[0,1]\to \mathbf{R}_+$ funcția lui Dirichlet

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x \text{ rațional,}\\ 0, & \text{dacă } x \text{ irațional.}\end{cases}$$

Se observă că

(α) orice mulțime cilindrică elementară $G\subset C_g$ are raza maximă egală cu zero deci,

$$\text{vol }(G)=0,$$

(β) orice mulțime cilindrică elementară $H\supset C_g$ are raza minimă $\geqslant 1$, deci

$$\text{vol }(H)\geqslant \pi\, 1^2\cdot(1-0)=\pi.$$

Fie acum $(G_n)_{n\in N}$, $(H_n)_{n\in N}$ două șiruri de mulțimi cilindrice elementare astfel încît

(1) $$G_n\subset C_g\subset H_n,\ (\forall)\ n\in \mathbf{N},$$

(2) șirurile de numere pozitive $(\text{vol }(G_n))_{n\in \mathbf{N}}$ și $(\text{vol }(H_n))_{n\in\mathbf{N}}$ sînt convergente. Atunci din (1), (α) și (β) rezultă

$$\text{vol }(G_n)=0 \text{ și vol }(H_n)\geqslant\pi,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N},$$

deci (2)

$$\lim_{n\to\infty}\text{vol }(G_n)=0<\pi\leqslant\lim_{n\to\infty}\text{vol }(H_n),$$

de unde rezultă că C_g *nu* are volum.

2.6. Teoremă. Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}_+$ este o funcție continuă, atunci (i) corpul de rotație determinat de f are volum și

(ii) $$\text{vol}\,(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. (Modelată după demonstrația teoremei 1.6). Fie

$$\Delta_n=(a=x_0^n<x_1^n<\ldots<x_{p_n}^n=b),\quad (n\in\mathbf{N})$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ astfel încît

(1) $$\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$$

și să notăm cu m_i^n (respectiv M_i^n) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției f pe intervalul închis și mărginit $[x_{i-1}^n,x_i^n]$. Atunci există $u_i^n, v_i^n\in[x_{i-1}^n,x_i^n]$ astfel încît

$$f(u_i^n)=m_i^n \text{ și } f(v_i^n)=M_i^n.$$

Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}$ definim funcțiile constante pe porțiuni $g_n, h_n:[a,b]\to\mathbf{R}_+$

$$g_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}m_i^n=f(u_i^n), & \text{dacă } x\in(x_{i-1}^n,x_i^n), & (1\leqslant i\leqslant p_n),\\ f(x_i), & \text{dacă } x=x_i, & (0\leqslant i\leqslant p_n),\end{cases}$$

$$h_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}M_i^n=f(v_i^n), & \text{dacă } x\in(x_{i-1}^n,x_i^n), & (1\leqslant i\leqslant p_n),\\ f(x_i), & \text{dacă } x=x_i, & (0\leqslant i\leqslant p_n).\end{cases}$$

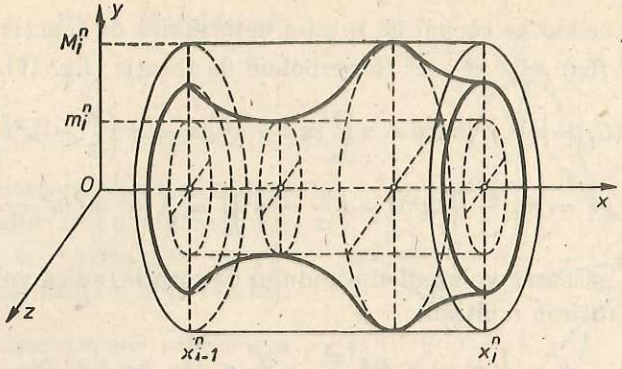


Fig. III.9

Atunci corpurile de rotație G_n și H_n determinate de g_n și h_n, respectiv, sînt mulțimi cilindrice elementare cu proprietățile:

(2) $$G_n\subset C_f\subset H_n,\quad (\forall)\ n\in\mathbf{N},$$

(3) $$\begin{cases}\text{vol}\,(G_n)=\pi\sum_{i=1}^{p_n}f^2(u_i^n)(x_i^n-x_{i-1}^n)=\sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ u_i^n),\\ \text{vol}\,(H_n)=\pi\sum_{i=1}^{p_n}f^2(v_i^n)(x_i^n-x_{i-1}^n)=\sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ v_i^n).\end{cases}$$

Funcția f fiind continuă, rezultă că și funcția πf^2 este continuă, deci (capitolul II, teorema 3.12) πf^2 este integrabilă, prin urmare, ținînd seamă de (1) și (3), obținem:

(4) $$\begin{cases}\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ u_i^n)=\lim_{n\to\infty}\text{vol}\,(G_n)=\\ \qquad=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(\pi f^2,\ v_i^n)=\lim_{n\to\infty}\text{vol}\,(H_n).\end{cases}$$

Șirurile de mulțimi cilindrice elementare $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ verificînd relațiile (2) și (4), rezultă că $C(f)$ are volum și

$$\text{vol}\,(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

2.7. *Exemple*

α) Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f:[0,b]\to\mathbf{R}_+$ definită prin $f(x)=\sqrt{2ax}$ (paraboloid de rotație; fig. III.10).

Avem

$$\text{vol }(C_f)=\pi\int_0^b f^2(x)\mathrm{d}x=$$

$$=2\pi a\int_0^b x\,\mathrm{d}x=2\pi a\frac{x^2}{2}\Big|_0^b=\pi ab^2.$$

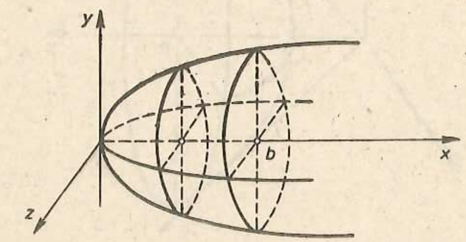


Fig. III.10

β) Să se calculeze corpul de rotaţie determinat de funcţia $f:[a, b] \to \mathbf{R}_+$ definită prin $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ (hiperboloid de rotaţie; fig. III.11)

$$\mathrm{vol}\,(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_a^b (x^2-a^2)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}-a^2x\right)\Big|_a^b=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{b^3}{3}-a^2b\right)-\left(\frac{a^3}{3}-a^3\right)\right]=\frac{\pi}{3}(b^3+2a^3-3a^2b).$$

γ) Să se găsească volumul elipsoidului de rotaţie, adică volumul corpului obţinut prin rotirea mulţimii

$$E=\left\{(x, y)\in \mathbf{R}^2 \,\Big|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\},\ (a, b>0)$$

în jurul axei Ox (fig. III.12)

Datorită simetriei elipsoidului faţă de planul yOz, este suficient să calculăm numai volumul jumătăţii situate în partea dreaptă $(x>0)$ a planului yOz. Fie deci,

$$f:[0, a]\to \mathbf{R}_+,\ f(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Atunci

$$\mathrm{vol}\,(C_f)=\pi\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}b^2a,$$

deci

$$\text{volumul elipsoidului}=\frac{4\pi}{3}ab^2.$$

Dacă $a=b=r$, atunci regăsim

$$\text{volumul sferei de rază } a=\frac{4\pi}{3}a^3.$$

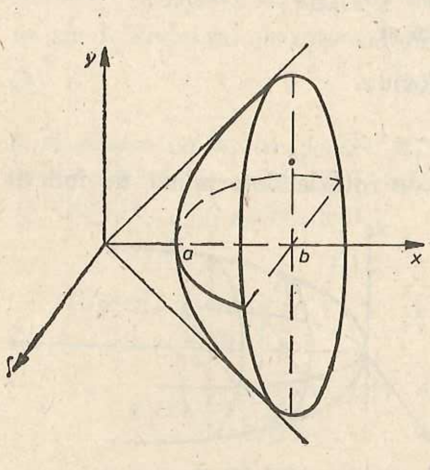


Fig. III.11

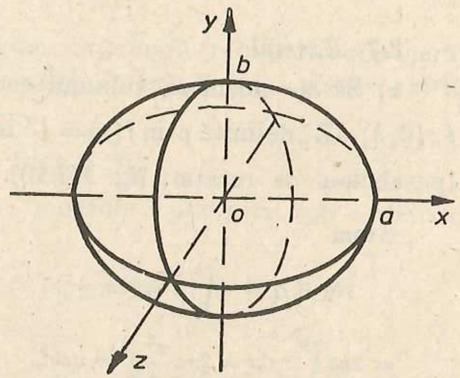


Fig. III.12

δ) Fie $a>0$ şi astroida de ecuaţie

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\quad (a>0).$$

Să se calculeze volumul astroidului de rotaţie (corpul obţinut prin rotirea mulţimii mărginite de astroidă, în jurul axei Ox; fig. III.13).

Datorită simetriei este suficient să calculăm volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia

$$f(x)=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\quad x\in[0, a].$$

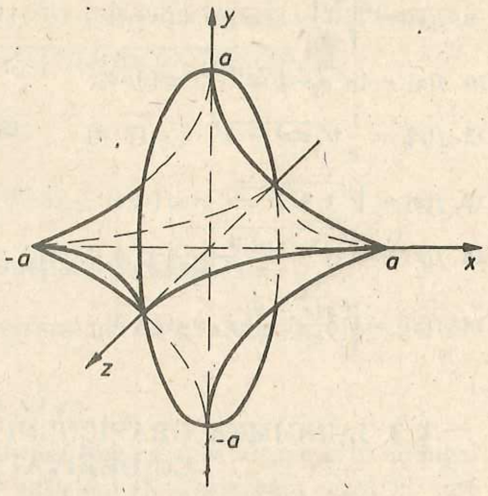


Fig. III.13

Avem

$$\mathrm{vol}\,(C_f)=\pi\int_0^a f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3\mathrm{d}x=$$

$$=\pi\int_0^a\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\pi\left(a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{18}{105}\pi a^3.$$

Deci volumul astroidului de rotaţie este

$$\frac{32}{105}\pi a^2.$$

2.8. *Exerciţii*

Să se calculeze volumele corpurilor de rotaţie determinate de funcţiile:

1. $f(x)=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}},\ x\in[a, b],\ a, b>0.$
2. $f(x)=2x-x^2,\ x\in[0, 2].$
3. $f(x)=\sin x,\ x\in[0, \pi].$
4. $f(x)=e^{-x},\ x\in[0, 2].$
5. $f(x)=\arcsin x,\ x\in\left[0, \frac{1}{2}\right].$
6. $f(x)=x\ln x,\ x\in[1, e].$
7. $f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),\ x\in[0, a].$
8. $f(x)=xe^x,\ x\in[0, 1].$

9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{a}}$, $x \in [0, a]$.

10. $f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, $x \in [0, a]$.

11. $f(x) = \dfrac{1}{a}\sqrt{ax^3 - x^4}$, $x \in [0, a]$.

12. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}$, $x \in [0, 1]$.

13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x}$, $x \in [a, b]$, $b > a > 0$.

14. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$, $x \in [0, 3]$.

§ 3. LUNGIMEA GRAFICULUI UNEI FUNCŢII DERIVABILE CU DERIVATA CONTINUĂ

În acest paragraf vom defini lungimea graficului unei funcţii continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi vom arăta că dacă f este derivabilă cu derivata continuă, atunci graficul lui f are lungime finită şi

$$\text{lungimea graficului lui } f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

3.1. Definiţie. Pentru orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi orice diviziune

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

a intervalului $[a, b]$ definim funcţia $f_\Delta : [a, b] \to \mathbf{R}$ prin

$$f_\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \text{ dacă } x \in [x_{i-1}, x_i],\ (1 \leqslant i \leqslant n);$$

f_Δ se numeşte funcţia poligonală asociată lui f şi lui Δ (fig. III.14).

3.2. *Observaţie.* Funcţia f_Δ se obţine, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, scriind ecuaţia dreptei care trece prin punctele din plan

$$A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$$

şi

$$A_i(x_i, f(x_i)).$$

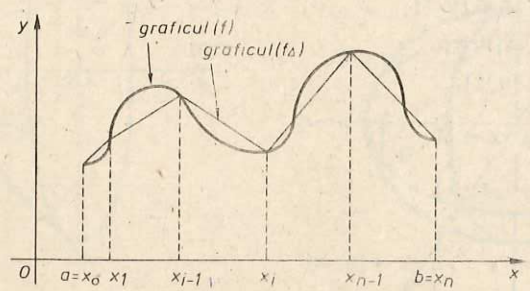


Fig. III.14

Distanţa dintre punctele A_{i-1} şi A_i este (aplicînd teorema lui Pitagora):

$$d(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

3.3. Definiţie. Numărul pozitiv

$$l(f_\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} d(A_{i-1}, A_i)$$

se numeşte lungimea graficului funcţiei poligonale f_Δ.

3.4. *Observaţie.* Dacă Δ, Δ' sînt diviziuni ale intervalului $[a, b]$ şi $\Delta \subset \Delta'$, atunci

$$l(f_\Delta) \leqslant l(f_{\Delta'}).$$

Ţinînd seama că orice diviziune Δ' mai fină ca Δ se obţine prin adăugarea la Δ a noi puncte de diviziune, este suficient să considerăm cazul în care Δ' se obţine din Δ prin adăugarea unui singur punct $c \in (x_{j-1}, x_j)$:

$$\Delta = (a = x_0 < \ldots < x_{j-1} < x_j < \ldots < x_n = b),$$

iar

$$\Delta' = (a = x_0 < \ldots < x_{j-1} < c < x_j < \ldots < x_n = b).$$

Notînd cu B punctul de coordonate $(c, f(c))$ avem (fig. III.15):

$$d(A_{j-1}, A_j) \leqslant d(A_{j-1}, B) + d(B, A_j),$$

deci

$$l(f_\Delta) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} d(A_{i-1}, A_i) + d(A_{j-1}, A_j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} d(A_{i-1}, A_i) + d(A_{j-1}, B) + d(B, A_j) = l(f_{\Delta'}).$$

3.5. Definiţie. Spunem că graficul unei funcţii continui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ are lungime finită dacă există o constantă $M \geqslant 0$ astfel încît

$$l(f_\Delta) \leqslant M,$$

pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$. În acest caz marginea superioară a mulţimii

$$\{l(f_\Delta) \mid \Delta \text{ diviziune a lui } [a, b]\}$$

este $< \infty$. Numărul real pozitiv

$$l(f_\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{l(f_\Delta) \mid \Delta \text{ diviziune a lui } [a, b]\}$$

se numeşte lungimea graficului funcţiei f.

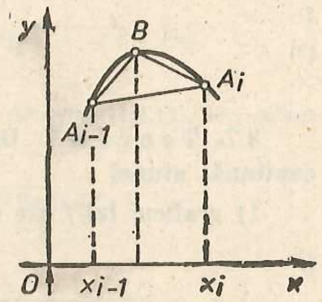


Fig. III.15

3.6. *Observație.* Dacă graficul lui f are lungime finită, atunci există un șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

(1) $$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și

(2) $$\lim_{n\to\infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

Într-adevăr, pentru orice $n \geq 1$ avem

$$l(f) - \frac{1}{n} < l(f) = \text{cel mai mic majorant al mulțimii } \{l(f_\Delta)\}_\Delta,$$

deci $l(f) - \frac{1}{n}$ nu este majorant pentru această mulțime, adică există o diviziune $\bar{\Delta}_n$ a lui $[a, b]$ astfel încît

(3) $$l(f) - \frac{1}{n} < l(f_{\bar{\Delta}_n}) \leq l(f)$$

(a doua inegalitate rezultînd din faptul că $l(f)$ este majorant pentru mulțimea $\{l(f_\Delta)\}_\Delta$). Din (3) rezultă

(4) $$l(f) = \lim_{n\to\infty} l(f_{\bar{\Delta}_n}).$$

Luînd, pentru fiecare $n \geq 1$, o diviziune Δ_n cu proprietățile

$$\bar{\Delta}_n \subset \Delta_n$$

$$\|\Delta_n\| \leq \frac{1}{n},$$

rezultă (observația 3.4) că:

(5) $$l(f_{\bar{\Delta}_n}) \leq l(f_{\Delta_n}) \quad (\leq l(f))$$

și

(1) $$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0.$$

Din (4) și (5) rezultă că șirul $\{l(f_{\Delta_n})\}_{n\in N}$ este convergent

și

(2) $$\lim_{n\to\infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

3.7. Teoremă. Dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este derivabilă, cu derivata continuă, atunci

1) graficul lui f are lungime finită

și

2) $l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că funcția

$$x \to \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

este continuă, deci mărginită, adică există $M \geq 0$ astfel încît

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} \leq M, \quad (\forall)\ x \in [a, b].$$

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune oarecare a lui $[a, b]$. Aplicînd teorema creșterilor finite lui f, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \leq i \leq n)$ obținem un $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel încît

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

deci

$$l(f_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b - a),$$

oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$. În concluzie, graficul lui f are lungime finită.

Fie acum

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b), \quad n \in \mathbf{N},$$

un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu proprietățile (vezi observația 3.6)

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$$

și

(1) $$\lim_{n\to\infty} l(f_{\Delta_n}) = l(f).$$

Aplicînd, ca mai sus, teorema creșterilor finite lui f pe fiecare interval $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obținem un $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ astfel încît

(2) $$f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n) = f'(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Notînd $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_{p_n}^n)$ și ținînd seamă de (2), obținem

$$l(f_{\Delta_n}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i^n - x_{i-1}^n)^2 + (f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n))^2} =$$

(3) $$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2} \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi^n).$$

Funcția $\sqrt{1 + (f')^2}$ fiind continuă, este integrabilă (teorema II.3.12), deci (observația II.2.11)

(4) $$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi^n) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Din egalitățile (1), (3) și (4) obținem

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

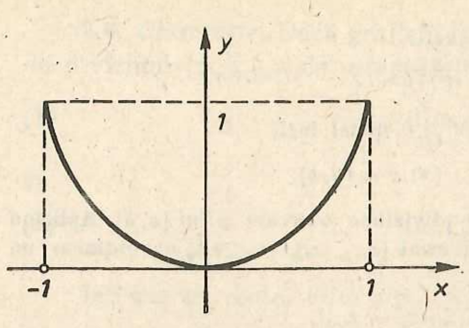


Fig. III.16

3.8. *Exemple*

α) Să se calculeze lungimea graficului funcției (fig. III.16)

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1].$$

Datorită simetriei este suficient să calculăm lungimea graficului restricției f_0 a lui f la $[0, 1]$. Avem

$$l(f) = 2l(f_0) = 2\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx,$$

deci aplicînd exercițiul 2.2 (7) din capitolul I, obținem

$$l(f) = 2\left[\frac{1}{2}\, 2x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}).$$

β) Să se calculeze lungimea graficului funcției

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ln\sqrt{x}, \quad x \in [1, e].$$

Avem

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

deci

$$l(f) = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)}\, dx =$$

$$= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

γ) Să se calculeze lungimea astroidei (fig. III.17) de ecuație

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \qquad (a > 0).$$

Prima bisectoare ($y = x$) intersectează (în primul cadran) astroida în punctul

$$M\left(2^{-\frac{3}{2}}a;\ 2^{-\frac{3}{2}}a\right).$$

Datorită simetriei avem egalitățile:

lungimea arcului $(\widehat{AM}) = \frac{1}{2}$ lungimea arcului $(\widehat{AMB}) = \frac{1}{8}$ lungimea astroidei,

deci este suficient să calculăm lungimea graficului funcției

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad x \in \left[2^{-\frac{3}{2}}a,\ a\right]$$

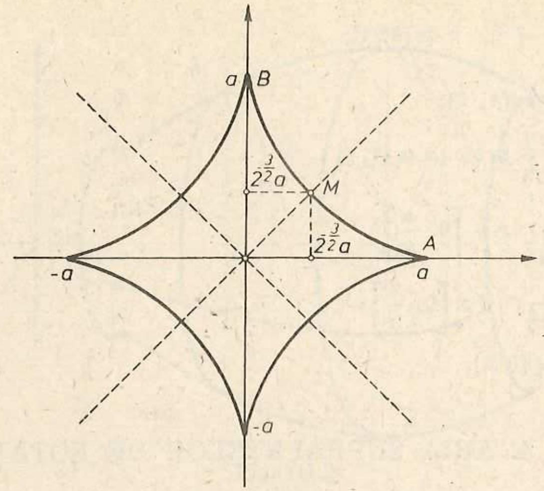


Fig. III.17

Derivînd funcția f, obținem

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

deci

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

prin urmare

$$l(f) = \int_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = a^{\frac{1}{3}}\int_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} x^{-\frac{1}{3}}\, dx =$$

$$= a^{\frac{1}{3}}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_{2^{-\frac{2}{3}}a}^{a} = \frac{3}{2}\,a^{\frac{1}{3}}\left[a^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{a}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{4}\,a.$$

Așadar, lungimea astroidei este

$$8l(f) = 6a.$$

3.9. *Exerciții.* Să se calculeze lungimile graficelor următoarelor funcții:

1. $f(x) = \ln x, \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}].$

2. $f(x) = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$

3. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in [0, 1]$.

4. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, 2]$.

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad x \in [1, e]$.

6. $f(x) = \ln \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

7. $f(x) = \ln \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

8. $f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1]$.

§ 4. ARIA SUPRAFEŢELOR DE ROTAŢIE

4.1. Definiţie. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă, atunci mulţimea

$$S_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} = f(x), \ (\forall)\ x \in [a, b]\}$$

se numeşte suprafaţa de rotaţie determinată de funcţia f (fig. III.18) sau suprafaţa obţinută prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox.

Am văzut în paragraful precedent cum se asociază lui f şi fiecărei diviziuni $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ a intervalului $[a, b]$ o funcţie poligonală f_Δ. Considerăm acum suprafaţa de rotaţie $S(f_\Delta)$ determinată de funcţia f_Δ.

4.2. *Observaţie*. Presupunînd cunoscut faptul că aria laterală a unui trunchi de con de raze r_1, r_2 şi generatoare g (fig. III.19) este dată de relaţia

$$\pi(r_1 + r_2)g,$$

putem calcula aria laterală a suprafeţei de rotaţie $S(f_\Delta)$ determinată de funcţia poligonală f_Δ.

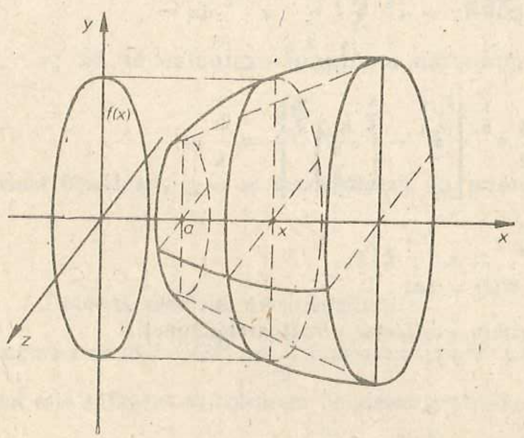


Fig. III.18

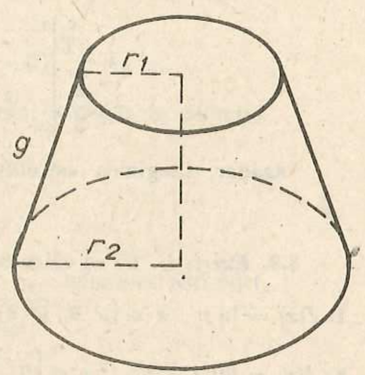


Fig. III.19

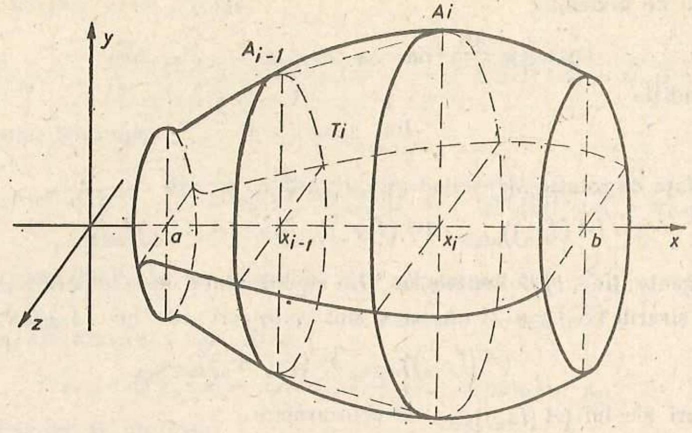


Fig. III.20

Într-adevăr, aria laterală a trunchiului de con T_i (fig. III.20) de raze $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ şi generatoare $d(A_{i-1}, A_i)$ (distanţa dintre A_{i-1} şi A_i) fiind

$$\pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot d(A_{i-1}, A_i),$$

rezultă că aria laterală a suprafeţei $S(f_\Delta)$ este

$$A(f_\Delta) = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

După această observaţie putem defini ce înseamnă că o suprafaţă de rotaţie are arie, precum şi aria laterală a unei astfel de suprafeţe.

4.3. Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă. Spunem că suprafaţa de rotaţie $S(f)$ are arie, dacă oricare ar fi şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} \| \Delta_n \| = 0,$$

şirul

$$(A(f_{\Delta_n}))_{n \in \mathbb{N}}$$

al ariilor laterale ale suprafeţelor de rotaţie $S(f_{\Delta_n})$ $(n \in \mathbb{N})$ este convergent în $\mathbb{R}$. În acest caz numărul real pozitiv

$$A(f) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} A(f_{\Delta_n})$$

se numeşte aria laterală a suprafeţei de rotaţie $S(f)$.

4.4. ***Observaţie.*** Numărul real pozitiv $A(f)$ este corect definit, adică nu depinde de şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerat.

Într-adevăr, fie $(\Delta_n')_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(\Delta_n'')_{n \in \mathbb{N}}$ două şiruri de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} \| \Delta_n' \| = 0 = \lim_{n \to \infty} \| \Delta_n'' \|.$$

Atunci şirul de diviziuni

$$(\Delta_n)_{n\in \mathrm{N}} \overset{\text{def}}{=\!=} (\Delta_0', \Delta_0'', \Delta_1', \Delta_1'', \dots, \Delta_n', \Delta_n'', \dots)$$

verifică condiţia

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$$

deci, suprafaţa de rotaţie $S(f)$ avînd arie, rezultă că şirurile

$$(A(f_{\Delta_n}))_{n\in \mathrm{N}},\ (A(f_{\Delta_n'}))_{n\in \mathrm{N}},\ (A(f_{\Delta_n''}))_{n\in \mathrm{N}}$$

sînt convergente; fie l, l', l'' limitele lor. Din modul cum a fost construit şirul $(\Delta_n)_{n\in \mathrm{N}}$, se vede că şirurile $(\Delta_n')_{n\in \mathrm{N}}$ şi $(\Delta_n'')_{n\in \mathrm{N}}$ sînt subşiruri ale lui $(\Delta_n)_{n\in \mathrm{N}}$, deci şirurile

$$(A(f_{\Delta_n'}))_{n\in \mathrm{N}} \text{ şi } (A(f_{\Delta_n''}))_{n\in \mathrm{N}}$$

sînt subşiruri ale lui $(A(f_{\Delta_n}))_{n\in N}$ şi prin urmare

$$l' = l \text{ şi } l'' = l,$$

adică

$$l' = l''.$$

4.5. Teoremă. Dacă $f:[a, b] \to \mathrm{R}_+$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci

(α) suprafaţa de rotaţie determinată de f are arie şi

(β) $A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Demonstraţie: Funcţia f fiind continuă pe intervalul închis şi mărginit $[a, b]$, verifică (vezi, cap. II, 3.10) condiţia (U), adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

(1) $$(\forall)\ x', x'' \in [a, b] \text{ cu } |x' - x''| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)},$$

unde $l(f)$ este lungimea graficului lui f.

Fie acum

$$\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{p_n}^n = b) \qquad (n \in \mathrm{N})$$

un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Delta_n \| = 0$. Atunci există un $n_\varepsilon \in \mathrm{N}$ astfel încît

$$\| \Delta_n \| < \eta_\varepsilon, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Aplicînd teorema creşterilor finite lui f pe fiecare interval $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, obţinem un $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ cu proprietatea

(2) $$f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n) = f'(\xi_i^n) \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Atunci

$$\lim \sigma_{\Delta_n}(f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

deci există $n_\varepsilon'' \in \mathrm{N}$ astfel încît

(3) $$\left| \sigma_{\Delta_n}(f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) - \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

oricare ar fi $n \geqslant n_\varepsilon''$.

Deşi aria laterală a lui $S(f_{\Delta_n})$

$$A(f_{\Delta_n}) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} (f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\, (x_i^n - x_{i-1}^n)$$

nu reprezintă suma Riemann

$$\sigma_{\Delta_n}(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) = 2\pi \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^n) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\, (x_i^n - x_{i-1}^n),$$

vom arăta totuşi că diferenţa lor în modul este mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2}$.

Fie $n \geqslant n_\varepsilon \overset{\text{def}}{=\!=} \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$. Atunci

$$|x_{i-1}^n - \xi_i^n|,\ |x_i^n - \xi_i^n| \leqslant x_i^n - x_{i-1}^n < \| \Delta_n \| < \eta_\varepsilon,$$

deci, ţinînd seamă de (1), obţinem

$$|f(x_{i-1}^n) - f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)}$$

şi

$$|f(x_i^n) - f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{4\pi l(f)},$$

de unde

(4) $$|f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(f)}, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Folosind inegalitatea (4), obţinem

$$\left| A(f_{\Delta_n}) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) \right| =$$

$$= \left| \pi \sum_{i=1}^{p_n} (f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\, (x_i^n - x_{i-1}^n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{i=1}^{p_n} |f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n) - 2f(\xi_i^n)| \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\, (x_i^n - x_{i-1}^n) <$$

$$< \pi \frac{\varepsilon}{2\pi l(f)} \sum_{i=1}^{p_n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i^n))^2}\, (x_i^n - x_{i-1}^n) = \frac{\varepsilon}{2l(f)}\, l(f_{\Delta_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2l(f)} \cdot l(f) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Din această inegalitate şi inegalitatea (3) rezultă că, pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon$, avem

$$\left| A(f_{\Delta_n}) - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| A(f_{\Delta_n}) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) \right| +$$

$$+ \left| \sigma_{\Delta_n}(2\pi f\sqrt{1 + (f')^2}, \xi_i^n) - 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (\forall) n \geqslant n_\varepsilon,$$

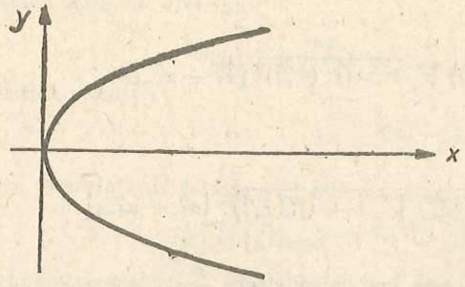


Fig. III.21

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(2\pi f\sqrt{1+(f'(x))^2},\ \xi_i^n\right)$$

există și este egală cu

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Cum aceasta are loc pentru orice șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ale lui $[a, b]$ de normă tinzînd la zero, rezultă (definiția 4.3) că suprafața de rotație determinată de f are arie și

$$A(f) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

4.6. *Observație.* Considerînd parabola de ecuația

$$y^2 = 2ax,\ (a > 0)$$

se observă că panta tangentei la parabolă în origine este infinită (fig. III.21), adică funcția

$$f(x) = \sqrt{2ax},\ x \in [0, \infty)$$

nu este derivabilă în 0. Ținînd seamă de această observație și de faptul că integrala

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

a fost definită pentru funcții g *definite pe întregul interval* $[a, b]$, rezultă că, în cazul considerat, nu se poate vorbi de

$$\int_0^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Totuși, se observă (intuitiv) că această suprafață de rotație are arie. În observația care urmează vom încerca să arătăm că au arie și suprafețele de rotație determinate de funcții f care nu sînt neapărat derivabile la capetele intervalului $[a, b]$, dar pentru care funcția $f\sqrt{1+(f')^2}$ are limită finită în punctele a și b.

4.7. *Observație.* Să considerăm funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ cu proprietățile:

(c_1) f este derivabilă, cu derivata continuă pe (a, b),

(c_2) funcția $f\sqrt{1+(f')^2}$ are limite finite în punctele a și b.

În acest caz funcția $f\sqrt{1+(f')^2}$ poate fi prelungită la o funcție continuă $h : [a, b] \to \mathbf{R}_+$. Într-adevăr, dacă y_a (respectiv y_b) este limita funcției $f\sqrt{1+(f')^2}$ în punctul a (respectiv b), atunci definim funcția $h : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ prin egalitatea

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} y_a, & \text{dacă } x = a,\\ f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}, & \text{dacă } x \in (a, b),\\ y_b, & \text{dacă } x = b.\end{cases}$$

Funcția h are următoarele proprietăți:

(α) restricția lui h la (a, b) coincide cu $f\sqrt{1+(f')^2}$;

(β) $\lim_{x\to a} h(x) = y_a = h(a)$;

(γ) $\lim_{x\to b} h(x) = y_b = h(b)$.

Din (β) și (γ) rezultă că h este continuă în punctele a și b, iar din ipoteza (c_1) și proprietatea (α) rezultă continuitatea lui h pe (a, b); deci h este continuă pe întregul interval închis $[a, b]$, prin urmare h este *integrabilă* pe $[a, b]$.

Observăm că, în cursul demonstrației teoremei 4.5, nu s-a utilizat nicăieri nici $f'(a)$ și nici $f'(b)$, ci numai $f'(\xi_i^n)$, unde $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n) \subset (a, b)$ au fost obținuți aplicînd teorema creșterilor finite.

Pe de altă parte, ținînd seama de proprietatea (α) a lui f, rezultă că pentru acești ξ_i^n, avem

$$\sigma_{\Delta_n}\left(2\pi f\sqrt{1+(f')^2},\ \xi_i^n\right) = \sigma_{\Delta_n}(2\pi h,\ \xi_i^n),$$

deci se obține inegalitatea (cu notațiile din demonstrația teoremei 4.5)

$$|A(f_{\Delta_n}) - \sigma_{\Delta_n}(2\pi h,\ \xi_i^n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(2\pi h,\ \xi_i^n) = 2\pi\int_a^b h(x)dx,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} A(f_{\Delta_n}) \text{ există} = 2\pi\int_a^b h(x)dx.$$

Așadar, putem formula următorul rezultat:

4.8. Teoremă. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă pe (a, b) astfel încît funcția $f\sqrt{1+(f')^2}$ are limite finite în punctele a și b, atunci suprafața de rotație determinată de f are arie și

$$A(f) = 2\pi\int_a^b h(x)dx,$$

unde h este prelungirea (prin continuitate) a lui $f\sqrt{1+(f')^2}$ la intervalul închis $[a, b]$.

4.9. *Exemple.*

α) Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sin x,\ x \in [0, \pi),\ (\text{fig. III.22}).$$

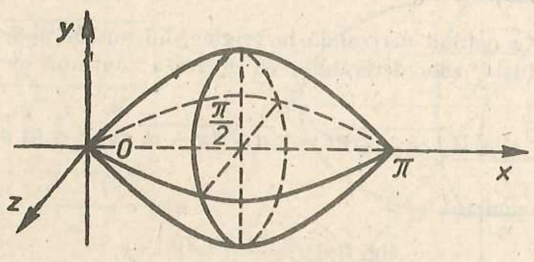


Fig. III.22

Funcţia $x \to \sin x$ este derivabilă, cu derivata continuă pe toată mulţimea $\mathbf{R}$, deci f satisface condiţiile teoremei 4.5. Datorită simetriei, este suficient să se calculeze aria suprafeţei determinate de restricţia f_0 a lui f la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci

$$A(f) = 2A(f_0) = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$u = \varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

obţinem

$$\varphi(0) = 1, \ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

şi

(1) $$A(f) = -4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \varphi^2(x)} \cdot \varphi'(x) dx =$$

$$= -4\pi \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du.$$

O primitivă a funcţiei $u \to \sqrt{1 + u^2}$ este funcţia (vezi cap. I, exemplul 2.2 (7)):

(2) $$F(u) = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1 + u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right].$$

Din relaţiile (1), (2) şi formula Leibniz-Newton, obţinem:

$$A(f) = 2\pi\left[u\sqrt{1 + u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

β) Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinată de funcţia

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{2ax}, \quad x \in [0, b] \ (a > 0)$$

(paraboloid de rotaţie).

Funcţia $x \to \sqrt{x}$ nefiind derivabilă în origine, nu putem aplica teorema 4.5 (vezi observaţia 4.6). Totuşi f este derivabilă, cu derivata continuă pe $(0, b]$, iar funcţia

$$f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{a}\sqrt{2x + a}, \ (\forall)\ x \in (0, b]$$

are limită finită în punctul 0

$$\lim_{x \to 0} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = a,$$

deci funcţia $h : [0, b] \to \mathbf{R}_+$ definită prin

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & \text{dacă } x = 0, \\ f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}, & \text{dacă } x \in (0, b] \end{cases}$$

este continuă pe $[0, b]$.

Aplicînd teorema 4.8, rezultă că suprafaţa de rotaţie determinată de funcţia

$$f(x) = \sqrt{2ax}, \quad x \in [0, b]$$

are arie

$$A(f) = 2\pi \int_0^b h(x) dx = 2\pi\sqrt{a} \int_0^b \sqrt{2x + a}\, dx =$$

$$= \pi\sqrt{a} \int_0^b (2x + a)^{\frac{1}{2}} (2x + a)' dx = \pi\sqrt{a}\, \frac{(2x + a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{a}}{3}\left[(a + 2b)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right].$$

γ) Să se calculeze aria suprafeţei (fig. III.23) obţinute prin rotirea în jurul axei Ox a elipsei de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0)$$

Deci se cere să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinată de funcţia

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

Derivînd în egalitatea

$$f^2(x) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

obţinem

$$f(x)f'(x) = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

deci

$$A(f) = 2\pi \int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{f^2(x) + (f(x)f'(x))^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi b}{a} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi b}{a} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx.$$

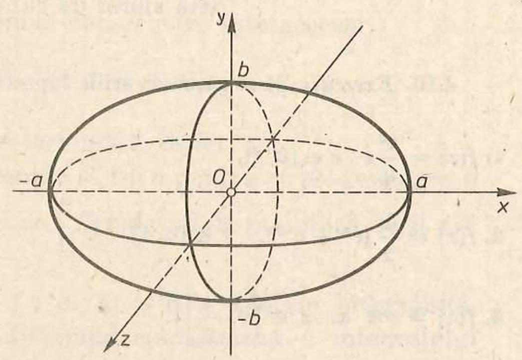


Fig. III.28

Numărul pozitiv

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$$

se numeşte *excentricitatea elipsei*.

Funcţia $x \to \sqrt{a^2 - (ex)^2}$ fiind pară, avem (vezi cap. II, observaţia 4.16)

$$A(f) = \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - (ex)^2}\, dx = \frac{4\pi b e}{a} \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - x^2}\, dx.$$

Se ştie (vezi cap. I, exemplul 3.5 (2)) că o primitivă a funcţiei $x \to \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ este funcţia

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2 \arcsin \frac{x}{\alpha} + x\sqrt{\alpha^2 - x^2}\right].$$

Deci

$$A(f) = \frac{2\pi b e}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin \frac{x}{\frac{a}{e}} + x\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - x^2}\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{2\pi b e}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin e + a\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - a^2}\right] =$$

$$= \frac{2\pi b e}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2 \arcsin e + \frac{a^2}{e}\sqrt{1 - e^2}\right] =$$

$$= 2\pi ab\left[\frac{\arcsin e}{e} + \sqrt{1 - e^2}\right].$$

Observăm că dacă b tinde către a, atunci excentricitatea elipsei tinde la zero şi elipsa devine un cerc de rază a. În acest caz

$$\lim_{e \to 0} \frac{\arcsin e}{e} = 1$$

şi

Aria sferei de rază a este $4\pi a^2$.

4.10. *Exerciţii.* Să se găsească ariile suprafeţelor de rotaţie determinate de funcţiile:

1. $f(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in [0, 1]$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in [0, 1]$.
3. $f(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

5. $f(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$.
6. $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.
7. $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$.
8. $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x(3a - x)^2}$, $x \in [0, 3a]$.

§ 5. CALCULUL APROXIMATIV AL INTEGRALELOR DEFINITE

Am văzut în capitolul II (teorema 2.12) că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie integrabilă, care admite primitive, atunci integrala definită a lui f poate fi calculată cu ajutorul formulei lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f.

În cazul funcţiilor integrabile care nu au primitive (astfel de funcţii există, vezi exemplul II.2.13), sau al funcţiilor care au primitive, dar acestea sînt greu de calculat (de exemplu: nu se pot exprima cu ajutorul unor funcţii elementare cunoscute), nu putem utiliza formula Leibniz-Newton. În asemenea situaţii trebuie recurs la alte metode. De obicei se folosesc metode de aproximare a integralei prin anumite sume $\sigma(f, \Delta)$ asociate unor diviziuni particulare Δ ale intervalului $[a, b]$.

Atunci cînd folosim o anumită metodă de aproximare a integralei $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, trebuie să cunoaştem, în funcţie de diviziunea aleasă Δ, cît de mare poate fi diferenţa (în valoare absolută) dintre integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi suma $\sigma(f, \Delta)$ asociată diviziunii Δ.

Dacă se lucrează cu diviziuni *echidistante*, adică diviziuni:

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

la care distanţa dintre oricare două puncte consecutive este aceeaşi

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

atunci problema de mai sus poate fi reformulată astfel:

„Dat fiind un $\varepsilon > 0$, cît de mare trebuie să fie n pentru ca eroarea care o facem, atunci cînd luăm $\sigma(f, \Delta_n)$ în loc de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, să fie mai mică decît ε?"

5.1. *Metoda dreptunghiurilor.* Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă, $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune echidistantă a intervalului $[a, b]$ şi drept puncte „intermediare" luăm punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, adică în

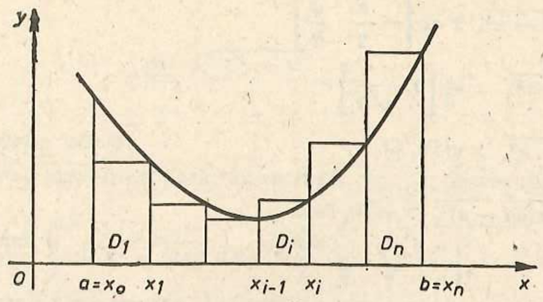


Fig. III.24

fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, drept punct „intermediar" luăm extremitatea din dreapta a acestui interval. Atunci

(1) $$\sigma_{\Delta_n}(f, x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + \dots + f(x_n)].$$

Întrucît această sumă depinde numai de f şi de n, o vom nota simplu prin $D_n(f)$.

În cazul particular, cînd f este pozitivă, suma $D_n(f)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor $D_1, D_2, \dots, D_n$, unde (fig. III.24)

$$D_i \overset{\text{def}}{=} [x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_i)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i;\ \ 0 \leqslant y \leqslant f(x_i)\}.$$

Aşadar, cînd f este pozitivă,

$$D_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i).$$

Din acest motiv, metoda de aproximare a integralei definite a unei funcţii integrabile prin suma $D_n(f)$ se numeşte metoda dreptunghiurilor.

5.2. Estimarea erorii în metoda dreptunghiurilor. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - D_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} M(f'),$$

unde

$$M(f') \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Demonstraţie. Fie ca mai sus

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b),$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad (\forall)\ i = 1, \dots, n$$

şi

$$D_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Notînd, ca de obicei,

$$m_i \overset{\text{def}}{=} \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$M_i \overset{\text{def}}{=} \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

şi ţinînd seamă că funcţia f este continuă (fiind derivabilă), rezultă că f este mărginită şi îşi atinge marginile pe intervalul închis şi mărginit $[x_{i-1}, x_i]$. Deci există $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel încît

(1) $$m_i = f(u_i), \ M_i = f(v_i).$$

Aplicînd teorema creşterilor finite lui f, obţinem un punct ξ_i cuprins între u_i şi v_i astfel încît

(2) $$f(v_i) - f(u_i) = f'(\xi_i)(v_i - u_i).$$

Avînd

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$$

rezultă

(3) $$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

adică (vezi cap. II, propoziţia 3.3 (i)).

(4) $$s_{\Delta_n}(f) \leqslant D_n(f) \leqslant S_{\Delta_n}(f).$$

Ţinînd seamă de relaţiile (1) — (4) şi de inegalitatea

$$|v_i - u_i| \leqslant x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

obţinem

(5) $$S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(v_i) - f(u_i)] = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(v_i - u_i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi_i)| \cdot (v_i - u_i) \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2}\, n\, M(f') = \frac{(b-a)^2}{n} M(f').$$

Pe de altă parte (vezi cap. II, relaţia (3) din demonstraţia teoremei 3.7)

(6) $$s_{\Delta_n}(f) \leqslant \int_a^b f(x) \leqslant S_{\Delta_n}(f).$$

Din (4), (5) şi (6) obţinem

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - D_n(f)\right| \leqslant S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} M(f').$$

5.3. *Metoda trapezelor.* Această metodă constă în aproximarea integralei $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ prin suma

$$T_n(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right],$$

cînd $\quad x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}(b-a), \ (1 \leqslant i \leqslant n).$

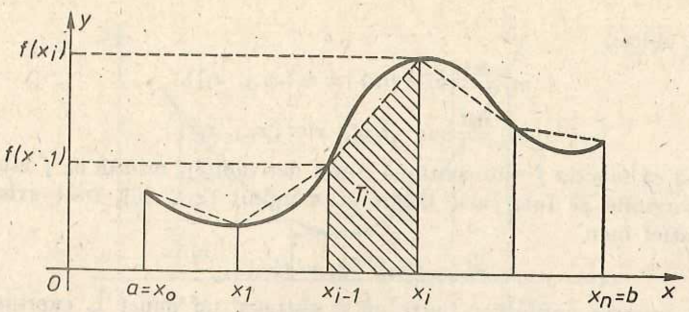


Fig. III.25

Dacă funcţia f este pozitivă ($f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$), atunci această problemă revine la aproximarea ariei mulţimii

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

(cuprinse între axa Ox, graficul lui f şi dreptele paralele la Oy, care taie axa Ox în punctele a şi b respectiv) prin suma ariilor trapezelor T_i (fig. III.25)

$$\text{aria } T(_i) = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n}[f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Deci, dacă f este pozitivă, atunci

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\,(T_i) = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right].$$

5.4. Estimarea erorii în metoda trapezelor

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua f'' continuă, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f''),$$

unde

$$M(f'') \overset{\text{def.}}{=} \sup_{x\in[a,\, b]} |f''(x)|.$$

Demonstraţie. Pentru orice $\alpha, \beta \in [a, b]$, cu $\alpha < \beta$, definim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin egalitatea

$$g(t) = \frac{1}{2}(t-\alpha)(t-\beta). \tag{1}$$

Atunci

$$g(\alpha) = g(\beta) = 0, \tag{2}$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}[2t - (\alpha + \beta)].$$

$$\begin{cases} g'(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ g'(\beta) = \dfrac{1}{2}(\beta - \alpha), \end{cases} \tag{3}$$

$$g''(t) = 1. \tag{4}$$

Aplicînd de două ori formula de integrare prin părţi şi ţinînd seamă de relaţiile (1) — (4), obţinem:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)g''(t)\mathrm{d}t = f(t)g'(t)\Big|_\alpha^\beta - f'(t)g(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f''(t)g(t)\mathrm{d}t =$$

$$= f(\beta)\frac{1}{2}(\beta-\alpha) - f(\alpha)\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(t-\beta)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}[f(\alpha) + f(\beta)](\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)\,(t-\alpha)\,(t-\beta)\mathrm{d}t,$$

de unde

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}[f(\alpha) + f(\beta)](\beta-\alpha)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(t-\beta)\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |f''(t)|\cdot|t-\alpha|\cdot|t-\beta|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M(f'')}{2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(\beta-t)\mathrm{d}t.$$

Însă

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)\,(\beta-t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)\,[(\beta-\alpha) - (t-\alpha)]\mathrm{d}t =$$

$$= (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (t-\alpha)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^2\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)\frac{(t-\alpha)^2}{2}\Big|_\alpha^\beta - \frac{(t-\alpha)^3}{3}\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{2} - \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6},$$

deci

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}[f(\alpha) + f(\beta)](\beta-\alpha)\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} M(f''). \tag{5}$$

Aplicînd egalitatea (5) pentru $\alpha = x_{i-1}$ şi $\beta = x_i$, obţinem

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12}\cdot M(f'') = \frac{(b-a)^3}{12n^3}\cdot M(f''),$$

de unde, folosind proprietatea de aditivitate a integralei, deducem

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant n\cdot\frac{(b-a)^3}{12n^3} M(f'') = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M(f'').$$

5.5. *Exemple.* α) Pentru funcţia

$$f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^2, \qquad x \in [0,\ 2]$$

se cere să se calculeze sumele $D_4(f)$, $T_4(f)$ şi să se determine abaterea dintre aceste sume şi integrala

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} \simeq 2{,}66.$$

Am văzut că dacă

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b) \text{ şi } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

atunci

$$D_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$T_n(f) = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right].$$

În cazul considerat avem

$$\Delta_4 = \left(0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < 2\right) \text{ şi } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{2},$$

deci

$$D_4(x^2) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4\right] = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

şi

$$T_4(x^2) = \frac{1}{4}\left[f(2) + 2\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right] = \frac{1}{4}\left[4 + 2\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}\right)\right] = \frac{11}{4} = 2{,}75.$$

Abaterile sînt

$$D_4(x^2) - \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{15}{4} - \frac{8}{3} = \frac{13}{12},$$

respectiv

$$T_4(x^2) - \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{11}{4} - \frac{8}{3} = \frac{1}{12}.$$

β) Funcţia

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad x \in [0,\ 1]$$

fiind continuă, admite primitive. Totuşi primitivele acestei funcţii nu pot fi exprimate prin funcţii elementare, deci nu putem calcula exact valoarea integralei

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x.$$

În acest caz, aproximarea numerică a acestei integrale devine o necesitate.
Dacă luăm

$$\Delta_3 = \left(0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1\right),$$

atunci

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}$$

şi

$$T_3(\mathrm{e}^{x^2}) = \frac{1}{6}\left[\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 + 2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{9}} + \mathrm{e}^{\frac{4}{9}}\right)\right].$$

Folosind un calculator, obţinem valori aproximative ale termenilor din suma de mai sus

$$\mathrm{e} = 2{,}7182818; \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{9}} = 1{,}1175191; \qquad \mathrm{e}^{\frac{4}{9}} = 1{,}5596234;$$

deci

$$T_3(\mathrm{e}^{x^2}) = \frac{1}{6}[3{,}7182818 + 5{,}354285] = \frac{9{,}0725668}{6} = 1{,}5120945.$$

Dacă se ia diviziunea

$$\Delta_4 = \left(0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\right), \qquad \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4},$$

atunci

$$T_4(\mathrm{e}^{x^2}) = \frac{1}{8}\left[1 + \mathrm{e} + 2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{16}} + \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} + \mathrm{e}^{\frac{9}{16}}\right)\right].$$

Însă

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{16}} = 1{,}0644945; \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} = 1{,}2840254; \qquad \mathrm{e}^{\frac{9}{16}} = 1{,}7550547,$$

deci

$$T_4(\mathrm{e}^{x^2}) = \frac{1}{8}[3{,}7182818 + 8{,}2071492] = \frac{11{,}925431}{8} = 1{,}4906789.$$

Luînd acum diviziunea

$$\Delta_{10} = (0 < 0{,}1 < 0{,}2 < \ldots < 0{,}9 < 1), \qquad \frac{b-a}{10} = \frac{1}{10},$$

avem

$$T_{10}(\mathrm{e}^{x^2}) = \frac{1}{20}[1 + \mathrm{e} + 2(\mathrm{e}^{(0,1)^2} + \mathrm{e}^{(0,2)^2} + \ldots + \mathrm{e}^{(0,9)^2})].$$

Însă

$$1 + \mathrm{e} = 3{,}7282818, \qquad \mathrm{e}^{(0,5)^2} = 1{,}2840254,$$
$$\mathrm{e}^{(0,1)^2} = 1{,}0100502, \qquad \mathrm{e}^{(0,6)^2} = 1{,}4333294,$$
$$\mathrm{e}^{(0,2)^2} = 1{,}0408108, \qquad \mathrm{e}^{(0,7)^2} = 1{,}6323162,$$
$$\mathrm{e}^{(0,3)^2} = 1{,}0941743, \qquad \mathrm{e}^{(0,8)^2} = 1{,}8964809,$$
$$\mathrm{e}^{(0,4)^2} = 1{,}1735109, \qquad \mathrm{e}^{(0,9)^2} = 2{,}247908,$$

deci

$$T_{10}(\mathrm{e}^{x^2}) = \frac{1}{20}[3{,}71822818 + 25{,}6251676] = \frac{29{,}3434494}{20} = 1{,}46717247$$

β') *Estimarea erorilor.* Funcţia pozitivă

$$f''(x) = 2(1 + 2x^2)\mathrm{e}^{x^2}, \qquad x \in [0,\ 1]$$

fiind crescătoare, va avea maximul în punctul 1, deci

$$M(f'') = 6\mathrm{e}$$

Se știe (vezi 5.4) că

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f'')$$

deci

$$\left|\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x - T_3(e^{x^2})\right| \leqslant \frac{M(f'')}{12\cdot 3^2} = \frac{6e}{12\cdot 9} = \frac{e}{18} = 0{,}15101,$$

$$\left|\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x - T_4(e^{x^2})\right| \leqslant \frac{M(f'')}{12\cdot 4^2} = \frac{6e}{12\cdot 16} = \frac{e}{32} = 0{,}08493,$$

$$\left|\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x - T_{10}(e^{x^2})\right| \leqslant \frac{M(f'')}{12\cdot 10^2} = \frac{6e}{12\cdot 100} = \frac{e}{200} = 0{,}01359.$$

Așadar, avem evaluarea

$$1{,}45358 = T_{10}(e^{x^2}) - 0{,}01359 \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x \leqslant T_{10}(e^{x^2}) + 0{,}01359 = 1{,}48076.$$

Observație. Calculele numerice de mai sus au fost efectuate cu un calculator de buzunar.

β'') *Determinarea numărului minim, n, de puncte de diviziune, astfel încît:*

$$\left|D_n(e^{x^2}) - \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{1\,000}.$$

Funcția $f'(x) = 2xe^{x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ fiind strict crescătoare, va avea maximul în punctul 1, deci

$$M(f') = 2e.$$

Se cere, deci, să determinăm $n \geqslant 1$ astfel încît

$$\frac{(b-a)^2}{n} M(f') < \frac{1}{1\,000},$$

adică, în cazul nostru

$$\frac{1}{n}2e < \frac{1}{1\,000},$$

sau

$$n > 2\,000\,e \simeq 5436.$$

Așadar, pentru a calcula, prin metoda dreptunghiurilor, integrala

$$\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x,$$

cu o eroare mai mică decît $\frac{1}{1\,000}$, este nevoie să se ia *cel puțin* 5 437 puncte de diviziune.

β''') Determinarea numărului minim n de puncte de diviziune astfel încît

$$\left|T_n(f) - \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{1\,000}.$$

Se cere să determinăm $n \geqslant 1$ astfel încît

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M(f'') < \frac{1}{1\,000}.$$

În cazul nostru $b - a = 1$, iar $M(f'') = 6e$. Deci

$$\frac{6e}{12n^2} < \frac{1}{1\,000},$$

de unde

$$n > \sqrt{500e} = 10\sqrt{5e} \simeq 36{,}86.$$

Așadar, pentru a calcula, prin metoda trapezelor, integrala

$$\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$$

cu o eroare mai mică decît $\frac{1}{1\,000}$, sînt *suficiente 37 puncte de diviziune.*

În exemplele prezentate mai sus se arată că metoda dreptunghiurilor apare mai puțin „economică" decît metoda trapezelor, în sensul că pentru a obține o evaluare dată a integralei, numărul de operații necesare în prima metodă este mult mai mare decît cel din a doua metodă.

5.6. *Exerciții.* Să se calculeze suma

$$D_n(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

respectiv

$$T_n(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right],$$

prin metoda dreptunghiurilor (respectiv metoda trapezelor) de aproximare a integralei

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

și să se evalueze eroarea pentru funcțiile:

1. $f(x) = x^2 + 3x,\quad x \in [0, 4];\quad n = 4;\ n = 8.$
2. $f(x) = x^3 + 1,\quad x \in [0, 2];\quad n = 4;\ n = 6.$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2+1},\quad x \in [0, 1];\quad n = 3;\ n = 5.$
4. $f(x) = \frac{1}{x},\quad x \in [1, 2];\quad n = 3;\ n = 5.$

§ 6. CENTRE DE GREUTATE

În cele ce urmează vor fi considerate numai plăci plane atît de subțiri încît, din punct de vedere practic, grosimea lor să poată fi neglijată. În aceste condiții vom identifica plăcile plane cu mulțimi din plan. Deoarece în practică este nevoie adeseori să se calculeze aria plăcilor plane, *vom identifica plăcile plane cu mulțimi din* $\mathbf{R}^2$ *care au arie.*

Nu vom intra în considerații fizice privind definiția masei unui corp, în particular a unei plăci plane. Vom spune totuși că masa este o măsură a cantității de materie dintr-un corp. Cu identificarea de mai sus, masa reprezintă o funcție $A \to m(A)$, care asociază fiecărei plăci plane (pe care o identificăm cu o mulțime care are arie) A, un număr real pozitiv $m(A)$, numit *masa* lui A. Această funcție trebuie să satisfacă, în cadrul mecanicii clasice, următoarele condiții:

(M_1) dacă placa A se descompune în n plăci plane disjuncte $A_1, A_2, \dots A_n$, atunci

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n),$$

(M_2) masa $m(A)$ a unei plăci plane A rămîne constantă în timpul mișcării.

O placă A se numește *omogenă* dacă există o constantă $k > 0$, astfel încît

$$m(B) = k \cdot \text{aria}(B),$$

pentru orice parte B (care are arie) a lui A.

Dacă $D = [a, b] \times [c, d]$ este o placă dreptunghiulară omogenă (fig. III.26), atunci există o constantă $k \geqslant 0$, astfel încît

$$m(D) = k \text{ aria}(D) = k(b - a)(d - c).$$

Pentru o astfel de placă de masă nenulă, centrul de greutate se definește ca fiind punctul $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^2$ de coordonate

$$\bar{x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(b + a).$$

$$\bar{y} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(d + c).$$

Să considerăm acum o placă E formată dintr-un număr finit de plăci dreptunghiulare $D_1, D_2, \dots, D_n$ cu laturile paralele cu axele de coordonate și astfel încît fiecare două plăci D_i, D_j $(i \neq j)$ au în comun cel mult o latură. Aceasta înseamnă că mulțimea din $\mathbf{R}^2$ cu care se identifică E este elementară (vezi cap. III, definiția 1.1). Pentru comoditate, astfel de plăci vor fi numite *elementare.*

Fie E o placă elementară formată din plăcile dreptunghiulare

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

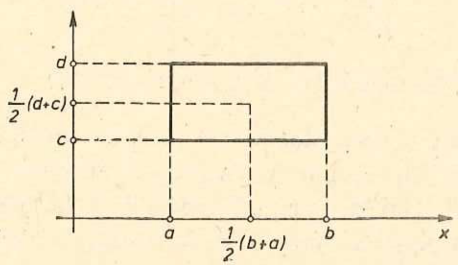


Fig. III.26

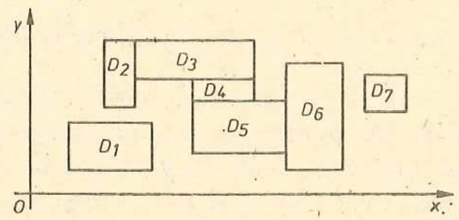


Fig. III.27

de mase

$$m(D_1), m(D_2), \dots, m(D_n)$$

și ale căror centre de greutate sînt respectiv punctele

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1), (\bar{x}_2, \bar{y}_2), \dots, (\bar{x}_n, \bar{y}_n).$$

Atunci centrul de greutate al lui E va fi, prin definiție, punctul $(\bar{x}, \bar{y})$ de coordonate

$$\bar{x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{x}_i}{m(E)},$$

$$\bar{y} \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\bar{y}_i}{m(E)}.$$

Dacă placa E este omogenă, atunci există o constantă $k > 0$, astfel încît

$$m(B) = k \text{ aria}(B),$$

oricare ar fi partea B (care are arie) a lui E; în particular,

$$m(D_i) = k \text{ aria}(D_i), \qquad (\forall)\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Deci putem exprima coordonatele centrului de greutate numai în funcție de ariile și centrele de greutate ale dreptunghiurilor D_i

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria }(D_i)\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria }(D_i)}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria }(D_i)\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria }(D_i)}.$$

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții continue astfel încît $f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. Să considerăm mulțimea

$$\Gamma_{f,g} \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b;\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

cuprinsă între graficele funcțiilor f, g și dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele a și b respectiv.

În cele ce urmează vom defini centrele de greutate ale plăcilor plane care se identifică cu mulțimi din plan de forma $\Gamma_{f,g}$.

Fie deci

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, ξ_i mijlocul intervalului $[x_{i-1}, x_i]$

$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}), \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

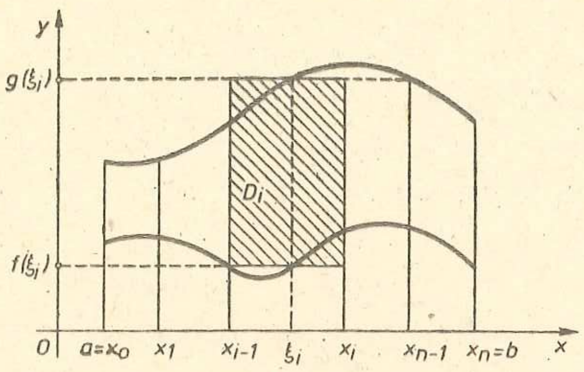


Fig. III.28

şi dreptunghiul (fig. III.28)

$$D_i = [x_{i-1},\ x_i] \times [f(\xi_i),\ g(\xi_i)]$$

a cărui arie este

$$\text{aria}(D_i) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (g(\xi_i) - f(\xi_i)).$$

Dacă norma diviziunii Δ este suficient de mică, atunci mulţimea

$$\Gamma_i = \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i;\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

(delimitată de graficele lui f, g şi de dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în punctele x_{i-1} şi x_i, respectiv) se aproximează cu dreptunghiul D_i, deci centrul de greutate al lui Γ_i se aproximează cu centrul de greutate al lui D_i; prin urmare centrul de greutate al lui

$$\Gamma_{f,g} = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

se aproximează cu centrul de greutate al mulţimii elementare

$$E_\Delta \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Coordonatele centrului de greutate al lui D_i fiind

$$\bar{x}_i = \xi_i, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{2}[g(\xi_i) + f(\xi_i)],$$

rezultă că centrul de greutate al lui E_Δ va avea coordonatele:

$$\bar{x}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i[g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})},$$

$$\bar{y}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria } (D_i)} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [g^2(\xi_i) - f^2(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})}.$$

Aceste consideraţii conduc la următoarea:

6.1. Definiţie. Dacă A este o placă plană care se identifică cu o mulţime de forma $\Gamma_{f,g}$, unde $f,\ g : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ sînt funcţii continue, atunci centrul de greutate al lui A este, prin definiţie, punctul $(\bar{x}_A,\ \bar{y}_A) \in \mathbf{R}^2$ ale cărui coordonate sînt

$$\bar{x}_A \overset{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x} = \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}$$

$$\bar{y}_A \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}.$$

Dacă $f(x) = 0$ şi $g(x) \geqslant 0$ $(\forall)$ $x \in [a,\ b]$, atunci

$$\bar{x}_A = \frac{\int_a^b xg(x)dx}{\text{aria } (\Gamma_g)}, \qquad \bar{y}_A = \frac{1}{2}\,\frac{\int_a^b g^2(x)dx}{\text{aria } (\Gamma_g)}.$$

6.2. *Exemple.* α) Fie $a > 0$ şi o placă plană omogenă de forma

$$A = \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a;\ y^2 \leqslant ax\}$$

(porţiunea din plan cuprinsă între parabola de ecuaţie

$$y^2 = ax$$

şi dreapta paralelă la Oy care taie axa Ox în punctul a; fig. III.29).

Pentru a calcula centrul de greutate al lui A considerăm funcţiile $f,\ g : [0,\ a] \to \mathbf{R}_+$definite prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} -\sqrt{ax}, \qquad g(x) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{ax}.$$

Atunci coordonatele centrului de greutate al lui A sînt

$$\bar{x}_A = \frac{\int_0^a x[\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})]\mathrm{d}x}{\int_0^a [\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})]\mathrm{d}x} = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x}{\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a} = \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\,a,$$

$$\bar{y}_A = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a [(\sqrt{ax})^2 - (-\sqrt{ax})^2]\mathrm{d}x}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x} = \frac{0}{\int_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x} = 0.$$

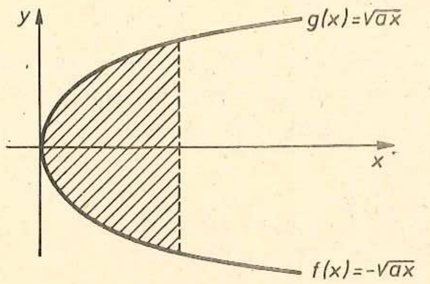


Fig. III.29

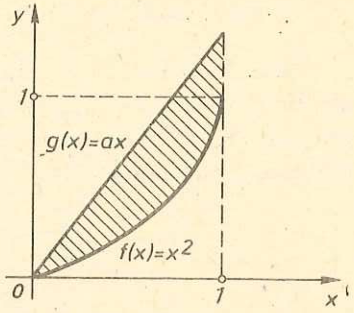


Fig. III.30

Deci centrul de greutate se află pe axa Ox, care este și axă de simetrie a mulțimii A.

β) Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma

$$A = \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1;\ x^2 \leqslant y \leqslant ax\},$$

unde $a \geqslant 1$ (fig. III.30).

Luînd $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} x^2, \qquad g(x) \overset{\text{def}}{=} ax,$$

rezultă

$$\text{aria } (A) = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 (ax - x^2)\mathrm{d}x = \left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3a-2}{6},$$

deci

$$\bar{x}_A = \frac{\displaystyle\int_0^1 x(ax - x^2)\mathrm{d}x}{\text{aria } (A)} = \frac{6}{3a-2}\cdot \int_0^1 (ax^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{6}{3a-2}\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{6}{3a-2}\left(\frac{a}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{6(4a-3)}{(3a-2)\cdot 12} = \frac{4a-3}{2(3a-2)},$$

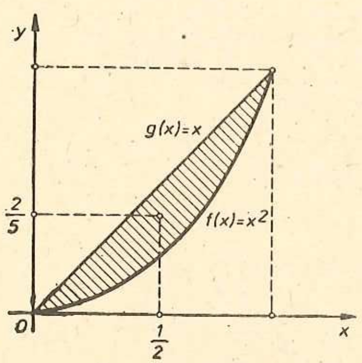


Fig. III.31

$$\bar{y}_A = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 (a^2x^2 - x^4)\mathrm{d}x}{\text{aria } (A)} =$$

$$= \frac{6}{(3a-2)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3(5a^2-3)}{15(3a-2)} = \frac{5a^2-3}{5(3a-2)}.$$

În cazul particular cînd $a = 1$ (fig. III.31), centrul de greutate va fi situat în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

γ) *Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma unui triunghi.*

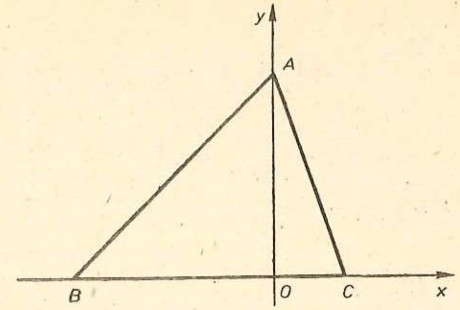


Fig. III.32

Pentru simplitate vom considera cazul unei plăci triunghiulare în care două din vîrfuri B și C sînt situate pe axa Ox, iar al treilea A este situat pe axa Oy (fig. III.32). Așadar, vom avea

$$A(0,a),\ B(b,0),\ C(c,0).$$

Vom presupune, de asemenea $b < 0 < c$. Ecuația dreptei ce trece prin A și B va fi

$$y = -\frac{a}{b}(x - b),$$

iar ecuația dreptei ce trece prin A și C va fi

$$y = -\frac{a}{c}(x - c).$$

Notăm cu $g : [b, c] \to \mathbf{R}$ funcția definită prin

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{b}(x - b), & \text{dacă } x \in [b, 0),\\[2mm] -\dfrac{a}{c}(x - c) & \text{dacă } x \in [0, c]\end{cases}$$

și cu $f : [b, c] \to \mathbf{R}$ funcția identic nulă. Mulțimea $\Gamma_{f,g}$ va fi interiorul triunghiului ABC și deci aria sa va fi egală cu

$$\frac{1}{2}a(c - b).$$

Abscisa centrului de greutate al mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi

$$x_0 = \frac{\displaystyle\int_b^c xg(x)\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}.$$

Avem

$$\int_b^c xg(x)\mathrm{d}x = \int_b^0 xg(x)\mathrm{d}x + \int_0^c xg(x)\mathrm{d}x = -\frac{a}{b}\int_b^0 x(x-b)\mathrm{d}x - \frac{a}{c}\int_0^c x(x-c)\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{a}{b}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2}\right)\Big|_b^0 - \frac{a}{c}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{cx^2}{2}\right)\Big|_0^c = -\frac{a}{b}\left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3}\right) -$$

$$-\frac{a}{c}\left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{2}\right) = -\frac{ab^2}{6} + \frac{ac^2}{6} = \frac{a}{6}(c^2 - b^2)$$

și deci

$$x_0 = \frac{\dfrac{a}{6}(c^2 - b^2)}{\dfrac{1}{2}a(c - b)} = \frac{1}{3}(b + c).$$

Ordonata centrului de greutate a mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi

$$y_0 = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_b^c g^2(x)\mathrm{d}x}{\text{aria } (\Gamma_{f,g})}.$$

Avem

$$\int_b^c g^2(x)\mathrm{d}x = \int_b^0 g^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^c g^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a^2}{b^2}\int_b^0 (x-b)^2\mathrm{d}x + \frac{a^2}{c^2}\int_0^c (x-c)^2\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\,\frac{(x-b)^3}{3}\Big|_b^0 + \frac{a^2}{c^2}\,\frac{(x-c)^3}{3}\Big|_0^c = -\frac{1}{3}\,\frac{a^2}{b^2}\,b^3 + \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{c^2}\,c^3 = \frac{1}{3}\,a^2(c-b)$$

și deci

$$y_0 = \frac{\dfrac{a^2}{6}(c-b)}{\dfrac{1}{2}a(c-b)} = \frac{a}{3}.$$

Așadar, centrul de greutate va fi punctul de coordonate

$$\left(\frac{1}{3}(b+c),\ \frac{a}{3}\right),$$

ceea ce reprezintă punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC.

6.3. *Exerciții.* Să se găsească centrele de greutate ale următoarelor plăci plane omogene:

1. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2},\quad -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.
2. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
3. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{1-x^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.
4. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.
5. $A = \{(x, y) \mid -x \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant 4\}$.

§ 7. LUCRU MECANIC

Considerăm o particulă P care se mișcă pe un interval $J \subset \mathbf{R}$ sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$, de direcție Ox. Forța $\vec{F}$ avînd în fiecare punct $t \in J$ o valoare $F(t)$ care acționează în direcția axei Ox, vom identifica $F(t)$ cu un număr real; acest număr va fi considerat pozitiv dacă forța $F(t)$ acționează *de la stînga la dreapta* și *negativ* dacă acționează *de la dreapta la stînga*. În această situație, forța $\vec{F}$ poate fi considerată ca o funcție $F : J \to \mathbf{R}$.

În cazul cînd forța F este constantă

$$F(t) = F_0, \qquad (\forall)\, t \in J,$$

lucrul mecanic efectuat de forța F pentru a deplasa particula P din punctul $a \in J$ în punctul $b \in J$, este, prin definiție, numărul real

$$L_{a,b}(F) = F_0 \cdot (b-a).$$

Dacă forța F nu este constantă, atunci un raționament similar cu cel folosit în definiția integralei va conduce la definiția lucrului mecanic în cazul general.

Fie $a, b \in J$, $a < b$ și $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Particula P, mișcîndu-se de la a la b trece prin punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, deci, conform a ceea ce se admite în fizică,

$$L_{a,b}(F) = L_{x_0,x_1}(F) + L_{x_1,x_2}(F) + \ldots + L_{x_{n-1},x_n}(F).$$

Dacă $\|\Delta\|$ (norma diviziunii Δ) este suficient de mică, atunci forța $\vec{F}$ se aproximează, pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, prin forța (constantă pe $[x_{i-1}, x_i]$)

$$F_i(x) \overset{\text{def}}{=} F(\xi_i),\ (\forall)\, x \in [x_{i-1}, x_i],$$

unde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ este un punct fixat. Deci, lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a deplasa particula P din punctul x_{i-1} în punctul x_i, se aproximează prin

$$F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Așadar, lucrul mecanic efectuat de forța F pentru a deplasa particula P de la a la b se aproximează cu

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Aceste considerații sugerează următoarea

7.1. Definiție. Fie J un interval $\subset \mathbf{R}$, $F : J \to \mathbf{R}$ o forță care este considerată ca o funcție continuă și P o particulă care se mișcă în intervalul J sub acțiunea forței F. Atunci lucrul mecanic efectuat de forța F pentru deplasarea particulei P din punctul $a \in J$ în punctul $b \in J$ este, prin definiție, numărul real

$$L_{a,b}(F) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

7.2. *Exemple.* α) Fie P_0, P două particule de mase m_0, respectiv m, situate pe axa Ox în punctele x_0, respectiv x.

Considerăm particula P_0 fixă și situată la stînga față de particula P (fig. III.33). Atunci, conform legii atracției universale, forța care acționează asupra lui P (de la dreapta spre stînga) este

$$F(x) = -k\,\frac{mm_0}{(x-x_0)^2},$$

unde k este o constantă. În acest caz, lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pentru deplasarea particulei P dintr-un punct $x_1 (> x_0)$ în alt punct $x_2 (> x_1)$ este

$$L_{x_1,x_2}(F) = -kmm_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2} = kmm_0\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)'\mathrm{d}x =$$

$$= kmm_0\,\frac{1}{x-x_0}\Big|_{x_1}^{x_2} = kmm_0\left[\frac{1}{x_2-x_0} - \frac{1}{x_1-x_0}\right] = \frac{kmm_0(x_1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}.$$

Fig. III.33

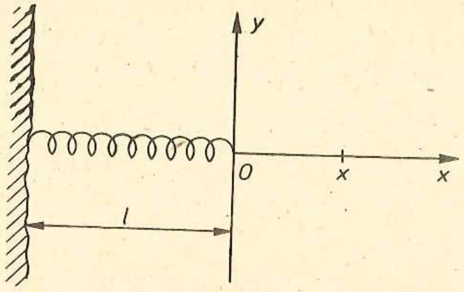


Fig. III.34

β) Se știe (din considerații experimentale) că forța necesară pentru a întinde un resort de lungime dată l, pînă la lungimea $l + x$ (fig. III.34) este proporțională cu lungimea x, adică

$$F(x) = kx$$

(constanta $k > 0$ depinde de resort).

Deci, lucrul mecanic necesar pentru a întinde resortul pînă la lungimea $l + x_0$ ($x_0 > 0$) este

$$L_{x_0} = \int_0^{x_0} kx\mathrm{d}x = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_0} = \frac{k}{2}x_0^2.$$

Constanta k poate fi determinată din relația $F(x) = k\,x$, dacă se cunosc unele date suplimentare despre resortul considerat. Astfel, dacă se știe că pentru a întinde resortul cu 1 cm este nevoie de o forță de 5N, atunci

$$k\cdot\frac{1}{100} = 5,$$

deci

$$k = 500$$

Așadar, în cazul considerat

$$L_{x0} = \frac{500}{2}x_0^2 = 250\,x_0^2 \text{ în Jouli.}$$

7.3. *Exerciții*

1. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 2 m, știind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară o forță de 100 N.
2. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 5 cm, știind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară o forță de 10 N.
3. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru a ridica un corp cu masa de 5 kg la înălțimea de 100 m.
4. O picătură de apă avînd masa inițială M cade sub acțiunea greutății sale și se evaporă uniform, pierzînd prin aceasta în fiecare secundă o masă m. Să se găsească lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale pînă în momentul evaporării totale. Se va neglija rezistența aerului.

ANEXĂ

În această anexă sînt date unele definiții și rezultate care sînt folosite în acest manual. Toate acestea și-ar găsi mai bine locul în manualul de Elemente de analiză matematică de clasa a XI-a, cu atît mai mult cu cît unele noțiuni au fost deja utilizate în clasa a XI-a.

A_1. *Definiție.* Fie $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$. Un număr real α se numește ***minorant*** al mulțimii E dacă

$$(\forall)\ x \in E \Rightarrow \alpha \leqslant x.$$

Un număr real β se numește *majorant* al mulțimii E dacă

$$(\forall)\ x \in E \Rightarrow x \leqslant \beta.$$

O mulțime $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$ se zice *minorată* (respectiv *majorată*) dacă există minoranți (respectiv majoranți) ai lui E. Dacă E este minorată și majorată, atunci E se numește *mărginită*.

A_2. *Observație.* Un minorant (respectiv majorant) al unei mulțimi E ***nu aparține neapărat*** mulțimii E.

A_3. *Exemple*: (1). Dacă $E = [0, 1)$, atunci:
- orice număr real $\alpha \leqslant 0$ este un minorant al mulțimii E, în particular 0 este minorant al mulțimii E;
- orice număr real $\beta \geqslant 1$ este un majorant al mulțimii E;
- nici un majorant al mulțimii lui E nu aparține lui E.

(2) Mulțimea $(-\infty, 0]$ nu are minoranți.

(3) Mulțimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale nu are majoranți.

A_4. *Definiție.* Fie $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$. Un număr real α se numește ***cel mai mic element al lui E*** dacă

1) α este minorant al lui E,

2) $\alpha \in E$.

Un număr real β se numește *cel mai mare element al lui E* dacă

i) β este majorant al lui E

ii) $\beta \in E$.

A_5. *Observație.* (a) Dacă α este cel mai mic element al lui E, atunci α este unicul element cu această proprietate.

Într-adevăr, dacă α' este un alt număr cu proprietățile:

1') α' este minorant al lui E,

2') $\alpha' \in E$,

atunci din 1) și 2') rezultă

$$\alpha \leqslant \alpha',$$

iar din 1') și 2) rezultă

$$\alpha' \leqslant \alpha,$$

deci

$$\alpha' = \alpha.$$

(b) În mod analog se arată unicitatea celui mai mare element (dacă există) al unei mulțimi.

(c) În exemplul (1) din (A_3), am văzut că:

— mulțimea minoranților lui $[0, 1]$ este intervalul $(-\infty, 0]$,
— mulțimea majoranților lui $[0, 1)$ este intervalul $[1, \infty)$,

deci

0 = cel mai mare element al mulțimii $(-\infty, 0]$

și

1 = cel mai mic element al mulțimii $[1, \infty)$,

cu alte cuvinte

0 = cel mai mare minorant al lui $[0, 1)$

și

1 = cel mai mic majorant al lui $[0, 1)$.

Aceste observații sugerează următoarea

A_6. *Definiție*. Fie $E \subset \mathbf{R}$, mulțime nevidă minorată. Un număr real m se numește *marginea inferioară* a lui E dacă m este cel mai mare minorant al lui E, adică:

1) m este minorant al lui E

și

2) m este cel mai mare element al mulțimii minoranților lui E.

Fie $E \subset \mathbf{R}$ o mulțime nevidă majorată. Un număr real M se numește *marginea superioară* a lui E dacă

M este cel mai mic majorant al lui E, adică

i) M este un majorant al lui E,

ii) M este cel mai mic element al mulțimii majoranților lui E.

Marginea inferioară (respectiv superioară) a unei mulțimi E se notează $\inf E$ (respectiv $\sup E$).

A_7. *Observație*. Marginea inferioară (respectiv superioară), a unei mulțimi, atunci cînd există, este unică. Aceasta rezultă din definiția (A_6) și observația (A_5).

Admitem, fără demonstrație, următorul rezultat:

A_8. *Orice parte nevidă minorată (respectiv majorată) a lui* $\mathbf{R}$ *are margine inferioară (respectiv superioară).*

A_9. *Exemple*. (1) Marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii $[0, 1)$ este numărul real 0 (respectiv 1).

(2) Marginea inferioară a mulțimii

$$E = \left\{1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2^2}, \ldots, n + \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$$

este $\frac{3}{2}$.

(3) Marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii

$$E = \{x^2 e^{x^2} \mid 0 \leqslant x \leqslant a\}$$

este 0 (respectiv $a^2 e^{a^2}$).

A_{10}. *Definiție*. O mulțime A din plan se numește mărginită dacă există un dreptunghi care să o conțină, adică dacă există două puncte

$$(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ și } (b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2,$$

astfel încît

$$(\forall)\ (x, y) \in A \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_1 \leqslant x \leqslant b_1 \\ \text{și} \\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2 \end{array}\right.$$

În mod analog se definesc mulțimile mărginite în spațiu.

A_{11}. *Propoziție. Fie* $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ *o mulțime minorată (respectiv majorată) și fie*

$$m = \inf A \text{ (respectiv } M = \sup A).$$

Atunci există un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset A$ (respectiv $(b_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset A$) *astfel încît*

$$m = \lim_{n \to \infty} a_n \text{ (respectiv } M = \lim_{n \to \infty} b_n).$$

Demonstrație

Dacă $M = \sup A$, atunci

$$(\forall)\ n \geqslant 1,\ M - \frac{1}{n} < M = \text{cel mai mic majorant al lui } A,$$

deci

$$M - \frac{1}{n} \text{ nu este majorant al lui } A,$$

ceea ce înseamnă că există $b_n \in A$ astfel încît

$$M - \frac{1}{n} < b_n \leqslant M,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} b_n \text{ există} = M.$$

În mod analog se arată existența unui șir $(a_n) \subset A$ care converge la m.

În propoziția care urmează sînt demonstrate două proprietăți ale funcțiilor continue.

A_{12}. *Propoziție. Fie* I *un interval* $\subset \mathbf{R}$ *și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă într-un punct* $a \in I$. *Atunci*

(α) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încît*

$$(\forall)\ x \in I \text{ cu } |x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$

(β) *dacă* $f(a) > 0$, *există un interval deschis* $J \ni a$, *astfel încît*

$$(\forall)\ x \in J \cap I \Rightarrow f(x) > 0.$$

Demonstrație (α). Presupunem, prin absurd, că (α) nu are loc. Aceasta înseamnă că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru orice $\delta > 0$ există $x_\delta \in I$ cu proprietățile:

$$|x_\delta - a| < \delta$$

și

$$|f(x_\delta) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0.$$

În particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$ există $x_n \in I$ cu proprietățile:

(1) $$|x_n - a| < \frac{1}{n}$$

și

(2) $$|f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Din (1) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

iar din (2) se vede că șirul $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ *nu* converge la $f(a)$.

Contradicție cu continuitatea lui f în a.

(β). Presupunem că $f(a) > 0$, atunci există ε_1 astfel încît $0 < \varepsilon_1 < f(a)$, deci

(3) $$f(a) - \varepsilon_1 > 0.$$

Funcția f fiind continuă în a, are proprietatea (α), deci pentru $\varepsilon_1 > 0$ de mai sus există $\delta_1 > 0$ astfel încît

$$(\forall)\ x \in I \text{ cu } |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1.$$

Această proprietate mai poate fi scrisă și astfel

$$(\forall)\ x \in I \cap (a - \delta_1, a + \delta_1) \Rightarrow f(a) - \varepsilon_1 < f(x) < f(a) + \varepsilon_1.$$

Punînd $J = (a - \delta_1, a + \delta_1)$ și ținînd seamă de (3), avem

$$(\forall)\ x \in I \cap J \Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon_1 > 0.$$

A_{13}. *Observații.* (i) Orice funcție care are proprietatea (α) este continuă în a. Deci funcție f este continuă în punctul a dacă și numai dacă are proprietatea (α) din propoziția A_{12}.

(ii) Proprietatea (β) din propoziția A_{12} s-a folosit la demonstrarea consecinței 4.7 din capitolul II, care afirmă că dacă f este o funcție continuă, pozitivă și neidentic nulă, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

A_{14}. *Definiție.* Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere reale. Pentru orice șir crescător de numere naturale

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

șirul de numere reale

$$x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots,$$

notat prin $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$, se numește *subșir* al șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

A_{15}. *Observație.* Dacă $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir convergent de numere reale, atunci orice subșir al său $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ este convergent și

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL I

1. 12. I

1. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + \mathcal{C}$; **2.** $\frac{x^2}{2} + \ln x + \mathcal{C}$; **3.** $\frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \mathcal{C}$; **4.** $-a\cos x + b\sin x + \mathcal{C}$; **5.** $\frac{1}{2}\arcsin 2x + \mathcal{C}$; **6.** $\arcsin\frac{x}{2} + \mathcal{C}$; **7.** $-2\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$; **8.** $-2\operatorname{ctg} 2x + \mathcal{C}$; **9.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \mathcal{C}$; **10.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + \mathcal{C}$; **11.** $\frac{2^x}{\ln 2} + e^x + \mathcal{C}$; **12.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + \mathcal{C}$; **13.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + \mathcal{C}$; **14.** $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \mathcal{C}$; **15.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} + \mathcal{C}$.

1. 12. II

1. Dacă f ar avea primitive, atunci și funcția

$$f(x) + x = [x]$$

ar avea primitive. Contradicție cu exemplul 1.10 (b).

2. Se observă că $f(\mathbf{R}) = \{-1, 0, 1\}$ adică $f(\mathbf{R})$ nu este interval. Deci (observația 1.4(d)) f nu admite primitive.

3. O primitivă a lui $f\,|\,(-\infty, 0)$ (respectiv $f\,|\,(0, \infty)$ este funcția

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \left(\text{resp. } f_2(x) = x\sin\frac{1}{x} + c_2\right).$$

Deci o primitivă a lui f, dacă ar exista, ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Cum funcția

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu are limită în zero, rezultă că F nu este derivabilă în zero. Deci F nu poate fi o primitivă pe $\mathbf{R}$.

4. Considerînd funcţia $H(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $(\forall) x \neq 0$, se observă că $H|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $H|_{(0, \infty)}$) este o primitivă a lui $f|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $f|_{(0, \infty)}$). Dacă ar exista o primitivă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a lui f, atunci

$$F|_{(-\infty, 0)} = H|_{(-\infty, 0)} + c_1$$

şi

$$F|_{(0, \infty)} = H|_{(0, \infty)} + c_2$$

F este continuă (fiind derivabilă) pe $\mathbf{R}$, deci

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F(x) = c_1 \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = c_2 \end{aligned} \right\} = c$$

Atunci:

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{H(x) + c - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{H(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq \frac{1}{2} = f(0)$$

deci F nu poate fi primitivă a lui f.

5. Imaginea intervalului $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ prin funcţia f nu este un interval, deoarece

$$f(\sqrt{3}) = 3^{\frac{3}{2}} < 8 < 5^{\frac{3}{2}} = f(\sqrt{5})$$

iar

$$8 \neq f(x) \qquad (\forall)\, x \in (\sqrt{3}, \sqrt{5})$$

Deci (observaţia 1.4(*d*)) f nu admite primitive.

6. Analog cu 5), imaginea intervalului $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$ prin funcţia f nu este un interval, deci f nu admite primitive.

7. Notînd cu G o primitivă a funcţiei continue

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi cu

$$H(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x), & \text{dacă } x \neq 0, \\ 2G(0) & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

se observă că $H|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $H|_{(0, \infty)}$) este o primitivă a lui $f|_{(-\infty, 0)}$ (resp. $f|_{(0, \infty)}$).

Dacă F ar fi o primitivă a lui f, atunci

$$F|_{(-\infty, 0)} = H|_{(-\infty, 0)} + c_1 \text{ şi } F|_{(0, \infty)} = H|_{(0, \infty)} + c_2$$

F fiind derivabilă, este continuă, deci

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F(x) = c_1 + 2G(0) \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F(x) = c_2 + 2G_0 \end{aligned} \right\} = c + 2G_0$$

prin urmare F ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x) + c, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 2G(0) + c, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x) + c - 2G(0) - c}{x - 0} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} + 2 \lim_{x \to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = 2G'(0) = 2g(0) = 0$$

Însă $f(0) = \frac{1}{2}$, deci $F'(0) \neq f(0)$, adică F nu este primitivă a lui f.

8. Se raţionează ca în exerciţiul precedent luînd

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & , \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & , \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - 2G(x), & , \text{dacă } x \neq 0 \\ -2G(0) & , \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

9. Cum $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, rezultă că pentru orice $0 < \varepsilon < 1$ există o vecinătate V_ε a lui zero astfel încît

$$\varepsilon < f(x) < 1 \qquad (\forall) x \in V_\varepsilon \cap (0, \infty)$$

V_ε fiind vecinătate a lui 0, există $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $(0, a) \subset V_\varepsilon \cap (0, \infty)$. Atunci

$$f(0) = 0 < \varepsilon < f(a) \quad \text{şi} \quad f(x) > \varepsilon \quad (\forall) x \in (0, a).$$

Aşadar, imaginea intervalului $(0, a)$ prin f nu este un interval.
Deci f nu admite primitive.

10. Se rezolvă un mod analog cu 9), utilizînd faptul că

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

1. 12. III

1. f este continuă; 2. f este continuă; 3. Fie G o primitivă a funcţiei continue

$$g(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases} \qquad \text{Atunci } F(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} - 2G(x), & x \neq 0,\\ -2G(0), & x = 0\end{cases}$$

este o primitivă continuă a funcției date; **4.** Analog cu exercițiul 3; **5**, **6**, **7**, f este continuă.

1. 12. IV

1. Dacă F (resp. G) este o primitivă a lui $f|_{[a,\,c]}$ (resp. $f|_{[c,\,b]}$) astfel încît $F(c) = G(c)$, atunci funcția

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{dacă } x \in [a, c]\\ G(x), & \text{dacă } x \in [c, b]\end{cases}$$

este o primitivă a lui f pe $[a, b]$.

2. Funcția $g = f_1 - f_2$ are proprietatea Darboux și $g(x) = 0$ $(\forall)x \in [a,b]\setminus A$. Deci $g(x) = 0$ $(\forall)x \in [a, b]$, adică $f_1 = f_2$.

3. Notînd cu $N_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = \pm 1\}$, rezultă $A_+ \cup A_- = \mathbf{R}$ și $A_+ \cap A_- = \Phi$. Dacă $A_+ \neq \Phi$ și $A_- \neq \Phi$, atunci f nu ar avea proprietatea lui Darboux, deci f nu ar admite primitive. Așadar,

$$\text{sau } A_+ = \Phi \text{ sau } A_- = \Phi,$$

adică

$$\text{sau } f = -1 \text{ sau } f = +1 .$$

4. Dacă $f(0) = 0$, atunci în baza exercițiului 1.12. III(3) rezultă că f admite primitive. Reciproc, dacă $f(0) \neq 0$, atunci, analog cu exercițiul 1.12. II(8), se arată că în acest caz f nu admite primitive.

5. Se observă că f se poate scrie sub forma $f = g + h$, unde

$$g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \cup (0, 1]\\ 0, & \text{dacă } x = 0\end{cases}$$

și

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in [-1, 0)\\ 0, & \text{dacă } x = 0\\ 1, & \text{dacă } x \in (0,1]\end{cases}$$

Dacă f ar admite primitive, cum g admite primitive (exercițiul 1.12.III(3)), ar rezulta că funcția h (care nu are proprietatea lui Darboux) ar admite primitive. Contradicție.

6. Dacă ar exista o primitivă F a lui f, atunci aceasta ar fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{4}x^2\sin\frac{2}{x} + G(x), & \text{dacă } x \in [-1, 1]\setminus\{0\}\\ G(0), & \text{dacă } x = 0\end{cases}$$

unde G este o primitivă a funcției continue

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{2}{x}, & \text{dacă } x \in [-1, 1]\setminus\{0\}\\ 0, & \text{dacă } x = 0.\end{cases}$$

Însă

$$F'(0) = \frac{1}{2} \neq f(0),$$

deci f nu admite primitive.

Se observă că funcția considerată, f, este pătratul funcției din exercițiul 1.12.III(4).

7. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0\\ 0, & \text{dacă } x = 0\end{cases}$$

și G o primitivă a sa (există conform exercițiului 1.12.III(3)). Se observă că funcția $h : [a, b] \to \mathbf{R}$, definită prin

$$h(x) = (x - a)(x - b)$$

se anulează, iar a și b, este derivabilă pe $[a, b]$ și derivata sa este diferită în punctele a și b. Funcția $G \cdot h$ este derivabilă, iar derivata sa

$$(G \cdot h)'(x) = g(h(x))h'(x) = \begin{cases} (2x - a - b)\sin\frac{1}{(x - a)(x - b)} & \text{dacă } x \in (a, b)\\ 0 \quad \text{dacă } x = a & \text{sau } x = b\end{cases}$$

satisface condițiile din enunț.

8. Se consideră funcția G din exemplul precedent și funcția $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$h(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Atunci funcția $(G \cdot h)'$ satisface condițiile din enunț.

9. Funcția

$$g_\xi(x) = F(x) - f(\xi)x$$

este derivabilă, iar derivata sa

$$g'_\xi = F' - f(\xi) = f - f(\xi)$$

este strict negativă (respectiv strict pozitivă) la stînga (respectiv la dreapta lui ξ) Prin urmare, funcția g_ξ este strict descrescătoare la stînga lui ξ și strict crescătoare la dreapta, deci g_ξ nu este injectivă pe $[a, b]$, adică există $x_1 \in [a, \xi)$ și $x_2 \in (\xi, b]$ astfel încît

$$g_\xi(x_1) = g_\xi(x_2)$$

de unde rezultă că

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = f(\xi).$$

2. 3.

1. $x(\ln x - 1) + \mathcal{C}$; **2.** $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + \mathcal{C}$; **3.** $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + \mathcal{C}$;
4. $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + \mathcal{C}$; **5.** $\frac{\ln^2 x}{2} + \mathcal{C}$; **6.** $\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha + 1)\ln x - 1)] + \mathcal{C}$, $\alpha \neq -1$; $\frac{\ln x}{2} + \mathcal{C}$, $\alpha = -1$; **7.** $x[\ln^n x - n\ln^{n-1}x + \ldots + (-1)^{n-1}n(n-1)\ldots 2\ln x + (-1)^n n!] + \mathcal{C}$;

8. $\frac{x^4}{32}(8\ln^2 x - 4\ln x + 1) + \mathcal{C}$; **9.** $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big[\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}x + \ldots$
$+(-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\ldots 2}{(\alpha+1)^{n-1}}\ln x + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\Big] + \mathcal{C},\ \alpha \neq -1$; $\frac{\ln^{n+1}x}{n+1} + \mathcal{C},\ \alpha = -1$;
10. $e^x(x-1) + \mathcal{C}$; **11.** $e^x(x^2 - 4x + 3) + \mathcal{C}$; **12.** $e^x(x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + \mathcal{C}$;
13. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\Big[x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\ldots 2}{\alpha^{n-1}}x + (-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\Big] + \mathcal{C}$;
14. $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + \mathcal{C}$; **15.** $(-x^2 + x + 1)\cos x + (2x-1)\sin x + \mathcal{C}$;
16. $I_n = -\frac{1}{\alpha}x^n\cos\alpha x + \frac{n}{\alpha^2}x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-2)}{\alpha^2}I_{n-2}$; **17.** $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + \mathcal{C}$;
18. $\frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + \mathcal{C}$: **19.** $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + \mathcal{C}$; **20.** $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}\cdot$
$\cdot(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + \mathcal{C}$; **21.** $\frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + \mathcal{C}$;

22. $-e^x\cos x + \mathcal{C}$; **23.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + \mathcal{C}$; **24.** $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + 2\sin x -$
$-\frac{2}{3}\sin^3 x + \mathcal{C}$; **25.** $\frac{15}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{5}{32}\sin 4x + \mathcal{C}$; **26.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} -$
$-2\ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + \mathcal{C}$; **27.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \mathcal{C}$;

28. $\frac{1}{4}x^3\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{8}x\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \mathcal{C}$; **29.** $\frac{1}{5}(1 + x^2)^{\frac{5}{2}} -$
$\frac{1}{3}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{C}$; **30.** $\frac{1}{6}\sqrt{x^2 - 4}(x^5 - x^3 - 6x) - 4\ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + \mathcal{C}$;

31. $\frac{16}{3}(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(x^2 - 4)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7}(x^2 - 4)^{\frac{7}{2}} + \mathcal{C}$;
32. $\frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \mathcal{C}$; **33.** $\frac{x^3}{4}\sqrt{9 - x^2} - \frac{9}{8}x\sqrt{9 - x^2} + \frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3} + \mathcal{C}$.

3. 6. I

1. $2\ln(x^2 + x + 3) + \mathcal{C}$; **2.** $\ln(2x^4 + 3x^2 + 5) + \mathcal{C}$; **3.** $-\operatorname{arctg}(\cos x) + \mathcal{C}$;
4. $-\ln(\cos x) + \mathcal{C}$: **5.** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right) + \mathcal{C}$; **6.** $\ln(\operatorname{tg} x) + C$; **7.** $-e^{\cos(x^2+1)} + \mathcal{C}$;
8. $\frac{e^{x^3}}{3} + \mathcal{C}$; **9.** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \mathcal{C}$; **10.** $-\frac{\cos^3 x}{3} + \mathcal{C}$; **11.** $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + \mathcal{C}$; **12.** $-\cos x +$
$+\frac{\cos^3 x}{3} + \mathcal{C}$; **13.** $\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \mathcal{C}$; **14.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \mathcal{C}$; **15.** $-\ln(\cos x) + \frac{\cos^2 x}{2} +$
$+\mathcal{C}$; **16.** $\ln(1 + \operatorname{tg} x) + \mathcal{C}$; **17.** $\frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{x} + \mathcal{C}$; **18.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + \mathcal{C}$;
19. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + \mathcal{C}$; **20.** $\frac{1}{2}\arcsin x^2 + \mathcal{C}$; **21.** $\arcsin e^x + C$; **22.** $\ln(1 + \ln x) + \mathcal{C}$;
23. $-\frac{\cos^2(\sin x)}{2} + \mathcal{C}$; **24.** $-\arcsin(\cos^2 x) + \mathcal{C}$; **25.** $\operatorname{arctg}(\ln x) + \mathcal{C}$; **26.** $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 1} +$

$+\frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \mathcal{C}$; **27.** $\frac{(2x-3)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{4} - \frac{1}{8}\ln\Big(\frac{2x-3}{2} +$
$+\sqrt{x^2 - 3x + 2}\Big) + \mathcal{C}$; **28.** $\frac{(2x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}{4} + \frac{3}{8}\ln\Big(x + \frac{1}{2} +$
$+\sqrt{x^2 + x + 1}\Big) + \mathcal{C}$; **29.** $\frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{x - 1} + \mathcal{C}$;

30. $\frac{x}{2}\sqrt{9 - 4x^2} + \frac{9}{4}\arcsin\frac{2x}{3} + \mathcal{C}$; **31.** $-\frac{5}{12}(x+1)(x^2 + 2x + 2)^{\frac{3}{2}} +$
$+\frac{3}{8}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{3}{8}\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + \mathcal{C}$;

32. $2(x-1)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{x-1}{7} + \frac{1}{5}\right) + \mathcal{C}$; **33.** $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \mathcal{C}$;
34. $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \mathcal{C}$;

35. $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + x^2 + 1} + \mathcal{C}$.

4. 6.

1. $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x} + \mathcal{C}$;

2. $\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}{2} + \frac{\cos 2\sqrt{x}}{4} + \mathcal{C}$;

3. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin^2 x}} + \mathcal{C}$; **4.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^4 + 2x^2} + \mathcal{C}$;

5. $\sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{x+1}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{2} + \mathcal{C}$;

6. $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2(x^2+1)} - x}{\sqrt{2(x^2+1)} + x} + \mathcal{C}$; **7.** $\operatorname{arctg} x\left(\frac{x^3}{3} - x + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) - \frac{x^2}{6} +$
$+\frac{4}{3}\ln\sqrt{1 + x^2} + \mathcal{C}$; **8.** $\ln\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1} + \mathcal{C}$.

5. 9.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}$; **2.** $x + 2\ln(1 - x) + \mathcal{C}$; **3.** $-2\ln(1 - x) + \frac{3}{x-1} -$
$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \ln(x^2 - x + 1) + \frac{28}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2 - x + 1} + \mathcal{C}$;
4. $5\ln\frac{x+2}{-x-1} - \frac{5}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^3} + \mathcal{C}$; **5.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \mathcal{C}$;

6. $\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2 - x + 1} + \frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$; **7.** $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6x - 3\ln x + \frac{1}{x} +$

$+ 13 \ln(1 - x) - \dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{1}{(x - 1)^2} + \mathcal{C}$; **8.** $\dfrac{1}{2} \ln x - \ln(x + 1) + \dfrac{1}{2} \ln(x + 2) + \mathcal{C}$.

9. $\dfrac{1}{6} \ln x - \dfrac{1}{2} \ln (x + 1) + \dfrac{1}{2} \ln (x + 2) - \dfrac{1}{6} \ln(x + 3) + \mathcal{C}$;

10. $x + \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \ln (x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (\sqrt{2} - 1) \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x - 1) + \mathcal{C}$;

11. $\dfrac{1}{3} \ln (x + 1) - \dfrac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$;

12. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{arctg} (\sqrt{2}\, x + 1) + \operatorname{arctg} (\sqrt{2}\, x - 1)\right] + \mathcal{C}$;

13. $x - 2 \ln(x^2 + 4x + 5) + \mathcal{C}$; **14.** $- \dfrac{1}{4} \ln(x + 1) + \dfrac{1}{8} \ln(x^2 + 3) +$

$+ \dfrac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$; **15.** $\ln x - \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1 + x^2} + \mathcal{C}$;

5.10.

1. $\ln (x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + \dfrac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \mathcal{C}$;

2. $- 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 + x - x^2} - x - 1}{x} + \mathcal{C}$; **3.** $2 \ln (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x) -$

$- \dfrac{3}{2} \ln(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1) - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1} + \mathcal{C}$;

4. $2 \ln(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) - \dfrac{3}{2} \ln (2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}) -$

$- \dfrac{3}{2} \dfrac{1}{2 (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) - 1} + \mathcal{C}$; **5.** $\dfrac{2}{9} \left(5 \sqrt{\dfrac{x - 2}{5 - x}} - 2 \sqrt{\dfrac{5 - x}{x - 2}}\right) + \mathcal{C}$;

6. $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\sqrt{1 - 2x - x^2} + x - 1}{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1} + \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1}{x} + \mathcal{C}$;

7. $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \dfrac{2 + \sqrt{2(1 - x^2)}}{2 - \sqrt{2(1 - x^2)}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{2(1 - x^2)}}{- 2x} + \mathcal{C}$;

8. $x - 2 \ln(1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}) + \dfrac{3}{2} \dfrac{1}{1 + 2x + 2\sqrt{1 + x + x^2}} +$

$+ \dfrac{3}{2} \ln (1 + 2x + 2 \sqrt{1 + x + x^2}) + \mathcal{C}$; **9.** $- \dfrac{3x + 20}{12} (- x^2 + 4 x + 5)^{\frac{3}{2}} +$

$+ \dfrac{25}{8} (x - 2) \sqrt{- x^2 + 4x + 5} + \dfrac{225}{8} \arcsin \dfrac{x - 2}{3} + \mathcal{C}$; **10.** $- \sqrt{- x^2 + 4x + 5} -$

$- 6 \arcsin \sqrt{\dfrac{5 - x}{6}} + \mathcal{C}$.

5.10.II.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}$; **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + \mathcal{C}$; **3.** $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} + \mathcal{C}$;

4. $\dfrac{1}{3} \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \ln\left(1 - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{5}{3}\left(3 - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right) + \mathcal{C}$; **5.** $x + \dfrac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + \mathcal{C}$;

6. $- \dfrac{1}{4} \cos x (\cos x + \sin x) + \dfrac{1}{4} \ln (\sin x + \cos x) + \mathcal{C}$; **7.** $\ln (\operatorname{tg}^2 x + 2) +$

$+ \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}$. **8.** $- \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \mathcal{C}$;

9. $\dfrac{5}{2\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$;

10. $2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{(1 + a^2)\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2a}{1 - a^2} + \mathcal{C}$.

CAPITOLUL II

1.4.

$\| \Delta_1 \| = \dfrac{1}{3}$; $\| \Delta_2 \| = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$; $\| \Delta_3 \| = e^{10}(e - 1)$; $\| \Delta_4 \| = \dfrac{1}{2}$

1.11.

(1) $\Delta' \cup \Delta'' = \left(1, \dfrac{1}{2^4}, \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$

(2) $\Delta' \cup \Delta'' = (0, 1, 2, e, 3, 4, 5, 6, 7, e^2, 8, 9, 10)$

b) 1) dacă $\Delta' \subset \Delta''$, atunci p divide q, 2) dacă p divide q, atunci $\Delta' \subset \Delta''$.

Conform primului punct $\left\{\begin{array}{l} p \text{ divide } pq \Rightarrow \Delta' \subset \Delta \\ q \text{ divide } pq \Rightarrow \Delta'' \subset \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta' \cup \Delta'' \subset \Delta$.

2.23.I.

1. $\sigma_\Delta (f, \xi) = \dfrac{7}{24}$; **2.** $\sigma_\Delta (f, \xi) = \dfrac{\pi}{12}\left(3 + \sin \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3. $\sigma_\Delta (f, \xi) = \dfrac{9}{4}$; **4.** $\sigma_\Delta (f, \xi) = \dfrac{153}{8}$; **5.** $\sigma_\Delta (f, \xi) = \dfrac{1889}{2880}$.

2.23.II

1. f fiind integrabilă, pentru orice şir de diviziuni cu $\| \Delta_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi orice alegere a punctelor intermediare ξ_i^n, şirul sumelor Riemann converge. Alegem în particular punctele intermediare ξ_i^n astfel încît $f(\xi_i^n) = \alpha$. Atunci

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(x_i^n - x_{i-1}^n) = \alpha \sum_{i=1}^{k_n} (x_i^n - x_{i-1}^n) = \alpha(b-a),$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \alpha(b-a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Calculăm $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)$: $\lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \frac{1}{2}$, oricare ar fi (Δ_n) încît $\| \Delta_n \| \to 0$ şi oricare ar fi $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$. f nu posedă primitivă, deoarece f nu are proprietatea Darboux. $f([0, 1]) = \{0, 1\}$ nu este interval. **3.** Dacă f integrabilă atunci pentru $(\forall)$ şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ astfel încît $\| \Delta_n \| \to 0$ şi orice $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, $\lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)$ există $= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Se aleg punctele ξ_i^n astfel încît $f(\xi_i^n) = 2\xi_i^n$. $\sigma_\Delta(f, \xi_i) = 2\sum_{i=0}^{k_n} (x_i^n - x_{i-1}^n)\xi$.
Funcţia $g: [a, b] \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2x$ este integrabilă.

$$\sigma_{\Delta_n}(g, \xi_i^n) = 2\sum_{i=1}^{k_n} (x_i - x_{i-1})\xi_i^n, \quad \lim \sigma_{\Delta_n}(g, \xi_i^n) = \lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x =$$
$$= b^2 - a^2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b^2 - a^2;$$

4. Se aleg punctele intermediare ξ_i^n astfel încît $f(\xi_i^n) = \frac{1}{1+\xi_i^n}$ $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) =$

$$= \sum_{i=1}^{k_n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{1}{1+\xi_i^n}, \quad \lim \sum_{i=1}^{k_n} (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{1}{1+\xi_i^n}\right) = \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

5. Dacă f ar fi integrabilă, atunci pentru orice alegere a şirului de diviziuni (Δ_n) cu $\| \Delta_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi orice alegere a punctelor ξ_i^n, şirul sumelor Riemann are limită $= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Alegem în particular $\xi_i'^{,n}$ astfel încît $f(\xi_i'^{,n}) = \xi_i'^{,n}$ şi $\xi_i''^{,n}$, astfel încît $f(\xi_i''^{,n}) = 2\xi_i''^{,n}$. Avem

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i'^{,n}) = \sum_{i=1}^{kn} (x_i - x_{i-1})\xi_i'^{,n} \text{ şi } \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i''^{,n}) = \sum_{i=1}^{kn} (x_i - x_{i-1}) 2\xi_i''^{,n},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i'^{,n}) = \int_1^2 x\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$ şi $\lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i''^{,n}) = \int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = 3$

Aşadar f nu este integrabilă;

6. Fie $f_i: [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}$, $f_i(x) = f(x)$ $(\forall)x \in (x_{i-1}, x_i)$, $g_i: [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}$, $g_i(x) = \alpha_i (\forall)x \in [x_{i-1}, x_i]$. g_i sînt integrabile (ca funcţii constante), deci f_i sînt integrabile (diferă de g_i în punctele x_{i-1} şi x_i). Dar f_i este restricţia lui f la $[x_{i-1}, x_i]$. Din propoziţia 2.21 rezultă că f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_1} f_1(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_{n-1}}^b f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1}).$$

7. $f_1(x) = -\sin x\ (\forall)x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; $f_2(x) = \sin x (\forall)x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. f_1, f_2 sînt integra-

bile; ele sînt restricţii ale funcţiei f la intervalele $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, respectiv $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Conform propoziţiei 2.21. f este integrabilă şi $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} -\sin x\mathrm{d}x +$

$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 2$. **8.** Funcţiile $f_1(x) = x$ pentru $x \in [0, 1]$, $g(x) = x^2 + 1$ pentru $x \in [1, 2]$, sînt integrabile pe $[0, 1]$, respectiv pe $[1, 2]$. $f_2(x) = x^2 + 1$ pentru $x \in (1, 2]$ şi $f_2(1) = 1$ este integrabilă pe $[1, 2]$ (deoarece diferă de g în punctul $x = 1$), prin urmare f este integrabilă şi $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{23}{6}$; **9.** Explicităm funcţia $f(x) = [2^5 x] = [32x]$ astfel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{32}\right) \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{32}, \frac{2}{32}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{3}{32}, \frac{3}{32}\right) \\ \vdots & \\ k-1, & x \in \left[\frac{k-1}{32}, \frac{k}{32}\right) \\ 31 & x \in \left[\frac{31}{32}, 1\right]. \end{cases}$$

Deci există o diviziune $\Delta = \left(0, \frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{3}{32}, \ldots \frac{k}{32}, \ldots, \frac{32}{32}\right)$ a intervalului $[0, 1]$ astfel încît f este constantă pe fiecare interval deschis (x_{i-1}, x_i), $(1 \leqslant i \leqslant 32)$. Conform exerciţiului 6, f este integrabilă şi $\int_0^{32} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{32} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{32} (x_i - x_{i-1})\alpha_i =$ $= \frac{1}{32}(1 + 2 + \ldots + 32) = \frac{31}{2}$; **10.** Se scrie explicit funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x-1, & x \in [1, 2) \\ x-2, & x \in [2, 3) \\ x-3, & x \in [3, 2\sqrt{3}]. \end{cases}$$

Conform propoziţiei 2.21, f este integrabilă şi $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x = 12 - 6\sqrt{3}$.

3.13.I.

1. $s_1(f) = \frac{5}{27}$, $S_1(f) = \frac{14}{27}$, $s_2(f) = \frac{143}{576}$, $S_2(f) = \frac{7}{16}$; **3.** $s_2(f) = \frac{439}{780}$, $S_2(f) = \frac{243}{390}$;

4. $s_1(f) = \frac{7}{3}$, $S_1(f) = \frac{34}{3}$; $s_2(f) = 2$, $S_2(f) = 13$: **5.** $s_1(f) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}} +$

$+ 1 + e^{\frac{1}{2}}), S_1(f) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}} + e + 1), \; S_2(f) = 1 + e, \; s_2(f) = e^{-1} + 1.$

3.13.II.

1. $\sqrt{3} - \frac{\ln (2 + \sqrt{3})}{2}$; 2. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 3. $\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$.

3.15.

1. 2; 2. $\frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{3}$; 3. 2; 4. 1; 5. $\frac{1}{2}$.

4.18.I.

1. În baza teoremei de medie există $c \in [a, b]$ cu $f(c) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)dx$. Dacă ar exista şi un $c' \neq c$ cu aceeaşi proprietate, atunci ar rezulta $f(c') = f(c)$. Aceasta nu poate avea loc, deoarece f, fiind strict crescătoare, este injectivă;

2. $c = \sqrt{\frac{13}{3}}$;

3. Dacă, prin absurd, f nu îşi schimbă semnul pe nici un interval $[x', x''] \subset [a, b]$, atunci $f \geqslant 0$ sau $-f \geqslant 0$ pe $[a, b]$. Aplicînd propoziţia 4.7 lui f sau $-f$, se obţine $\int_a^b f(x)dx > 0$ sau $-\int_a^b f(x)dx > 0$. Contradicţie;

4. Dacă ar exista $c \in [a, b]$ cu $f(c) \neq 0$, să admitem $f(c) > 0$; atunci $(A_{12}(\beta))$ ar exista $r >$ astfel încît $f(x) > 0$, $\forall x \in (c - r, c + r)$, prin urmare (propoziţia 4.7) $\int_{c-r}^{c+r} f(x)dx > 0$. Contradicţie.

4.18.III.

1. $\frac{\pi}{2}$; 2. $\frac{1}{4}\left(\text{arctg}\,\frac{5}{2} + \text{arctg}\,\frac{1}{2}\right)$; 3. $\frac{\pi \ln 2}{8}$; 4. $\frac{\pi}{4}$; 5. $\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$; 6. $\frac{4 - \pi}{2}$;
7. $\frac{2}{15}$; 8. $-\frac{\pi}{4}$; 9. $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \ln 2\right)$; 10. $\frac{1}{13}[e^2(2 \sin 3 - 3 \cos 3) + 3]$;
11. $2(e^2 + 3)$; 12. $\frac{3}{2}\ln 3$; 13. $\frac{1}{4}\ln 2$; 14. $2(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(2 + \sqrt{5})$;
15. $2\sqrt{2} - 2 + \frac{\pi}{4}$.

1.9.

1. $\frac{32}{3}$; 2. $\frac{1}{12}$; 3. $\frac{10}{3}$; 4. $\frac{\pi r^2}{8}$; 5. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{12\sqrt{2}}(\sqrt{5} - 1)^{\frac{3}{2}}$; 6. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; 7. $\frac{9}{2}$; 8. $e + \frac{1}{e} - 2$; 9. 1;
10. $\frac{a^2}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$; 11. $4a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$.

1.9.II

1. $A = \frac{1}{3}$; 2. $A = a^2 \ln 2$; 3. $A_1 = \frac{4}{3}(\sqrt{3} + 4\pi)$. $A_2 = \frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$;

4. $A_1 = A_2 = \pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3$, $A_3 = 2\pi - 2A_1$;

5. $A = \frac{32\sqrt{6}}{3}$; 6. $A_1 = 2\left(\pi + \frac{2}{3}\right)$, $A_2 = 6\pi - \frac{4}{3}$; 7. $A = \frac{a^2}{2} \ln \sqrt{\frac{1 + k}{1 - k}}$; 8. $A = \frac{9}{16}$. 9. $A = \frac{8}{3}$.

2.8.

1. $\frac{b^2}{a^{\frac{4}{3}}}(b^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{7}{3}}) \cdot \frac{3}{7}$; 2. $\frac{16\pi}{15}$; 3. $\frac{\pi^2}{2}$; 4. $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$; 5. $\pi\left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1\right)$;
6. $\frac{5e^3 - 2}{27}\pi$; 7. $\frac{a^3}{8}(e^2 + 4 - e^{-2})$; 8. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$; 9. $\frac{\pi a^3}{4}$; 10. $\frac{\pi a^2}{6}$; 11. $\frac{\pi a^3}{20}$;
12. $\frac{2\pi}{5}$; 13. $\pi\left[2a - 2b + (a + b) \ln \frac{b}{a}\right]$; 14. $\pi\left[\frac{15}{2} - 8 \ln 2\right]$.

3.9.

1. $1 + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$; 2. $-\frac{1}{2} + \ln 3$; 3. $\frac{e - e^{-1}}{2}$; 4. $\frac{1}{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{5}) - \frac{1}{8} \ln \frac{(3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{5} + 2)}{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 2)}$;

5. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$; 6. $\ln(\sqrt{2} + 1)$; 7. $\ln 5 - \frac{2}{3}$;

8. $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1 + e^2} - 1)^2}{e^2(\sqrt{2} - 1)^2}$.

4.10.

1. $(2\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{9}$; 2. $\frac{\pi}{4}(e^2-e^{-2}+4)$; 3. $\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$;

4. $\pi\left(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}\right)$; 5. $2\pi a\left(\frac{b\pi}{3}+a\right)$;

6. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$; 7. $\frac{\pi}{8}\left(\frac{5\sqrt{17}-3}{8}+\ln\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$; 8. $3\pi a^2$.

5.6.

1. $D_4(f)=60,\ T_4(f)=46.\ D_8(f)=52{,}5,\ T_8(f)=45{,}5,$
$E_{D_4}(f)=14{,}6667,\ E_{T_4}(f)=0{,}6667,\ E_{D_8}(f)=7{,}1667,\ E_{T_8}(f)=0{,}1667;$

2. $D_4(f)=6{,}25,\ T_4(f)=6{,}25,\ D_6(f)=7{,}444,\ T_6(f)=6{,}111,$
$E_{D_4}(f)=\frac{1}{8},\ E_{T_4}(f)=0{,}25,\ E_{D_6}(f)=0{,}4444,\ E_{T_6}(f)=0{,}111;$

3. $D_3(f)=0{,}6973,\ T_3(f)=0{,}7807,\ D_5(f)=0{,}7377,\ T_5(f)=0{,}7867,$
$E_{D_3}(f)=0{,}088,\ E_{T_3}(f)=0{,}0046,\ E_{D_5}(f)=0{,}0486,\ E_{T_5}(f)=0{,}0014;$

4. $D_3(f)=0{,}6166,\ T_3(f)=0{,}7054,\ D_5(f)=0{,}6455,\ T_5(f)=0{,}6956;$
$E_{D_3}(f)=0{,}0765;\ E_{T_3}(f)=0{,}0065,\ E_{D_5}(f)=0{,}0475,\ E_{T_5}(f)=0{,}0025.$

6.3.

1. $x=0,\ y=\frac{4}{3\pi}$; 2. $x=y=\frac{4}{3\pi}$; 3. $x=0,\ y=\frac{8}{3\pi}$; 4. $x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{8}$;
5. $x=\frac{8}{3},\ y=0.$

7.3.

1. $L=20\ J$; 2. $L=0{,}125\ J$; 3. $L=4900\ J$; 4. $L=\frac{1}{6}g^2\frac{M^3}{m^2}$.

CUPRINS

Nr. colilor de tipar : 10
Bun de tipar : 4.XII.1989

Com. nr. 90 422/36 422
Combinatul Poligrafic
București
ROMÂNIA