Lei 10,60

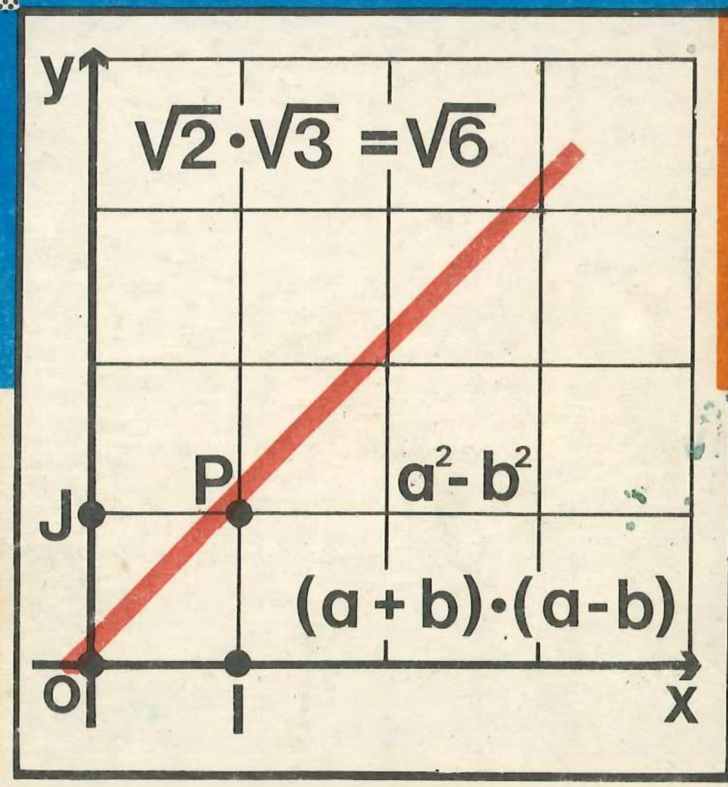
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

VII

Matematică

Algebră

Manual pentru clasa a VII-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ —
BUCUREȘTI, 1988

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Dr. TIBERIU SPIRCU Prof. IOAN CRĂCIUNEL

Matematică

VII

Algebră

Manual pentru clasa a VII-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat în anul 1980 pe baza programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 41501/1980.

Referenți: Conf. univ. dr. ION D. ION
Conf. univ. dr. C. NĂSTĂSESCU
Prof. I. MITRACHE
Prof. VIOLETA BALTĂ
Prof. LUCREȚIA ROȘU
Prof. L. ANTONESCU

La definitivarea manualului s-a ținut seama de unele propuneri făcute de colective de cadre didactice din orașele București și Constanța.

Redactor: Prof. VALENTIN RADU
Tehnoredactor: ELENA OPRIȘEANU
Coperta: N. SÎRBU

CAPITOLUL I

NUMERE REALE

1. NUMERE RAȚIONALE

Numărînd obiecte din jurul nostru, folosim **numere naturale.** Am învățat, încă din clasele I—IV, să facem două operații cu numerele naturale: adunarea și înmulțirea.

Pentru a putea scădea orice număr natural dintr-un număr, a trebuit să extindem ideea de număr, introducînd și numere negative: am învățat astfel în clasa a VI-a despre **numerele întregi** și despre operațiile cu numere întregi: adunarea, scăderea, înmulțirea.

Pentru a putea împărți orice număr întreg la alt număr (acesta fiind diferit de zero), a trebuit să extindem iarăși ideea de număr; am învățat astfel despre **numerele raționale** și despre operațiile cu numerele raționale: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea. Am învățat să comparăm între ele două numere raționale. Am învățat apoi că orice număr rațional poate fi reprezentat de un punct pe **axa numerelor.**

Am folosit numere raționale atunci cînd am „luat părți" dintr-un „întreg", sau cînd am măsurat lungimi, arii și altele. Am folosit numere raționale mai întîi scrise sub formă zecimală, apoi sub formă de fracție. Orice număr rațional poate fi scris (în multe feluri!) sub forma unei fracții $\frac{m}{n}$, unde m este un număr întreg, iar n un număr natural, diferit de zero.

Am mai învățat în clasa a VI-a să ridicăm la puteri orice număr rațional.

*Să reamintim, pe scurt, ceea ce am învățat în clasa a VI-a despre numerele raționale:

1) Adunarea numerelor raționale este *comutativă*, adică $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele raționale a și b.

2) Adunarea numerelor raționale este *asociativă*, adică $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele raționale a, b și c.

3) Numărul 0 (zero) este *element neutru pentru adunare*, adică $a + 0 = a = 0 + a$, oricare ar fi numărul rațional a.

* Textul cules retras nu este obligatoriu.

4) Orice număr rațional a are un *opus*, notat $-a$, care este tot număr rațional. Avem $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ și $-(-a) = a$. În particular, $-0 = 0$ (numărul 0 este propriul său opus).

5) Scăderea numărului rațional b din numărul rațional a poate fi înlocuită de adunarea lui a cu opusul lui b:

$$a - b = a + (-b).$$

6) Înmulțirea numerelor raționale este *comutativă*, adică $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele raționale a și b.

7) Înmulțirea numerelor raționale este *asociativă*, adică $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele raționale a, b și c.

8) Numărul 1 (unu) este *element neutru pentru înmulțire*, adică $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, oricare ar fi numărul rațional a.

9) Înmulțirea numerelor raționale este *distributivă față de adunare*, adică $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi numerele raționale a, b și c. Această proprietate este folosită atunci cînd *scoatem factor comun*.

10) Orice număr rațional $a \neq 0$ are un *invers*, notat $\frac{1}{a}$; avem $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$ și $\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$. În particular, $\frac{1}{1} = 1$ (numărul 1 este propriul său invers).

11) Împărțirea numărului rațional a la numărul rațional $b \neq 0$ poate fi înlocuită de înmulțirea lui a cu inversul lui b:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

12) Numerele raționale pot fi comparate între ele; date două numere raționale a și b, avem sau $a < b$, sau $a = b$, sau $a > b$. Numerele raționale care sînt mai mari decît 0 se numesc *pozitive*; iar cele care sînt mai mici decît 0 se numesc *negative*.

13) Dacă $a > b$, atunci $a + c > b + c$, oricare ar fi numerele raționale a, b și c. Opusul unui număr rațional pozitiv este negativ, iar opusul unui număr rațional negativ este pozitiv.

14) Dacă $a > b$ și $c > 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$. Dacă $a > b$ și $c < 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ (!). În particular avem *regula semnelor*:

·	+	−
+	+	−
−	−	+

15) Dacă $a > b$, atunci există numere raționale c astfel încît $a > c > b$. De exemplu, putem lua $c = \frac{a + b}{2}$, *media aritmetică* a lui a și b.

Mulțimea numerelor raționale se notează **Q**, iar mulțimea numerelor raționale pozitive sau zero se notează $\mathbf{Q}_+$.

Numerele raționale negative pot fi scrise sub forma $-\frac{m}{n}$, unde m și n sînt numere naturale (iar $n \neq 0$). Numerele raționale pozitive pot fi scrise sub forma $+\frac{m}{n}$, sau mai simplu $\frac{m}{n}$, unde m și n sînt numere naturale ($n \neq 0$). Avem

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n} = \frac{4m}{4n} = \dots;$$

numerele m și n pot fi alese prime între ele, în care caz **fracția** $-\frac{m}{n}$, respectiv $\frac{m}{n}$ se numește **ireductibilă**.

Numerele raționale pot fi scrise și **zecimal**; de exemplu, în loc de $\frac{1}{10}$ se scrie și 0,1; în loc de $-\frac{3}{4}$ se scrie și −0,75; în loc de $\frac{2}{3}$ se scrie și 0,6666... = 0,(6).

Numărul rațional scris zecimal **periodic** 0,(7) se scrie sub formă de fracție astfel: $\frac{7}{9}$; numărul rațional −0,(12) se scrie sub formă de fracție astfel: $-\frac{12}{99} = -\frac{4}{33}$.

Numărul rațional 0,1(23) se transformă în fracție astfel: $0{,}1(23) = 0{,}1 + \frac{1}{10} \cdot 0{,}(23) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{23}{99} = \frac{99 + 23}{990} = \frac{122}{990}$. Numărul rațional −4,1(5) se scrie sub formă de fracție astfel: $-\frac{187}{45}$, deoarece: $-4{,}1(5) = -4{,}1 - \frac{1}{10} \cdot 0{,}(5) = -\frac{41}{10} - \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{-369 - 5}{90} = \frac{-374}{90} = -\frac{187}{45}$.

Inversul numărului rațional $a \left(\text{pe care l-am notat } \frac{1}{a}\right)$ este notat uneori astfel: a^{-1}. El este acel număr rațional ce are proprietatea că $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

EXERCIȚII

1) Care este cel mai mare divizor comun al numerelor:
a) 36 și 42; b) 42 și 50; c) 26, 39 și 65; d) 144, 192 și 324; e) 81, 120 și 36; f) 14, 28, 56 și 63?

2) Sînt prime între ele numerele:
a) 6 și 15; b) 88 și 123; c) 36 și 35; d) 41 și 1141?

3) Care este cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 36 și 42; b) 42 și 50; c) 6, 8, 20 și 24; d) 14, 28 și 56; e) 8, 35 și 14?

4) Simplificați fracțiile:

a) $\frac{96}{144}$; b) $\frac{105}{90}$; c) $\frac{15}{51}$; d) $\frac{44}{36}$; e) $\frac{81}{120}$; f) $\frac{16}{64}$; g) $\frac{166}{664}$; h) $\frac{1666}{6664}$.

5) Calculați:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{5}{20}$; d) $\frac{7}{2}+\frac{5}{4}+\frac{3}{6}+\frac{1}{8}$; e) $\frac{22}{3}-\frac{16}{5}-\frac{31}{15}$.

6) Scrieți sub formă de fracție numerele raționale:

a) $4\frac{4}{5}$; b) $13\frac{1}{2}$ c) $7\frac{5}{14}$; d) $5\frac{1}{3}$; e) $3\frac{1}{6}$.

7) Calculați:

a) $5\frac{1}{3}+4\frac{1}{2}-3\frac{1}{6}$; b) $8\frac{1}{2}-\frac{8}{17}-7\frac{13}{34}$; c) $\frac{16}{21}+1\frac{2}{7}-1\frac{1}{3}$; d) $13\frac{1}{2}-10\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}$.

8) Eliminați parantezele, apoi efectuați calculul:

a) $(+11)+(-3)+\left(-5\frac{1}{2}\right)+\left(+4\frac{1}{2}\right)$; b) $(-11)-(+13)-(-8)-(+17)-(-9)-(+13)$; c) $(+18)-(+36)-(-12)+(+24)-(+14)$.

9) Scrieți sub formă de fracție ireductibilă numerele raționale, scrise zecimal:

a) 11,1; b) 3,4; c) 0,135; d) −4,4; e) −0,16; f) −2,06.

10) Scrieți sub formă de fracție ireductibilă numerele raționale:

a) 3,(4); b) −4,(41); c) −4,4(1); d) 0,(98); e) 0,9(8).

11) Calculați:

a) $\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}$; b) $\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{25}$; c) $\frac{16}{25}\cdot\frac{15}{4}$; d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{8}$; e) $\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{7}$; f) $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{10}$.

12) Calculați:

a) 11,1 − 8,2; b) −4,15 + 2,23; c) 0,24 + 0,64 − 0,55; d) 6,125 − 0,175 + 3,75.

13) Scrieți sub formă zecimală:

a) $\frac{3}{20}$; b) $\frac{7}{16}$; c) $\frac{19}{80}$; d) $\frac{5}{9}$; e) $\frac{17}{3}$; f) $\frac{17}{41}$.

14) Scrieți sub formă de fracție ireductibilă numerele raționale:

a) 11,1 − 8,2; b) 3,(4) − 3,(34); c) 3,(4) + 0,(16) − 2,(06); d) 3,(3) − 3,3; e) 0,(4) − 0,44.

15) Scrieți sub formă zecimală numerele raționale:

a) $\frac{3}{4}\cdot 1{,}1$; b) $2{,}1\cdot 1{,}7$; c) $\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{7}$; d) $\frac{3}{5}\cdot 0{,}5+1{,}4-\frac{5}{4}$; e) 543,72 + 342,2 + 284,03; f) 15,6 · 34,5.

16) Calculați:

a) $(+15)\cdot(-5)$; b) $(-30)\cdot(-6)$; c) $(+25)\cdot(-1000)$; d) $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)$; e) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{8}{9}\right)$; f) $\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$; g) $(-3{,}3)\cdot 4$; h) $(-11{,}1)\cdot(-8{,}2)$.

17) Calculați:

a) $(+25):(-5)$; b) $(-30):(-6)$; c) $(+16):8$; d) $(-1000):(+25)$; e) $\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{9}{8}\right)$; f) $\frac{5}{3}:\left(-\frac{3}{2}\right)$; g) $(-3{,}3):4$; h) $4{,}4:(-1{,}1)$; i) $2\frac{6}{17}:8$; j) $2\frac{4}{5}:1\frac{1}{20}$.

18) Calculați:

a) $(+8)-(-6)\cdot(+2)$; b) $(-12)\cdot(+14)-(-9)\cdot(+16)+(-8)\cdot(-11)$; c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}-\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{40}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot 3\frac{1}{4}$.

19) Scrieți sub formă de fracție ireductibilă numerele raționale:

a) $\frac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)}$; b) $-\frac{1}{2{,}1}$; c) $\frac{6}{3\frac{1}{5}}$; d) $\frac{3\frac{1}{2}}{2\frac{2}{5}}$; e) $\frac{-\frac{8}{7}}{-\frac{3}{14}}$.

20) Calculați:

a) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$; b) $\frac{\frac{5}{7}-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\frac{3}{7}}$; c) $\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}+\frac{2}{5}}$.

21) Calculați:

a) $\frac{(9-2)\cdot 3+1}{3\cdot(-2)-8}$; b) $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

22) Schimbați locul numerelor raționale:

$$0{,}55;\ \frac{11}{19};\ -0{,}(8);\ -\frac{4}{5};\ \frac{-2{,}1}{-4{,}3};\ 2-1\frac{15}{32}\ \text{și}\ \frac{0{,}12}{3{,}6}$$

astfel încît să fie scrise în ordine crescătoare.

23) Calculați:

a) $\frac{3}{5}-\left(\frac{2}{7}-\frac{11}{14}\right)$; b) $\frac{3}{8}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$; c) $\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{5}{6}-\frac{6}{5}\right)$.

24) Care este media aritmetică a numerelor:

a) 41 și 18; b) $\frac{22}{3}$ și $\frac{15}{7}$; c) $-4{,}4$ și 8,2; d) 0,(4) și 1,(5); e) $-1{,}11$ și $-2{,}35$; f) 18 și $-17{,}8$; g) 22,3 și $-15{,}7$?

25) Din numărul 441,53 se scad succesiv numerele: 34,82; 46,39; 181,2 și 30. Care este rezultatul?

26) Ce număr trebuie adunat cu $7 + 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007$ pentru ca să obținem ca rezultat 8?

27) Care este media aritmetică a numerelor:

a) 81,6; 88,1; 87,9; 89,0 și 85,4; b) 99,8; 101,2; 98,9; 99,5; 100,4 și 100,2?

2. RIDICAREA LA PĂTRAT A UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Fie a un număr rațional. Vom nota a^2 și vom numi **pătratul** lui a numărul rațional $a \cdot a$.

EXEMPLE. Avem $8 \cdot 8 = 64$, numărul 64 este pătratul lui 8. Deoarece $1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96$, numărul rațional 1,96 este pătratul lui 1,4. Avem $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. numărul rațional $\frac{9}{16}$ este pătratul lui $\frac{3}{4}$. Deoarece și $(-8) \cdot (-8) = 64$, numărul 64 este pătratul și al lui -8. Deoarece $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$, numărul rațional $\frac{9}{16}$ este pătratul și al lui $-\frac{3}{4}$.

Să observăm că numerele 8 și -8 au același pătrat, anume 64. De asemenea, numerele $\frac{3}{4}$ și $-\frac{3}{4}$ au același pătrat, anume $\frac{9}{16}$.

Putem spune că:

Două numere raționale opuse au același pătrat.

Acest fapt rezultă din regula semnelor: fie a și $-a$ două numere raționale opuse unul altuia, numărul a fiind pozitiv. Atunci $(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = + a^2 = a^2$, deci $-a$ și a au același pătrat.

TEOREMĂ. Pătratul unui produs de numere raționale este egal cu produsul pătratelor numerelor.

Demonstrație. Vom demonstra doar pentru un produs de *două* numere raționale.

Fie a și b numere raționale. Pătratul produsului lor se poate scrie: $(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$. Înmulțirea este asociativă; putem renunța deci la paranteze: $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a \cdot b \cdot a \cdot b$.

Înmulțirea este comutativă, deci putem comuta: $a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot b \cdot b$. Introducînd din nou paranteze, vom scrie: $a \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a^2 \cdot b^2$. Astfel $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

De exemplu. avem $6 = 2 \cdot 3$; deci $6^2 = 2^2 \cdot 3^2$.

TEOREMĂ. Pătratul inversului unui număr rațional $a \neq 0$ este egal cu inversul pătratului lui a.

Demonstrație. Inversul $\frac{1}{a}$ al lui a are proprietatea că $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$. Ridicăm la pătrat: $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)^2 = 1^2 = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)^2$. Deci (folosim teorema de mai sus): $a^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a^2$. Dar $a^2 \cdot \frac{1}{a^2} = 1 = \frac{1}{a^2} \cdot a^2$. De aici rezultă că $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$, și teorema este demonstrată.

Această ultimă egalitate se mai scrie $(a^{-1})^2 = (a^2)^{-1}$.

Să folosim cele două teoreme de mai sus. Obținem:

$$(a : b)^2 = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{1}{b^2} = a^2 : b^2,$$

adică $(a : b)^2 = a^2 : b^2$ pentru orice numere raționale a și b (b diferit de 0).

EXERCIȚII

1) Completați tabelul:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	-1	-2	-3	-4	-5
n^2	0	1	4												

2) Numărul natural n se scrie în baza 10 cu două cifre. Poate avea numărul n^2 cifra unităților 2? Dar 6? Dar 5?

3) Completați tabelul:

a	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0,3	$-0{,}2$	1,1
$\frac{1}{a}$	1		$-\frac{2}{3}$		3,(3)		
$-\frac{5}{a}$	-5	$-\frac{5}{2}$				25	

4) Completați tabelul:

a	2	1,2	$\frac{3}{4}$		0,4
b	3		$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{7}$	
$a : b$	$\frac{2}{3}$	0,6		$\frac{18}{11}$	1,(3)

5) Completați tabelele:

a)

a	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
a^2	1,21									

b)

a	2,1	3,1	2,2	−1,3	−1,5	−3,1	4,3	−1,11
a^2								

c)

a	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{2}$
a^2	$\frac{9}{4}$								

3. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Să observăm că dacă a este un număr rațional pozitiv sau negativ, atunci pătratul său a^2 este un număr rațional pozitiv.

Am văzut că $64 = 8^2 = (-8)^2$; $1,96 = (1,4)^2$; $\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2$.

Numerele raționale 64; 1,96; $\frac{9}{16}$ se pot scrie deci ca pătrate ale altor numere raționale; ele sînt numite pătrate perfecte.

Vom spune că numărul rațional p este **pătrat perfect** dacă există un număr rațional a astfel încît $p = a^2$.

Fie p un număr rațional pătrat perfect. Putem scrie $p = a^2$, cu a **pozitiv!** Vom spune că a este **rădăcina pătrată** a lui p și vom nota $a = \sqrt{p}$.

Astfel, 8 este rădăcina pătrată a lui 64, dar −8 nu este rădăcina pătrată a lui 64; $\sqrt{64} = 8$. Numărul 1,4 este rădăcina pătrată a lui 1,96; $\sqrt{1,96} = 1,4$. Numărul $\frac{3}{4}$ este rădăcina pătrată a lui $\frac{9}{16}$, dar $-\frac{3}{4}$ nu este rădăcina pătrată a lui $\frac{9}{16}$: $\sqrt{\frac{9}{16}} \neq -\frac{3}{4}$!

TEOREMĂ. Fie p și q numere raționale pătrate perfecte. Atunci $p \cdot q$ este pătrat perfect, iar $\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$.

Demonstrație. Fie $a = \sqrt{p}$ și $b = \sqrt{q}$. Atunci $a^2 = p$, $b^2 = q$, iar a și b sînt numere raționale pozitive; $a \cdot b$ este număr pozitiv, iar $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 = p \cdot q$, ceea ce înseamnă că $\sqrt{p \cdot q} = a \cdot b = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$. Teorema este demonstrată.

De exemplu $2 = \sqrt{4}$ și $3 = \sqrt{9}$, deci $\sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3$.

TEOREMĂ. Fie p și q numere raționale pătrate perfecte, iar $q \neq 0$. Atunci $p : q$ este pătrat perfect, iar $\sqrt{p : q} = \sqrt{p} : \sqrt{q}$.

Se obișnuiește ca în loc de $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ să se mai scrie și $\frac{a}{b}$.

Folosind această notație, relația din teorema de mai sus devine

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

De exemplu, $11 = \sqrt{121}$ și $13 = \sqrt{169}$; deci $\sqrt{\frac{121}{169}} = \frac{11}{13}$.

Fie a un număr rațional. Să ne amintim că am notat cu $|a|$ **valoarea sa absolută**, care este un număr rațional pozitiv sau 0. Anume:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dacă } a > 0; \\ 0 & \text{dacă } a = 0; \\ -a & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

De exemplu, $|-3| = 3$, $\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$, $\left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7}$, $|+1001| = 1001$, $|-0,(3)| = 0,(3)$.

Să calculăm numărul $\sqrt{(-2)^2}$. Respectînd ordinea operațiilor, obținem $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(-2)\cdot(-2)} = \sqrt{+4} = 2$. Să observăm că $\sqrt{(-2)^2} = |-2|$.

Pentru orice număr rațional a, avem

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Observație. Dacă $a < 0$, atunci $\sqrt{a^2} = -a \neq a$!

Deoarece pătratul oricărui număr rațional este pozitiv sau 0, rezultă că nu toate numerele raționale pot fi pătrate perfecte. Numerele raționale negative nu pot fi pătrate perfecte.

Deoarece $0^2 = 0$, vom considera că 0 este pătrat perfect și că $\sqrt{0} = 0$.

EXERCIȚIU REZOLVAT. Să rezolvăm ecuația

$$2\sqrt{x} = 1, \quad x \in \mathbf{Q}.$$

Ecuația se scrie astfel: $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, ceea ce înseamnă că $\frac{1}{2}$ este rădăcina pătrată a numărului x. Deci $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

EXERCIȚII

1) Verificați că numerele 6; $\frac{6}{7}$; $0{,}01$; $1\frac{1}{4}$ sînt rădăcini pătrate ale numerelor 36, respectiv $\frac{36}{49}$; $0{,}0001$; $1\frac{9}{16}$.

2) Care este rădăcina pătrată a numărului:

a) 25; b) $\frac{9}{25}$; c) $\frac{4}{9}$; d) $\frac{25}{4}$; e) 1,21; f) 1,69?

3) Care dintre propozițiile ce urmează sînt adevărate?

a) $\sqrt{101} = 11$; b) $\sqrt{121} = 11$; c) $\sqrt{400} = 20$; d) $\sqrt{1{,}6} = 1{,}4$; e) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$; f) rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv este mai mică decît numărul.

4) Completați tabelul:

a	1,4	1,41	1,414	1,415	1,42	1,5
a^2						

Ce observați?

5*) Rezolvați ecuațiile (în mulțimea numerelor raționale):

a) $\sqrt{x} = 10$; b) $\sqrt{2x} = 1$; c) $3\sqrt{x} = 1$; d) $\sqrt{y} = 8$; e) $\sqrt{y} = -1$.

Am văzut că orice pătrat perfect este pozitiv sau 0. Reciproc este adevărat? Răspunsul este: nu!

De exemplu, vom arăta că numărul 2 **nu este** pătrat perfect.

Să presupunem că ar exista un număr rațional pozitiv a astfel încît am putea scrie $a^2 = 2$. Să-l scriem pe a sub formă de fracție ireductibilă: $a = \frac{m}{n}$, unde m și n sînt numere naturale, **prime între ele**. Am

avea deci: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, adică $\frac{m^2}{n^2} = 2$. De aici ar rezulta $2n^2 = m^2$.

Dar $2n^2$ se divide cu 2; deci m^2 se divide cu 2. Rezultă de aici că m este *par* (căci pătratul unui număr natural impar este impar!). Să scriem deci $m = 2p$. Astfel am avea $2n^2 = 4p^2$, de unde $2p^2 = n^2$. Ca mai sus, n este și el *par*. Astfel m și n au ca divizor comun pe 2, deci **nu** sînt prime între ele.

Am ajuns la o contradicție. Această contradicție ne arată că presupunerea pe care am făcut-o anume că $a^2 = 2$ pentru un număr rațional pozitiv a, este falsă.

Raționamentul de mai sus îi este atribuit lui Pitagora.

La fel putem stabili că 3; 5; 6; 7; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ și altele, nu sînt pătrate perfecte. Cu alte cuvinte $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ etc. nu sînt numere raționale.

Totuși, problemele practice de măsurare (pe care le vom întîlni mai tîrziu la geometrie) ne impun să lucrăm cu „numere" de forma $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Aceste numere, precum și altele, sînt *numere iraționale*.

4. EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL POZITIV

Am învățat în clasa a VI-a o metodă de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv, scris sub formă zecimală. Ilustrăm această metodă pe exemplul numărului 514,31274:

Etapa I:

$\sqrt{5'14{,}31'27'40}$	2
4	
1	

Etapa a II-a

$\sqrt{5'14{,}31'27'40}$	22
4	$42 \cdot 2\ (=84)$
11'4	
$-$ 8 4	
30 trecem virgula la rezultat.	

Etapa a III-a

$\sqrt{5'14{,}'31'27'40}$	22,6
4	$42 \cdot 2\ (=84)$
11'4	$\cancel{447 \cdot 7\ (=3129)}$
8 4	$446 \cdot 6\ (=2676)$
3 03'1	
2 67 6	
35 5	

Etapa a IV-a:

$\sqrt{5'14,31'27'40}$	22,67
4	42 · 2 (=84)
11'4	~~447 · 7 (=3129)~~
8 4	446 · 6 (=2676)
303'1	~~4528 · 8 (=36224)~~
267 6	4527 · 7 (=31689)
3552'7	
3168 9	
383 8	

Etapa a V-a:

$\sqrt{5'14,31'27'40}$	22,678
4	42 · 2 (=84)
11'4	~~447 · 7 (=3129)~~
8 4	446 · 6(=2676)
303'1	~~4528 · 8 (=36224)~~
267 6	4527 · 7 (=31689)
3552'7	45348 · 8 (=362784)
3168 9	
38384'0	
36278 4	
2105 6	

Să observăm că aplicînd această metodă efectuăm doar scăderi, înmulţiri şi comparaţii. Calculul poate fi continuat pînă la obţinerea numărului de zecimale dorit (în rezultat). În exemplul de mai sus, am aflat că rădăcina pătrată din numărul 514,31274 este (aproximativ) 22,678. Dacă ne opream după etapa a 3-a, obţinem rădăcina pătrată din numărul 514,31274 ca fiind 22,6, rezultat care este mai puţin exact decît cel obţinut după etapa a 5-a. O dată cu creşterea numărului de etape, obţinem rezultate din ce în ce mai exacte.

Să aplicăm metoda de mai sus numărului 2 = 2,00:

$\sqrt{2,00}$	1,4142...
1	24 · 4 (=96)
100	281 · 1 (=281)
96	2824 · 4(=11296)
400	28282 · 2 (=56564)
281	...
11900	
11296	
60400	
56564	
383600	
...	

Obţinem ca rezultate: 1,41 cu eroare de 0,01 (o sutime); 1,414 cu eroare de 0,001 (o miime); 1,4142 cu eroare de 0,0001 (o zecime de miime) şi aşa mai departe. Toate aceste rezultate sînt **aproximaţii (prin lipsă)** pentru **rădăcina pătrată** a lui 2.

Să privim figura I.1, imaginîndu-ne că mărim, de la o etapă la alta, de 10 ori segmentul de pe axa numerelor în care este conţinut $\sqrt{2}$. Aproximaţiile prin lipsă ale lui $\sqrt{2}$ corespund extremităţilor dinspre stînga ale acestor segmente. În figura I.2 am încercat să localizăm numărul $\sqrt{2}$ pe axa numerelor.

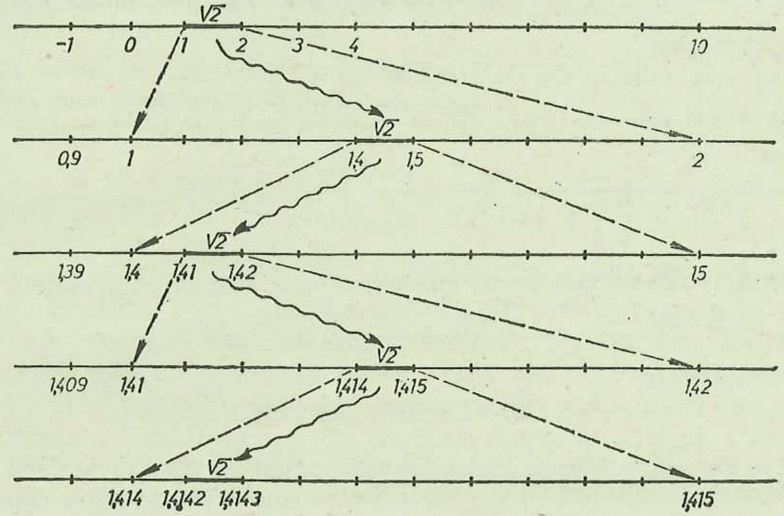


Fig. I.1

Dar, atenţie. *Nu putem vorbi* încă despre rădăcina pătrată a lui 2, căci 2 nu este pătrat perfect!

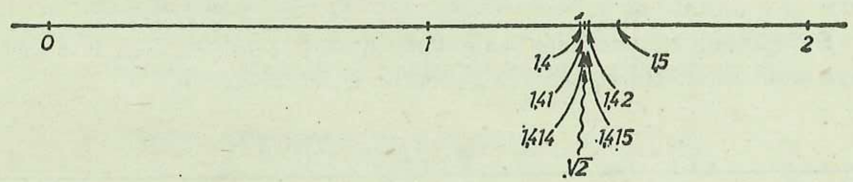


Fig. I.2

De aceea, este necesar să extindem iarăşi ideea de *număr*. Pentru aceasta, să ne reamintim că numerele raţionale se pot scrie sub formă zecimală. Calculul pe care l-am făcut mai sus ne conduce la fracţia zecimală 1,4142..., care are o infinitate de cifre în dreapta virgulei, cifre care *nu se pot repeta* în mod periodic!

Vom considera că aceste fracţii zecimale, care au o infinitate de cifre în dreapta virgulei, cifre care nu se repetă periodic, reprezintă fiecare cîte un **număr iraţional.**

Să ne imaginăm cîteva dintre aceste numere. De exemplu, numărul 0,101001000100001... (în dreapta virgulei, numărul de cifre 0 dintre două cifre 1 consecutive crește). Dacă această fracție zecimală ar avea o perioadă, formată din k cifre, atunci cel puțin una dintre cifrele acestei perioade ar trebui să fie 1; dar, dacă ne depărtăm suficient de virgulă, întîlnim mai mult de k cifre 0 între două cifre 1 consecutive. Deci numărul reprezentat de această fracție este irațional.

Numărul $\pi = 3{,}1415...$, care reprezintă raportul dintre lungime și diametru în orice cerc, este un număr irațional*. De asemenea, dacă extragem rădăcina pătrată din 3, obținem un nou număr irațional.

EXERCIȚII

1) Aflați primele cinci cifre ale fracției zecimale ce reprezintă numărul irațional:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{\frac{3}{4}}$; c) $\sqrt{1{,}1}$; d) $-\sqrt{3}$.

2) Aproximați prin lipsă, cu eroare de o sutime, numerele $\sqrt{1+x}$, unde $x \in \{5, 6, 7\}$.

5. NUMERE REALE

Reunind mulțimea **Q** a numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale, obținem **mulțimea numerelor reale.** Această mulțime va fi notată cu **R**, iar elementele ei vor fi numite **numere reale.**

Fiecărui număr real îi putem asocia un punct pe o dreaptă dată. Reamintim că **axa numerelor** este o dreaptă pentru care s-a ales o origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură.

De exemplu, numerelor reale 0,32 și $-\sqrt{3} = -1{,}73...$ li se asociază pe axa numerelor din figura I.3 punctele U, respectiv V.

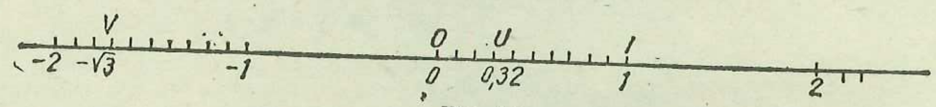


Fig. I.3

Astfel, ne putem imagina numerele reale ca puncte ale axei numerelor. Dar și reciproc, oricărui punct de pe axa numerelor îi putem asocia un număr real! Mulțimea **R** a numerelor reale o putem „identifica" cu mulțimea punctelor de pe axa numerelor.

* Demonstrația faptului că numărul π nu este rațional nu este ușoară; ea a fost dată abia în 1767 de către Lambert, folosind idei ale marelui matematician elvețian Leonhard Euler (1707—1783).

EXERCIȚIU

Reprezentați prin puncte pe axă numerele reale $-0{,}21$; $-1{,}11$; $1{,}67$; $\sqrt{5} = 2{,}23...$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $-\sqrt{6} = -2{,}44...$; $\sqrt{2} = -1{,}41...$ și $\frac{7}{5} = 1{,}4$.

6. OPERAȚII CU NUMERE REALE

COMPARAREA NUMERELOR REALE

Să privim axa numerelor din figura I.4. Punctele acestei axe se corespund (prin **coordonatele** lor) cu numerele reale.

Fig. I.4


Fie u și v două numere reale, ce corespund punctelor U, respectiv V, de pe axa numerelor. Vom spune că u **este mai mic decît** v și vom nota $u < v$, dacă pe axă punctul U este „la stînga" punctului V (vezi figura I.4).

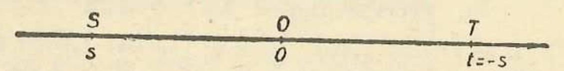
În acest mod, oricare două numere reale pot fi comparate între ele; mai mult, putem spune că, date două numere reale u și v, avem sau $u < v$, sau $u = v$, sau $u > v$. Dacă u, v sînt raționale (respectiv întregi), atunci faptul că u este mai mic decît v (ca numere raționale, respectiv întregi) înseamnă tocmai $u < v$ (ca numere reale).

Numerele reale ce corespund punctelor axei aflate „la dreapta" lui O vor fi numite **pozitive**; celelalte, diferite de 0, vor fi numite **negative**. Ele corespund punctelor axei ce se află „la stînga" lui O. Numerele reale pozitive sau 0 se corespund cu punctele semidreptei de origine O, marcată cu săgeată. Faptul că numărul real u este pozitiv înseamnă că $u > 0$.

Să observăm că dacă s, t, u sînt numere reale astfel încît $s < t$ și $t < u$, atunci $s < u$. Aceasta înseamnă că relația de ordine $<$ este **tranzitivă**.

OPUS. INTERVALE. VALOARE ABSOLUTĂ

Fie S un punct pe axa numerelor (vezi figura I.5); fie T simetricul său față de punctul O. Este clar că simetricul lui T față de O este tocmai S.

Fig. I.5


Această simetrie geometrică ne permite să definim *opusul* unui număr real. Fie s un număr real, ce corespunde punctului S de pe axa numerelor. **Opusul** său, notat $-s$, este numărul real ce corespunde simetricului T al lui S față de O.

Să observăm că:

a) opusul unui număr real pozitiv este un număr real negativ;

b) opusul unui număr real negativ este un număr real pozitiv;

c) $-0 = 0$;

d) $-(-s) = s$, pentru orice număr real s;

e) dacă $s < t$, atunci $-s > -t$ (convingeți-vă pe un desen!).

EXERCIȚII

1) Care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care false?

a) $\sqrt{2} < 1{,}401$; b) $\sqrt{3} > 1{,}72$; c) $-\sqrt{2} < -1{,}41$; d) $-\sqrt{3} < 1$; e) $-\sqrt{3} < -\pi$.

2) Desenați pe axa numerelor punctele A, B, C, D, E, F, ce corespund numerelor reale a, b, c, d, e, f, astfel încît:

a) $a < b$; b) $c < a$; c) d este mai mic decît b, dar mai mare decît a și c; d) $e < a$ și $e < c$; e) $f > b$; f) a, c și e sînt negative, iar b, d și f sînt pozitive; g) $d > 1$.

Vom nota (ca de obicei) $u \leqslant v$ dacă $u < v$ sau $u = v$.

Fie u și v numere reale astfel încît $u \leqslant v$. Vom nota $[u; v]$ și vom numi **interval închis de extremități** u, v mulțimea formată din numerele reale x astfel încît $u \leqslant x \leqslant v$. Dacă U, V sînt punctele de pe axă ce au coordonatele u, respectiv v, atunci intervalul $[u; v]$ corespunde segmentului UV (vezi figura I.6).

Fig. I.6

Putem scrie astfel:

$$[u; v] = \{x \in \mathrm{R} \mid u \leqslant x \text{ și } x \leqslant v\}.$$

Elementele $x \in [u; v]$ diferite de u și de v vor fi numite **elemente interioare** intervalului $[u; v]$.

Dacă $v < u$, atunci $[u; v] = \emptyset$, căci nici un număr real x nu poate fi simultan mai mare sau egal cu u și mai mic sau egal cu v!

Dacă $u = v$, atunci intervalul $[u; v]$ nu are elemente interioare; mai exact, $[u; u] = \{u\}$.

Să privim figura I.1; vedem că: $\sqrt{2} \in [1; 2]$; $\sqrt{2} \in [1{,}4; 1{,}5]$; $\sqrt{2} \in [1{,}41; 1{,}42]$; $\sqrt{2} \in [1{,}414; 1{,}415]$ și așa mai departe, și că:

$$[1; 2] \supset [1{,}4; 1{,}5] \supset [1{,}41; 1{,}42] \supset [1{,}414; 1{,}415] \supset \ldots$$

De asemenea, $\pi \in [3; 4]$; $\pi \in [3{,}1; 3{,}2]$; $\pi \in [3{,}14; 3{,}15]$; $\pi \in [3{,}141; 3{,}142]$ și așa mai departe, și $[3; 4] \supset [3{,}1; 3{,}2] \supset [3{,}14; 3{,}15] \supset [3{,}141; 3{,}142] \supset \ldots$

Fie s un număr real, diferit de 0, și fie $-s$ opusul său. Dintre numerele s și $-s$, unul este pozitiv, iar celălalt negativ. Cel pozitiv va fi notat $|s|$ și va fi numit **valoarea absolută** a lui s (sau **modulul** lui s). Definim $|0| = 0$.

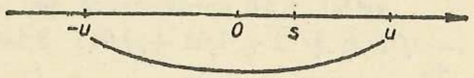
Altfel spus,

$$|s| = \begin{cases} s & \text{dacă } s \geqslant 0; \\ -s & \text{dacă } s < 0. \end{cases}$$

Să observăm că pentru orice număr real s avem $s \leqslant |s|$ și că $|s| = s$ dacă și numai dacă $s \geqslant 0$(!).

Fie u un număr real pozitiv. Ce înseamnă $|s| < u$? Să arătăm că această inegalitate este echivalentă cu următoarele două inegalități: $-u < s$ și $s < u$; sau, pe scurt, cu $-u < s < u$ (vezi figura I.7).

Fig. I.7



Dacă $|s| < u$, deoarece $s \leqslant |s|$, rezultă imediat că $s < u$. Deoarece și $-s < |-s| = |s|$, rezultă $-s < u$, deci $s > -u$, adică $-u < s$. Reciproc, din $-u < s < u$ rezultă $s < u$ și $-s < u$; în orice caz, $|s| < u$.

EXERCIȚII

1) Sînt adevărate următoarele propoziții:

a) $|-2| \in [1; 4{,}3]$; b) $|-\pi| \in [-1; 4]$; c) $|\sqrt{2}| \in [1{,}1; \sqrt{3}]$; d) $\sqrt{3} \in [\sqrt{2}; \pi]$; e) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$?

2) Care este mai mare: $3\sqrt{3}$ sau 12? $2\sqrt{3}$ sau $3\sqrt{2}$?

3) Aranjați în ordine crescătoare numerele reale: $\sqrt{5}$, $|-\pi|$, $|\sqrt{3}|$, $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $|-\sqrt{2}|$. (Folosiți eventual tabelul de la sfîrșitul manualului.)

Fie s un număr real, iar a un număr rațional.

Vom spune că a **aproximează pe s cu eroare de o zecime** dacă $a - \frac{1}{10} < s < a + \frac{1}{10}$; altfel spus, dacă s este element interior intervalului $\left[a - \frac{1}{10};\ a + \frac{1}{10}\right]$, ale cărui extremități sînt numere raționale!

Vom spune că a **aproximează pe s cu eroare de o sutime** dacă $a - \frac{1}{100} < s < a + \frac{1}{100}$. Se mai scrie că a aproximează pe s cu eroare de 0,01, sau $\frac{1}{100}$.

2*

În general, vom spune că a aproximează pe s cu eroare de $\frac{1}{10^n}$ dacă $a - \frac{1}{10^n} < s < a + \frac{1}{10^n}$; altfel spus, dacă s este interior intervalului cu extremităţi numere raţionale

$$\left[a - \frac{1}{10^n};\ a + \frac{1}{10^n}\right] \text{ (vezi fig. I.8)}$$

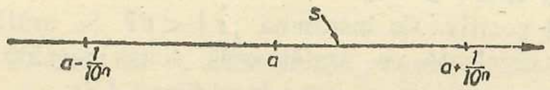


Fig. I.8

Astfel, 1,41 aproximează pe $\sqrt{2}$ cu eroare de o sutime, căci $1,41 - 0,01 < \sqrt{2} < 1,41 + 0,01$; 3,1415 aproximează pe π cu eroare de $\frac{1}{10^4} = 0,0001$.

De asemenea, 1,405 aproximează pe $\sqrt{2}$ cu eroare de 0,01, deoarece $1,405 - 0,01 = 1,395 < 1,4142... < 1,405 + 0,01 = 1,415$.

Cunoaşterea unui număr real înseamnă cunoaşterea tuturor cifrelor sale, în scrierea sa zecimală. Dar, nu putem scrie o *infinitate* de cifre! Ne putem doar imagina că putem afla toate cifrele unui număr real iraţional! De aceea, în practică, numerele reale întîlnite sînt înlocuite cu numere raţionale ce le aproximează, mai precis sau mai puţin precis (adică cu eroare mai mică sau mai mare), după nevoile concrete ale problemei practice. De exemplu, în viaţa de toate zilele, înlocuirea lui π cu 3,14 sau cu 3,1415 este suficientă; în calculele astronomice este nevoie însă de o precizie mult mai mare (!)

EXERCIŢII

1) Daţi exemple de numere raţionale ce aproximează pe π cu eroare de o miime.

2) Aproximaţi cu eroare de o sutime pe $\sqrt{3}$.

3) *Dovediţi că dacă $s > a$ şi a aproximează pe s cu eroare de $\frac{1}{10^n}$, atunci şi $a + \frac{1}{10^n}$ aproximează pe s cu eroare de $\frac{1}{10^n}$.

Ce se poate spune dacă $s < a$?

ADUNAREA ŞI SCĂDEREA

În clasa a VI-a am învăţat să adunăm două numere raţionale folosind reprezentarea lor prin puncte pe axa numerelor. De exemplu, să adunăm numerele $-\frac{2}{3}$ şi $\frac{7}{6}$. Pe axa numerelor din figura I.9 aceste numere sînt repre-

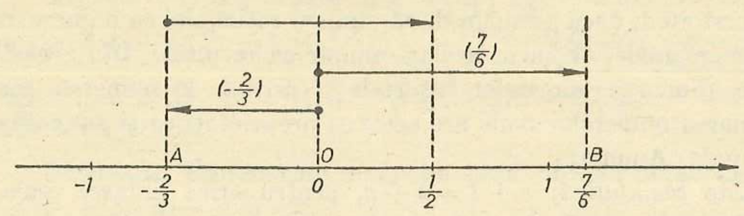


Fig. I.9

zentate prin punctele A şi B; dar le putem reprezenta şi prin săgeţi cu originea în O şi vîrful în A, respectiv B. Construim a treia săgeată, avînd aceeaşi lungime şi sens cu a doua (OB), dar originea în vîrful primei săgeţi. Vîrful săgeţii a treia ne indică faptul că suma numerelor $-\frac{2}{3}$ şi $\frac{7}{6}$ este numărul raţional $\frac{1}{2}$.

Şi numerele reale pot fi reprezentate prin puncte pe axa numerelor. Procedeul de mai sus ne permite astfel să adunăm două numere reale.

Fie s şi t două numere reale, cărora le corespund pe axa numerelor punctele S, respectiv T. Să construim prima săgeată, avînd originea în O şi vîrful în S, apoi a doua săgeată, avînd originea în O şi vîrful în T. Construim apoi a treia săgeată, avînd originea în S şi avînd aceeaşi lungime şi sens cu a doua (vezi figura I.10). Vîrful acestei săgeţi determină pe axa numerelor punctul U. Numărul real ce-i corespunde va fi numit **suma** numerelor s şi t şi va fi notat $s + t$ (vezi şi figura I.11 pentru un alt exemplu).

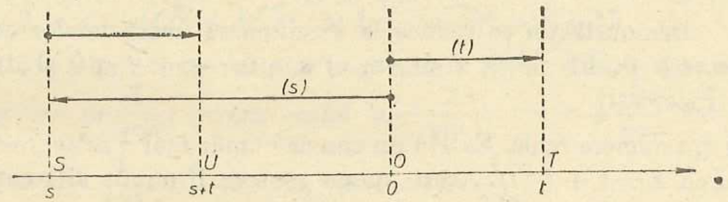


Fig. I.10

Astfel, $1,35 + 2,65 = 4,00$; la fel, $(-1,85) + 3,35 = 1,50$ şi $\sqrt{2} + \pi = 1,414... + 3,141... = 4,555...$

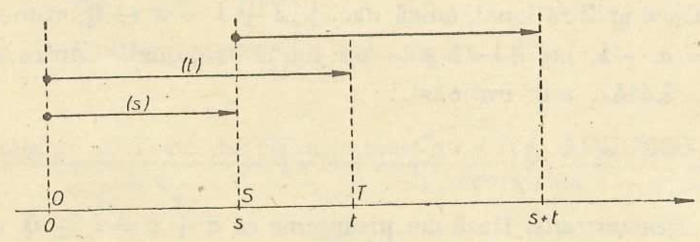


Fig. I.11

În acest mod, dacă adunăm două numere raționale, ca numere raționale sau ca numere reale, obținem același număr ca rezultat. Din această cauză spunem că adunarea numerelor raționale *se extinde* la numerele reale.

Adunarea numerelor reale are aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor raționale. Anume:

1) Este *comutativă*: $s + t = t + s$, pentru orice numere reale s și t.

2) Este *asociativă*: $(s + t) + u = s + (t + u)$, pentru orice numere reale s, t și u.

3) Numărul 0 este element neutru pentru adunare; adică $s + 0 = s = 0 + s$, pentru orice număr real s.

4) Avem $s + (-s) = 0 = (-s) + s$, pentru orice număr real s.

5) Dacă $s < t$, atunci $s + u < t + u$, pentru orice numere reale s, t și u.

TEOREMĂ. Fie s un număr real. Dacă t este un număr astfel încît $s + t = 0 = t + s$, atunci t este egal cu opusul lui s. (Altfel spus, singurul număr t cu proprietatea că $s + t = 0 = t + s$ este opusul lui s.)

Demonstrație. Opusul lui s este notat $-s$. Să scriem $-s = 0 + (-s)$; dar $0 = t + s$, de unde $-s = (t + s) + (-s)$. Folosind asociativitatea adunării, obținem $-s = t + (s + (-s))$, de unde $-s = t + 0$, adică $t = -s$. Teorema este demonstrată.

La fel putem dovedi că $-(s + t) = (-s) + (-t)$.

TEOREMA. Fie s, t două numere reale. Atunci $|s + t| \leqslant |s| + |t|$.

Demonstrația se reduce la examinarea următoarelor cazuri:

a) $s, t \geqslant 0$; b) $s \geqslant 0$, $t < -s$; c) $s \geqslant 0$, $-s < t < 0$ și d) $s, t < 0$. Încercați!

Fie s, t numere reale. Există un singur număr real x astfel încît $s = t + x$, anume $x = s + (-t)$. Acest număr real va fi numit **diferența** dintre s și t și va fi notat $s - t$.

Definim **scăderea** numerelor reale astfel:

$$s - t = s + (-t);$$

observăm că scăderea poate fi înlocuită de către adunare.

Ce fel de număr este $\sqrt{2} + 1 = 1{,}414... + 1 = 2{,}414...$? Rațional sau irațional? Dacă ar fi rațional, adică dacă $\sqrt{2} + 1 = a \in \mathbf{Q}$, atunci am putea scrie $\sqrt{2} = a - 1$, iar $a - 1$ este un număr rațional. Contradicție. Deci $\sqrt{2} + 1 = 2{,}414...$ este irational.

TEOREMĂ. Fie s un număr irațional, iar a un număr rațional. Atunci $a + s$ este irațional.

Demonstrație. Daca am presupune că $a + s = b \in \mathbf{Q}$, atunci $s = b - a \in \mathbf{Q}$, contradicție. Deci $a + s$ nu este rațional.

Această teoremă scoate în evidență noi exemple de numere iraționale. Astfel, $\sqrt{2} - 1 = 1{,}414... - 1 = 0{,}414...$; $\frac{3}{5} - \pi = 0{,}6 - 3{,}141... = 2{,}541...$; $-1{,}1 - \sqrt{3} = -1{,}1 - 1{,}732... = -2{,}832...$ sînt numere iraționale.

Observație. Teorema nu ne spune nimic despre numerele de forma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\pi - \sqrt{2}$ etc.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Aproximați ca numere raționale, cu eroare de o sutime, numărul real $\pi + \sqrt{3}$.

Rezolvare. Vom aproxima mai întîi cu eroare de o miime (!) numerele π și $\sqrt{3}$. Deoarece $\pi = 3{,}1415...$, putem să-l aproximăm cu $p = 3{,}141$ (cu eroare de o miime). La fel, avem $\sqrt{3} = 1{,}7320...$, deci îl putem aproxima cu $r = 1{,}732$ (cu eroare de o miime). Numărul real $\pi + \sqrt{3}$ va fi aproximat cu eroare de *o sutime* de $p + r = 4{,}873$.

EXERCIȚII

1) Scrieți numerele reale $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{5} - 1{,}54$ și $3{,}86 - \pi$ în ordine crescătoare.

2) Aproximați prin numere raționale, cu eroare de 0,01 numerele:

a) $\sqrt{3} + 0{,}2$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; c) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

3) Care dintre următoarele propoziții este adevărată?

a) $\sqrt{2 + 3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{5^2 + 12^2} = 5 + 12$.

Fie s un număr real, iar a un număr rațional ce aproximează pe s cu eroare de $\frac{1}{10^n}$; avem astfel $a - \frac{1}{10^n} < s < a + \frac{1}{10^n}$, sau $-\frac{1}{10^n} < s - a < \frac{1}{10^n}$. Altfel scris, $|s - a| < \frac{1}{10^n}$.

Fie b o aproximație a lui t, cu eroare de $\frac{1}{10^n}$. Deci $|t - b| < \frac{1}{10^n}$. Folosind una dintre teoremele demonstrate mai înainte, obținem $|(s + t) - (a + b)| = |(s - a) + (t - b)| \leqslant |s - a| + |t - b| < \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}}$. Cu alte cuvinte $a + b$ este o aproximație a lui $s + t$, cu eroare de $\frac{1}{10^{n-1}}$ (vezi figura I.12).

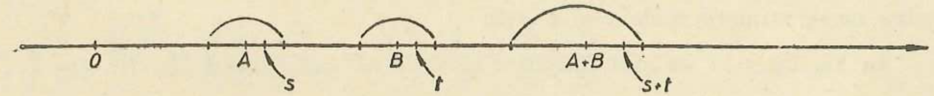


Fig. I.12

De exemplu, 1,414 este aproximație a lui $\sqrt{2}$, iar 3,141 a lui π, ambele cu eroare de o miime. Putem spune că $1{,}414 + 3{,}141 = 4{,}555$ este aproximație a lui $\sqrt{2} + \pi$, dar cu eroare de o sutime.

EXERCIȚII

1) Aproximați cu numere raționale, cu eroare de 0,01, numerele reale: a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{5} + \pi$; c) $\pi + \sqrt{6}$.

2) Dovediți că $|s - t| \leqslant |s| + |t|$, pentru orice numere reale s și t; aproximați apoi prin numere raționale, cu eroare de $\frac{1}{100}$, numărul $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

ÎNMULȚIREA ȘI ÎMPĂRȚIREA

Înmulțirea numerelor raționale se extinde la numerele reale. Astfel, $1{,}1 \cdot 0{,}65 = 0{,}715$; la fel, $(-2{,}4) \cdot (2{,}5) = -6{,}00$ și $\sqrt{2} \cdot 2 = 1{,}414... \cdot 2 = 2{,}828...$. Verificați că $\sqrt{2} \cdot \pi = 1{,}414... \cdot 3{,}141... = 4{,}441...$.

Înmulțirea numerelor reale are proprietățile:

1) este comutativă;

2) este asociativă;

3) numărul 1 este element neutru pentru înmulțire: $s \cdot 1 = s = 1 \cdot s$ pentru orice număr real s;

4) este distributivă față de adunare, adică $s \cdot (t + u) = s \cdot t + s \cdot u$ pentru orice numere reale s, t și u;

5) orice număr real $s \neq 0$ admite un invers $\frac{1}{s}$ (notat și s^{-1}); acesta este singurul număr real cu proprietățile $s \cdot \frac{1}{s} = 1 = \frac{1}{s} \cdot s$ (altfel scris, $s \cdot s^{-1} = 1 = s^{-1} \cdot s$);

6) dacă $s < t$ și $u > 0$, atunci $s \cdot u < t \cdot u$, pentru orice numere reale s, t și u. Dacă $s < t$ și $u < 0$, atunci $s \cdot u > t \cdot u$.

Împărțirea numerelor reale se definește cu ajutorul înmulțirii:

$$s : t = s \cdot \frac{1}{t}$$

pentru orice numere reale s și $t \neq 0$.

În loc de $s : t$ se mai folosește și scrierea sub formă de fracție: $\frac{s}{t}$. Dar, în general, această fracție **nu mai reprezintă** un număr rațional (!)

Două numere reale de forma $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$, cu a și b numere raționale pozitive, se înmulțesc astfel:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

și se împart astfel: $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$.

Deoarece notăm $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ultima regulă se mai poate scrie și:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

De exemplu, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

și $\sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{2 : 3}$

ceea ce se mai scrie $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Să observăm că a calcula (aproximativ) produsul $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ este mult mai dificil decît a calcula numărul $\sqrt{2 \cdot 3}$, cu aceeași eroare. De exemplu, folosind tabelul de la sfîrșitul manualului avem $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 1{,}4142... \cdot 1{,}7230...$, iar $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6} = 2{,}4494...$ se obține direct din tabel, fără a efectua produsul de numere zecimale!

Să ne amintim că $\sqrt{a^2} = |a|$ pentru orice număr rațional a. De aceea, dacă $a \geqslant 0$, atunci $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = |a| = a$, sau $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ (pentru $a \geqslant 0$!).

De exemplu, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$, $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$.

De asemenea, $\sqrt{a} : \sqrt{a} = 1$ (pentru $a > 0$).

Să calculăm de exemplu $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$; obținem ca rezultat $\sqrt{2 \cdot 6} = \sqrt{12}$. Însă $12 = 2^2 \cdot 3$; deci $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Așadar, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$.

Alt exemplu: $\sqrt{18} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

Observăm că dacă unul dintre factorii de sub radical apare la pătrat, el poate fi scos de sub radical.

De asemenea, $\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{18}} = \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 3^2}} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Deci putem proceda în același mod și cu factorii numitorului.

OBSERVAȚIE. Nu este însă adevărat că $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$; de exemplu, luînd $a = -2$ și $b = 3$, avem $a^2 \cdot b = 12$, iar $\sqrt{12} \neq -2\sqrt{3}$. Stabiliți formula corectă de „scoatere de sub radical".

În loc de „rădăcina pătrată a lui a" se obișnuiește să se spună, mai scurt, „radical din a".

De obicei numărul real $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nu poate fi scris într-o *formă mai simplă* (nu poate fi restrîns).

EXERCIȚII

1) Scrieți mai simplu; scoțînd factori de sub radical:

a) $\sqrt{36}$; b) $\sqrt{20}$; c) $\sqrt{24}$; d) $\sqrt{32}$; e) $\sqrt{18}$; f) $\sqrt{72}$; g) $\sqrt{300}$; h) $\sqrt{50}$; i) $\sqrt{125}$; j) $\sqrt{500}$.

2) Scrieți mai simplu:

a) $3\sqrt{8}$; b) $3\sqrt{20}$; c) $-\sqrt{24}$; d) $-\sqrt{300}$; e) $-5\sqrt{20}$; f) $\sqrt{\frac{32}{81}}$; g) $\sqrt{\frac{50}{9}}$; h) $\sqrt{\frac{32}{25}}$; i) $\sqrt{\frac{27}{49}}$.

3) Ce proprietate a înmulțirii numerelor reale ne permite să scriem: $8 \cdot (4 \cdot \sqrt{11}) = 32 \cdot \sqrt{11}$?

4) Restrîngeți:

a) $6\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$; b) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$; c) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$; d) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$; e) $8\sqrt{7} - 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$.

5) Restrîngeți:

a) $5\sqrt{11} + 8 + 2\sqrt{11}$; b) $\sqrt{5} - 5 + 3\sqrt{5} + 1$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - 3 + \frac{5}{4}\sqrt{2} + \frac{5}{2}$; d) $1{,}1\sqrt{3} - 0{,}6\sqrt{3} + 0{,}5\sqrt{3}$.

6) Scrieți mai simplu:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{2}$; b) $\sqrt{27} + 5\sqrt{3}$; c) $\sqrt{18} + 2\sqrt{50}$; d) $\sqrt{27} - 2\sqrt{12}$; e) $\sqrt{50} - \sqrt{45} - \sqrt{32} + \sqrt{320}$.

7) Care dintre propozițiile ce urmează sînt adevărate?

a) $\sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4}$; b) $\sqrt{3 + 4} = \sqrt{3} + \sqrt{4}$; c) $\sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$; d) $\sqrt{2 : 5} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; e) $\sqrt{0 : 5} = 0$.

8) Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{\frac{4}{3}}$; b) $\sqrt{\frac{8}{7}}$; c) $\sqrt{\frac{125}{81}}$; d) $\sqrt{\frac{49}{27}}$; e) $\sqrt{\frac{7^2 \cdot 11 \cdot 13}{2^4 \cdot 5^2}}$.

9) Ionel a scris pe tablă „$\sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$". Este corect?

10) Arătați că numărul $\sqrt{2} : 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ este inversul lui $\sqrt{2}$.

11) Care este mai mare:

a) $3\sqrt{3}$ sau $\sqrt{12}$; b) $5\sqrt{32}$ sau $12\sqrt{8}$; c) $2\sqrt{18}$ sau $3\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{\frac{8}{9}}$ sau $\frac{1}{3}\sqrt{50}$?

12) Calculați:

a) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{12} - \sqrt{18})$; b) $(\sqrt{3} + 2) \cdot 3\sqrt{3}$; c) $(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{7}$; d) $2\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + 3)$; e) $\sqrt{7} \cdot (3\sqrt{7} - 6)$.

13) Calculați:

a) $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$; b) $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})$; c) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})$; d) $(2\sqrt{5} - \sqrt{7}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{7})$; e) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$; f) $(4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 1) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

PUTERI ȘI RADICALI

Fie s un număr real, iar n un număr natural. Vom nota cu s^n și vom citi „s ridicat la puterea a n-a" produsul

$$\underbrace{s \cdot s \cdot \ldots \cdot s}_{n \text{ factori}} \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^*$$

$$s^0 = 1 \qquad \text{pentru } s \neq 0$$

OBSERVAȚIE. Pentru $n = 2$, obținem ridicarea la pătrat.

Verificați ca exercițiu că dacă s, t sînt numere reale nenule, iar m, n sînt numere naturale, atunci:

1) $(s \cdot t)^n = s^n \cdot t^n$;

2) $s^{m+n} = s^m \cdot s^n$;

3) $s^{m \cdot n} = (s^m)^n$.

De asemenea, verificați că pătratul oricărui număr real $\neq 0$ este un număr real *pozitiv*.

Fie s un număr real pozitiv. Dacă-l scriem zecimal, îi putem aplica algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate. Putem găsi astfel un număr real *pozitiv* t astfel încît $t^2 = s$. Acesta va fi numit rădăcina pătrată a lui s, sau **radicalul** din s, și va fi notat $\sqrt{s}$.

EXERCIȚIU REZOLVAT. Să calculăm $\sqrt{\sqrt{2}}$ cu eroare de 0,01. Mai întîi vom aproxima pe $\sqrt{2}$ cu eroare de 0,0001, de exemplu prin 1,4142. Numărul $\sqrt{1{,}4142}$ este irațional; el se scrie 1,28...; îl putem aproxima deci, cu eroare de 0,01, prin 1,28. Acest număr rațional (1,28) este aproximație a lui $\sqrt{\sqrt{2}}$, cu eroare de 0,01.

EXERCIȚII

1) Dovediți că dacă $\sqrt{s}$ este rațional, atunci s este rațional.

2) Luînd $\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$, aproximați pe $\sqrt{\sqrt{3}}$ cu eroare de o sutime.

ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR CU NUMERE REALE

În efectuarea calculelor cu numere reale, în absența parantezelor, ordinea efectuării operațiilor este cea obișnuită, învățată în clasele a V-a și a VI-a: mai întîi ridicările la putere și extragerile de rădăcini, de la stînga spre dreapta; apoi înmulțirile și împărțirile, de la stînga spre dreapta; în sfîrșit, adunările și scăderile, de la stînga spre dreapta.

În prezența parantezelor se ține seamă de modul de lucru cu parantezele, învățat în clasele anterioare.

Pînă acum am scris în mai multe rînduri 1,4142...; 3,1415...; și altele, pentru a nota numere iraționale. Scriind cele trei puncte în locul cifrelor care lipsesc, *ne-am imaginat că le cunoaștem pe toate*; dar nu le-am scris efectiv din lipsa spațiului. Această scriere (cu...) este confuză; de aceea, preferăm să folosim notațiile $\sqrt{2}$, π.

CALCULE CU RADICALI. RAȚIONALIZARE

Să încercăm să scriem zecimal numărul $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Efectuăm împărțirea $\sqrt{2} : 3 = 1{,}4142\ldots : 3$; ca rezultat obținem 0,4714...

Să scriem zecimal numărul $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Este foarte dificil să efectuăm împărțirea $3 : \sqrt{2} = 3 : 1{,}4142\ldots$, deoarece împărțitorul are o infinitate de cifre în dreapta virgulei. De aceea preferăm să eliminăm radicalul de la numitor, prin amplificarea fracției cu $\sqrt{2}$. Vom scrie astfel

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Se spune că în acest mod am **raționalizat** numitorul. Scrierea zecimală a numărului $\frac{3}{2}\sqrt{2} = 1{,}5\cdot 1{,}4142\ldots$ se poate obține acum prin înmulțire.

Să raționalizăm numitorul fracției $\frac{9}{2\sqrt{6}}$; amplificăm cu $\sqrt{6}$.

$$\frac{9}{2\sqrt{6}} = \frac{9\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{2\cdot 6} = \frac{3\sqrt{6}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{6}.$$

Să raționalizăm numitorul fracției $\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$; amplificăm cu $\sqrt{5}$.

$$\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\cdot\sqrt{30}}{2\cdot 5} = \frac{3\sqrt{30}}{10} = \frac{3}{10}\sqrt{30}.$$

În general, din $\frac{1}{\sqrt{a}}$, prin raționalizarea numitorului se obține scrierea $\frac{\sqrt{a}}{a}$, sau $\frac{1}{a}\sqrt{a}$ (a fiind număr rațional pozitiv).

OBSERVAȚIE. Raționalizarea numitorului se justifică doar dacă dispunem de tabela de rădăcini pătrate. Dacă nu dispunem de o astfel de tabelă, calculul efectiv al cifrelor numărului $\frac{3}{\sqrt{2}}$, de exemplu, trebuie făcut astfel: $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3^2}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{4{,}5}$; deci trebuie aplicată metoda de extragere a rădăcinii pătrate numărului 4,5.

Cum scriem mai simplu produsul $(\sqrt{3}-5)\cdot(2+\sqrt{2})$? Ținînd seamă de distributivitatea înmulțirii față de adunare, avem:

$$(\sqrt{3}-5)\cdot(2+\sqrt{2}) = \sqrt{3}\cdot 2 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} - 5\cdot 2 - 5\cdot\sqrt{2} =$$
$$= -10 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

Produsul $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})$ se scrie și astfel:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}) = \sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{5}\cdot 3\sqrt{3} +$$
$$+ \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} = 10 - 3\sqrt{15} + 2\sqrt{15} - 9 = 1 - \sqrt{15}.$$

OBSERVAȚIE. Este evident că $1-\sqrt{15}$ este mai ușor de scris zecimal $-2{,}8729\ldots$ (folosind tabelul de la sfîrșitul manualului) decît produsul $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}) = 3{,}968\ldots\cdot(-0{,}724\ldots)$. Dar, folosind tabelul chiar și suma $-10-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6} = -11{,}158\ldots$ se scrie zecimal mai ușor decît produsul $(\sqrt{3}-5)\cdot(2+\sqrt{2}) = -3{,}267\ldots\cdot 3{,}414\ldots$.

Să scriem mai simplu produsul $(3+\sqrt{10})\cdot(3-\sqrt{10})$. Procedăm la fel ca mai sus:

$$(3+\sqrt{10})\cdot(3-\sqrt{10}) = 3\cdot 3 - \underline{3\cdot\sqrt{10}} + \underline{3\cdot\sqrt{10}} - \sqrt{10}\cdot\sqrt{10} =$$
$$= 9 - 10 = -1.$$

Observăm că obținem ca rezultat un număr rațional.

În general, efectuînd produsul $(a+\sqrt{b})\cdot(a-\sqrt{b})$, obținem ca rezultat numărul rațional $a^2 - b$ (a și b fiind numere raționale).

Să considerăm numărul real $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$; numitorul său este irațional. Vom raționaliza numitorul prin amplificare cu $2+\sqrt{3}$.

Scriem astfel:
$$\frac{5}{2-\sqrt{3}}=\frac{5\cdot(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})}=\frac{5\cdot 2+5\cdot\sqrt{3}}{2^2-3}=$$
$$=\frac{10+5\sqrt{3}}{1}=10+5\sqrt{3}.$$

La fel,
$$\frac{7}{4-\sqrt{5}}=\frac{7\cdot(4+\sqrt{5})}{(4-\sqrt{5})\cdot(4+\sqrt{5})}=\frac{7\cdot 4+7\cdot\sqrt{5}}{4^2-5}=$$
$$=\frac{28+7\sqrt{5}}{11}=\frac{28}{11}+\frac{7}{11}\sqrt{5}.$$

Alt exemplu:
$$\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=\frac{(4\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+3\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}+3\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{8-12\sqrt{6}-\sqrt{6}+9}{2-3\sqrt{6}+3\sqrt{6}-27}=\frac{17-13\sqrt{6}}{-25}=-\frac{17}{25}+\frac{13}{15}\sqrt{6}.$$

EXERCIȚII

1) Raționalizați numitorul:

a) $\frac{8}{\sqrt{15}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{8}}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$; d) $-\frac{4}{\sqrt{12}}$; e) $-\frac{2}{\sqrt{8}}$; f) $-\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

2) Care este mai mare:

a) $3\sqrt{3}$ sau $\frac{8}{\sqrt{3}}$? b) $2\sqrt{18}$ sau $\frac{13}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $\frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ sau $\frac{6}{\sqrt{3}}$?

3) Completați tabelul

a	$2a-\sqrt{2}$	$2(a-\sqrt{2})$	$a-2\sqrt{2}$	$(a-2)\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$				
$\frac{1}{\sqrt{2}}$				
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$			$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	

4) Sînt adevărate următoarele propoziții:

a) $\sqrt{14}=\sqrt{4}+\sqrt{10}$; b) $\sqrt{13}-2>\sqrt{2}+2$; c) $2\sqrt{7}>\sqrt{27}$; d) $7-\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}$?

5) Scrieți într-o formă mai simplă numerele:

a) $\sqrt{800}+\frac{5}{6}\sqrt{200}$; b) $8\sqrt{3}+\sqrt{27}$; c) $\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{25}{32}}$; d) $2\sqrt{8}-4\sqrt{50}$.

6) Calculați:

a) $(6\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+5\sqrt{2})$; b) $(4\sqrt{3}-2\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+2\sqrt{5})$; c) $(4-2\sqrt{10})\cdot(4+2\sqrt{10})$.

7) Raționalizați numitorul:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{2-\sqrt{6}}$; c) $\frac{6\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; d) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-3}$; e) $\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+3}$.

8) Raționalizați numitorul:

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2\sqrt{5}}$; c) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

9) Efectuați calculele:

a) $\sqrt{60}+(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot[\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})]$; c) $(\sqrt{2}+\sqrt{7})\cdot(3-2\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{7})$.

10*) Simplificați scrierea $\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(a+b)^2}$, unde a și b sînt numere raționale, $a>b$.

7. PARTEA ÎNTREAGĂ A UNUI NUMĂR REAL

Am învățat în clasa a VI-a că partea întreagă a lui $-\frac{7}{4}$ este -2, iar a lui $-1{,}5$ este tot -2; $\left[-\frac{7}{4}\right]=-2$, $[-1{,}5]=-2$ (vezi fig. I.13, *a*).

Fie s un număr real. Cel mai mare număr întreg m, care este mai mic sau egal cu s, va fi numit partea întreagă a lui s și va fi notat $[s]$.

Astfel $[s]\leqslant s$, însă $[s]+1>s$. Toate numerele reale mai mari decît 1 și mai mici decît 2 au partea întreagă 1. De exemplu, $[\sqrt{2}]=1$ (citim „partea întreagă a lui $\sqrt{2}$ este 1“) și $[\sqrt{3}]=1$. Dacă m este un număr întreg, atunci toate numerele reale mai mari decît m și mai mici decît $m+1$ au partea întreagă m.

De exemplu, $[-\sqrt{2}]=-2$ (vezi figura 13, *a*); $[\pi]=3$; $[-\pi]=-4$; $\left[\frac{3}{4}+\sqrt{2}\right]=2$, căci $\frac{3}{4}+\sqrt{2}=2{,}1642...$

Întrucît $[m]=m$ pentru orice număr întreg m, să observăm că $[[s]]=[s]$ pentru orice număr real s.

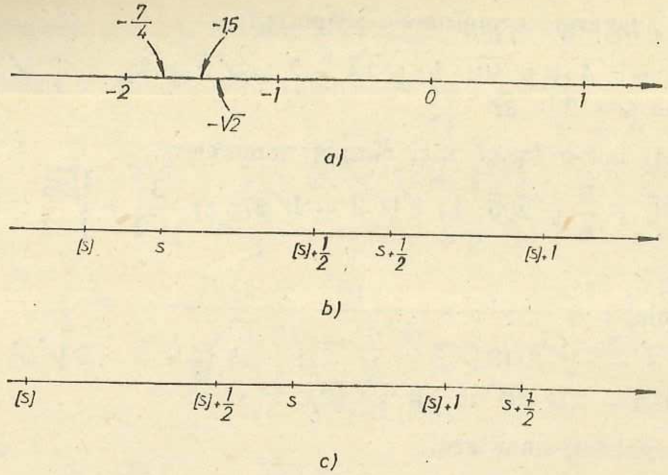


Fig. I.13

EXERCIȚIU REZOLVAT. Pentru orice număr real s, avem $[s] + \left[s + \frac{1}{2}\right] = [2s]$.

Rezolvare. Avem $[s] \leqslant s < [s] + 1$. Distingem două cazuri: (vezi fig. I.13, *b* și *c*).

Cazul 1: $s < [s] + \frac{1}{2}$. În acest caz $s + \frac{1}{2} < [s] + 1$; deoarece $[s] \leqslant s + \frac{1}{2} < [s+1]$, rezultă $\left[s + \frac{1}{2}\right] = [s]$. Pe de altă parte, avem $2[s] \leqslant 2s < 2[s] + 1$, de unde $[2s] = 2[s]$. Egalitatea se verifică.

Cazul 2: $s \geqslant [s] + \frac{1}{2}$. Rezultă $2[s] + 1 \leqslant 2s < 2[s] + 2$, deci $[2s] = 2[s] + 1$. Pe de altă parte, $[s] + 1 \leqslant s + \frac{1}{2} < [s] + \frac{3}{2}$, de unde $\left[s + \frac{1}{2}\right] = [s] + 1$. Și în acest caz egalitatea se verifică.

EXERCIȚII

1) Verificați că $[\sqrt{3} - \sqrt{2}] = 0$; $[\pi - \sqrt{2} - \sqrt{3}] = -1$; $[2\pi] = 2[\pi]$.

2) Dovediți că $[s + t] \geqslant [s] + [t]$, pentru orice numere reale s și t.

3) Este adevărată propoziția: $[s + t] = [s] + [t]$ pentru orice s, t reale? Dați un contra-exemplu.

4*) Arătați că, pentru orice număr real s, avem:

a) $[s] + \left[s + \frac{1}{3}\right] + \left[s + \frac{2}{3}\right] = [3s]$; b) $\left[\frac{[s]}{2}\right] = \left[\frac{s}{2}\right]$

(Indicație: luați $s = 2t$!)

8. MEDIA ARITMETICĂ ȘI MEDIA GEOMETRICĂ

Fie s și t două numere reale. **Media** lor **aritmetică** este numărul real ce se obține împărțind la 2 suma lor:

$$m_a = \frac{s + t}{2}.$$

În general, fie $s_1, s_2, \ldots, s_n$ numere reale ($n \geqslant 2$). Media lor aritmetică se obține împărțind suma lor la numărul lor:

$$m_a = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Media aritmetică a n numere reale este mai mare decît cel mai mic dintre numere și este mai mică decît cel mai mare dintre numere.

Fie s, t două numere reale **pozitive**. **Media** lor **geometrică** este numărul real ce se obține extrăgînd rădăcina pătrată din produsul lor:

$$m_g = \sqrt{s \cdot t}.$$

Fie numerele $2 + \sqrt{2}$ și $2 - \sqrt{2}$. Avem $2 - \sqrt{2} = 0{,}5857\ldots < \sqrt{2} < 2 < 3{,}4142\ldots = 2 + \sqrt{2}$. Media aritmetică a numerelor este $m_a = \frac{(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})}{2} = \frac{4}{2} = 2$; media geometrică a lor este $m_g = \sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$. Putem scrie astfel: $2 - \sqrt{2} < m_g < m_a < 2 + \sqrt{2}$.

La fel ca media aritmetică, și media geometrică a două numere reale (pozitive) este mai mare decît cel mai mic dintre numere și mai mică decît cel mai mare dintre numere.

De asemenea, media geometrică a două numere reale (pozitive) este mai mică sau egală cu media lor aritmetică.

EXERCIȚII

1) Aproximați media aritmetică a următoarelor numere reale, cu eroare de $\frac{1}{100}$: a) 1,116 și 0,245; b) $\sqrt{2}$ și 4,33; c) $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

2) Calculați media geometrică a următoarelor numere:

a) 2 și 8; b) $\frac{1}{2}$ și 4; c) $4 - \sqrt{15}$ și $4 + \sqrt{15}$; d) $\sqrt{2}$ și $2\sqrt{2}$; e) $3 + \sqrt{5}$ și $3 - \sqrt{5}$.

3) Completați tabelul:

s	2,8	4	8,1	
t	3,5		1,6	3
$m_a = \frac{s + t}{2}$		5		
$m_g = \sqrt{s\,t}$				2

Indicație: folosiți tabelul de la sfîrșitul manualului.

MĂSURĂTORI APROXIMATIVE

Măsurați cu o riglă gradată lungimea segmentului AB din figura I.14. Comparați cu rezultatul măsurătorilor făcute de către ceilalți colegi de clasă.

Majoritatea vor spune că au obținut ca rezultat al măsurătorii 5,1 cm; unii vor da ca rezultat 5,2 cm, alții poate vor da ca rezultat 5 cm.

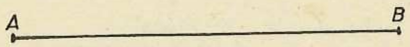


Fig. I.14

Care este răspunsul corect? Credeți că poate cineva să măsoare exact?

Nici unul dintre răspunsuri nu este exact, dar toate trei sînt **corecte** (!)

Puteți spune rezultatul măsurătorii, cu eroare de o sutime de milimetru (sau chiar de o zecime de milimetru)? Evident, fără aparate de măsură de precizie mai mare, **nu** (!)

Să presupunem că patru elevi au măsurat cu rigla lungimea segmentului AB (figura I.14) și ne comunică rezultatele:

5,1 cm; 5,2 cm; 5,1 cm; 5,1 cm.

Răspunsurile nu sînt exacte. În practică, se consideră că **media aritmetică** a mai multor măsurători ne dă un rezultat **mai exact** decît rezultatul **unei singure** măsurători.

În exemplul nostru, **acceptăm** că media aritmetică $\frac{5{,}1+5{,}2+5{,}1+5{,}1}{4} =$ $= 5{,}125$ cm **este** lungimea segmentului AB.

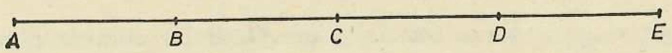


Fig. I.15

Măsurați cu o riglă gradată, cu eroare de 1 mm, lungimile segmentelor AB, BC, CD și DE din figura I.15. Veți obține probabil ca rezultat, pentru fiecare dintre segmente, lungimea de 2,1 cm.

Măsurați acum lungimea segmentului AE; comparați cu $4 \cdot 2{,}1$ cm $=$ $= 8{,}4$ cm. Puteți explica ce se întîmplă?

9. EXERCIȚII CU NUMERE

Acest paragraf conține exerciții ce acoperă aria cunoștințelor de bază despre numere.*

Subliniem încă o dată faptul că operațiile aritmetice se pot face în diverse mulțimi de numere: naturale, întregi, raționale, reale.

OPERAȚII ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1) Efectuați adunările:

a) $5 + 206$; b) $172 + 86$; c) $9001 + 910$; d) $11\,001 + 1\,011$; e) $729 + 2 + 1\,456 + 72\,001$.

2) Aflați numărul care este cu 576 mai mare decît 818.

3) Calculați binar (în baza 2):

a) **101 + 10**; b) **11 001 + 1 011**; c) **1 110 + 1 110**.

4) Efectuați scăderile:

a) $742 - 122$; b) $3\,271 - 3\,070$; c) $142 - 140$; d) $10\,001 - 999$; e) $3\,030 - 971$; f) $720 - 720$; g) $172\,431 - 72\,453$.

5) Într-un vas sînt 725 l ulei; vrem să turnăm uleiul în alte două vase, între care unul are capacitatea de 500 l. Ce capacitate minimă trebuie să aibă cel de-al doilea?

6) Efectuați înmulțirile:

a) $176 \cdot 10$; b) $28 \cdot 24$; c) $175 \cdot 42$; d) $103 \cdot 101$; e) $1\,736 \cdot 25$; f) $732 \cdot 240$; g) $1\,423 \cdot 200$; h) $1\,400 \cdot 1\,200$; i) $7\,524 \cdot 736$; j) $702 \cdot 1\,001$; k) $3 \cdot 8 \cdot 500$; l) $8 \cdot 7 \cdot 300$.

7) Calculați binar:

a) **11 · 10**; b) **1 001 · 110**; c) **1 001 · 1 001**

8) Calculați suma numerelor naturale mai mici decît 1 000.

9) De pe un hectar cultivat cu porumb se strîng 6 400 kg porumb. Cîte tone de porumb se strîng de pe 42 000 ari?

10) Efectuați împărțirile:

a) $420\,000 : 1\,000$; b) $144 : 12$; c) $225 : 15$; d) $1\,024 : 32$; e) $203\,401 : 451$; f) $166\,375 : 3\,025$.

11) Aflați cîtul și restul împărțirii întregi:

a) $88 : 5$; b) $125 : 17$; c) $8\,423 : 231$; d) $1\,024 : 64$.

12) Arătați care dintre propozițiile următoare sînt false și care sînt adevărate:

a) $4^2 = 2^4$; b) $3^3 \cdot 3^4 = 3^7$; c) $8^4 = 2^{12}$; d) $5^{11} : 5^6 \geqslant 5^4$; e) $(2^2)^3 = 2^{2+3}$.

13) Calculați suma tuturor puterilor 2^n cu $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Comparați cu puterea 2^6. Ce observați?

14) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2^3 > 3^2$; b) $3^4 > 4^3$; c) $4^5 > 5^4$.

15) Efectuați:

a) $3^{72} : 3^{70} + 3^0 - 3^1$; b) $5^9 : 5^8 + 5^2$; c) $[1 + 3^5 : 3^4]^6 : 2^{11}$; d) $2^5 \cdot [2^4 + 2^3 \cdot (2^2 + 2)]$.

* O parte din acest paragraf a fost întocmită cu sprijinul tov. prof. I. Ligor.

16) Calculați suma divizorilor numărului:

a) 20; b) 24; c) 28.

17) Descompuneți în factori primi:

a) 124; b) 1 232; c) 1 089; d) 3 249; e) $100 \cdot 27$; f) $111 \cdot 15$; g) $12 \cdot 27 \cdot 50$.

18) Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 200 și 1 000; b) 1 444 și 3 249; c) 24, 36, 72 și 144.

19) Aflați cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 18, 24 și 25; b) 12, 21 și 45; c) 18, 60 și 90.

OPERAȚII CU NUMERE ÎNTREGI

20) Efectuați calculele:

a) $(-5) + (-2)$; b) $(-5) + (+10)$; c) $(+4) + (+10) - (-12) - (+27)$; d) $(+36) - (-12) + (+14) - (+24) + (-48)$; e) $(-12) - (+14) - (-9) - (+16) - (-8) - (+11)$.

21) Efectuați înmulțirile:

a) $(-5) \cdot (+5)$; b) $(-4) \cdot (-6)$; c) $(+24) \cdot (-30)$; d) $(+4) \cdot (-15) \cdot (-12)$; e) $(-3) \cdot (-5) \cdot (-8) \cdot (-3)$.

22) Sînt adevărate propozițiile:

a) $(-2)^8 + (-2)^8 = 2^9$; b) $(-2)^5 = (-5)^2 + 7$; c) $3^3 + (-3)^3 \geqslant 1$; d) $(-1)^{25} + (+1)^{25} = (-1)^{21} + (+1)^{21}$.

23) Calculați:

a) $2 - \{3 - 4[5 - 6(7 - 8 \cdot 9)]\}$; b) $(-1)^3 \cdot (-2)^2 + [2 + (-1)^{17}] \cdot 4$

OPERAȚII CU NUMERE RAȚIONALE

24) Efectuați:

a) $2{,}71 + 3{,}29$; b) $72{,}5 - 0{,}24$; c) $24 - 25{,}2$; d) $246{,}2 - 247$; e) $7{,}25 - 72{,}5$.

25) Efectuați:

a) $24{,}32 \cdot 10$; b) $1{,}003 \cdot 10\,000$; c) $0{,}04 \cdot 10^3$; d) $12{,}5 \cdot 0{,}12$; e) $0{,}2 \cdot 0{,}4$; f) $32{,}5 \cdot 2{,}4$; g) $(0{,}3)^2$; h) $(0{,}1)^3$; i) $1{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}4$; j) $9{,}604 \cdot 0{,}007$; k) $56{,}25 \cdot 0{,}75$.

26) Scrieți sub formă de fracție ireductibilă (simplificați):

a) $\frac{5}{15}$; b) $\frac{120}{360}$; c) $\frac{33}{121}$; d) $\frac{720}{14\,400}$; e) $\frac{154}{132}$.

27. Calculați:

a) $\frac{1}{12} + \frac{3}{12}$; b) $\frac{15}{16} - \frac{3}{4}$; c) $\frac{17}{25} - \frac{13}{40}$; d) $\frac{8}{5} - \frac{71}{50}$; e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$;

f) $\frac{3}{9} \cdot \frac{4}{6}$; g) $25 : \frac{8}{24}$; h) $\frac{1}{4} : 5$; i) $\frac{3}{12} : \frac{7}{9}$; j) $\frac{2^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 5^2}{3^2 \cdot 7}$.

28) Calculați:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$;

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16}$; d) $1 - \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right)\right]\right\}$.

29) De pe o sută de hectare irigate, o cooperativă agricolă de producție a obținut 628 t porumb; de pe celelalte două sute de hectare cultivate cu porumb, neirigate, cooperativa a obținut 785 t porumb. Cît porumb a obținut cooperativa, în medie, la hectar?

OPERAȚII CU NUMERE REALE

30. Aproximați pe $\sqrt{5}$, prin numere raționale, cu eroare de 0,01.

31) Efectuați:

a) $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$; c) $3\sqrt{8} + 4\sqrt{8} - 6\sqrt{8}$; d) $6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - 3\sqrt{2}$.

32) Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{6}$; b) $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$; c) $\sqrt{2} = 1{,}41$; d) $2\sqrt{4} > 6$; e) $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

33) Efectuați înmulțirile:

a) $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$; b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$; c) $(2\sqrt{5} + 1)(2\sqrt{5} - 1)$; d) $(2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)$; e) $(7 + 2\sqrt{6})(9 - 4\sqrt{6})$; f) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$; g) $(3 + \sqrt{45})(3 - \sqrt{5})$.

34) Scoateți factori de sub radical:

a) $\sqrt{150}$; b) $\sqrt{2\,400}$; c) $\sqrt{48}$; d) $\sqrt{80}$; e) $\sqrt{2x^2}$, unde x este un număr real.

35) Introduceți sub radical:

a) $3\sqrt{2}$; b) $9\sqrt{5}$; c) $6\sqrt{0{,}2}$; d) $3\sqrt{0{,}5}$; e) $2\sqrt{\frac{1}{8}}$.

36) Restrîngeți: $\sqrt{2 + \frac{2}{3}} + \sqrt{3 + \frac{3}{8}} + \sqrt{4 + \frac{4}{15}}$.

37) Raționalizați numitorii:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$; d) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; e) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{7}{\sqrt{8}}$.

38) Raționalizați numitorii:

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3} - 2}$; c) $\frac{5}{\sqrt{8} - 3}$; d) $\frac{1}{5 - \sqrt{16}}$; e) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$.

39) Efectuați calculele:

a) $(1-\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{3}-(1+\sqrt{2})^2$; c) $5\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})(2-3\sqrt{2})$; d) $[(\sqrt{8}+\sqrt{6}):\sqrt{2}]\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

40) Aproximați cu eroare de 0,01 numărul real $\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

10. ECUAȚII LINIARE (DE GRADUL I) CU O NECUNOSCUTĂ

Să ne reamintim că **ecuațiile** sînt propoziții cu variabilă. De exemplu

$$2x-1=7-x, \qquad x\in\{-1, 1, 2, 4\};$$

$$8x^2=1-xy, \qquad x, y\in \mathbf{Q},$$

$$\frac{4x}{1+x^2}=1, \qquad x\in \mathbf{R}$$

sînt ecuații. Dintre acestea, prima și a treia sînt cu o singură variabilă, iar a doua este cu două variabile. Variabila într-o ecuație se mai numește și **necunoscută.** Vorbim astfel despre ecuații cu o necunoscută, cu două necunoscute și așa mai departe. Pentru notarea necunoscutelor se folosesc de obicei literele de la sfîrșitul alfabetului: $x, y, z, \ldots$.

Am învățat în clasele anterioare că **a rezolva** o ecuație înseamnă a găsi mulțimea tuturor **soluțiilor** sale (mulțimea de adevăr).

De exemplu, 1 este soluție a ecuației

$$\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}, \quad x\in\mathbf{R},$$

deoarece înlocuind necunoscuta x, în enunțul ecuației, cu 1, obținem o propoziție adevărată. Dimpotrivă, numărul 2 nu este soluție a acestei ecuații, deoarece înlocuind pe x cu 2, obținem o propoziție falsă.

Observație. În cărțile mai vechi se scrie că ecuația $2x=4$ are soluția $x=2$. Corect este: ecuația $2x=4$ are soluția 2, dacă am presupus că $x\in\mathbf{R}$ (sau aparține unei mulțimi ce-l are pe 2 ca element).

EXERCIȚII

1) (oral) Spuneți care dintre ecuațiile de mai jos este cu o necunoscută și care cu două necunoscute:

a) $x+\frac{1}{2}=y-2\,(x, y\in\mathbf{R})$; b) $x-\frac{y}{2}-5=0\,(x, y\in\mathbf{R})$; c) $1-x=x\cdot x-1\,(x\in\mathbf{Z})$; d) $x+y+z=0\,(x, y, z\in\mathbf{Z})$; e) $\sqrt{2}x+\sqrt{3}(x-1)=2\,(x\in\mathbf{R})$.

2) Scrieți exemple de ecuații cu o necunoscută x.

3) (oral) Propoziția cu variabilă $2x-1=1=5x-4$, $x\in\mathbf{R}$ este o ecuație? De ce?

4) Care dintre elementele mulțimii $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ este soluție a ecuației: a) $x-1=-2x+2$; b) $x-1=\frac{4x-4}{4}$; c) $5x-3=-2x+11$?

5) Care dintre numerele $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ este soluție a ecuației: a) $2x^2-1=1$: b) $x\cdot x-1=4$; c) $2x+1=x\cdot x$?

DEFINIȚIE. Vom spune că două ecuații cu o necunoscută sînt **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

De exemplu, ecuațiile

$$x=2, \qquad x\in\{0, 1, 2\}$$

$$\text{și } x\cdot x-4=0, \qquad x\in\{0, 1, 2\}$$

sînt echivalente; ambele au o singură soluție, numărul 2.

La fel, ecuațiile $3x=5$, $x\in\left\{1, \frac{5}{3}, 2, \frac{8}{3}\right\}$

și $x=\frac{5}{3}$, $x\in\mathbf{Q}$, sînt echivalente.

Ecuatiile $2x=4$, $x\in\mathbf{R}$ și $x=2$, $x\in\mathbf{R}$ sînt și ele echivalente.

EXERCIȚIU. Decideți dacă ecuațiile de mai jos sînt echivalente sau nu: a) $2x-1=0$, $x\in\mathbf{Q}$ și $2x-1=0$, $x\in\mathbf{N}$; b) $2x-1=0$, $x\in\mathbf{Q}$ și $x=\frac{1}{2}$, $x\in\mathbf{Q}$; c) $4x+4=0$, $x\in\mathbf{Z}$ și $-x-1=0$, $x\in\mathbf{Q}$.

În clasele a V-a și a VI-a am rezolvat ecuații în care necunoscuta putea să ia valori în mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale sau în submulțimi ale ei. De acum înainte vom considera că necunoscuta unei ecuații ia valori reale. Mai precis, dacă nu se specifică nimic, vom considera că $x\in\mathbf{R}$.

Una dintre cele mai simple ecuații liniare cu o necunoscută este

$$x-1=0, \quad x\in\mathbf{R}.$$

Această ecuație are evident o singură soluție, anume numărul real 1.

O ecuație de forma

$$ax+b=0, \quad x\in\mathbf{R},$$

unde a și b sînt numere reale, iar $a\neq 0$, va fi numită **ecuație liniară cu o necunoscută** (sau ecuație de gradul I cu o necunoscută).

În rezolvarea unei ecuații (a cărei necunoscută ia valori în mulțimea numerelor reale) putem folosi următoarele proprietăți:

Proprietatea 1. Adunînd la (sau scăzînd din) ambii membri ai unei ecuații același număr real, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

Proprietatea 2. Înmulțind (sau împărțind) ambii membri ai unei ecuații cu același număr real, *diferit de zero*, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

EXERCIȚIU REZOLVAT. Să rezolvăm ecuația $2x - 1 = 0$, $x \in \mathbf{R}$. Adunăm la ambii membri numărul 1 (pentru a izola necunoscuta în membrul stîng). Obținem ecuația $2x = 1$, $x \in \mathbf{R}$, care este echivalentă cu prima. Împărțim ambii membri ai acestei ecuații cu numărul 2; obținem ecuația $x = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$, care este și ea echivalentă cu prima! Evident, această ultimă ecuație are o singură soluție, anume numărul real $\frac{1}{2}$; deci prima ecuație are soluția $\frac{1}{2}$.

În general, o ecuație liniară cu o necunoscută:

$$ax + b = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

în care $a \neq 0$ și b sînt numere reale, se rezolvă în două etape:

1) Scădem din ambii membri pe b și obținem: $ax = -b$, $x \in \mathbf{R}$.

2) Împărțim ambii membri cu a și obținem: $x = -\frac{b}{a}$, $x \in \mathbf{R}$.

Ultima ecuație are ca unică soluție numărul real $-\frac{b}{a}$ și este echivalentă cu prima ecuație.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile ($x \in \mathbf{R}$):

a) $5x = 2$; b) $8x - 7 = 0$; c) $\sqrt{2}x + 2 = 0$; d) $\sqrt{2}x = \sqrt{3}$; e) $\frac{14}{3}x - \frac{5}{7} = 0$.

2) Este adevărată propoziția:
„Orice ecuație de forma $ax + 1 = 0$, $x \in \mathbf{R}$ are o soluție"?

3) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = 0$, $x \in \mathbf{R}$; b) $1{,}5\,y = 7{,}5$, $y \in \mathbf{R}$; c) $\sqrt{\frac{2}{5}}z + \frac{1}{2} = 0$, $z \in \mathbf{R}$; d) $\sqrt{2}x - 1 = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

ECUAȚII REDUCTIBILE LA ECUAȚII LINIARE

Să luăm ecuația

$$2x + a = 5, \quad x \in \mathbf{R}$$

în care a este un număr real pozitiv.

Scădem din ambii membri numărul 5; rezultă

$$2x + a - 5 = 5 - 5,$$

adică

$$2x + a - 5 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Să scădem din ambii membri ai ecuației date pe a; obținem

$$2x + a - a = 5 - a,$$

adică

$$2x = 5 - a, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Observăm că proprietatea 1 înseamnă următoarele: putem trece termeni dintr-un membru în celălalt, *schimbîndu-le semnul.*

Fie de exemplu ecuația

$$2x - 2 = 3x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

S-o rezolvăm, ținînd seamă de proprietățile 1 și 2.

Trecem în membrul stîng toți termenii din membrul drept; obținem

$$2x - 2 - 1 - 3x = 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

ecuație care este echivalentă cu prima; reducînd termenii asemenea, această ecuație se scrie

$$-x - 3 = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

care este o ecuație *liniară* cu o necunoscută. Soluția ei este numărul real -3. Deci, -3 este soluție și a primei ecuații.

Să observăm că putem rezolva ecuația și astfel:

— trecem în membrul stîng toți termenii în care apare necunoscuta x; trecem în membrul drept termenii în care nu apare necunoscuta. Obținem ecuația

$$2x - 3x = 1 + 2, \quad x \in \mathbf{R}$$

adică

$$-x = 3, \quad x \in \mathbf{R};$$

— împărțim ambii membri ai ultimei ecuații cu -1; obținem

$$x = -3, \quad x \in \mathbf{R},$$

ecuație ce are soluția -3.

În general, o ecuație de forma:

$$ax + b = cx + d, \quad x \in \mathbf{R},$$

unde a, b, c și d sînt numere reale, se rezolvă astfel:

1) se trec în membrul stîng termenii în care apare necunoscuta; se trec în membrul drept toți termenii în care nu apare necunoscuta. Obținem astfel ecuația echivalentă (cu prima):

$$ax - cx = d - b, \quad x \in \mathbf{R}$$

sau

$$(a - c)x = d - b, \quad x \in \mathbf{R}.$$

2) Dacă $a \neq c$, atunci $a - c \neq 0$. Vom împărţi ambii membri ai ecuaţiei cu $a - c$. Obţinem ecuaţia

$$x = \frac{d-b}{a-c}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

care are ca soluţie unică numărul real $\frac{d-b}{a-c}$; acesta este soluţie şi a primei ecuaţii.

Dacă $a = c$ şi $b \neq d$, atunci ecuaţia iniţială nu are soluţie; mulţimea soluţiilor sale este $\emptyset$.

Dacă $a = c$ şi $b = d$, atunci orice număr real x este soluţie a primei ecuaţii; mulţimea soluţiilor sale este deci $\mathbf{R}$.

EXERCIŢIU

Rezolvaţi ecuaţiile (presupunînd $x \in \mathbf{R}$):

a) $2x + \frac{1}{2} = x - 1$; b) $3x - 3 = 2x + 1$; c) $x + 1 = -x + 3$;
d) $3x + 2 = 3x + 2$; e) $2(x+1) - x = x - 1$; f) $\sqrt{2}x - 1 = x$.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să rezolvăm ecuaţia:

$$(x+2)\cdot(x-3) = x\cdot(x+1), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Desfacem parantezele; ecuaţia devine:

$$x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 + x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Trecem în membrul stîng toţi termenii în care apare necunoscuta x, iar în membrul drept ceilalţi termeni. Obţinem ecuaţia:

$$x^2 - 3x + 2x - x - x^2 = 6, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Reducem termenii asemenea:

$$-2x = 6, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Această ecuaţie este echivalentă cu prima; o rezolvăm; ea are soluţia -3; deci şi prima ecuaţie are ca unică soluţie numărul real -3.

Verificare. Prin înlocuirea lui x cu -3, membrul stîng al ecuaţiei devine: $(-3+2)\cdot(-3-3) = (-1)\cdot(-6) = +6$, iar membrul drept devine: $(-3)\cdot(-3+1) = (-3)\cdot(-2) = +6$.

Am verificat astfel că -3 este soluţie a ecuaţiei iniţiale.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să rezolvăm ecuaţia: $\frac{4}{x} = \frac{5}{x+1}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 0\}$.

Înmulţim ambii membri cu x, apoi cu $x + 1$; obţinem ecuaţia

$$4(x+1) = 5x, \qquad x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 0\}$$

echivalentă cu prima. Ea se transformă într-o ecuaţie liniară cu soluţia 4.

EXERCIŢIU

Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x - 2\right) = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)\cdot(x+2)$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $\sqrt{2}y(y-1) = (y+1)\cdot(\sqrt{2}y + 1)$, $y \in \mathbf{R}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2-x} = -\frac{1}{x+1}$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 2\}$; d) $\frac{5}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 0$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$;

e) $\frac{x-2}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să rezolvăm ecuaţia

$$mx - 2 = x - 2m, \qquad x \in \mathbf{R}$$

în care m este un parametru* real.

Trecem în membrul stîng termenii cu x, iar în membrul drept termenii liberi; obţinem ecuaţia echivalentă cu prima:

$$mx - x = 2 - 2m, \qquad x \in \mathbf{R}$$

pe care o mai putem scrie $(m-1)x = 2(1-m)$, $x \in \mathbf{R}$.

Coeficientul necunoscutei x poate fi şi 0 (anume atunci cînd $m = 1$). Se impune astfel să facem o analiză a cazurilor ce pot apare.

1) *Cazul* $m \neq 1$. În acest caz, împărţim ambii membri ai ecuaţiei cu $m - 1$ şi obţinem ecuaţia

$$x = -2, \qquad x \in \mathbf{R}$$

care are soluţia -2. Deci, dacă $m \neq 1$, prima ecuaţie are mulţimea soluţiilor formată doar din numărul -2.

---

* *parametru* = literă, ce poate să ia diferite valori, dar care în calcule este considerată constantă.

2) *Cazul* $m = 1$. În acest caz, ecuația inițială se scrie

$$x - 2 = x - 2, \quad x \in \mathbf{R};$$

mulțimea soluțiilor ei este **R**. Cu alte cuvinte, orice număr real este soluție a ecuației.

Observație. În cărțile mai vechi, această analiză a cazurilor se numește discuție. Încercați să nu folosiți acest cuvînt. Corect: *„analizăm* cazurile ce pot apare atunci cînd parametrul ia diverse valori".

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x}{13} = 4$; b) $\frac{5x}{9} = \frac{10}{27}$; c) $x + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$; d) $7x - 5 = 9$; e) $9 = 5x - 16$; f) $5 - \frac{x}{7} = 4$.

2) Rezolvați ecuațiile $3 = 8 - 5x$, $x \in \mathbf{R}$ și $9 - 8x = 1$, $x \in \mathbf{R}$. Sînt aceste ecuații echivalente?

3) Rezolvați ecuațiile:

a) $7x - 5 = 2x + 13$, $x \in \mathbf{R}$; b) $11 - 8y = 13 - 3y$, $y \in \mathbf{R}$; c) $5(3z - 5) + 8 = 39$, $z \in \mathbf{R}$; d) $3x - 2(20 - x) = 5x - 8(12 - x) + 20$, $x \in \mathbf{R}$; e) $(15 - y) \cdot 4 = 10(6 - 2y) - 8(3 - y) + (8y - 18)$, $y \in \mathbf{R}$; f) $\frac{x}{5} + \frac{x-3}{2} = \frac{x}{3}$, $x \in \mathbf{R}$; g) $\frac{3z+1}{12} - \frac{5z-1}{6} = \frac{z+5}{4} - 2$, $z \in \mathbf{R}$; h) $\frac{2y+3}{5} + \frac{5y-4}{3} - 2 = 0$, $y \in \mathbf{R}$.

4) În ecuațiile care urmează, a este un parametru real. Rezolvați-le:

a) $ax - 7 = 5x + 8$, $x \in \mathbf{R}$; b) $ax + 2x = 10 + x$, $x \in \mathbf{R}$; c) $(1 + y)(a + 1) = 2(a + y)$, $y \in \mathbf{R}$.

5*) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{9}{x} + \frac{3}{7} = \frac{5}{x} + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$; b) $\frac{x+7}{2x+3} = \frac{x+1}{2x-1}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; c) $\frac{4}{x+7} = \frac{7}{4-x}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-7, 4\}$; d) $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{5}{x}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-3, -2, 0\}$.

6) Rezolvați ecuațiile (în numere reale):

a) $\sqrt{2}x - 1 = 11$; b) $8 = \sqrt{3}x - 1$; c) $2x = \sqrt{3}x - 6$; d) $1 - \sqrt{2}x = \sqrt{2}x - 1$; e) $\sqrt{3}x = 1 - x$; f) $\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{2}y$.

7) Aproximați cu eroare de 0,01 soluția ecuației:

a) $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = \sqrt{5}$, $x \in \mathbf{R}$; b) $\sqrt{2}x + 1 = \sqrt{2} - x$, $x \in \mathbf{R}$, c) $\sqrt{5}x - 1 = \sqrt{2}x$, $x \in \mathbf{R}$.

8) Rezolvați ecuațiile:

a) $3x - 5 = 1$; b) $2 + 4x = 3$; c) $-3x + 4 = 29$; d) $9 - 2y = 17$; e) $10y + 4 = 3$; f) $4 = \frac{7}{2}y + 10$; g) $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} = -3$.

9) Rezolvați ecuațiile:

a) $4x + 2(3x - 1) = 1 + 3(x - 1)$; b) $\frac{9}{10}x + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}$; c) $x - 12 = \frac{1}{5}(x + 12)$; d) $6x - 8 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}$; e) $3(x - 2) + \frac{5}{2} = 4x + \frac{1}{2}(1 + 2x)$; f) $7(x + 1) = 3(x - 2) - 4(5 - x)$; g) $\left(\frac{8}{3} - 5y\right) - 7\left(3 - \frac{2}{3}y\right) = 11$.

10) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{13+x}{7} + \frac{3x-16}{3} = x + \frac{10}{3}$; b) $\frac{1}{3}(3x - 12) + 1 + \frac{1}{8}(11x - 10) = 0$; c) $9x - \frac{3x+44}{7} = 100$.

11*) Rezolvați ecuațiile:

a) $(x + 1)(x + 3) = (x - 1)(x + 2) + 11$; b) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 2)(2x - 1) - 13$; c) $(x + 1)(x - 2) = (3 - x)(4 - x) + 1$; d) $(x + 1)^2 + (x - 3)^2 = (x - 1)^2 + (x + 3)^2$; e) $(3x + 2)^2 + (4x - 1)^2 = (5x + 7)^2$.

12*) Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{5x+7}{3x-11} = \frac{13}{19}$; b) $\frac{3x-4}{6x-7} = 5$; c) $3 - \frac{7x+2}{5x} = \frac{1}{x}$; d) $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{2x-1}{x-1}$; e) $\frac{2x}{2x} = 1$; f) $\frac{3x}{3x-2} = \frac{2}{2-3x}$.

(Indicație: stabiliți mai întîi mulțimea în care ia valori necunoscuta.)

13) Rezolvați ecuațiile (în care a este un parametru real):

a) $ax + 1 = a$; b) $3x - 4a = 1$; c) $ax = x - 7a$; d) $ax + a = 1 + x$.

14) Pentru ce valoare a parametrului real a, soluția ecuației $8ax = 3a + 2x$ este $\frac{1}{2}$?

15*) Aflați valoarea parametrului a pentru care ecuațiile $ax + 1 = a$ și $2a(1 - x) = 1$ au aceeași soluție.

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUŞIRII UNOR CUNOŞTINŢE DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Scrieţi sub formă zecimală numerele raţionale:

a) $\frac{11}{6}$; b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{7}$; c) $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$;

2) Efectuaţi calculele:

a) $1,3\cdot1,5-2,15+4,1\cdot0,3$; b) $(-1,6)^2+3,44$; c) $4,3^2+5^2-(4,3)^2+(-5)^2$.

3) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{0,36}=0,6$; b) $\sqrt{0,81}>1$; c) $\sqrt{0,64}<1$; d) $\sqrt{0,16}<\sqrt{0,49}$.

4) Aproximaţi, cu eroare de 0,01:

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{7,5}$.

LUCRAREA A II-A

1) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\pi\in[1;3]$; b) $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$; c) $\sqrt{3}\in[1;2]$; d) $1+\sqrt{5}\in[1;3]$; e) $\sqrt{2}>1,41$; f) $\sqrt{3}<1,83$; g) $\pi>3,15$.

2) Scoateţi de sub radicali:

a) $\sqrt{27}$; b) $\sqrt{98}$; c) $\sqrt{54}$.

3) Efectuaţi calculele:

a) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$; b) $(\sqrt{11}-3)\cdot(\sqrt{11}+3)$; c) $(2\sqrt{7}+\sqrt{11})\cdot(\sqrt{7}-2\sqrt{11})$.

4) Raţionalizaţi numitorii:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{6}}$.

5) Rezolvaţi ecuaţia $5x-1=7-2x$ $(x\in\mathbb{R})$. Scrieţi soluţia sub formă zecimală.

CAPITOLUL II

POLINOAME ŞI FRACŢII RAŢIONALE

1. FORMULE

În matematică, precum şi în fizică, chimie şi alte ştiinţe sînt folosite foarte des **formule**; cu ajutorul lor se prezintă, într-o formă prescurtată, informaţii care altfel s-ar scrie cu multe cuvinte, pe multe rînduri.

De exemplu, dacă vrem să explicăm cum putem afla lungimea unui cerc, cunoscîndu-i lungimea d a diametrului, scriem

$$L=\pi d$$

în loc de a scrie: „ca să aflăm lungimea unui cerc, înmulţim numărul π cu diametrul cercului".

Aria acestui cerc se poate afla folosind formula

$$A=\pi r^2;$$

această formulă înlocuieşte următoarea propoziţie: „ca să aflăm aria unui cerc, înmulţim numărul π cu pătratul razei cercului".

Să luăm şi cîteva exemple de formule din fizică. Scriem

$$\rho=\frac{m}{V}$$

în loc de a scrie: „densitatea unui corp se află împărţind masa sa la volumul său".

De asemenea, scriem

$$Q=cm(T-t)$$

în loc de a scrie: „căldura consumată pentru a aduce un corp de masă m de la temperatura t la temperatura T se află înmulţind căldura masică (specifică) a corpului cu masa corpului şi cu diferenţa temperaturilor".

Scriem:

$$p=\frac{F}{S}$$

în loc de: „presiunea se află împărţind forţa ce se exercită asupra lichidului la aria pe care se exercită această forţă".

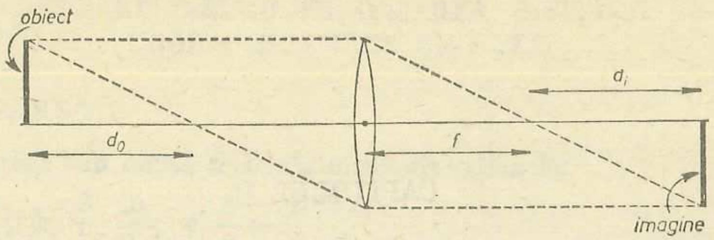


Fig. II.1

Legea de formare a imaginilor prin lentile (vezi fig. II.1) se scrie:

$$f^2 = d_0 d_i$$

în loc de: „pătratul distanței focale a unei lentile este egal cu produsul distanțelor de la obiect, respectiv imagine, la focare".

Pentru a prezenta o informație pot fi folosite, în general, mai multe formule. De exemplu, să prezentăm modul de calcul al perimetrului dreptunghiului din figura II.2.

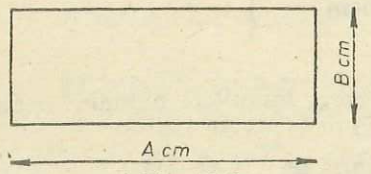


Fig. II.2

Putem scrie formula:

$$P = 2 \cdot A + 2 \cdot B \text{ (cm)}$$

sau formula

$$P = 2 \cdot (A + B) \text{ (cm)}.$$

Să analizăm aceste două formule.

Dacă am folosi-o în practică pe prima, ar trebui să efectuăm două înmulțiri (mai întîi $2 \cdot A$, apoi $2 \cdot B$) și o adunare. Dacă am folosi-o pe a doua, ar trebui să efectuăm o adunare, apoi o înmulțire. A doua formulă este mai bună decît prima; ea ne permite să economisim o operație.

De regulă, oamenii aleg pentru calcule formula cea mai convenabilă.

EXERCIȚIU REZOLVAT

În poligonul de încercări este încercat un automobil „Dacia 1300", pentru verificarea sistemului de frînare. Șoferul asigură mai întîi mașinii o viteză v, apoi, în dreptul unui observator, frînează brusc. Observatorul măsoară distanța d parcursă de mașină din momentul începerii frînării pînă în momentul opririi. Rezultatele verificării sînt trecute în tabelul:

Viteza mașinii în km/h (v)	50	60	80	90
Distanța de frînare în m (d)	25	36	64	81

Putem deduce o formulă care să ne dea aceste informații într-o formă prescurtată?

Să împărțim vitezele la 10 și să completăm tabelul:

$\frac{v}{10}$	5	6	8	9
d	25	36	64	81

Observăm că în linia a doua sînt trecute tocmai pătratele numerelor din prima linie. Astfel, formula

$$d = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

ne descrie informațiile conținute în tabelul cu rezultatele verificării.

Automobilul are acum viteza de 70 km/h. Putem „estima" care va fi distanța de frînare?

Dacă formula pe care am stabilit-o mai sus este valabilă și în acest caz, atunci putem spune dinainte, fără a mai măsura, că distanța de frînare în acest caz va fi de $\left(\frac{70}{10}\right)^2 = 49$ metri. Dar oare formula stabilită este valabilă în toate cazurile?

Să presupunem că această formulă este valabilă pentru viteze cuprinse între 30 și 100 km/h, pentru toate autoturismele „Dacia 1300". Cu ce viteză este recomandabil să circulăm într-o zi cu ceață, vizibilitatea fiind de 25 metri, cu un astfel de automobil?

Dacă în cale ne apare un obstacol, distanța de frînare trebuie să fie de cel mult 25 metri. Din

$$25 = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

deducem $v = 10\sqrt{25} = 50$ km/h. Deci este recomandabil să circulăm cu cel mult 50 km/h.

EXERCIȚII

1) Aria totală a unui cilindru (vezi fig. II.3) este descrisă de formula

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Analizați numărul de operații ce trebuie efectuate, presupunînd că $2\pi = 6{,}283...$ Puteți scrie și o altă formulă pentru calculul ariei totale, mai convenabilă?

2) Pentru calculul ariei hașurate din figura II.4 putem folosi oricare dintre formulele:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

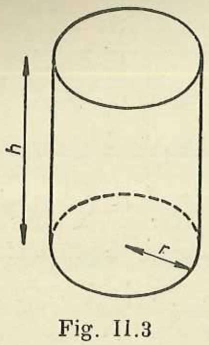


Fig. II.3

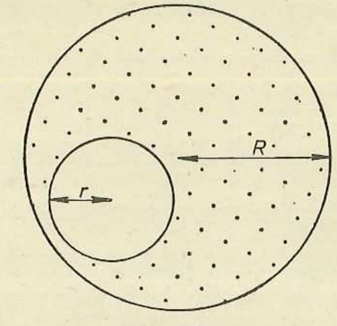


Fig. II.4

sau

$$A = \pi(R - r)(R + r)$$

Care dintre aceste formule credeți că este cea mai convenabilă?

3) În jurul unei statui avînd baza pătrată (de latură s metri) se însămînțează cu iarbă o suprafață dreptunghiulară de dimensiunile din figura II.5. Știind că însămînțarea cu iarbă a unui metru pătrat de teren costă a lei, scrieți o formulă pentru calculul costului total al însămînțării terenului.

4) De la autogara din orașul A pleacă un autobuz spre comuna C, care mai oprește și în comuna B. Costul unui bilet de călătorie de la A în B este de 6 lei, de la A în C este de 9,50 lei, iar de la B în C este de 5 lei; biletele le vinde șoferul autobuzului.

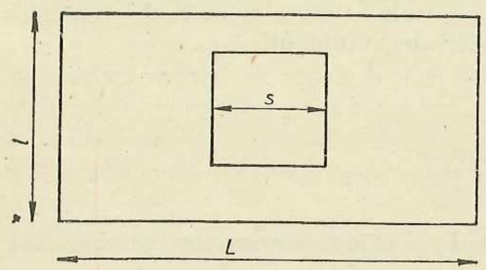


Fig. II.5

La plecare, în orașul A, șoferul a vîndut b bilete de 6 lei și c bilete de 9,50 lei.

Între B și C autobuzul este oprit de un echipaj de control, care găsește călătorind a călători, toți avînd bilet.

Cîți lei a încasat șoferul pentru biletele vîndute? Scrieți și o formulă mai simplă.

2. FOLOSIREA LITERELOR: CONSTANTE ȘI VARIABILE

Am folosit pînă acum de multe ori litere, în mai multe scopuri. De exemplu, în formula ce exprimă lungimea unui cerc

$$L = \pi d$$

apar trei litere: L, π și d. Dintre acestea, litera π este folosită pentru a nota un număr real, pe care nu-l putem scrie zecimal în întregime (anume 3,1415...); aici ea este o **constantă.** Literele L și d sînt folosite pentru a nota numere reale neprecizate. Observăm că pentru diferite valori date lui d, obținem

valori diferite pentru L. Literele L și d sînt **variabile,** iar formula ne indică o **legătură** între aceste variabile.

Să privim formula fizică

$$Q = cm\,(T - t)$$

ce exprimă cantitatea de căldură consumată pentru a aduce masa m de *apă* de la temperatura t la temperatura T. În această formulă, litera c joacă rolul de constantă (valoarea ei este de aproximativ 4185,5 joule/(kg. grad)); literele Q, m, t și T joacă rolul de variabile. Aceeași formulă poate exprima cantitatea de căldură consumată pentru a aduce masa m de *fier* de la temperatura t la temperatura T; de data aceasta, constanta c are altă valoare (anume aproximativ 460,4 joule/(kg. grad)).

Aria totală a cilindrului din figura II.3 este exprimată de formula:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

În această formulă apar litere și numere. Numărul 2 și litera π sînt constante; literele A, r și h sînt variabile.

Variabilele se mai numesc uneori și **nedeterminate.**

3. MONOAME

Membrul drept al formulei ce exprimă aria cercului de rază r:

$$A = \pi r^2$$

este un **monom** în litera r; acest monom este produsul dintre **coeficientul** constant π și pătratul **nedeterminatei** (variabilei) r. Gradul acestui monom este 2.

Membrul drept al formulei ce exprimă aria laterală a cilindrului din figura II.3, anume

$$2\pi rh$$

este un monom în literele r și h; acest monom este produsul dintre coeficientul constant 2π și produsul nedeterminatelor r și h. Ambele nedeterminate apar în monom cu exponentul 1(!); gradul total al acestui monom este 2.

Dar expresia $2\pi rh$ poate fi considerată monom în litera h; de data aceasta, monomul este produsul dintre coeficientul $2\pi r$ (care nu mai este o constantă) și nedeterminata h. Gradul acestui monom este 1(!).

În general, un **monom** de gradul $m \geq 1$ în nedeterminata X are forma

$$cX^m$$

unde c este coeficientul monomului. Coeficientul acestui monom poate fi o constantă (deci un număr real) $\neq 0$, sau un monom în alte nedeterminate. Gradul monomului este un număr natural.

Un monom în nedeterminatele X, Y și Z poate fi scris în forma

$$cX^mY^nZ^p$$

unde m, n, p sînt numere naturale $\geqslant 1$. Gradul (total al) acestui monom este $m+n+p$, iar coeficientul său c poate fi o constantă sau un monom în alte nedeterminate.

Să observăm că gradul se calculează ținînd seama de literele ce sînt considerate nedeterminate. De aceea, este bine să precizăm care litere sînt nedeterminate. De exemplu, spunem: „gradul în Z al monomului $cX^mY^nZ^p$ este p, gradul în X și Z al monomului $cX^mY^nZ^p$ este $m+p$ etc.".

În problemele practice, atît coeficienții cît și nedeterminatele reprezintă de obicei numere reale; cum înmulțirea numerelor reale este comutativă, considerăm că literele ce apar într-un monom pot fi comutate după dorință. Astfel, de exemplu:

$$2X^2Y, \qquad 2XYX, \qquad 2YX^2, \qquad 2YXX$$

reprezintă **același** monom în nedeterminatele X și Y.

EXERCIȚII

1) (oral) Precizați coeficienții următoarelor monoame în nedeterminata X:

a) $3X^3$; b) $7XY$; c) $0{,}51\ X^2$; d) $-\frac{1}{2}X^5$; e) $\sqrt{2}X^3$; f) $-2aX^4Y$; g) $5abX^3$.

2) (oral) Precizați gradul în X al următoarelor monoame:

a) $-\frac{7}{12}X^2$; b) $2\pi X$; c) $22{,}425XY^2Z^3$; d) $(\sqrt{2}+1)X^7Y^2$; e) $2aX^5Z$; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}X^{n+1}Y^{n-1}$.

3) (oral) Care litere pot fi considerate nedeterminate în:

a) $2aX$; b) $5abX^3$; c) $\sqrt{2}X^3Y^2Z$?

4) Este adevărată propoziția: „Cele două scrieri de mai jos reprezintă același monom" pentru:

a) $3X^2$ și $3XX$; b) $5XY$ și $-5YX$; c) $\frac{1}{2}XY^2$ și $\frac{1}{2}Y^2X$; d) $2X+1$ și $1+2X$; e) $2X^2Y^2$ și $2XYXY$; f) $2a^2$ și $2aa$?

Monoamele în care nu apare litera X pot fi considerate ca avînd gradul în X egal cu 0. Astfel, constantele diferite de 0 pot fi considerate monoame de gradul 0 în orice nedeterminată.

De exemplu, gradul în X al monoamelor -5, $-5a$, $-5Y$, $-5aY$ este 0.

Va trebui să identificăm monoamele $0X$, $0X^2$, $0X^3$, $0X^4$ (în general orice monom cu coeficientul 0) cu constanta 0. De aceea, constanta 0 „nu are grad"!

EXERCIȚIU

Precizați coeficientul, gradul în X și gradul în Y pentru următoarele monoame: a) $2X^3$; b) $3XY^2$; c) $-\frac{7}{3}Y^2$; d) $\sqrt{2}XY$; e) πX^2; f) $\frac{4\pi}{3}Y^3$.

Dacă coeficientul unui monom (în care apar litere) este 1 sau -1, se obișnuiește să nu se mai scrie cifra 1 în monom; astfel, în loc de $1XY$ se scrie mai simplu XY; în loc de $-1X^3$ se scrie mai simplu $-X^3$; scriem X în loc de $1X$ și $-X^4Y$ în loc de $-1X^4Y$.

Am învățat în clasa a VI-a să înmulțim două monoame. De exemplu, înmulțind monomul $2X$ (în nedeterminata X) cu monomul $3XY$ (în nedeterminatele X și Y), obținem ca rezultat monomul $6X^2Y$:

$$2X\cdot 3XY = 6X^2Y.$$

Alt exemplu: înmulțind monomul $-\frac{1}{2}X^2$ cu monomul $3X^3$ (ambele în nedeterminata X) obținem ca rezultat monomul $-\frac{3}{2}X^5$.

Fie cX^m și dX^n două monoame în X (de grade $m \geqslant 1$ și $n \geqslant 1$, avînd coeficienții $c \neq 0$, $d \neq 0$). Atunci

$$(cX^m)\cdot(dX^n) = (c\cdot d)X^{m+n}.$$

În problemele practice, nedeterminata X reprezintă de obicei numere reale $\neq 0$; deoarece orice număr real $\neq 0$ ridicat la puterea 0 este 1, se consideră că X^0 este constanta 1.

Deoarece produsul constantei 0 cu orice număr real este 0, se consideră că: $0\cdot(cX^m) = 0$ pentru orice monom cX^m. De asemenea, se consideră că $0X = 0$, $0X^2 = 0$, și în general $0X^m = 0$ pentru orice $m \in \mathbf{N}$. Astfel, regula de înmulțire se extinde pentru orice monoame:

$$(cX^m)\cdot(dX^n) = cdX^{m+n}.$$

Regulă. Coeficientul produsului a două monoame este produsul coeficienților monoamelor. Dacă ambele monoame sînt diferite de 0, atunci gradul în X al produsului este suma gradelor în X ale monoamelor.

Această regulă se extinde și pentru mai mult de două monoame și pentru monoame în mai multe nedeterminate. De exemplu

$$(2X^2)\cdot(3Y)\cdot(-2Z) = (6X^2Y)\cdot(-2Z) = -12X^2YZ,$$

$$(2X^2Y^2)\cdot(3X^5Y^3) = (2\cdot 3)X^{2+5}Y^{2+3} = 6X^7Y^5,$$

$$(-3m^2X)\cdot\left(-\frac{4}{3}m\right) = \left((-3)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right)m^{2+1}X^{1+0} = 4m^3X,$$

$$(\sqrt{2}X)\cdot(-\sqrt{2}) = (\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}))X = -2X$$

Înmulțirea monoamelor este comutativă și asociativă. Monomul constant 1 este element neutru pentru înmulțirea monoamelor.

Se obișnuiește să se scrie monoamele de gradul $m > 1$ în X în forma

$$cX^m$$

(c este coeficientul monomului).

Această scriere este numită **canonică** (adică scriere tip, standard).

EXERCIȚII

1) Scrieți în forma canonică monoamele (în X): a) $2XX$; b) $\sqrt{2}XYX^2$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}YXY$; d) $-\frac{\sqrt{2}+1}{3}XY$.

2) Efectuați produsul monoamelor, scrieți rezultatele în formă canonică (ca monoame în X):

a) $3{,}2X^2$ și $0{,}5X$; b) $2X^3$ și 0; c) $\frac{1}{3}X^2$ și $-3X$; d) $-\frac{1}{2}X$ și $8X^3$; e) 15 și $\frac{1}{3}X^2$; f) $-\frac{2}{3}X^2$ și $\frac{3}{5}X$; g) aX și $-aX^2$.

3) Efectuați înmulțirile:

a) $X \cdot 2X \cdot 3X$; b) $2X \cdot (-5XY) \cdot \left(\frac{1}{2}Y\right)$; c) $(-1{,}5) \cdot (-4X) \cdot (0{,}5X)$; d) $(-5X) \cdot (-2Y) \cdot (-0{,}3Z)$; e) $(\sqrt{3}X) \cdot (\sqrt{2}Y) \cdot (\sqrt{6}X)$; f) $(\sqrt{2}-1)aX \cdot (\sqrt{2}+1)X^2 \cdot 2a$.

4) Cu ce monom trebuie înmulțit $\frac{3}{2}X^2$ pentru a obține:

a) $3X^3$; b) $5X^2Y$; c) aX^3; d) $-2aX^2Y$; e) $-3abX^2$?

5) Efectuați înmulțirile:

a) $2X^2 \cdot 3X^2Y^3$; b) $2X^2Y \cdot (-3XY^2)$; c) $(-3aX^2) \cdot (-2aX)$; d) $(-X^4) \cdot (-aX^3)$; e) $(-X^4) \cdot (-X^5) \cdot X^6$.

6) Scrieți următoarele monoame ca produse de două monoame în X, scrise în formă canonică:

a) $10a^3X^3$; b) $2abX^2$; c) $-\frac{1}{5}X^3Y^2$.

7) Efectuați:

a) $(a^2b) \cdot (bc^2)$; b) $(-\sqrt{3}m)\left(\sqrt{\frac{3}{2}}mn\right)$; c) $(4c) \cdot (5bd) \cdot \left(\frac{1}{8}bc\right)$; d) $\left(\frac{2}{3}abX\right) \cdot \left(\frac{3}{4}aX^2\right)$; e) $(-8XY) \cdot \left(\frac{1}{4}X\right)$; f) $a^2 \cdot (-a^2)$.

4. POLINOAME*

Să privim formula ce exprimă aria totală a cilindrului din figura II.3:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Membrul drept al acestei formule este un **polinom** în literele r și h. De asemenea,

$$\pi R^2 - \pi r^2$$

este un polinom în R și r.

În general, numim **polinom** o sumă de monoame ce nu sînt asemenea; iată cîteva exemple de polinoame, în nedeterminata X:

$2X + 1$;

$-5X^2 - 2{,}5X + 1$, notație prescurtată pentru $(-5X^2) + (-2{,}5\,X) + 1$;

$3X^4 + 2X^2 + 1 - X^5$.

Să dăm cîteva exemple de polinoame, în nedeterminatele X și Y:

$X + Y$;

$-3X^2 - 2XY + 5X - Y + 1$.

În polinomul $aX + Y + 2$ apar literele a, X și Y. Faptul că numai literele X și Y sînt considerate nedeterminate se scoate în evidență prin notația: $p(X, Y) = aX + Y + 2$.

De obicei, un polinom se notează printr-o literă (se folosesc mult în acest scop literele P, Q, R, p, q,...) urmată, între paranteze, de litera sau literele ce joacă rolul de variabile (nedeterminate).

Vom nota deci $P(X) = aX + (X + 2)$, indicînd prin aceasta că **numai** litera X este nedeterminată!

Termenii sumei ce formează un polinom se numesc **termenii polinomului.** Astfel, $3X^2$, $2XY$ și 5 sînt termenii polinomului

$$3X^2 + 2XY + 5,$$

iar $3X^4$, $2X^2$, 1 și $-X^5$ sînt termenii polinomului

$$3X^4 + 2X^2 + 1 - X^5$$

Termenii unui polinom sînt monoame.

De regulă, în monoame și polinoame, nedeterminatele reprezintă numere reale. Însă înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare, ceea ce ne permite să scoatem factor comun. De aceea, vom putea scrie, de exemplu:

$$2X + 3X = (2 + 3)X = 5X,$$
$$3aX - 5X = (3a - 5)X,$$
$$-2X + 2X = (-2 + 2)X = 0X = 0,$$
$$8X - 6X + 2X = (8 - 6 + 2)X = 4X,$$
$$3X^2Y - 5X^2Y = (3 - 5)X^2Y = -2X^2Y,$$
$$2X + X^2 - 3X = X^2 + 2X - 3X = X^2 + (2 - 3)X = X^2 - X.$$

---

* În limba greacă *poli* = mai multe; *nomos* = parte. Deci „polinom" are sensul de „alcătuit din mai multe părți".

Vom spune că **reducem termenii asemenea.**

Suma $2X + 3X$ nu este considerată polinom cu doi termeni, căci cele două monoame sînt asemenea.

Orice polinom format doar din doi termeni $\neq 0$ (ce nu sînt asemenea) se numește **binom.**

EXERCIȚII

1) (oral) Citiți termenii polinomului, apoi spuneți gradul total al fiecărui termen:

a) $-2XY^2 + 4X + 6XY$; b) $3X^5 - Y^5$; c) $4abc + 3abd + 2acd + bcd$.

2) Reduceți termenii asemenea:

a) $2X^3 - 6X + 8X^2 - 1{,}5X^3 + 5X + 1$; b) $\frac{1}{2}X^2Y - \frac{1}{3}X^2Y + \frac{1}{6}X^2Y$; c) $8a^5 - 3b^5 - 5a^5 + b^5$; d) $4Y^3 + Y^6 - 2Y^2 - 1 - 2Y^3 + 2Y^2$; e) $4 - 3{,}3X^2 - \frac{3}{4}X + 2 + \frac{13}{10}X^2 - 0{,}25X$.

3) Reduceți termenii asemenea, scriind mai întîi fiecare monom în formă canonică:

a) $2XX^2 + 3XX - 4X^2X - 2X^2$; b) $3XYX - 2YXY + 2X^2Y - 3XY^2 + YX^2$.

4) Reduceți termenii asemenea:

a) $10X + (-4X + 8Y) - 3X + (5X - 2Y)$; b) $20X + (80X - 15Y) + 5Z + (-40X + 10Y) + 15Z$; c) $(A + B - C) + (A - B + C) + (-A + B + C)$; d) $a + (-a - b + c) - a + (-a + b - c)$; e) $(X + Y - Z) - (X - Y + Z) + (-X + Y + Z) - (-X - Y + Z)$.

Să considerăm polinomul $P(X) = 5 + 3X^4 - 2X^2 + 4X^3$; cei patru termeni ai săi au gradele în X: 0, 4, 2 și 3. Să scriem altfel polinomul, aranjînd termenii în ordinea descrescătoare a gradelor:

$$P(X) = 3X^4 + 4X^3 - 2X^2 + 5.$$

Am scris astfel polinomul în formă canonică.

Forma canonică a unui polinom în X se obține scriind termenii săi în ordinea descrescătoare a gradelor în X; termenii polinomului se consideră a fi scriși în forma canonică (ca monoame).

Gradul unui polinom $\neq 0$ este cel mai mare dintre gradele monoamelor ce apar în scrierea sa în formă canonică.

De exemplu, în polinomul $5y^5 + 3x^4y - 2x^2y^4 + 4x^3$ apar două litere. Considerînd doar pe x ca nedeterminată, forma canonică a sa este: $3yx^4 + 4x^3 - 2y^4x^2 + 5y^5$, deci este un polinom de gradul 4 în x.

Considerînd doar pe y ca nedeterminată (x fiind deci considerată constantă), forma sa canonică este $5y^5 - 2x^2y^4 + 3x^4y + 4x^3$. Gradul său în y este 5, căci termenii săi au gradele în y; 5, 4, 1, 0.

Considerînd ambele litere ca nedeterminate, forma sa canonică este:

$$-2x^2y^4 + 5y^5 + 3x^4y + 4x^3$$

iar gradul său total este 6, căci gradele totale ale termenilor săi sînt 6, 5, 5, 3.

EXERCIȚIU REZOLVAT. Să scriem în formă canonică polinomul în X:

$$2XY^2 + 3X^2Y + 4X + 3X^2Y^2 + 5 + 2X^2 + Y.$$

Cercetăm mai întîi gradele în X ale celor șapte termeni ai polinomului: 1, 2, 1, 2, 0, 2, 0. Regrupăm în ordinea descrescătoare a gradelor, după ce am scris monoamele (în X) în formă canonică:

$$2Y^2X + 3YX^2 + 4X + 3Y^2X^2 + 5 + 2X^2 + Y,$$

$$(3YX^2 + 3Y^2X^2 + 2X^2) + (2Y^2X + 4X) + (5 + Y).$$

Scoatem factor comun în fiecare grupă:

$$(3Y + 3Y^2 + 2)X^2 + (2Y^2 + 4)X + (5 + Y).$$

Coeficientul lui X^2 este un polinom în Y; îl scriem în formă canonică: $3Y^2 + 3Y + 2$. Coeficientul lui X este scris în forma canonică. Scriem și **termenul liber** $5 + Y$ în formă canonică (ca polinom în Y) : $Y + 5$.

Astfel, polinomul inițial se scrie în formă canonică astfel: $(3Y^2 + 3Y + 2)X^2 + (2Y^2 + 4)X + (Y + 5)$.

EXERCIȚII

1) Reduceți termenii asemenea:

a) $8{,}6X + 2{,}2Y - 2\frac{1}{2}X - 4\frac{3}{4}X + 2{,}4X + \frac{7}{20}Y$; b) $X^3 + 2X^2 - 3X + 1 + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 2 + 3X^3 + 4X^2 - 2X + 5$; c) $8{,}25X + 3\frac{5}{8}Y - 1{,}6Z - 5\frac{5}{6}X - 1{,}25Y + 2\frac{2}{5}Z$.

2) Scrieți în formă canonică polinoamele:

a) $X^2 + Y^2 + XY$; b) $1 + X^2 + X + X^3$; c) $X^4 - 2X^2 + 1 + 4X^3$; d) $X^2 + Y^2 - X^2Y^2$; e) $2YX + Y^2 + Z^2 - X^2$; f) $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$; g) $X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2YZ + 2XZ$.

5. OPERAȚII CU POLINOAME

OPUSUL UNUI POLINOM

Monoamele $2X^3$ și $-2X^3$ sînt opuse unul altuia. Opusul lui $5aX^2$ este $-5aX^2$, iar opusul lui $-\sqrt{2}ab$ este $\sqrt{2}ab$.

În general, opusul monomului în nedeterminata X

$$cX^m$$

este monomul $-cX^m = (-c)X^m$.

Un polinom în nedeterminata X este o sumă de monoame în X. Opusul unui polinom în X are ca termeni opusele monoamelor ce formează polinomul. De exemplu, opusul lui $X^2 + 2X$ este polinomul $-X^2 - 2X$, iar opusul polinomului $-5aX^2 + bX + 1$ este polinomul $5aX^2 - bX - 1$.

Opusul unui polinom $P(X)$ se notează $-P(X)$. Putem scrie astfel: $-(X^2 + 2X) = -X^2 - 2X$, $-(-5aX^2 + bX + 1) = 5aX^2 - bX - 1$, $-(2XY - Y^3) = -2XY + Y^3$.

ADUNAREA POLINOAMELOR

Să considerăm polinoamele în nedeterminata X : $2X^2 - 1$ şi $X^2 + X + 1$. Avem:

$$(2X^2 - 1) + (X^2 + X + 1) = 2X^2 - 1 + X^2 + X + 1$$

De regulă, se obişnuieşte să se reducă termenii asemenea, scriind rezultatul în formă canonică. Astfel, pentru polinoamele de mai sus, avem

$$(2X^2 - 1) + (X^2 + X + 1) = 3X^2 + X.$$

În general, suma a două polinoame este polinomul ce se obţine făcînd suma termenilor celor două polinoame şi reducînd termenii asemenea.

Alt exemplu:

$$(2X^2 + 3X + 1) + (4X^2 - 5X - 2) + (X^2 + X + 3) = 2X^2 + 3X + 1 + 4X^2 - 5X - 2 + X^2 + X + 3 = 7X^2 - X + 2.$$

În general, în problemele practice, atît coeficienţii cît şi nedeterminatele polinoamelor reprezintă numere reale. De aceea, adunarea polinoamelor are aceleaşi proprietăţi ca şi adunarea numerelor reale (adică este comutativă, asociativă, iar 0 este element neutru).

A scădea un polinom $Q(X)$ din polinomul $P(X)$ revine la a aduna polinomul $P(X)$ cu opusul lui $Q(X)$:

$$P(X) - Q(X) = P(X) + (-Q(X))$$

Observaţii. 1) Gradul sumei (sau diferenţei) a două polinoame este mai mic sau egal decît gradele celor două polinoame.

2) Putem scrie $2X^2 + 1 = 3X^2 - X^2 + 1$, însă monoamele $3X^2$ şi $-X^2$ nu sînt termeni ai polinomului $2X^2 + 1$.

EXERCIŢII

1) Scrieţi în formă canonică opusele polinoamelor în X:

a) $2X^3 - X + 2$; b) $-2X^2 - X + 1$; c) $-2a^2X^2 + aX + 1$; d) $X^2Y + Y^2 - X^3$; e) $Y^3 - \frac{1}{2}XY^2 + X^2Y - \frac{1}{2}X^3$.

2) Adunaţi polinoamele:

a) $3X + 2Y$ şi $X - Y$; b) $Y^2 - 2Y + 3$ şi $-2Y^2 + Y - 2$; c) $5X^2 - 6X + a$ şi $-3X^2 - X + 1 - a$.

3) Efectuaţi calculele, scriind rezultatele în formă canonică:

a) $(X^2 - X + 1) - (X^2 + X - 1)$; b) $(6X - 2a) - (4X + a)$; c) $(X + a) + (X + b) + (X + c)$; d) $-13X^3 - (18X^2Y - 15X^3)$; e) $[9X^2 - 3Y^2 + Z^2) - (X^2 - 5Y^2 - 4Z^2)] + (5X^2 + 3Y^2 - 6Z^2)$.

4) Efectuaţi calculele:

a) $(8X^2 - 6XY - 9Y^2) + (9X^2 - 6XY + 8Y^2) - (15X^2 - 10XY - Y^2)$; b) $(X^3 - 2X^2Y + XY^3) - (X^2Y - 2XY^2 + Y^3)$;

c) $\left[\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c\right) - \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c\right)\right] - \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{5}b + \frac{1}{6}c\right)$.

5) Ce polinom trebuie adunat cu $2X^2 - 8X + 7$ pentru a obţine ca rezultat $2X^3 + X^2 - 6X + 9$?

6) Efectuaţi adunările:

a) $(4a - 5b + 6c - 7d) + (3a + 4b + 5c + 6d)$; b) $(a^2 + b^2 + 2ab) + (a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 - b^2)$; c) $\left(a^2 - \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}b^2\right) + \left(-\frac{1}{4}a^2 + ab + b^2\right) + \left(-a^2 + ab - \frac{1}{4}b^2\right)$.

7*) Dovediţi că suma dintre orice număr de patru cifre $\overline{abcd}$ şi răsturnatul său $\overline{dcba}$ este divizibilă prin 11.

8*) Scrieţi polinomul $X^3 - 3X^2Y - 3XY^2 + Y^3$ ca suma a două polinoame $\neq 0$, astfel încît în unul să nu apară litera X. În cîte moduri puteţi face aceasta? Dar dacă cerem ca toate monoamele (în ambele polinoame) să aibă coeficienţi întregi?

ÎNMULŢIREA POLINOAMELOR

Coeficienţii şi nedeterminatele unui polinom reprezintă de obicei în problemele practice numere reale. Însă înmulţirea numerelor reale este distributivă faţă de adunarea numerelor reale:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

şi în general $a \cdot (b + c + d + \ldots + l) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + \ldots + a \cdot l$ (priviţi figura II.6 şi interpretaţi membrul stîng şi membrul drept al acestei egalităţi ca arii!).

De aceea, înmulţirea unui monom cu un polinom se defineşte astfel:

monom · polinom = monom · (termen 1 + termen 2 + ...) = = monom · termen 1 + monom · termen 2 + ...

De exemplu:

$$(-4X) \cdot (3X^2 + 2X) = (-4X) \cdot (3X^2) + (-4X) \cdot 2X = -12X^3 - 8X^2.$$

Să observăm că am înmulţit un monom de grad 1 cu un polinom de gradul 2 şi am obţinut ca rezultat un polinom de gradul $3 = 1 + 2$.

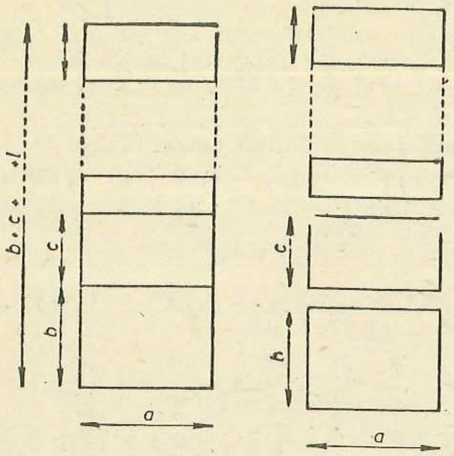


Fig. II.6

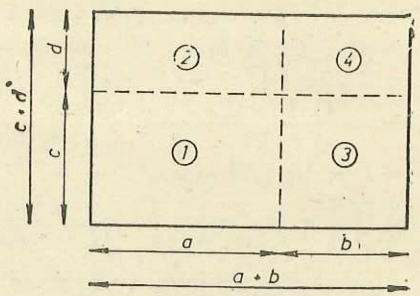


Fig. II.7

Alt exemplu:

$$a^2b^2 \cdot (4a + b) = a^2b^2 \cdot 4a + a^2b^2 \cdot b = 4a^3b^2 + a^2b^2$$

adică

$$a^2b^2 \cdot (4a + b) = 4a^3b^2 + a^2b^3.$$

Ce legătură observați între gradele în a ale factorilor din membrul stîng și gradul în a al rezultatului; Dar între gradele totale?

Alte exemple:

$X^2 \cdot (X^2 - 7X + 1) = X^2 \cdot X^2 - X^2 \cdot 7X + X^2 \cdot 1 = X^4 - 7X^3 + X^2$;

$2a \cdot (5X^2 - 3Y) = 2a \cdot 5X^2 - 2a \cdot 3Y = 10aX^2 - 6aY$;

$3a^2X^3 \cdot (5a^2X - 4a) = 3a^2X^3 \cdot 5a^2X - 3a^2X^3 \cdot 4a = 15a^4X^4 - 12a^3X^3$.

Să privim figura II.7: dreptunghiul are lungimea $a + b$, iar lățimea $c + d$; aria sa este deci $(a + b) \cdot (c + d)$. El a fost împărțit în patru dreptunghiuri mai mici, de dimensiuni a și c, a și d, b și c, b și d, ale căror arii respectiv $a \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot c$, $b \cdot d$.

Putem scrie

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Observăm că fiecare termen al sumei $a + b$ apare în membrul drept ca factor pe lîngă fiecare termen al sumei $c + d$.

REGULĂ. Pentru a înmulți două polinoame, procedăm astfel: facem suma termenilor obținuți din înmulțirea fiecărui termen al primului polinom cu fiecare termen al celui de-al doilea polinom.

De exemplu: $(X + 4) \cdot (X^2 + 3X + 2) = X \cdot X^2 + X \cdot 3X + X \cdot 2 + 4 \cdot X^2 + 4 \cdot 3X + 4 \cdot 2 = X^3 + 3X^2 + 2X + 4X^2 + 12X + 8$.

Se obișnuiește să se reducă termenii asemenea, scriind rezultatul în formă canonică:

$$(X + 4) \cdot (X^2 + 3X + 2) = X^3 + 7X^2 + 14X + 8.$$

Putem face înmulțirea și în felul următor, scriind unul sub altul termenii de același grad:

$$\begin{aligned}(X + 4) \cdot (X^2 + 3X + 2) &= X^3 + 3X^2 + 2X \\ &\quad\ \ + 4X^2 + 12X + 8 \\ \hline &= X^3 + 7X^2 + 14X + 8\end{aligned}$$

Alt exemplu:

$$\begin{aligned}(a^6 + a^4 + a^2) \cdot (a^2 + a - 1) &= a^8 + a^7 - a^6 \\ &\quad + a^6 + a^5 - a^4 \\ &\quad + a^4 + a^3 - a^2 \\ \hline &= a^8 + a^7 + a^5 + a^3 - a^2\end{aligned}$$

Deci $(a^6 + a^4 + a^2) \cdot (a^2 + a - 1) = a^8 + a^7 + a^5 + a^3 - a^2$.

Alt exemplu:

$$\begin{aligned}(X^4 + X^3Y + X^2Y^2) \cdot (X - Y) &= X^5 - X^4Y \\ &\quad + X^4Y - X^3Y^2 \\ &\quad + X^3Y^2 - X^2Y^3 \\ \hline &= X^5 - X^2Y^3\end{aligned}$$

Deci $(X^4 + X^3Y + X^2Y^2) \cdot (X - Y) = X^5 - X^2Y^3$.

Primul factor din membrul stîng are gradul 4 în X; al doilea factor are gradul 1 în X; rezultatul (din membrul drept) are gradul $5 = 4 + 1$ în X.

În general, dacă înmulțim un polinom de gradul m cu un polinom de gradul n, atunci produsul lor va avea gradul $m + n$.

Să mai luăm două exemple:

1) $(a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f) = [(a + b) \cdot (c + d)] \cdot (e + f) = (ac + ad + bc + bd) \cdot (e + f) = ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf$.

Același rezultat l-am fi obținut și dacă efectuăm înmulțirile de la dreapta spre stînga: $(a + b) \cdot [(c + d) \cdot (e + f)]$. Verificați (!).

2) $(3X^2 - 2XY)^2 = (3X^2 - 2XY) \cdot (3X^2 - 2XY) = 3X^2 \cdot 3X^2 + 3X^2 \cdot (-2XY) - 2XY \cdot 3X^2 - 2XY \cdot (-2XY) = 9X^4 - 6X^3Y - 6X^3Y + 4X^2Y^2 = 9X^4 - 12X^3Y + 4X^2Y^2$.

Înmulțirea polinoamelor are aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor reale (este comutativă, asociativă, distributivă față de *adunarea polinoamelor*, iar constanta 1 este element neutru).

EXERCIȚII

1) Efectuați înmulțirile, scriind rezultatele în formă canonică:

a) $(X + 2) \cdot (X + 1)$; b) $(X + 4) \cdot (X + 3)$; c) $(X + 7) \cdot (X + 3)$; d) $(X + 5) \cdot (X + 2)$; e) $(X + 8) \cdot (X + 3)$; f) $(X + 5) \cdot (X + 3)$; g) $(X + 6) \cdot (X + 2)$.

2) Prin ce diferă între ele rezultatele înmulțirilor:
a) $(X+3)\cdot(X+4)$; b) $(X+3)\cdot(X-4)$; c) $(X-3)\cdot(X+4)$; d) $(X-3)\cdot(X-4)$?

3)) Efectuați înmulțirile: a) $(X+5)(X-3)$; b) $(X-4)(X-6)$; c) $(m+5)(m-4)$; d) $\left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)$; e) $\left(X+\frac{3}{4}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)$; f) $(X+2)\left(X+\frac{1}{2}\right)$; g) $\left(X-\frac{2}{3}\right)\left(X+\frac{3}{4}\right)$; h) $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{2}{3}\right)$.

4) Efectuați:
a) $(2X+1)(3X+1)$; b) $(2X+3)(3X+2)$; c) $(4X+1)(X+4)$; d) $(10X+3)(3X+10)$; e) $(7X-3)(3X-7)$; f) $(4m+3)(2m-5)$; g) $\left(a+\frac{2}{3}\right)(3a-2)$.

5) Efectuați:
a) $(X+0{,}5)(X+0{,}3)$; b) $(a+2{,}4)(a+0{,}4)$; c) $(m-n+p)(3m+2n)$; d) $(4X-1)(3X-Y+3)$; e) $(4X+5Y+7Z)(3Z+7Y+5Z)$; f) $(2m+5n-p)(3m-6n+5p)$; g) $\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b\right)$; h) $\left(5X^2-\frac{1}{2}X+1\right)(3X^2-2X)$.

6) Arătați că produsul polinoamelor ce urmează este un binom:
a) X^2+Y^2 și $X^6-X^4Y^2+X^2Y^4-Y^6$; b) X^3-Y^3 și $X^6+X^3Y^3+Y^6$.

7) Efectuați înmulțirile:
a) $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)$; b) $(X-a)(X-b)(X-c)$; c) $(X+4Y-Z)(X-4Y+Z)$.

8) Ridicați la pătrat:
a) $-2X^3Y^2$; b) $\frac{3}{4}X^2Y$; c) $-\frac{3}{4}X^4Y^3$; d) $-12X^2Y^5$.

9) Efectuați:
a) $(11X^4+4X^3-X^2-2X-1)(3X^2-2X+1)$;
b) $(24X^3-11X^2+4X-1)(5X^2+4X+1)$; c) $(X^2+Y^2+Z^2+XY+YZ-XZ)(X-Y+Z)$; d) $(X^2-1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)$.

6. FORMULE SPECIALE

SCOATEREA FACTORULUI COMUN

Formula ce urmează ne este cunoscută încă din clasa a V-a; ea exprimă distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$$

Această formulă se aplică atît numerelor, cît și polinoamelor. Cu alte cuvinte, în ea literele a, b și c pot reprezenta fie numere, fie polinoame.

Formula este folosită foarte des „în sens invers“;

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$$

Scrisă în această formă, ea se numește **formula de scoatere a factorului comun.**

Explicație. În membrul stîng, a este factor atît pe lîngă b, cît și pe lîngă c; de aceea este numit factor *comun.*

Folosirea acestei ultime formule ne permite să economisim calcule. Să analizăm membrul stîng al formulei. Pentru a-l calcula, va trebui să efectuăm înmulțirea $a\cdot b$, apoi înmulțirea $a\cdot c$, apoi adunarea, conform algoritmului*:

Pasul 1. $s=a\cdot b$ (citește: „efectuez înmulțirea $a\cdot b$, notez rezultatul ei cu s“);

Pasul 2. $t=a\cdot c$;

Pasul 3. Rezultat $=s+t$.

Pentru a calcula membrul drept al formulei, va trebui să efectuăm mai întîi adunarea $b+c$, apoi înmulțirea, conform algoritmului:

Pasul 1. $s=b+c$;

Pasul 2. Rezultat $=a\cdot s$.

Observăm că dacă alegem al doilea mod de calcul (în locul primului) *economisim o înmulțire.*

Datorită faptului că scăderea se definește prin adunare (pentru numere reale și polinoame) avem și formula

$$\boxed{a\cdot b-a\cdot c=a\cdot(b-c)}$$

Să reținem și formula pe care o obținem datorită comutativității înmulțirii:

$$\boxed{b\cdot a+c\cdot a=(b+c)\cdot a}$$

De asemenea, să reținem și formula

$$\boxed{a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d+\ldots+a\cdot l=a\cdot(b+c+d+\ldots+l)}$$

(în membrul stîng apar cel puțin trei termeni).

EXEMPLE. Folosind formulele de mai sus, vom putea scrie:

$$6X+6Y=6(X+Y);\quad 3X-3Y=3(X-Y);$$

$$3X-6=3\cdot X-3\cdot 2=3(X-2);\ 3X+2=3\cdot X+3\cdot\frac{2}{3}=3\left(X+\frac{2}{3}\right);$$

$$XY-X=X\cdot Y-X\cdot 1=X(Y-1);\ aX-aY+aZ=a(X-Y+Z);$$

$$X^4-X^2=X^2\cdot X^2-X^2\cdot 1=X^2(X^2-1).$$

* algoritm = șir de pași, fiecare pas constînd dintr-o operație elementară, a căror efectuare ne conduce la rezultatul dorit.

Alt exemplu. Fie polinomul $p(X, Y) = X^2 + 2X + XY + 2Y$; îl putem scrie, grupînd termenii doi cîte doi: $p(X, Y) = (X^2 + 2X) + (XY + 2Y)$. Scoțînd factor comun în fiecare dintre paranteze, obținem $p(X, Y) = (X + 2)X + (X + 2)Y$. Acum $X + 2$ este factor comun (!), deci $p(X, Y) = (X + 2)(X + Y)$. Așadar $X^2 + 2X + XY + 2Y = (X + 2)(X + Y)$.

EXERCIȚII

1) Scoateți factor comun:

a) $aX + X^2$; b) $5X - 10X^2$; c) $15X - 6X^2$; d) $8Y - 20Y^2$; e) $6aX^2 + 9X^3$; f) $aX^2 + 2bX$;

2) Scoateți factor comun:

a) $3(X - 1)^2 - 2X(X - 1)$; b) $6X^2 + 9aX + 2X + 3a$; c) $12X^3Y^3 - 8X^5X^2 + 16X^2Y^4$; d) $(2X + 3)(3X + 5) + (2X + 3)(3X + 1)$; e) $2Y(Y - 2X)^2 - (Y - 2X)^3$.

3) Scoateți factor comun:

a) $a(X - 1) + b(X - 1)$; b) $(4X + 3)(X - 2) + (X - 2)^2$; c) $(X - 4)^2 - (4 - X)(3X + 1)$; d) $8XY^3 - 12X^2(X^2 + Y^2)$; e) $(X + Y)X^2 + (X + Y)\cdot Y^5$; f) $XY(X + Y)^3 + Y^2(X + Y)^2(2X - Y)$.

4) Scoateți factor comun:

a) $abc - aX^2 + bcY - X^2Y$; b) $X^3 + X^2Y + XY^2 + Y^3$; c) $X^3 + 2X^2Y + XY^2 + 2Y^3$; d) $(2X - 3)(X^2 + 2) + (2X - 3)(X^2 + X) - (2X - 3)(3X + 4)$.

PĂTRATUL UNUI BINOM

Reamintim că am numit **binom** orice polinom format doar din doi termeni (care nu sînt asemenea între ei). Să notăm acești termeni cu a și b. Atunci: $(a + b)^2 = (a + b)\cdot(a + b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$.

Deci $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sau $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Această formulă se citește astfel: *pătratul unui binom se obține însumînd pătratele termenilor cu dublul produs al termenilor.*

Și această formulă este folosită „în sens invers“

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

Scrisă sub această formă, ea se numește **formula de restrîngere** a pătratului unui binom.

Pentru a o putea folosi, va trebui să recunoaștem: 1) pătratul fiecărui termen și 2) dublul produs al termenilor. Vom fi în stare să facem acest lucru numai exersîndu-ne pe multe exemple.

De exemplu, fie polinomul $X^2 + 6X + 9$; recunoaștem că $9 = 3^2$, iar $6X = 2\cdot X\cdot 3$; astfel, polinomul poate fi restrîns $(X + 3)^2$.

La fel, în polinomul $4X^2 + 12XY + 9Y^2$ recunoaștem: $4X^2 = (2X)^2$; $9Y^2 = (3Y)^2$; $12XY = 2\cdot 2X\cdot 3Y$. Astfel, putem scrie restrîns: $(2X + 3Y)^2$.

Dimpotrivă, polinomul $X^2 + 3X + 9$ nu poate fi restrîns, căci $9 = 3^2$, dar $3X \neq 2\cdot X\cdot 3$(!)

Și formula de restrîngere a pătratului unui binom ne permite să economisim calcule. Pentru a calcula membrul stîng, trebuie să efectuăm înmulțirea $a\cdot a$, apoi înmulțirea $a\cdot b$, apoi dublarea, apoi înmulțirea $b\cdot b$ și în sfîrșit două adunări, conform algoritmului:

Pasul 1. $s = a\cdot a$;

Pasul 2. $t = a\cdot b$;

Pasul 3. $u = 2\cdot t$;

Pasul 4. $v = b\cdot b$;

Pasul 5. $w = s + u$;

Pasul 6. *Rezultat* $= w + v$.

Pentru a calcula membrul drept, va trebui să efectuăm doar o adunare și o înmulțire:

Pasul 1. $s = a + b$;

Pasul 2. *Rezultat* $= s\cdot s$.

Avantajele sînt evidente.

Să privim cu atenție și calculul următor:

$(a - b)^2 = (a - b)\cdot(a - b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - 2ab + b^2$.

Deci $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, iar $(a + b^2) = a^2 + 2ab + b^2$.

Observați deosebirile dintre aceste două formule.

De reținut:

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

EXERCIȚII

1) Scrieți în formă canonică polinoamele în X:

a) $(X + 7)^2$; b) $(X - 3)^2$; c) $(2 - X)^2$; d) $(4X - 3)^2$; e) $\left(3 - \frac{1}{2}X\right)^2$; f) $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2$; g) $(2X + 1)^2$; h) $\left(\frac{1}{2}X + 1\right)^2$; j) $\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{3}\right)^2$.

2) Ce termen lipsește pentru a avea pătratul unui binom:

a) $X^2 + 4X$; b) $9X^2 + 6X$; c) $X^2 - 12X$; d) $X^2 + 9$; e) $4X^2 + 1$; f) $X^2 + 25$?

3) Restrîngeți:

a) $X^2 - 4X + 4$; b) $9X^2 + 6X + 1$; c) $X^2 - 8X + 16$; d) $25X^2 + 20X + 4$; e) $16X^2 - 8X + 1$.

4) Restrîngeți:

a) $X^2 - 4XY + 4Y^2$; b) $36X^2 + 60XY + 25Y^2$;

c) $9X^2 - 12XY^2 + 4Y^4$; d) $X^4 - 2X^2Y + Y^2$; e) $\frac{1}{4}X^2 + X + 1$; f) $9X^2 - 3XY + \frac{1}{4}$; g) $X^4Y^2 + 8X^2Y^2 + 16Y^4$.

APLICAȚIE. Calculul aproximativ al pătratelor unor numere zecimale.

Fie numărul zecimal 1,01; avem $1{,}01^2 = 1{,}0201$. În practică nu avem (de foarte multe ori) nevoie de precizie atît de mare; în cele mai multe cazuri este suficient să calculăm cu eroare de o miime. Putem spune astfel că $1{,}01^2$ este aproximativ 1,02, cu eroare de 0,0001 (!).

Să scriem $1{,}01^2 = (1 + 0{,}01)^2$; folosind formula de ridicare la pătrat a binomului și neglijînd termenul $0{,}01^2 = 0{,}0001$ (deoarece este mic, comparativ cu ceilalți doi), obținem că $1{,}01^2$ este aproximativ $1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$. Acest calcul îl putem face în minte.

Alt exemplu: $0{,}99^2 = (1 - 0{,}01)^2$ este aproximativ $1 - 0{,}02 = 0{,}98$, din aceleași motive.

EXERCIȚII

1) (oral) Aproximați: $1{,}02^2$; $0{,}98^2$; $1{,}03^2$; $0{,}97^2$; $2{,}01^2$; $1{,}99^2$; $3{,}01^2$; $2{,}99^2$.

2) (oral) Un pătrat are lungimea laturii de 29,8 cm. Aflați aria sa, în centimetri pătrați.

DIFERENȚA PĂTRATELOR

Să înmulțim suma $a + b$ cu diferența $a - b$. Obținem $(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - \underline{ab} + \underline{ab} - b^2 = a^2 - b^2$.

Deci: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Această formulă se citește astfel: *produsul sumei cu diferența este egal cu diferența pătratelor.*

Și această formulă este folosită, de regulă, în sens invers:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Scrisă în această formă, ea se numește **formula de descompunere în factori a diferenței pătratelor.**

De exemplu:

$4X^2 - 9Y^2 = (2X)^2 - (3Y)^2 = (2X + 3Y)(2X - 3Y)$; la fel

$2X^2 - Y^2 = (\sqrt{2}X)^2 - Y^2 = (\sqrt{2}X + Y)(\sqrt{2}X - Y)$.

Formula de mai sus ne permite să facem economie de timp în calcule. Astfel, pentru a calcula membrul sting va trebui să efectuăm două înmulțiri și o adunare (!), conform algoritmului:

Pasul 1. $s = a \cdot a$;

Pasul 2. $t = b \cdot b$;

Pasul 3. Rezultat $= s - t$.

Pentru a calcula membrul drept, va trebui să efectuăm două adunări și o înmulțire:

Pasul 1. $s = a + b$;

Pasul 2. $t = a - b$;

Pasul 3. Rezultat $= s \cdot t$.

Însă, în cele mai multe cazuri, o adunare se efectuează în timp mai scurt decît o înmulțire.

EXERCIȚII

1) Calculați:

a) $(X + 7)(X - 7)$; b) $\left(X + \frac{2}{3}\right)\left(X - \frac{2}{3}\right)$; c) $\left(\frac{3}{2} + X\right)\left(\frac{3}{2} - X\right)$; d) $(-X + Y)(X + Y)$; e) $(-X + 2)(X + 2)$.

2) Descompuneți în factori:

a) $X^2 - 4$; b) $X^2 - 9$; c) $X^2 - 25$; d) $X^2 - 16$; e) $X^2 - \frac{9}{4}$; f) $\frac{25}{16} - X^2$.

3) Calculați:

a) $(2X + 1)(2X - 1)$; b) $(3X + 2)(3X - 2)$; c) $(2a - 1)(2a + 1)$; d) $\left(\frac{1}{2}X + 3Y\right)\left(\frac{1}{2}X - 3Y\right)$; e) $(s + \sqrt{3}t)(s - \sqrt{3}t)$; f) $(\sqrt{2}X - \sqrt{3}Y)(\sqrt{2}X + \sqrt{3}Y)$; d) $(X^5 + 1)(X^5 - 1)$.

4) Descompuneți în factori:

a) $X^2 - 4Y^2$; b) $4X^2 - 25a^2$; c) $\frac{1}{4}X^2 - Y^2$; d) $m^2 - 7$; e) $a^2 - 2b^2$; f) $a^2 - 3b^2$.

5*) Descompuneți în factori:

a) $(X + Y)^2 - X^2$; b) $X^2 - (Y + Z)^2$; c) $(u + v)^2 - (u - v)^2$; d) $X^4 - Y^4$; e) $(t^2 + 1)^2 - (t^2 - 1)^2$.

6) Descompuneți în factori:

a) $9X^2 - 4$; b) $100X^2 - 64$; c) $49Y^2 - 3X^4$; d) $\frac{1}{9}X^2 - \frac{1}{4}$.

7) Descompuneți în factori:

a) $(X+2Y)^2-(X-Y)^2$; b) $(X+Y-1)^2-(1-X+Y)^2$; c) $X^2-(X+Y)^2$; d) $(X-1)^2-9$.

8) Calculați mintal:

a) $201 \cdot 199$; b) $105 \cdot 95$; c) $21 \cdot 19$.

7. DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI A UNUI POLINOM

Știm din clasa a V-a că orice număr natural poate fi scris descompus ca produs de puteri de factori primi. De exemplu, 10 se poate scrie $2 \cdot 5$, 24 se poate scrie $2^3 \cdot 3$, iar 144 se poate scrie $2^4 \cdot 3^2$. De asemenea $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Același lucru se poate spune și despre polinoame. Dar descompunerea în factori a unui polinom este, în general, o operație dificilă. Fiecare polinom are modul său propriu de descompunere, iar obișnuința calculului se obține doar după un mare număr de exerciții rezolvate. Vom prezenta cîteva tehnici simple de descompunere în factori.

În lecțiile trecute am făcut cîteva descompuneri în factori. Cea mai simplă este următoarea:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

numită scoaterea factorului comun.

Exemplul 1. Polinomul $X^2 + X$ are doi termeni; în fiecare dintre ei apare ca factor X. Putem să-l scoatem factor comun:

$$X^2 + X = X \cdot X + X \cdot 1 = X \cdot (X + 1).$$

Am descompus astfel polinomul în factori.

Exemplul 2. Polinomul în X: $aX + X$ are doi termeni, dar ei sînt asemenea (!). Scoțînd factor comun:

$$aX + X = a \cdot X + 1 \cdot X = (a+1)X,$$

l-am scris de fapt ca monom în X, cu coeficientul $a + 1$.

Exemplul 3. Fie polinomul $p(X) = 2X^2 + X$; îl putem descompune în factori astfel:

$p(X) = (2X+1)X$ sau astfel: $p(X) = 2X\left(X + \dfrac{1}{2}\right)$.

OBSERVAȚIE. Descompunerea în factori a unui polinom cu coeficienți numere reale **nu este unică** (!)

Exemplul 4. Polinomul $X^4 + X^3 + X^2$ are trei termeni; în fiecare dintre ei apare ca factor X^2. Scoțîndu-l factor comun: $X^4 + X^3 + X^2 = X^2 \cdot X^2 + X^2 \cdot X + X^2 \cdot 1 = X^2(X^2 + X + 1)$ am descompus polinomul în factori.

Exemplul 5. Polinomul $X^2Y - 2XY^2 + XY$ se scrie descompus în factori astfel: $XY(X - 2Y + 1)$, dar și astfel: $2XY\left(\dfrac{1}{2}X - Y + \dfrac{1}{2}\right)$.

Exemplul 6. Fie polinomul în X: $(a+b)X^2 + (a+b)X$. Să observăm că polinomul are doi termeni, ce nu sînt asemenea între ei (primul termen are gradul 2, al doilea are gradul 1). Scoțînd factor comun pe X, îl putem scrie descompus în factori: $[(a+b)X + a + b]X$. Dar, la fel cum am procedat în exemplul 3 cu constanta 2, putem proceda și aici cu constanta $a + b$. Polinomul poate fi scris descompus în factori și astfel:

$$(a+b)X(X+1).$$

Ambele descompuneri sînt corecte.

Exemplul 7. Fie polinomul $p(X, Y) = XY - 2X + Y - 2$. Să-l descompunem în factori. Grupăm termenii doi cîte doi: $p(X, Y) = (XY - 2X) + (Y - 2)$. Scoatem factor comun pe X în prima paranteză: $p(X, Y) = X(Y-2) + (Y-2)$. Scoatem acum factor comun pe $Y - 2$; polinomul devine $p(X,Y) = (X+1)(Y-2)$; l-am descompus astfel ca produs al factorilor $X + 1$ și $Y - 2$.

Alte tipuri de descompuneri în factori se bazează pe formula de restrîngere a pătratului unui binom:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

și pe formula $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$

Exemplul 1. Fie polinomul în X: $aX^2 + 2aX + a$; scoatem factor comun constanta a: $a(X^2 + 2X + 1)$; restrîngînd, polinomul se scrie descompus în factori astfel: $a(X+1)^2$.

Exemplul 2. Fie polinomul $16X^3 - 8X^2 + X$. În fiecare dintre cei trei termeni ai săi apare ca factor comun X; vom scrie astfel: $(16X^2 - 8X + 1)X$. Să observăm că între paranteze avem $16X^2 - 8X + 1 = (4X)^2 - 2 \cdot 4X + 1 = (4X - 1)^2$. Deci polinomul se descompune astfel: $(4X-1)^2X$.

Exemplul 3. Fie polinomul $a^2x - 4x$. Considerat ca polinom în nedeterminata x, acest polinom este format din doi termeni asemenea. Îl putem scrie ca monom în x: $(a^2 - 4)x$, cu coeficientul $a^2 - 4$.

Dar, considerat ca polinom în nedeterminata a, el se va scrie descompus în factori astfel: $x(a+2)(a-2)$.

Exemplul 4. Fie polinomul $X^3 - 9X$; scoțînd factor comun pe X, scriem $(X^2 - 9)X$. Însă $X^2 - 9 = X^2 - 3^2 = (X+3)(X-3)$, deci vom putea scrie polinomul descompus astfel: $(X+3)(X-3)X$.

Exemplul 5. Polinomul $X^4 - 1$ se descompune în factori astfel:

$$X^4 - 1 = (X^2)^2 - 1^2 = (X^2+1)(X^2-1) = (X^2+1)(X+1)(X-1).$$

Exemplul 6. Polinomul $(X-1)^2 + 4X$ se descompune în factori astfel: mai întîi ridicăm la pătrat: $(X^2 - 2X + 1) + 4X$; reducem apoi termenii asemenea: $X^2 + 2X + 1$; regrupăm: $(X+1)^2$.

Exemplul 7. Polinomul $X^2 + 3X + 2$ se descompune astfel: $X^2 + 3X + 2 = X^2 + 2X + X + 2 = (X+2)X + (X+2) = (X+2)(X+1)$; la fel: $X^2 + 5X + 6 = X^2 + 2X + 3X + 6 = (X+2)X + 3(X+2) = X(X+2) + 3(X+2) = (X+3)(X+2)$, și $X^2 - X - 2 = X^2 + X - 2X - 2 = X(X+1) - 2(X+1) = (X-2)(X+1)$.

În general, polinomul $X^2 + (a+b)X + ab$ se descompune în factori astfel:

$$X^2 + aX + bX + ab = X(X+a) + b(X+a) = (X+b)(X+a) =$$
$$= (X+a)(X+b).$$

Polinomul $X^4 + 1$ se descompune în factori prin completarea pătratului unui binom:

$$X^4 + 1 = (X^4 + 2X^2 + 1) - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 + 1 +$$
$$+ \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X) = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori:

a) $9X^3 - X$; b) $X^3 - 9X^2Y$; c) $X^2 - 9XY^2$; d) $16X - 9XY^2$; e) $4X^2Y - Y$; f) $4X^3 - XY^2$; g) $9X^2Y - YZ^2$.

2) Descompuneți în factori:

a) $X^2 + 8X + 16$; b) $12X^2 + 12X + 3$; c) $4X^4 + 4X^2 + 1$; d) $X^3 + 4X^2 + 4X$; e) $2X^4 + 12X^3 + 18X^2$; f) $3X^2 - 12X^2 + 12X$.

3) Descompuneți în factori:

a) $X^2 + 3X + 2$; b) $X^2 + 5X + 4$; c) $X^2 - 5X + 6$; d) $X^2 - 2\sqrt{2}X + 2$; e) $X^2 - 2\sqrt{3}X + 3$; f) $2X^2 + 4\sqrt{2}X + 4$; g) $X^4 + Y^2$; h) $X^4 - 4Y^2$; i) $X^4 - 2Y^2$; j) $X^4 - 81$; k) $X^8 - Y^8$; l) $81X^4 - 16Y^4$.

4) Descompuneți în factori:

a) $\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)^2$ b) $(X^2 - 3X + 1)^2 - 1$; c) $(2X - 3)(X - 1)^2 - 4(2X - 3)$; d) $(X - 3)(X^2 + 1) + 2X(X - 3)$; e) $(3X - 1)^2 - 25$; f) $(X + 2)^2 - (3 - 2X)^2$.

5*) Descompuneți în factori:

a) $(X - 2)^4 + (X - 2)^3 + (X - 2)^2 + (X - 2)$; b) $(X + Y)^2 - (Z + T)^2 + (X + Z)^2 - (Y + T)^2$; c) $(aX + bY)^2 + (aY - bX)^2$; d) $X^4 - X^2 + 1$.

8. ÎNLOCUIREA NEDETERMINATELOR PRIN POLINOAME

Fie de exemplu polinomul $X + 1$. Să înlocuim variabila (nedeterminata) X prin polinomul $Y^2 + Y + 1$, în altă variabilă Y. Ca rezultat obținem polinomul în Y: $(Y^2 + Y + 1) + 1 = Y^2 + Y + 2$.

Să înlocuim pe X cu polinomul în două variabile z și t: $z^2 + zt$; obținem ca rezultat $(z^2 + zt) + 1 = z^2 + zt + 1$, care este un polinom în z și t.

Fie polinomul $P(X) = X^2 + 2X$; înlocuind variabila X prin polinomul în Y: $Y^2 + 1 = Q(Y)$, obținem:

$P = (Y^2 + 1)^2 + 2(Y^2 + 1) = (Y^4 + 2Y^2 + 1) + 2Y^2 + 2 = Y^4 + 4Y^2 + 3$; se scrie $P(Q(Y)) = Y^4 + 4Y^2 + 3$.

Să înlocuim variabila X prin polinomul în Y: $2Y - 1 = R(Y)$; obținem $P = (2Y - 1)^2 + 2(2Y - 1) = 4Y^2 - 4Y + 1 + 4Y - 2 = 4Y^2 - 1$; se scrie $P(R(Y)) = 4Y^2 - 1$.

OBSERVAȚIE. Notația $P(Y)$ înseamnă $Y^2 + 2Y$, care nu este același lucru cu $P(Q(Y))$, sau cu $P(R(Y))$. Putem scrie:

$$P(Q(Y)) = Q(Y)^2 + 2Q(Y), \text{ sau } P(R(Y)) = R(Y)^2 + 2R(Y).$$

Înlocuind variabila X prin polinomul $z + t = S(z,t)$, în nedeterminatele z și t, obținem:

$P = (z + t)^2 + 2(z + t) = (z^2 + 2zt + t^2) + 2z + 2t = z^2 + 2zt + t^2 + 2z + 2t.$

Se scrie $P(S(z,t)) = z^2 + 2zt + t^2 + 2z + 2t$.

Înlocuind variabila X prin polinomul constant 3, obținem $P = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$; se scrie $P(3) = 15$. Se spune că 15 este **valoarea polinomului** P în constanta 3.

Fie polinomul $p(X) = X^3 + 4X^2 + 3$; înlocuind nedeterminata (variabila) X prin constanta 2, obținem polinomul constant $2^3 + 4 \cdot 2^2 + 3 = 8 + 16 + 3 = 27$. Notăm $p(2) = 27$. Spunem că 27 este valoarea polinomului p în 2.

Înlocuind în p nedeterminata X cu constanta 0, obținem $p(0) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 3 = 3$. La fel, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 = 4\frac{1}{8}$; $p(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + 3 = -8 + 16 + 3 = 11$.

Astfel, valoarea lui p în 0 este 3; în $\frac{1}{2}$ este $4\frac{1}{8}$, în -2 este 11 și, așa cum am văzut, în 2 este 27.

Observăm că putem obține valoarea polinomului p în orice constantă c și că avem $p(c) = c^3 + 4c^2 + 3$. Calculul valorii $p(c)$ se face conform algoritmului:

Pasul 1. $s = c \cdot c$ (aceasta înseamnă că vom calcula produsul $c \cdot c$ și-l vom nota cu s);

Pasul 2. $t = c \cdot s$;

Pasul 3. $u = 4 \cdot s$;

Pasul 4. $v = t + u$;

Pasul 5. $p(c) = v + 3$.

Deci, trebuie să efectuăm trei înmulțiri și două adunări. Există și un alt algoritm, care ne permite economisirea unei înmulțiri. Acest algoritm se bazează pe scrierea $p(c) = (c+4)c^2 + 3$ și este următorul:

Pasul 1. $s = c + 4$;

Pasul 2. $t = c \cdot c$;

Pasul 3. $u = s \cdot t$;

Pasul 4. $p(c) = u + 3$.

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(c+4)}_{s}\cdot\underbrace{c^2}_{t}}_{u}+3}_{p(c)}$

OBSERVAȚIE. Într-un algoritm, în fiecare pas se execută o singură operație elementară. Un automat (o mașină de calcul) care știe să efectueze adunări și înmulțiri, va putea fi „programat" să execute acest algoritm.

Fie polinomul în două nedeterminate X și Y:

$$p(X, Y) = X^2 + Y.$$

Înlocuind nedeterminata X cu 1, iar nedeterminata Y cu 3, obținem $p(1, 3) = 1^2 + 3 = 4$. La fel, $p\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = 1$, $p(1, -1) = 1^2 + (-1) = 0$.

Înlocuind numai nedeterminata X cu 1, obținem polinomul în Y:

$$p(1, Y) = 1 + Y.$$

Înlocuind nedeterminata X cu polinomul $z + 1 = q(z)$, iar nedeterminata Y cu polinomul $z + 2t = r(z, t)$ obținem polinomul în z și t: $(z+1)^2 + (z + 2t) = z^2 + 3z + 2t + 1$, care se notează $p(q(z), r(z, t))$.

OBSERVAȚIE. În cărțile mai vechi, în loc de „înlocuim pe X cu 1" se scrie uneori „$X = 1$". Încercați să nu folosiți această notație. În cărțile mai noi veți întîlni notațiile: „$1 \to X$" sau „$X \leftarrow 1$", amîndouă citindu-se: „dăm lui X valoarea 1", sau „înlocuim pe X cu 1".

EXERCIȚIU REZOLVAT. Fie polinomul $P(Z) = (2Z - 1)(Z + 1) + 2\left(Z^2 + \frac{17}{32}\right)$.

a) Scrieți algoritmul pentru calculul valorii polinomului în constanta c.

b) Descompuneți polinomul în factori.

c) Scrieți algoritmul pentru calculul valorii polinomului în c, folosind descompunerea în factori.

d) Calculați $P\left(\frac{1}{2}\right)$, $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ și $P\left(\frac{1}{4}\right)$. Ce algoritm folosiți?

Rezolvare. a) Algoritmul este următorul:

Pasul 1. $s = 2 \cdot c$;

Pasul 2. $t = s - 1$ (am „programat" prima paranteză);

Pasul 3. $u = c + 1$ (a doua paranteză);
Pasul 4. $v = t \cdot u$;
Pasul 5. $w = c \cdot c$;
Pasul 6. $q = w + \frac{17}{32}$;
Pasul 7. $r = 2 \cdot q$;
Pasul 8. $P(c) = v + r$.

b) Pentru a descompune în factori, efectuăm mai întîi înmulțirile, apoi regrupăm:

$$P(Z) = 2Z^2 + 2Z - Z - 1 + 2Z^2 + \frac{17}{16} = 4Z^2 + Z + \frac{1}{16} = \left(2Z + \frac{1}{4}\right)^2.$$

c) Noul algoritm este următorul:
Pasul 1. $s = 2 \cdot c$;

Pasul 2. $t = s + \frac{1}{4}$;

Pasul 3. $P(c) = t \cdot t$.

d) Cu acest al doilea algoritm, obținem $P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$; $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$; $P\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16}$.

EXERCIȚII

1) Fie $P = 2X^2 - XY + 3Y^2$; $Q = 3X^2 - 4XY - Y^2$; $R = X^2 + 2XY - 2Y^2$. Scrieți în formă canonică polinoamele:

a) $A = P + Q - R$; b) $B = P - Q + R$; c) $C = P - (Q + R)$; d) $D = P - (Q - R)$; e) $E = (P + Q) - R$.

2) Fie polinomul $P(X) = (X^3 + X^2)^2 + (X^2 - X)^3 + (X^2 - 1)^3$. Calculați valoarea lui P în a) -1; b) 0; c) 1.

3) Fie polinomul $P(X) = (2X^2 + 1)^2 - X^4$.

a) Descompuneți în factori; b) Calculați $P(-\sqrt{2})$, $P(-1)$, $P(1)$, $P(\sqrt{2})$. Ce observați? c) Calculați $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

4) Fie polinomul $P(X) = (2X^2 - 1)^2 - X^4$.

a) Descompuneți în factori; b) Calculați $P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P(-1)$, $P(1)$, $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5*) Fie polinomul $P(X) = X^2 + 1$. Arătați că pentru orice număr real c avem $P(c) > 0$.

6) Scrieți algoritmul pentru calculul valorii polinomului $p(X) = aX^2 + X + 2$ în constanta c. Puteți găsi un algoritm mai convenabil?

7) Scrieți în formă canonică polinomul a cărui valoare în constanta c se calculează prin următorul algoritm:

Pasul 1. $s = c + 1$; *Pasul 2.* $t = s \cdot s$; *Pasul 3.* $u = 2 \cdot c$; *Pasul 4.* $p(c) = t + u$.

8) Fie polinomul $E(X, Y) = X^2 - XY + 2X - 2Y$;

a) Calculați $E(1, 1)$, $E(2, 2)$, $E(3,3)$. Ce observați? b) Calculați $E(-2, -2)$, $E(-2, 0)$, $E(-2, 1)$, $E(-2, 2)$, $E(-2, 3)$. Ce observați? c) Descompuneți în factori. Explicați rezultatele obținute la a) și b).

9) Fie polinomul $Q(X) = (X - 1)(X^2 - X - 1) + 3(X^2 - 1)$.

a) Descompuneți în factori; b) Descrieți algoritmul pentru calculul valorii $Q(a)$.

10) Fie $P(X, Y) = (X - 3Y)^2 + 5(X - 3Y)(2X + Y) + 4(2X + Y)^2$ și $Q(X, Y) = (9X + Y)(3X - 2Y)$. Calculați:

a) $P(1, 1)$ și $Q(1, 1)$; b) $P(1, 2)$ și $Q(1, 2)$; c) $P(1, -8)$ și $Q(1, -8)$. Cum explicați rezultatele obținute?

11) Fie $P(X, Y) = X^2(X + Y) - Y^2(X + Y)$. Scrieți în formă canonică polinoamele în X: a) $P(X, -1)$; b) $P(X, 0)$; c) $P(X, 1)$.

Calculați apoi valorile $P(-2, 3)$, $P(3, 2)$, $P(5,5)$.

12*) Fie $p(X, Y) = X^2 - 2Y$; $q(X, Y) = XY$; $r(X, Y) = X^3 - 3XY$. Înlocuind pe X cu $a + b$ iar pe Y cu ab, ce devin polinoamele p, q și r?

13) Fie polinomul $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$. Precizați care dintre propozițiile ce urmează sînt adevărate:

a) $P(1) = 1$; b) $P(2) = 5$; c) $P(-1) = 0$; d) $P(1) = 0$; e) $P(0) = -1$.

14) Calculați valoarea polinomului $P(X) = X^2 - 2X + 3$ în $2 + \sqrt{2}$, în $2 - \sqrt{2}$ și în $-2 + \sqrt{2}$.

15) Calculați $P(-\sqrt{3})$ și $(P\sqrt{3})$, unde $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$.

16) Fie $P(X) = X^3 - 4X^2 + 3X + 1$. Calculați $P(-2) \cdot P(2) + P(-1) \cdot P(1)$. Calculați $P(a) + P(-a)$ și $P(a) \cdot P(-a)$, unde a este un număr real.

9. FRACȚII RAȚIONALE

În formula de calcul a densității $\rho = \frac{m}{V}$, membrul drept nu este un polinom în literele m și V; este o fracție rațională.

Cunoscînd aria A a unui trapez, înălțimea h și baza mare B, baza mică se calculează după formula

$$b = \frac{2A - Bh}{h}$$

Membrul drept al acestei formule nu este polinom în litera h.

Fie polinoamele în X: $P(X) = 3X^2 + 6X$ și $Q(X) = 3X$. Observăm că polinomul $C(X) = X + 2$, are proprietatea că $Q(X) \cdot C(X) = P(X)$. Este natural să-l numim pe C **cîtul** împărțirii polinomului P la polinomul Q și să-l notăm $P : Q$.

Fie polinoamele în X: $p(X) = X + 1$ și $q(X) = X$; oricare ar fi polinomul $c(X)$, nu putem avea $X \cdot c(X) = X + 1$; deci nu putem împărți (fără rest) polinomul p la polinomul q.

Aceeași situație am întîlnit-o în clasa a V-a, atunci cînd am învățat despre operațiile cu numere naturale. Am văzut că 6 se împarte la 3, dar nu se împarte (fără rest) la 5. Am învățat atunci despre *fracții* și că 6 : 5 este „fracția" $\frac{6}{5}$.

Această idee o vom folosi și în cazul polinoamelor; vom învăța acum despre *fracții raționale*.

DEFINIȚIE. Vom numi **fracție rațională** (în nedeterminata X) o pereche de polinoame $P(X)$ și $Q(X)$, scrisă sub forma

$$\frac{P(X)}{Q(X)}.$$

Numitorul $Q(X)$ trebuie să fie diferit de polinomul nul 0. Astfel,

$$\frac{2X}{X^2+1};\ \frac{3X}{X};\ \frac{3}{X};\ \frac{3X}{1};\ \frac{5}{7};\ \frac{X^3-1}{X-1};\ \frac{X+\sqrt{2}}{2X-1}$$

sînt exemple de fracții raționale în nedeterminata X.

$$\frac{2a}{a^2+1};\ \frac{2}{a+1};\ \frac{2a}{a+1};\ \frac{2a^2+1}{a+1}$$

sînt exemple de fracții raționale în nedeterminata a.

$$\frac{X+Y}{XY+1};\ \frac{X}{Y};\ \frac{X^2}{XY};\ \frac{X+1}{Y+1}$$

sînt exemple de fracții raționale în nedeterminatele X și Y.

OBSERVAȚIE. Orice polinom $P(X)$ în nedeterminata X poate fi scris ca fracție rațională în X, cu numitorul 1 : $\frac{P(X)}{1}$.

EXERCIȚIU

Care dintre propozițiile ce urmează sînt adevărate:

a) O fracție rațională este cîtul dintre un polinom și alt polinom nenul;

b) O fracție rațională este o pereche de polinoame;

c) O fracție rațională este un raport $\frac{P(X)}{Q(X)}$?

AMPLIFICAREA FRACȚIILOR RAȚIONALE

Fie fracția rațională (în X) $\frac{X+1}{X-1}$. Să înmulțim atît numărătorul, cît și numitorul ei cu polinomul $X + 1$. Obținem o nouă fracție rațională, al cărei numitor este $(X + 1)(X - 1) = X^2 - 1$ și al cărei numărător este $(X+1)(X+1) = X^2 + 2X + 1$. Această nouă fracție rațională este: $\frac{X^2+2X+1}{X^2-1}$. Spunem că ea a fost obținută prin amplificarea primei fracții cu polinomul $X+1$. Se obișnuiește să se scrie

$$^{X+1)}\frac{X+1}{X-1} = \frac{X^2+2X+1}{X^2-1}.$$

Alt exemplu: fie fracția rațională $\frac{3}{X}$. Să înmulțim numărătorul și numitorul cu polinomul X; obținem fracția rațională $\frac{3X}{X^2}$ despre care vom spune că a fost obținută din $\frac{3}{X}$ prin amplificare cu X. Scriem

$$^{X)}\frac{3}{X} = \frac{3X}{X^2}.$$

De asemenea

$$^{X+1)}\frac{3}{X} = \frac{3X+3}{X^2+X}.$$

În general, fie $\frac{P(X)}{Q(X)}$ o fracție rațională în nedeterminata X, iar $R(X)$ un polinom diferit de 0. Vom spune că fracția rațională $\frac{R(X)\cdot P(X)}{R(X)\cdot Q(X)}$ a fost obținută din fracția $\frac{P(X)}{Q(X)}$ prin **amplificare** cu polinomul $R(X)$.

EXERCIȚII

1) Amplificați fracția rațională $\frac{X}{X+1}$ cu polinomul:

a) X; b) $X+1$; c) X^2; d) X^2+1; e) $2X$; f) $3X^2$; g) $2X+1$.

2) Amplificați cu polinomul X^2+1 fracțiile raționale în X:

a) $\frac{X+1}{X}$; b) $\frac{2X+1}{X-1}$; c) $\frac{X^2-1}{X}$; d) $\frac{X-1}{X^2-1}$; e) $\frac{X}{1}$; f) $X+2$.

3) Amplificați fracția rațională $\frac{X+1}{Y+1}$ cu:

a) X; b) Y; c) $X-1$; d) $Y-1$; e) $X+Y$.

SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR RAȚIONALE

Să privim fracția rațională $\frac{X^2-1}{X^2-3X+2}$. Să observăm că putem descompune în factori numărătorul: $X^2-1 = (X+1)(X-1)$. Dar și numitorul ei poate fi descompus: $X^2-3X+2 = (X-2)(X-1)$. Polinomul $X-1$ apare ca factor atît la numărător, cît și la numitor

$$\frac{(X+1)(X-1)}{(X-2)(X-1)}.$$

Spunem că fracția rațională $\frac{X+1}{X-2}$ se obține din fracția rațională $\frac{X^2-1}{X^2-3X+2}$ prin **simplificare** cu polinomul $X-1$. Notăm:

$$\frac{X^2-1}{X^2-3X+2}^{(X-1} = \frac{X+1}{X-2}.$$

OBSERVAȚIE. Fracțiile raționale $\frac{X^2-1}{X^2-3X+2}$ și $\frac{X+1}{X-2}$ nu sînt egale; prima se obține din a doua prin amplificare cu $X-1$ a doua se obține din prima prin simplificare cu $X-1$.

În general, dacă $P(X)$, $Q(X)$ și $R(X)$ sînt polinoame, vom spune că fracția rațională $\frac{P(X)}{Q(X)}$ **se obține** din fracția rațională $\frac{P(X)\cdot R(X)}{Q(X)\cdot R(X)}$ **prin simplificare cu polinomul** $R(X)$.

(Bineînțeles, polinoamele Q și R trebuie să fie diferite de 0.)

De exemplu, fracția rațională $\frac{X^2}{X}$ se obține din fracția rațională $\frac{X^3}{X^2}$ prin simplificare cu X; fracția rațională $\frac{X}{1}$ se obține din fracția rațională $\frac{X^3}{X^2}$ prin simplificare cu X^2.

Fracția rațională $\frac{X^2-1}{X+1}$ se obține din $\frac{X^2Y-Y}{XY+Y}$ prin simplificare cu Y; din ea se obține prin simplificare cu $X+1$ fracția rațională $\frac{X-1}{1}$, care se identifică cu polinomul $X-1$.

EXERCIȚII

1) Simplificați cu X fracțiile raționale:

a) $\frac{X}{X^2}$; b) $\frac{2X}{X}$; c) $\frac{X}{X^2+X}$; d) $\frac{X^4+X^2}{X^2}$. Care dintre ele mai poate fi simplificată?

2) Simplificați fracția rațională $\frac{X^3 - XY^2}{X^3 + 2X^2Y + XY^2}$ cu

a) X; b) $X + Y$; c) $X^2 + XY$.

3) Simplificați:

a) $\frac{11X^2}{2XY}$; b) $\frac{4X^3}{6X^4}$; c) $\frac{15aX^2Y}{12a^2XY^2}$; d) $\frac{9a^2X^2}{6aX^3}$; e) $\frac{2X}{4XY}$; f) $\frac{2X^2Y}{2XY}$;

g) $\frac{8X^2Y}{4X^2}$; h) $\frac{5X^3YZ}{YXZ}$.

4) Simplificați:

a) $\frac{XY + X}{X^2 + X}$; b) $\frac{XY + X}{Y^2 + Y}$; c) $\frac{X^2 - XY}{XY - Y^2}$; d) $\frac{4X - 12}{X^2 - 9}$;

e) $\frac{3X + 9}{X^2 - 9}$; f) $\frac{4X^2 + 12XY}{6X^3 - 54XY^2}$; g) $\frac{8X - 16}{16X^2 - 32X}$; h) $\frac{6X^2 - 6}{3X + 3}$;

i) $\frac{X^2 + 2X}{X + 2}$; j) $\frac{X^2 - 2X}{X^3 - 4X}$.

5) Simplificați:

a) $\frac{(3X + 5)(X - 1)^2 - 4(3X + 5)}{(X + 1)^2(X - 3)}$; b) $\frac{X^4 - Y^4}{X^3 - X^3Y^2}$;

c) $\frac{X^2 + 6XY + 9Y^2}{X^2 - 9Y^2}$; d) $\frac{X^2 - Y^2 + 2YZ - Z^2}{X^2 - 2XY + Y^2 - Z^2}$; e) $\frac{5X^4 - 5Y^4}{8X^2Y + 8Y^3}$.

VALOAREA UNEI FRACȚII RAȚIONALE

Fie $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ o fracție rațională în nedeterminata X și fie c un număr real.

Putem calcula valoarea $P(c)$ a polinomului P în c; de asemenea, putem calcula valoarea $Q(c)$ a numitorului Q în c. Pot apare două cazuri:

Cazul 1. Dacă $Q(c) \neq 0$, atunci vom spune că **fracția rațională** F **are valoarea** $\frac{P(c)}{Q(c)}$ în c; vom nota $F(c) = \frac{P(c)}{Q(c)}$.

Cazul 2. Dacă $Q(c) = 0$, vom spune că fracția rațională F **nu are definită valoarea în** c.

De exemplu, fie fracția $F(X) = \frac{X + 1}{X - 1}$. Aici $P(X) = X + 1$, iar $Q(X) = X - 1$. Fie numărul 5; avem $Q(5) = 5 - 1 = 4 \neq 0$; deoarece $P(5) = 5 + 1 = 6$, fracția rațională F are valoarea $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ în 5; scriem $F(5) = \frac{3}{2}$.

Avem $Q(2) = 2 - 1 = 1 \neq 0$ și $P(2) = 2 + 1 = 3$. Fracția rațională F are valoarea $\frac{3}{1} = 3$ în 2; scriem $F(2) = 3$. La fel,

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5,\quad F\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{\frac{7}{4} + 1}{\frac{7}{4} - 1} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{11}{3}.$$

Însă $Q(1) = 1 - 1 = 0$. Deci fracția rațională $\frac{X + 1}{X - 1}$ nu are definită valoarea în 1. Se mai spune și că **nu este definită** în 1.

OBSERVAȚIE. În cărțile mai vechi se folosește exprimarea „fracția rațională nu are sens în 1".

Alte exemple. Fie fracția rațională $E(X) = \frac{X}{X^2 - 1}$, avînd numitorul $Q(X) = X^2 - 1$. Deoarece $Q(1) = 0$ și $Q(-1) = 0$, fracția rațională E nu are definită valoarea în 1 și în -1. Avem:

$$E(2) = \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3};\quad E(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{2};$$

$$E(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad E(-2) = \frac{-2}{(-2)^2 - 1} = -\frac{2}{3}.$$

Fracția rațională $F(X) = \frac{X + 1}{X^2 - X}$ are numitorul $Q(X) = X^2 - X$. Deoarece $Q(0) = 0$ și $Q(1) = 0$, fracția F nu are definită valoarea în 0 și 1. Avem $F(2) = \frac{2 + 1}{2^2 - 2} = \frac{3}{2}$; $F(-1) = \frac{-1 + 1}{(-1)^2 - (-1)} = 0$.

Fracția rațională $G(X) = \frac{X^2}{X}$, avînd numitorul $Q(X) = X$, nu are definită valoarea în 0; pentru orice număr real $s \neq 0$, avem $G(s) = s$(!)

EXERCIȚIU REZOLVAT

Pentru ce număr real s fracția rațională $F(X) = \frac{X^2 + 1}{5X + 2}$ nu are definită valoarea în s?

Rezolvare. Prin definiție, fracția F nu are definită valoarea în s dacă $Q(s) = 0$, unde $Q(X) = 5X + 2$. Deci $5s + 2 = 0$, ecuație ce are o singură soluție, numărul $-\frac{2}{5}$. Deci fracția rațională F nu are definită valoarea în $-\frac{2}{5}$.

EXERCIȚII

1) Fie fracția rațională $E(X)=\frac{X^4-X^3+1}{X^2-X-2}$; aflați $E(1)$; $E(0)$; $E(-2)$; $E(2)$.

2) Fie $F(X)=\frac{X^4}{X^2-1}$; aflați valoarea fracției raționale F în:

a) $-\sqrt{2}$; b) 0; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$.

3) Pentru ce număr real x, fracția rațională

a) $\frac{2}{X}$; b) $\frac{3}{X-1}$; c) $\frac{X+1}{X-1}$; d) $\frac{5}{X+1}$ nu are definită valoarea în x?

10. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1) Exprimați printr-o formulă perimetrul unui dreptunghi, știind că lungimea unei laturi este cu a mai mare decît lungimea celeilalte. Exprimați printr-o formulă și aria acestui dreptunghi.

2) Costul unui bilet de tren pe distanța Mangalia—Constanța este de 20 lei la clasa I și de 13 lei la clasa a II-a. Caseria gării Mangalia a vîndut într-o zi a bilete de clasa I și b bilete de clasa a II-a, pînă la Constanța. Cîți lei a încasat din vînzarea acestor bilete?

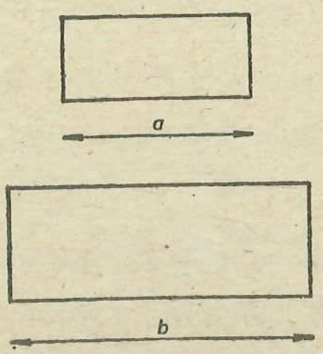


Fig. II.8

3) Covoarele din figura II.8 sînt asemenea și sînt țesute din material de aceeași calitate. Costul materialului din cel mic este de c lei. Cît va costa materialul din cel mare?

4) Ce date trebuie să știți pentru a putea estima:

a) numărul de litri de benzină ce se consumă la o călătorie București-Timișoara, făcută cu o mașină „Dacia 1300";

b) costul combustibilului consumat în această călătorie;

c) durata călătoriei?

5*) Doi bicicliști pleacă în același moment, unul din Ploiești spre Buzău, celălalt din Buzău spre Ploiești; ei parcurg în mod uniform distanța dintre cele două orașe, primul cu viteză u, iar al doilea cu viteza v.

a) Primul biciclist ajunge la Buzău în a ore. În cîte ore ajunge al doilea la Ploiești?

b) Ei se întîlnesc pe șosea, cu c ore înainte de sosirea primului la Buzău. Cu cîte ore înainte de sosirea celui de-al doilea la Ploiești are loc întîlnirea dintre ei?

6 Efectuați înmulțirile:

a) $(2X^3)\cdot(3XY)$; b) $(\sqrt{2}XY)\cdot(\sqrt{2}XZ)$; c) $(2XY)\cdot(3YZ)\cdot\left(-\frac{1}{6}XZ\right)$; d) $(\sqrt{3}X)\cdot(\sqrt{2}XY)\cdot(\sqrt{6}XYZ)$; e) $(0{,}5X^2)\cdot(2Y^2)\cdot(3XY)$; f) $(-2Y^2)\cdot(-3X)$.

7) Efectuați:

a) $\frac{2}{3}X^2Y-\frac{1}{4}X^2Y$; b) $\frac{1}{8}XY^2-\frac{1}{2}XY^2$; c) $-\frac{3}{4}X^2-\frac{1}{2}X^2$; d) $\left(-\frac{1}{2}X^3\right)+\left(-\frac{1}{3}X^3\right)+\left(+\frac{5}{6}X^3\right)$.

8) Reduceți termenii asemenea:

a) $5X^2+XY-2Y^2-XY-Y^2-2X^2+4XY+Y^2$; b) $-X^2+4XY+3X^2+2XY-5X^2$; c) $\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3}Y+\frac{1}{4}X^2-\frac{2}{3}Y+\frac{5}{4}X^2+\frac{4}{3}Y$.

9) Efectuați adunările, reducînd apoi termenii asemenea:

a) $(-2X^3+5X^2-X+2)+(X^3-3X+2)+(-X^3+4X-5)$;

b) $\left(-\frac{1}{2}X^5-2X^3Y+XY^2\right)+\left(-\frac{1}{2}X^5+X^4+X^3Y+\frac{1}{2}XY^2\right)-\left(X^4+2X^3Y+\frac{1}{2}XY^2\right)$.

10) Efectuați înmulțirile:

a) $(-3XY)(X^2-XY+Y^2)$; b) $X^3(X^3+X^2-2)$; c) $\left(-\frac{1}{2}X^2Y\right)(X^2-2XY+2Y^2+4X)$.

11) Efectuați înmulțirile; scrieți apoi rezultatele în formă canonică:

a) $(1-2X+X^2)(a+X)$; b) $(2X^2-6X+3)(3-2X)$; c) $(2-X)(X^2-2X+5)$ d) $(X-\sqrt{2})(X^3+\sqrt{2}X-\sqrt{2})$.

12) Efectuați calculele, scriind rezultatele în formă canonică:

a) $(X^4+2X^3+X^2-4X-11)(X^2-2X+3)-10X+32$; b) $(4X-3)\cdot(7X+8)-(8X-9)(5X+7)-(3X-2)(5X-8)$; c) $(2X-1)\cdot(3X-8)-(4X-2)(2X-6)+(6X-3)(7X-2)$.

13*) Efectuați:

a) $(X^2+aX+a^2)(X^2-aX+a^2)$; b) $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)(1+X^8)$; c) $(1+X)(1+X^2)(1+X^3)$; d) $(X+Y+Z)(XY+XZ+YZ)-(X+Y)(X+Z)(Y+Z)$; e) $(X^2+2XY+2Y^2)(X^2-2XY+2Y^2)$.

14) Ce lipsește pentru a fi pătratul unui binom:

a) $9X^2+49$; b) $4X^2Y^2+4X^2$; c) $4X^2+9Y^2$; d) X^2-10X; e) X^2+5X; f) $\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}X$; g) $\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{2}X$?

15) Scoateți factor comun:

a) $4X^4+2X^2+4X$; b) $4X^4+3X^3+2X^2$; c) Y^3-7Y^2+5Y; d) $Y^5-Y^4-2Y^2$; e) $2\pi R^2+2\pi RH$; f) $vT+\frac{a}{2}T^2$; g) $a^2X^2+a^2Y^2+a^2Z^2$; h) $\pi LR+\pi Lr$; i) $\sqrt{2}X+2X^2$; j) $\sqrt{3}X^3+3X^2$; k) $9X^2-\sqrt{18}XY$; l) $2X^2Y^3+3XY^4-4X^4Y$.

16) Scoateți factor comun:

a) $10X^2+25XY-15XZ$; b) $aX+bX^2+X^3$; c) $20aX-32bX+28X^2$; d) $(2a-1)X^2+(1-2a)XY+(2a-1)X$; e) $(2X+3)(X^2+7)-(2X+3)^2X+8X+12$; f) $(X-Y+1)(X^2-Y)-(X-Y+1)XY$; g) $(X^2+X+2)X+(X^2+X+2)Y$; h) $(X+Y+1)X^2+(X+Y+1)Y^2$.

17) Restrîngeţi:

a) $X^4 - 6X^2Y + 9Y^2$; b) $X^4 + 4X^2Y^2 + 4Y^4$; c) $X^8 - 10X^4Y^2 + 25Y^4$; d) $16X^2 + 8X + 1$; e) $X^6 - 6X^3Y + 9Y^2$.

18) Descompuneţi în factori:

a) $X^2 - 2$; b) $X^2 - 3$; c) $X^2 - 15$; d) $X^2 - 8$; e) $2X^2 - 1$; f) $3X^2 - 2$; g) $X^2 - 2\sqrt{3}X + 3$; h) $5X^2 + 2\sqrt{5}X + 1$; i) $X^4 - 4$, j) $144X^2 - 169Y^2$.

19*) Descompuneţi în factori:

a) $X^4 + 4Y^4$; b) $9 + X^4$.

(Indicaţie: completaţi mai întîi pînă la un pătrat.)

20) Descompuneţi în factori:

a) $X^2 + 10X + 16$; b) $X^2 + 7X + 12$; c) $3X^4 + 4X^2 + 1$; d) $X^4 - 7X^3 + 2X - 14$; e) $X^2 - 1 - XY - Y$; f) $X^4 + X^2Y^2 - Y^4 - 2X^3Y$; g) $X^4 - 9X^2$.

21*) Descompuneţi în factori:

a) $X^3 - 7X + 6$; b) $X^3 \quad 7X^2 + 6$; c) $X^4 - 8X^2 + 15$; d) $X^2 + 2XY + Y^2 + X + Y$.

22) Fie polinomul $P(X) = (X + 4)^2 - 2(X^2 - 16) + (X - 4)^2$. Calculaţi $P(5)$, $P(4)$, $P(3)$, $P(2)$ şi $P(1)$.

23*) Fie polinomul $P(X) = 2X^3 - X^2 - 2X + 1$. Aproximaţi cu eroare de 0,01 valorile $P(\sqrt{2})$ şi $P(\sqrt{3})$.

24) Descrieţi în paşi algoritmul pentru calculul valorii $P(a)$, unde $P(X) = (2X + 1) \cdot X + 2$.

25) Fie $P(X) = (aX + b) \cdot (2X + 3)$. Descrieţi în paşi algoritmul pentru calculul valorii $P(c)$.

26) Scrieţi în formă canonică polinomul în X: $\left(\frac{1}{2}X^2 + m\right)^2 - \left(\frac{1}{2}X^2 - m\right)^2$. Descompuneţi în factori acest polinom. Ce observaţi?

27) Fie $P(X) = X(X + 1) + (X - 1)(X + 2) + (X - 2)(X + 3)$. Scrieţi acest polinom în formă canonică. Calculaţi $P(-3)$, $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ şi $P(3)$; aranjaţi aceste 7 numere în ordine crescătoare.

28) Calculaţi $Q\left(\frac{3}{2}\right)$, unde $Q(X) = 16(2 - X)^3 + 32(X - 3)^4$.

29) Amplificaţi fracţia raţională $F(X) = \frac{X^2}{X^2 + 2X}$ cu $X - 2$, cu X^2, apoi cu $X^2 - 2X$.

30) Amplificaţi fracţiile raţionale $\frac{3}{1 - 2X}$ şi $\frac{2}{2X + 1}$ astfel încît fracţiile obţinute după amplificare să aibă acelaşi numitor.

31) Simplificaţi fracţiile raţionale:

a) $\frac{X^3YZ}{3X^2Y}$; b) $\frac{X^3Y^2}{X^2Y^3}$; c) $\frac{aX - X}{aX^2}$; d) $\frac{aX - a}{X - X^2}$.

32) Simplificaţi:

a) $\frac{6X^2 - 12X}{6X^2}$; b) $\frac{2X^2 - 3X}{6X}$; c) $\frac{X + Y}{(X + Y)^2}$; d) $\frac{XY + Y}{X^2Y + Y}$; e) $\frac{X^2 - Y^2}{X^5 - X^3Y^2}$; f) $\frac{X - Y}{X^3 - XY^2}$; g) $\frac{X - 2X^2}{4X^4 - X^2}$.

33*) Simplificaţi:

a) $\frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 2X + 1}$; b) $\frac{X^5 - 5X + 4}{X^2 - 1}$; c) $\frac{X^2 - 7X + 6}{X^2 - 36}$; d) $\frac{X^2 - 5X + 6}{X^2 - 9}$; e) $\frac{X^2 + 7X - 6}{X^2 - 1}$.

34*) Simplificaţi:

a) $\frac{9X^4 - 1}{3X^2Y^2 + Y^2}$; b) $\frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 5X + 6}$; c) $\frac{X^3 + 2X^2 + X}{X^5 - X^3}$. d) $\frac{X^5 - X^4Y - XY^4 + Y^5}{X^4 - X^3Y - X^2Y^2 + XY^3}$; e) $\frac{X^3 - X^2 - X + 1}{X^2 - 5X + 4}$.

35) Simplificaţi:

a) $\frac{X^2 - 2}{X^2 + 2\sqrt{2}X + 2}$; b) $\frac{X^3 - 3X}{X^2 + 2\sqrt{3}X + 3}$.

36) Fie fracţia raţională $E(X) = \frac{X^2}{X^2 + 3}$. Calculaţi valorile: $E(1)$; $E(2)$; $E(\sqrt{2})$; $E(\sqrt{3})$; $E(\sqrt{2} + 1)$ şi $E(2\sqrt{2})$. Arătaţi că pentru orice număr real s avem $E(-s) = E(s)$.

37) Fie $F(X) = \frac{X}{X + 1}$. Arătaţi că $0 < F(s) < 1$ pentru orice număr real pozitiv s.

38) Pentru ce număr real s, fracţia raţională $\frac{5X - 1}{X - 2}$ nu este definită în s? Calculaţi valorile fracţiei raţionale în $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$. Aproximaţi cu eroare de 0,01 valoarea fracţiei raţionale în $\sqrt{2}$.

39*) Arătaţi că fracţia raţională $F(X) = \frac{X}{X^2 + 1}$ are valoare în orice număr real s.

40*) Fie $F(X) = \frac{2X - 1}{2X + 3}$. Calculaţi produsul $F(\sqrt{2}) \cdot F(-\sqrt{2})$ cu eroare de 0,01. Este adevărat că acest produs este număr întreg?

41) Fie $F(X) = \frac{X - 1}{X + 2}$. Calculaţi produsul $F(a) \cdot F(-a)$, unde a este un număr real $\neq -2$.

42) Fie polinomul $P(X) = X^2 - 2X + 3$. Calculaţi $P(2 - \sqrt{2})$ şi $P(2 + \sqrt{2})$. Aproximaţi aceste valori cu eroare de 0,01.

LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUŞIRII CUNOŞTINŢELOR DE BAZĂ

1) Reduceţi termenii asemenea:

a) $2X^2 - 3X + 7 - X^3 - X^2 - X + 1 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 5$;

b) $10x - 8y + 6z - 5x - 2y - 8z + 2x + 6y + 4z - 5x$.

2) Efectuaţi înmulţirile, apoi scrieţi rezultatele în formă canonică:

a) $(2 + X) \cdot (2X^2 + 3X + 1)$; b) $(5 - X - X^2) \cdot (3X - 1)$;

c) $(X^2 - 2X + 1) \cdot (X^2 + 2X + 1)$.

3) Restrîngeţi: a) $9a^2 - 12\,ab + 4b^2$; b) $2X^2 + 2\sqrt{2}X + 1$.

4) Descompuneţi în factori polinoamele:

a) $XY + 3X - Y - 3$; b) $(X - 1)^2 - (2X + 3)^2$; c) $X^3 - 6X$.

5) Scrieţi paşii algoritmului pentru calculul valorii $P(c)$, dacă $P(X) = 2 \cdot (X + 1) + X^2 - 1$.

6) Calculaţi $P(2)$ şi $P(-\sqrt{2})$, unde $P(X) = X^4 - X^2 - 1$.

7) Simplificaţi fracţia raţională $\dfrac{X^2 - 4X + 4}{X^2 - 4}$.

8) Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor: a) $F(3) = 3$; b) $F(4) = \dfrac{1}{3}$; c) $F(-1) = -3$, unde $F(X)$ este fracţia raţională din exerciţiul 7 de mai sus.

CAPITOLUL III

FUNCŢII ŞI GRAFICE

1. MULŢIMI

Orice **mulţime** trebuie înţeleasă ca o „colecţie" de obiecte (de aceeaşi natură sau nu), obiecte ce sînt numite **elemente** ale mulţimii. Am convenit în clasele anterioare să notăm mulţimile cu litere mari: $A, B, \ldots$ sau cu notaţii speciale: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$.

Reamintim că o mulţime poate fi precizată scriindu-i elementele între acolade, ca de exemplu astfel: $A = \{a, b, c, d\}$, sau specificînd o proprietate comună numai elementelor mulţimii, ca de exemplu $[1, 2] = \{s \in \mathbf{R} \mid 1 \leqslant s \leqslant 2\}$.

Scriem $a \in A$ şi citim, „a aparţine lui A", dacă a este element al mulţimii A; dacă u nu este element al mulţimii A, scriem $u \notin A$ şi citim „u nu aparţine lui A".

Notăm cu $\emptyset$ mulţimea vidă, adică mulţimea ce nu are nici un element.

EXERCIŢII

1) (oral) Enumeraţi elementele mulţimii:

a) $\{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 5\}$; b) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -3 < x \leqslant 4\}$; c) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x$ se scrie sub formă de fracţie cu numărătorul şi numitorul mai mari decît 0 şi mai mici decît 3$\}$.

2) Scrieţi mulţimea divizorilor numărului natural:

a) 12; b) 15; c) 17; d) 96; e) 234, enumerîndu-i elementele.

3) Care dintre propoziţiile următoare sînt adevărate:

a) $2 \notin \{2, 3, 4\}$; b) $5 \in \emptyset$; c) $0 \in \emptyset$; d) $a \in \{a, b, x\}$;
e) $-7 \in \{x \in \mathbf{R} \mid -9 < x < 0\}$; f) $\sqrt{3} - 1 \in \mathbf{R}$.

2. OPERAŢII CU MULŢIMI

Am învăţat în clasele anterioare despre trei operaţii cu mulţimi: reuniunea, intersecţia şi diferenţa.

Fie A şi B două mulţimi. Reamintim că $A \cup B$ (citim „A reunit cu B") este mulţimea $\{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$.

De exemplu, $\{a, b, z\} \cup \{a, z, y, t\} = \{a, b, z, y, t\}$.

Reuniunea mulţimilor are următoarele proprietăţi:

1) $A \cup B = B \cup A$, pentru orice mulţimi A şi B (reuniunea este comutativă);

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, pentru orice mulţimi A, B şi C (asociativitatea).

3) $A \cup \emptyset = A$, pentru orice mulţime A.

Intersecţia mulţimilor A şi B este mulţimea $\{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$. Această mulţime se notează $A \cap B$.

De exemplu, $\{a, b, z\} \cap \{a, z, y, t\} = \{a, z\}$.

Intersecţia mulţimilor are proprietăţile:

1) $A \cap B = B \cap A$, pentru orice mulţimi A şi B;

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, pentru orice mulţimi A, B şi C;

3) $A \cap \emptyset = \emptyset$, pentru orice mulţime A.

Diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B, notată $A - B$, este mulţimea $\{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$.

De exemplu, $\{a, b, z\} - \{a, z, y, t\} = \{b\}$, iar $\{a, z, y, t\} - \{a, b, z\} = \{y, t\}$.

Din acest exemplu rezultă şi faptul că diferenţa **nu** este o operaţie comutativă.

EXERCIŢII

1) Fie $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, 8, 9\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 10\}$. Scrieţi elementele mulţimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

2) Fie $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 4\}$ şi $B = \{|-2|, |-1|, 3\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $A \cup B = A$; b) $A \cap B \neq A$; c) $A \cup B = A \cap B$; d) $A \cap B = B$.

3*) Arătaţi că $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ şi $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, pentru orice mulţimi A, B, şi C.

4*) Arătaţi că dacă $A \cap B = B$, atunci $A \cup B = A$ şi $A - (A - B) = B$.

5*) A şi B sînt mulţimi de litere. Care sînt elementele fiecăreia, ştiind că $a \in A - B$, $b \in B - A$, $c \in A \cap B$, $A \cup B = \{a, b, c, d\}$ şi $\{a, d\} \cap A = \{a, d\}$? Cîte soluţii are problema?

PRODUSUL CARTEZIAN

Să presupunem că sînt date mulţimile de litere $A = \{a, b\}$ şi $B = \{a, e, f\}$. Cu elementele acestor două mulţimi putem forma noi obiecte, anume **perechi** în care prima componentă este din A, iar a doua din B. Aceste perechi sînt:

$$(a, a);\ (a, e);\ (a, f);\ (b, a);\ (b, e);\ (b, f).$$

Ele pot fi scrise, pe scurt, astfel:

$$(x, y), \text{ unde } x \in A, \text{ iar } x \in B.$$

Aceste perechi formează o nouă mulţime, pe care o vom numi **produsul cartezian*** al mulţimilor A şi B şi o vom nota $A \times B$.

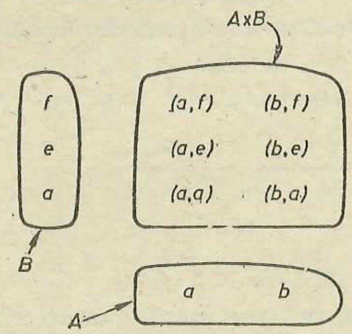
Deci $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ şi $y \in B\}$.

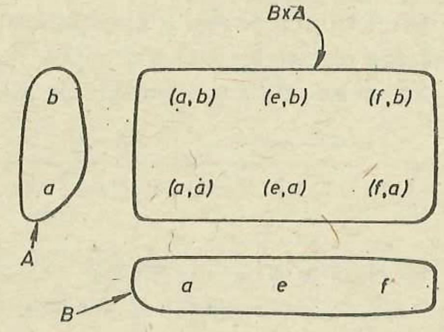
OBSERVAŢIE. Într-o pereche (x, y), ordinea în care scriem componentele *este importantă*; dacă $x \neq y$, atunci perechea (y, x) **diferă** de perechea (x, y)! Astfel, produsul cartezian al mulţimilor B şi A, notat $B \times A$, are ca elemente perechile (y, x) cu $y \in B$ iar $x \in A$ şi diferă în general de $A \times B$.

De exemplu,pentru mulţimile de litere $A = \{a, b\}$ şi $B = \{a, e, f\}$ produsul cartezian $B \times A$ are ca elemente perechile:

(a, a); (a, b); (e, a); (e, b); (f, a); (f, b).

Să prezentăm elementele produselor carteziene $A \times B$ şi $B \times A$ şi în alt mod:





Alte exemple:

1) $\{1, 2\} \times \{0, 2\} = \{(1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$.

2) Fie $M = \{m\}$ (deci o mulţime formată dintr-un singur element!), iar $N = \{x, y, z\}$. Atunci:

$$M \times N = \{(m, x), (m, y), (m, z)\}.$$

În general, dacă mulţimea A are a elemente, iar mulţimea B are b elemente, atunci produsul cartezian $A \times B$ are $a \cdot b$ elemente. A şi B se numesc **factorii** produsului cartezian $A \times B$.

EXERCIŢII

1) Dacă $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ şi $B = \{a, b, c\}$, descrieţi $A \times B$ şi $B \times A$. Este adevărat că aceste mulţimi au fiecare 10 elemente?

* *cartezian* — provine de la numele latinesc (Cartesius) al lui René Descartes (1596—1650), matematician şi filozof francez.

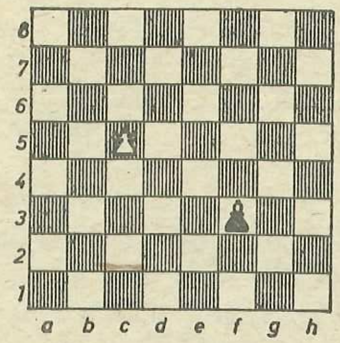


Fig. III.1

2) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Scrieți elementele produsului cartezian $A \times A$.

3) Fie P mulțimea cifrelor pare, iar A mulțimea numerelor prime mai mari decît 4 și mai mici decît 12. Scrieți elementele lui $P \times A$. Cîte elemente are $P \times A$?

4) Pe o tablă de șah (vezi fig. III.1) se află un turn alb în poziția (c, 5). Scrieți toate pozițiile pe care le poate ocupa turnul, după o mutare corectă. Aceeași problemă pentru nebunul negru din poziția (f, 3). La jocul de șah, turnurile pot fi mutate pe linie sau pe coloană, iar nebunii pot fi mutați doar diagonal.

3. COORDONATE CARTEZIENE. REPREZENTAREA PUNCTELOR ÎN PLAN

Oricărui număr real îi corespunde un punct pe axa numerelor. Reamintim că axa numerelor este o dreaptă, pentru care am ales un punct O (originea), un sens pozitiv și o unitate de măsură, segmentul OI (vezi fig. III.2).

Fig. III.2

În clasa a VI-a am învățat să reprezentăm pe axă numere raționale. Ținînd seama de teorema lui Pitagora, acum ne vine ușor să reprezentăm pe axă și numerele de forma $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,...

De exemplu, dacă vom construi un pătrat ABCD cu latura de 1 dm, atunci $AC^2 = AB^2 + BC^2$, adică $AC^2 = 1\ dm^2 + 1\ dm^2 = 2\ dm^2$, de unde obținem $AC = \sqrt{2}$ dm. Așezînd vîrful compasului în punctul A, luînd în compas diagonala pătratului și trasînd arcul de cerc ca în figura III.3, știm că lungimea segmentului AR de pe dreapta AB este $\sqrt{2}$ dm.

Lungimea diagonalei dreptunghiului cu $L = \sqrt{2}$ și $l = 1$ este $\sqrt{3}$ (vezi fig. III.4).

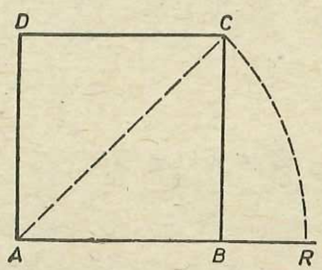


Fig. III.3

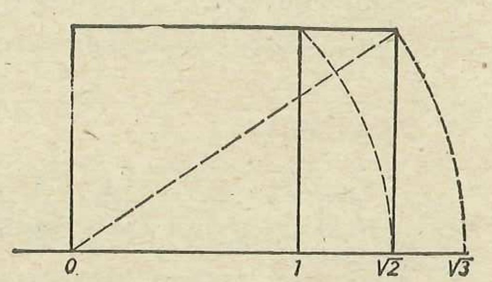


Fig. III.4

EXERCIȚIU

Desenați pe caietul cu pătrățele o axă a numerelor, alegînd ca unitate de măsură segmentul OI de lungime 5 cm. Folosind rigla și compasul, precizați poziția pe axă a punctelor ce corespund lui $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}-1$ și $1-\sqrt{2}$.

Invers, oricărui punct de pe axă îi corespunde un număr real, care este numit coordonata punctului.

De exemplu, în figura III.5 punctul P are coordonata -2, iar punctul Q are coordonata $\sqrt{2}$. Scriem $P(-2)$ și $Q(\sqrt{2})$.

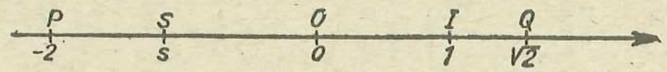


Fig. III.5

În general scriem $S(s)$, indicînd prin aceasta că punctul S are coordonata s.

Observații. Originea O are coordonata 0; scriem $O(0)$. Punctele așezate la stînga originii au coordonate negative.

EXERCIȚII

1) Reprezentați pe o (aceeași) axă punctele $A(-3)$, $B(\sqrt{3})$, $C(-\sqrt{2})$, $D(-\sqrt{5})$, $E(-\sqrt{4})$;

2) Arătați că dacă $A(x_1)$ și $B(x_2)$ sînt două puncte pe axă, atunci mijlocul segmentului AB are coordonata $\frac{x_1 + x_2}{2}$. (Indicație: folosiți teorema lui Thales.)

3*) Date pe axă punctele $A(a)$ și $B(b)$, puteți construi cu rigla și compasul punctul G de coordonată $\sqrt{ab}$? În ce condiții?

COORDONATE ÎN PLAN

Să ne imaginăm că ne aflăm la intersecția a două străzi (punctul O în fig. III.6) și că cineva ne întreabă cum poate ajunge la locuința familiei Popescu. Știm că familia Popescu locuiește în casa notată cu litera A în figura III.6.

Cum indicăm drumul pe care trebuie să-l urmeze pentru a ajunge în A, plecînd din O?

Să privim cu atenție harta țării noastre. Observăm trasate mai multe linii orizontale (paralele) și mai multe linii verticale (meridianele), cu ajutorul cărora putem localiza orice punct geografic (fie el localitate, vîrful unui munte, sau izvorul unui rîu). Pentru a localiza un punct pe hartă trebuie să-i cunoaștem *latitudinea* și *longitudinea*.

Să luăm în plan două drepte perpendiculare și să le înzestrăm ca axe. Punctul lor de intersecție îl vom alege ca origine a ambelor axe (fig. III.7).

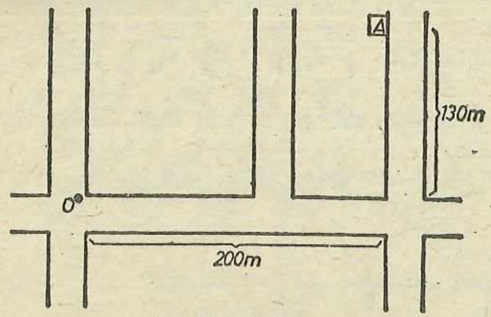


Fig. III.6

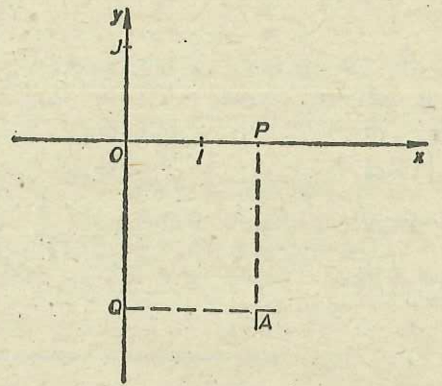


Fig. III.7

Pe axa orizontală să alegem ca unitate de măsură segmentul OI; această axă se notează de obicei Ox şi se numeşte **axa absciselor.** Pe axa verticală să alegem ca unitate de măsură segmentul OJ; ea se notează Oy şi se numeşte **axa ordonatelor.**

Am folosit astfel ceea ce se cheamă un **sistem de axe de coordonate perpendiculare** (sau **rectangulare**), sau, pe scurt, un **sistem de coordonate** în plan.

Odată ales un astfel de sistem de coordonate, orice pereche (a, b) cu $a, b \in \mathbf{R}$ (deci orice element din produsul cartezian $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$) o putem reprezenta printr-un punct din plan. Pe prima axă de coordonate (adică pe axa absciselor) considerăm punctul P de coordonată a; pe axa ordonatelor considerăm punctul Q de coordonată b. Din punctul P trasăm o paralelă la axa Oy; prin punctul Q trasăm o paralelă la axa Ox. Aceste două drepte se intersectează în punctul A (fig. III.7).

Am asociat astfel perechii $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ punctul A din plan. Spunem că punctul A are **abscisa** a şi **ordonata** b, sau că are **coordonatele** (a, b).

De exemplu, în figura III 8) punctul K are coordonatele (3, 2) punctele L şi M au abscisa -1, punctele M, N şi K au ordonata 2. Punctul I are

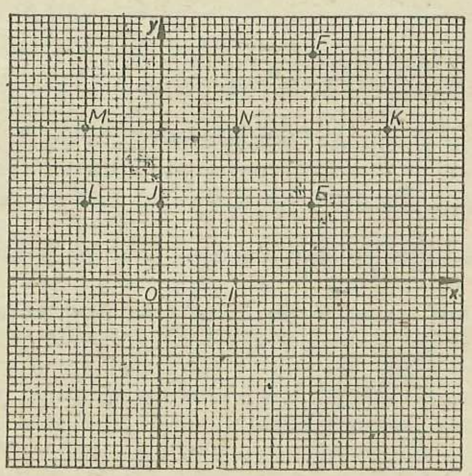


Fig. III.8

coordonatele (1, 0), iar punctul J are coordonatele (0, 1). Care sînt coordonatele punctului E? Dar ale lui F? Dar ale lui O?

Reciproc, fie V un punct din plan (în care am ales sistemul de coordonate Ox, Oy). Paralela la axa Ox dusă prin V intersectează axa Oy în punctul Y, de coordonată y (figura III. 9).

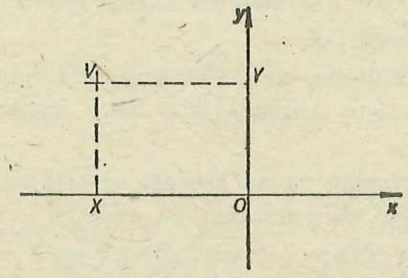


Fig. III.9

Paralela la axa Oy dusă prin V intersectează axa Ox în punctul X, de coordonată x. Punctului V din plan îi facem să-i corespundă perechea (x,y) a produsului cartezian $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Putem identifica astfel planul cu produsul cartezian $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, la fel cum identificăm o dreaptă cu mulţimea $\mathbf{R}$.

Se obişnuieşte să se noteze V (x, y), arătînd prin această notaţie că punctul V are abscisa x şi ordonata y. Astfel, $O(0, 0)$, I (1, 0) şi $J(0, 1)$.

Să figurăm în planul din figura III. 10 punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 4)$, $D(-3, 0)$, $F(5, -5)$ şi $G(-2, -3)$.

Să observăm că punctele de abscisă pozitivă se găsesc în partea dreaptă a axei Oy, iar cele de abscisă negativă în partea stîngă a axei Oy. Punctele

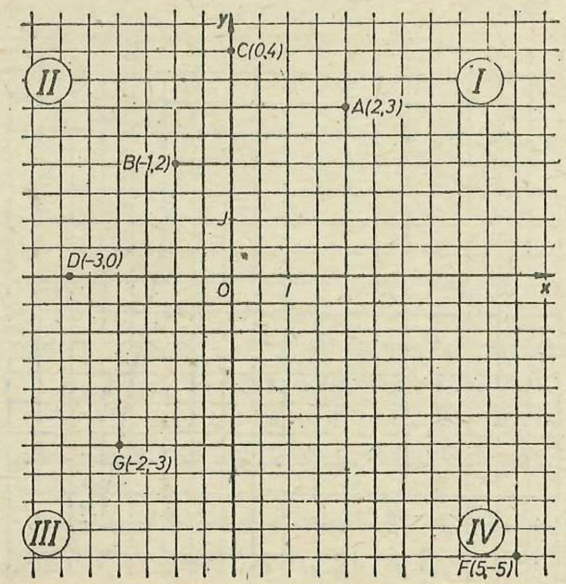


Fig. III.10

de ordonată pozitivă se găsesc deasupra axei Ox, iar punctele de ordonată negativă dedesubtul axei Ox. Putem împărţi planul în patru regiuni, pe care le vom numi **cadrane**.

În cadranul I, punctele au şi abscisa şi ordonata pozitive. În cadranul II, punctele au abscisa negativă iar ordonata pozitivă. În cadranul III, punctele au şi abscisa şi ordonata negative, iar în cadranul IV, punctele au abscisa pozitivă iar ordonată negativă.

Observaţie. Punctele de pe axa Ox au ordonata 0, iar punctele de pe axa Oy au abscisa 0. Punctul O, originea comună a axelor de coordonate, are coordonatele (0, 0).

Toate punctele din plan ce au aceeaşi abscisă se găsesc pe o dreaptă perpendiculară pe axa Ox, deci paralelă cu axa Oy.

Toate punctele din plan ce au aceeaşi ordonată se găsesc pe o dreaptă perpendiculară pe axa Oy, deci paralelă cu axa Ox.

EXERCIŢII

1) Reprezentaţi în plan punctele $A(-5, -4)$, $B(0, \sqrt{5})$, $C(-\sqrt{3}, 0)$, $D(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$, $E(4, 4)$. $F(-3, -3)$. (Alegeţi pe ambele axe ca unitate de măsură centimetrul.)

2) Care sînt coordonatele punctelor K, L, M, N din figura III.11? Puteţi spune ce abcisă are punctul X, mijlocul segmentului KM?

3) Reprezentaţi într-un sistem de coordonate punctele $A(-2, -2)$, $B(2, 0)$, $C(4, 6)$ şi $D(0, 4)$. Desenaţi segmentele AB, BC, CD şi DA. Ce figură se formează?

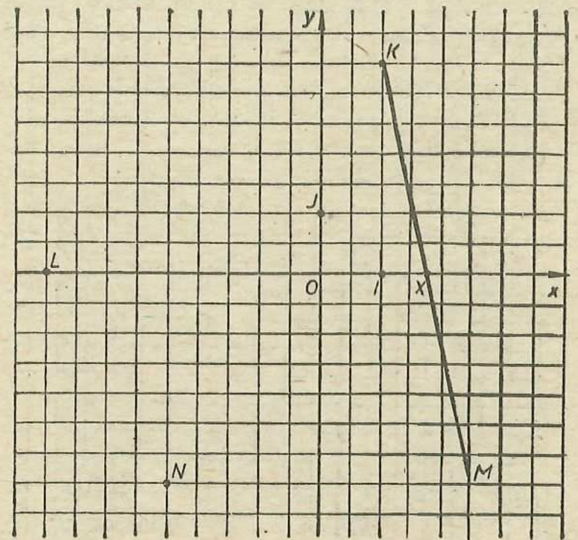


Fig. III.11

Fie M intersecţia dreptelor AC şi BD. Puteţi spune care este abscisa lui M? Dar ordonata sa?

4*) Arătaţi, că, pentru orice două puncte $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ din plan, mijlocul M al segmentului AB are coordonatele $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

4. FUNCŢII

Priviţi figura III. 12. Fiecărui număr întreg de pe axa din stînga îi corespunde (indicat de săgeată) pe axa din dreapta dublul său.

În figura III.13 se observă că fiecăruia dintre numerele $-2, -1, 0, 1, 2$, reprezentate pe axa din stînga, îi corespunde pe axa din dreapta pătratul său.

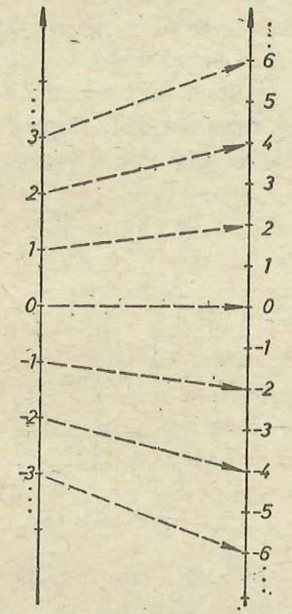


Fig. III.12

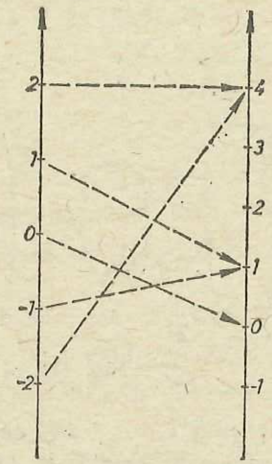


Fig. III.13

Cu alte cuvinte, în primul caz, între elementele mulţimii $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\} = \mathbb{Z}$ şi elementele mulţimii $\{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...\} = \mathbb{Z}$ am stabilit o legătură: fiecărui element din prima mulţime îi corespunde (îi este asociat) un element din cea de-a doua.

La fel în al doilea caz: fiecărui element din mulţimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ îi corespunde un element din mulţimea $B = \{0, 1, 4\}$ (vezi figura III.13).

Fiecărui număr real s îi corespunde în mod firesc un număr întreg, anume partea sa întreagă $[s]$. Fiecărui număr real s îi corespunde un număr real $\geqslant 0$, anume valoarea sa absolută $|s|$.

Fiecărei perechi, (x,y) din produsul cartezian $A \times B$ îi corespunde elementul $x \in A$.

Toate acestea sînt exemple de funcții. Constatăm în toate aceste cazuri că am reușit să stabilim o legătură între elementele unei mulțimi și elementele altei mulțimi.

Avînd deci mulțimile A și B, putem da următoarea:

DEFINIȚIE. Dacă, printr-un procedeu oarecare, facem ca fiecărui element din A să-i corespundă **un singur** element din mulțimea B, vom spune că am definit o **funcție** de la A la B. Mulțimea A se numește **domeniu de definiție** (sau mulțimea de definiție) al funcției; mulțimea B se numește **domeniul de valori** al funcției.

În general, o funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B va fi notată $f : A \to B$.

În figura III.14 săgețile desenate **nu** ne indică funcții.

Astfel, în figura III.14, a elementului 1 i se asociază **două** elemente: **0 și 1**; în figura III.14, b elementului 2 **nu** i se asociază nici un element.

Insistăm: dacă $f : A \to B$ este o funcție, atunci fiecărui element din A i se asociază un element din mulțimea B și **numai unul singur**!

Fie $A = \{0, 1, 2\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$. În figura III.15 am făcut ca lui 0

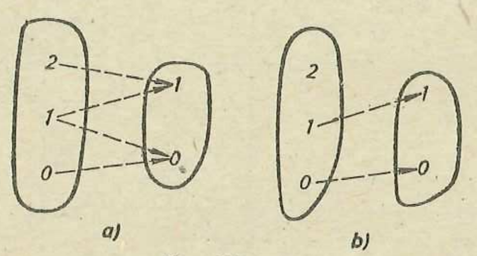


Fig. III. 14

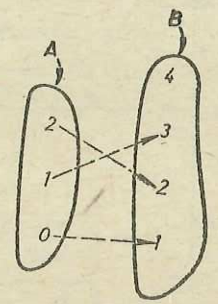


Fig. III. 15

să-i corespundă 1, lui 1 să-i corespundă 3, iar lui 2 să-i corespundă 2. Am definit astfel o funcție $f: A \to B$. Se obișnuiește să se scrie $f(0) = 1, f(1) = 3$, $f(2) = 2$.

În general, dată o funcție $f: A \to B$, elementului $x \in A$ i se asociază un element din mulțimea B, element ce se notează $f(x)$.

Un alt mod de a descrie o funcție, mult folosit în practică, este cu ajutorul tabelului de variație. De exemplu, funcția din figura III.12 se descrie și astfel:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	n	...
$f(x)$	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...	$2n$	...

iar funcția din figura III.13 se descrie prin tabelul

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Funcția din figura III.15 este descrisă astfel:

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	2

Să observăm că tabelul singur nu ne descrie **complet** funcția! Astfel, acest ultim tabel nu ne spune că domeniul de valori al funcției f din figura III.15 este $\{1, 2, 3, 4\}$!

Fie $A = \{1, 2, 3\}$. Asociem lui 1 numărul $1 = 1^2$, lui 2 numărul $4 = 2^2$, iar lui 3 numărul $9 = 3^2$; definim astfel pe A funcția g, avînd valori în mulțimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale. Această funcție se notează $g: A \to \mathbf{N}$. Deoarece elementului x din A îi corespunde numărul natural x^2, scriem $g(x) = x^2$.

Facem să-i corespundă fiecărui număr natural n „succesorul" său $n + 1$; definim astfel funcția $s: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $s(n) = n + 1$. Să o descriem și cu ajutorul unui tabel:

n	0	1	2	3	...	n	...
$s(n)$	1	2	3	4	...	$n+1$	...

Să prezentăm cîteva exemple de funcții ce apar în mod firesc.

Fie A o mulțime $(\neq \emptyset)$. Apare funcția „identică" $i : A \to A$, dată de $i(x) = x$, pentru orice $x \in A$.

Fie A și B două mulțimi nevide. Să formăm produsul cartezian $A \times B$, apoi produsul cartezian $B \times A$. Apare funcția „de transpunere" (adică de schimbare a locului) $t : A \times B \to B \times A$, dată de $t((x, y)) = (y, x)$ pentru $x \in A, y \in B$.

De asemenea, apare „proiecția pe primul factor" $p : A \times B \to A$ dată de $p((x, y)) = x$, pentru $x \in A$, $y \in B$.

Funcția „parte întreagă" $z: \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ este dată de $z(s) = [s]$ pentru orice $s \in \mathbf{R}$.

EXERCIȚII

1) Fie $A = \{a, b, c\}$. Construiți cîteva funcții definite pe A, cu valori în A. Este adevărat că sînt 6 astfel de funcții? (Indicație: folosiți desene, ca cel din fig. III.15.)

2) Dați exemplu de funcție $f: A \to B$, unde $A = \{4, 9, 16, 25\}$ iar $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Puteți da mai multe exemple?

3) Fie $A = \{$Iași, Brăila, Satu Mare, Petroșani$\}$, iar $B = \{$Bahlui, Jiu, Dunăre, Someș$\}$. Puteți construi în mod natural o funcție $f : A \to B$?

4*) Fie P mulțimea propozițiilor: „$2 < 3$"; „$4:2 = 3$"; „$2 \in \emptyset$"; fie V mulțimea formată din literele a și f. Puteți construi o funcție $h : P \to V$, în mod firesc? Cîte funcții definite pe P cu valori în V puteți construi?

5) Fie $A = \{-2, 3, 1, 0\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ iar $f : A \to B$ funcția descrisă de $f(x) = |x|$, pentru orice $x \in A$. Care dintre elementele lui B corespund prin f elementelor lui A? Întocmiți un tabel.

6*) Fie funcția $z : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ descrisă de $z(s) = [s]$, pentru orice $s \in \mathbb{R}$. Completați tabelul:

s	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{4}$	$\sqrt{6}$	6	$\sqrt{11}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$			
$z(s)$									2	2	2

NUMĂRUL FUNCȚIILOR

Fie A o mulțime cu a elemente, iar B o mulțime cu b elemente. Cîte funcții cu valori în B putem defini pe A?

Să luăm un exemplu:

Fie $A = \{x, y, z\}$, avînd trei elemente, iar $B = \{u, v\}$, avînd două elemente. Putem alege în două moduri imaginea lui x în B, anume u sau v. Independent de această alegere, putem alege în două moduri imaginea lui y în B, apoi putem alege în două moduri imaginea lui z în B.

În total obținem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ moduri de a defini o funcție de la A la B.

Aceste 8 funcții sînt prezentate în figura III.16.

Cîte funcții de la B la A putem defini?

Orice astfel de funcție f este determinată de imaginile $f(u)$ și $f(v)$ din A. Putem alege pe $f(u)$ în trei moduri, anume x, y sau z; independent de această alegere, putem alege pe $f(v)$ în trei moduri. În total obținem $3 \cdot 3 = 3^2$ moduri de a defini o funcție de la B la A.

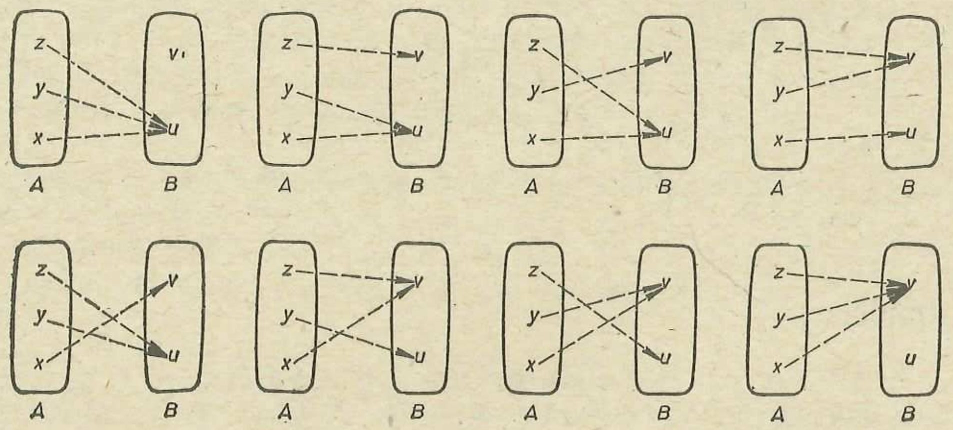


Fig. III.16

În general, dacă A are a elemente, iar B are b elemente, putem defini pe A un număr de b^a funcții cu valori în B.

EXERCIȚII

1) Construiți toate funcțiile de la mulțimea $\{u, v\}$ la mulțimea $\{x, y, z\}$.

2) Ionel a vrut să dea un exemplu de funcție și a scris pe caiet: „fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \sqrt{x}$, pentru orice x real". Ce a greșit Ionel?

3) Fie $A = \{-3, -2, 3, 4\}$, iar $B = \{5, 10, 17, 23\}$. Putem defini o funcție $f : A \to B$ prin $f(x) = x^2 + 1$? Dar prin $f(x) = x^2 + 7$?

4) Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dată de $f(n) = n^2 - n + 11$. Este adevărat că numerele $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ și $f(5)$ sînt prime? Există numere n astfel încît $f(n)$ să nu fie prim?

5*) Fie $d: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ funcția descrisă în felul următor: $d(n)$ = suma divizorilor numărului n. Calculați $d(4)$, $d(6)$, $d(8)$, $d(9)$, $d(11)$. Dați exemple de numere n și m astfel încît $n < m$, dar $d(n) > d(m)$.

Am învățat la fizică următoarele: un mobil care se deplasează cu viteză constantă, rectiliniu și uniform, va străbate un spațiu cu atît mai mare cu cît durata mișcării va fi mai mare, după formula $s = vt$.

În această formulă v este o mărime constantă (o constantă), iar durata t este variabilă. Am stabilit deci o relație între durată și spațiul parcurs s, în sensul că spațiul parcurs depinde de durata mișcării. Considerînd membrul drept al formulei ca pe un polinom în t, putem scrie $s(t) = v \cdot t$; am scris astfel spațiul parcurs ca funcție de durată.

Deci, un mod de a scrie o funcție este cel dat de formule. În cazul nostru formula $s(t) = vt$ descrie o funcție.

Alt exemplu: formula $L = F \cdot d$. Considerînd o forță F (constantă) ce deplasează un corp, lucrul mecanic efectuat va depinde (va fi funcție de) mărimea deplasării d. Scriem $L(d) = Fd$ și în acest fel am descris o funcție.

La fel, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + 2$ este o descriere a funcției f cu ajutorul unei formule.

5. GRAFICE

În practică se obișnuiește să se prezinte rezultatele unor experiențe, constatări, date asupra producției, sub forma unor schițe, desene sau grafice.

Cuvîntul „grafic" provine din cuvîntul grecesc „*graphein*" care înseamnă a desena.

Să presupunem că la ora de educație fizică profesorul organizează un concurs de aruncare a mingii de oină. În mod sigur nu toți elevii vor arunca mingea la aceeași distanță.

Să presupunem că cinci elevi au aruncat, în ordine, mingea de oină la 24 m, 22 m, 18 m, 25 m, 14 m. Sigur că cea mai bună aruncare a fost cea de 25 m. Desenînd sub formă de segmente aceste aruncări, ele vor arăta ca în figura III.17. Spunem că am făcut *graficul aruncărilor.*

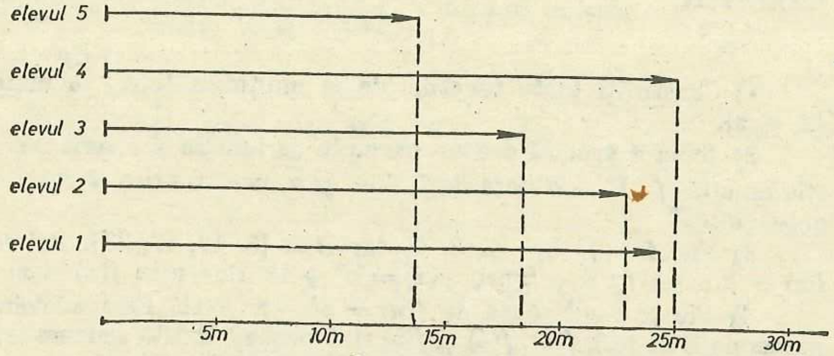


Fig. III.17

După acest grafic, putem face clasificarea aruncărilor astfel:
— pe locul I elevul al 4-lea;
— pe locul II primul elev;
și așa mai departe.

Să privim harta țării noastre și să urmărim traseul căii ferate între orașele București și Fetești. Pe fiecare hartă este trecută scara la care au fost reduse distanțele din teren.

Să reprezentăm stațiile de cale ferată și distanțele dintre ele. Este suficient să desenăm un segment de dreaptă și să reprezentăm stațiile prin puncte pe acest segment, ținînd seamă de distanțele dintre ele (vezi fig. III.18).

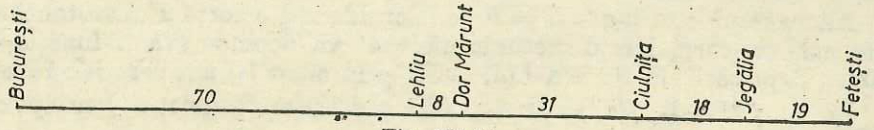


Fig. III.18

O astfel de reprezentare (pe o dreaptă) poate fi făcută pentru orice traseu în care nu ne interesează altceva decît distanțele între orașele (sau stațiile de cale ferată) de pe acest traseu.

Se pot reprezenta prin segmente și alte mărimi rezultate din măsurători, ca de exemplu lungimile principalelor rîuri de pe teritoriul țării noastre (fig. III.19).

Să urmărim modul cum evoluează, din oră în oră, temperatura unei zile. Reprezentînd indicațiile termometrului pe o dreaptă, vom avea doar niște valori a căror succesiune nu ne spune nimic. Apare astfel necesitatea

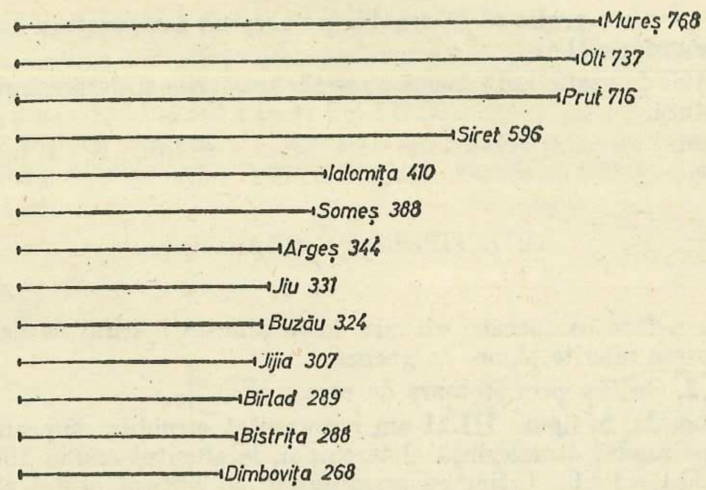


Fig. III.19

folosirii planului, înzestrat cu un sistem de axe de coordonate. Pe una dintre axe, de exemplu pe axa absciselor, vom marca ora, iar pe cealaltă axă temperatura înregistrată.

Luînd temperaturile aerului, într-o zi frumoasă de iarnă, s-au constatat creșteri sau descreșteri mari de temperatură, astfel:

ora	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
temperatura în grade C	−5	−6	−7	−6	−6	−7	−6	−7	−8	−9	−7	+1	+10	+14	+13	+10	+8	+2

În figura III.20 am reprezentat grafic (prin puncte) temperaturile înregistrate de la ora 5 la ora 17. Apoi am unit aceste puncte prin segmente de dreaptă.

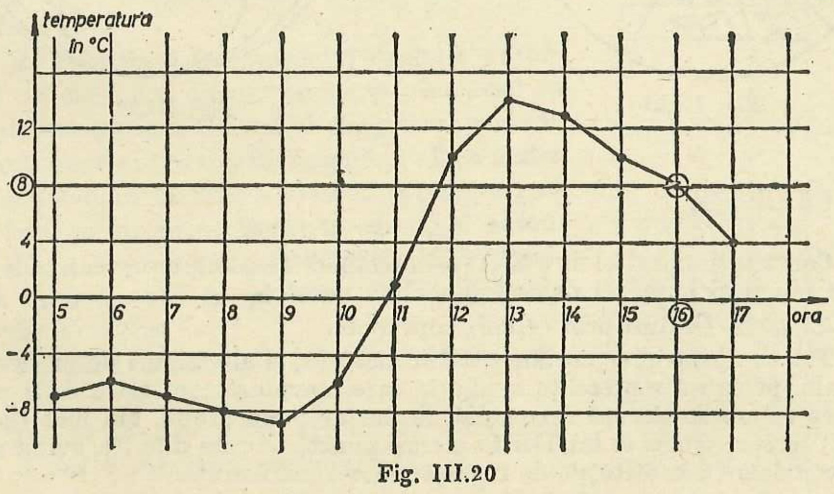


Fig. III.20

Citim pe acest grafic că la ora 16 (pe abscisă) temperatura aerului era de +8°C (pe ordonată).

Un astfel de grafic redă foarte sugestiv creşterile şi descreşterile bruşte de temperatură.

ALTE TIPURI DE GRAFICE

Pentru a face comparaţii vizuale, între diferite mărimi de aceeaşi natură, se folosesc diferite tipuri de grafice.

Tipul 1. Grafice prin sectoare de cerc.

De exemplu, în figura III.21 am reprezentat structura suprafeţei ţării noastre, după modul de folosinţă al terenului, la sfîrşitul anului 1978 (după Anuarul statistic 1979). Citim pe acest grafic că terenul arabil reprezintă 41,3% din total, iar viile şi livezile reprezintă 3,1% din total.

Modul de construcţie al unui astfel de grafic se bazează pe calculul numărului de grade (din 360) ce corespund unui procent; în funcţie de numărul de procente se construieşte sectorul respectiv (la 1% corespund 3,6° adică 3°36′)

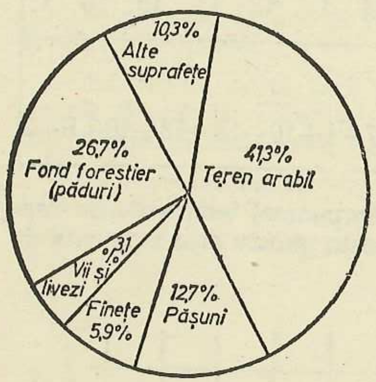


Fig. III.21

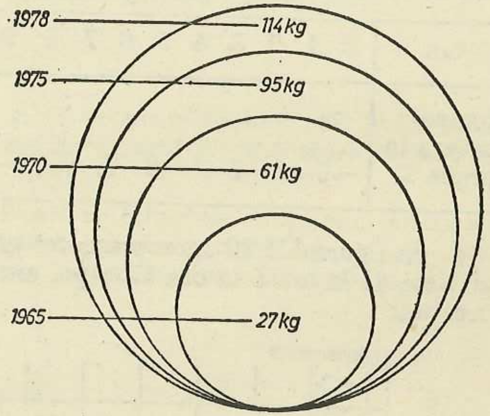


Fig. III.22

EXERCIŢII

Construiţi un astfel de grafic (prin sectoare de cerc), reprezentînd numărul de băieţi şi numărul de fete din clasa voastră.

Tipul 2. Grafice prin cercuri suprapuse.

Tot cu ajutorul cercurilor pot fi construite şi alte tipuri de grafice. De exemplu, pentru a reprezenta modul în care a evoluat cantitatea de îngrăşămînt ce se administrează (în medie) la hectar teren arabil, am luat (în fig. III.22) cercuri tangente interior în acelaşi punct, de raze diferite, avînd ariile proporţionale cu cantităţile de îngrăşăminte administrate.

Tipul 3. Grafice prin sectoare de cerc, cu raze inegale.

Prin sectoare de cerc, cu acelaşi număr de grade, dar cu raze diferite, putem urmări de exemplu, modul cum a evoluat în timp populaţia Bucureştiului între anii 1930 şi 1978 (vezi fig. III.23).

Tipul 4. Să urmărim harta creşterii investiţiilor în cîteva judeţe, în anul 1978 faţă de anul 1965 (Anuarul statistic 1979), prezentată în figura III.24.

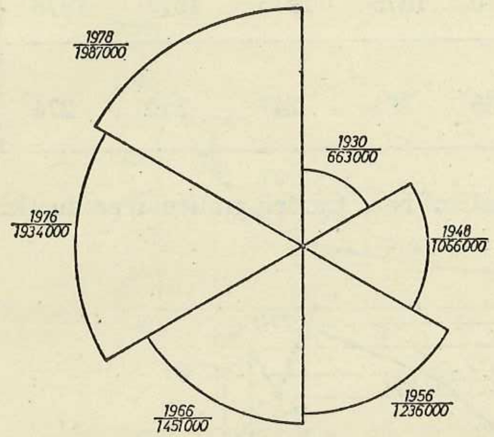


Fig. III.23

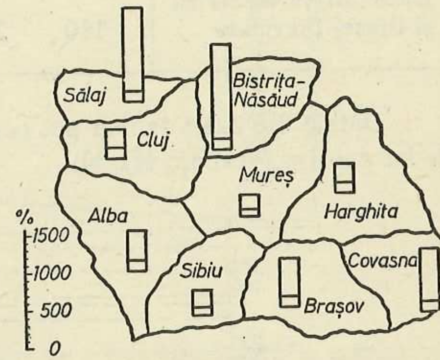


Fig. III.24

Observăm că în fiecare judeţ au fost făcute investiţii în mod diferit. Se vede de asemenea că judeţe mai slab dezvoltate din punct de vedere industrial au beneficiat de un volum de investiţii mai mare, conform politicii Partidului Comunist Român de ridicare a tuturor judeţelor ţării. De exemplu, judeţele Sălaj şi Bistriţa-Năsăud. Comparînd datele referitoare la judeţul Sălaj cu scara, constatăm că investiţiile făcute în 1978 în acest judeţ reprezintă 1 400% faţă de investiţiile făcute în anul 1965.

Tipul 5. Un alt tip de grafic este cel din figura III.25.

El reprezintă (în procente) evoluţia numărului de elevi din ciclul primar şi gimnazial în diferiţi ani şcolari. Un astfel de grafic, pe bază de dreptunghiuri cu o latură egală, ne face o idee asupra modului în care a crescut populaţia şcolară faţă de un an de bază; în exemplul nostru anul de bază este anul şcolar 1938—1939 (considerat anul de vîrf în perioada de dinainte de 23 August 1944).

Începînd cu anul 1948, anul reformei învăţămîntului, se observă o creştere a numărului de elevi în învăţămîntul primar şi gimnazial.

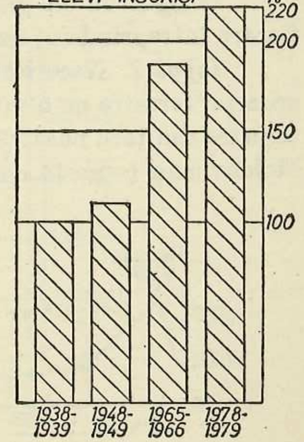


Fig. III.25

Tipul 6. Graficul producţiei.

Unul dintre principalele produse ale industriei constructoare de mașini din țara noastră îl constituie locomotivele electrice și diesel pentru linii magistrale. Producția lor a început în anul 1960, cînd au fost realizate primele 10 bucăți. În tabelul de mai jos prezentăm numărul locomotivelor fabricate în cîțiva ani.

Anii	1965	1970	1975	1976	1977	1978
Locomotive electrice și diesel fabricate	110	265	334	247	310	274

Datele din acest tablou pot constitui baza trasării graficului producției de locomotive (vezi fig. III.26).

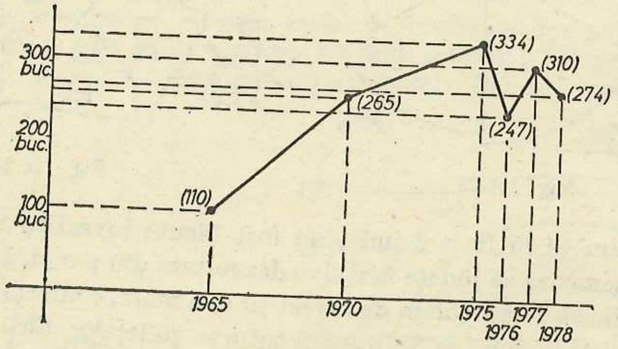


Fig. III.26

După anul 1970 se observă o uniformizare, în sensul că necesarul de locomotive se stabilizează în jurul a 300 bucăți pe an.

Desigur că un grafic al producției poate fi construit (desenat) pentru fiecare întreprindere, uzină sau chiar secție în parte.

Tipul 7. Necesitățile practice impun adesea cunoașterea profilului scoarței terestre pe o întindere mai mare. O reprezentare a profilului scoarței terestre din țara noastră, obținută printr-o secțiune N-S care trece prin vîrful Moldoveanu (numită curbă hipsometrică) este dată în figura III.27.

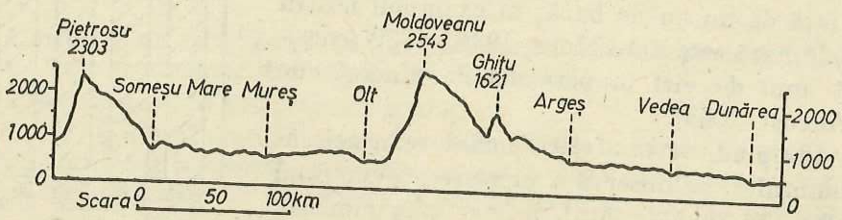


Fig. III.27

Tipul. 8. O deosebită importanță o prezintă și graficul în care este redat profilul longitudinal al unui curs de apă. Pe graficul din figura III.28 este redat profilul longitudinal al rîului Argeș. (Atlasul R.S.R.). Astfel de grafice pot da o indicație asupra locului în care ar trebui construite baraje hidro-energetice sau lacuri de acumulare pentru irigații, de-a lungul unui rîu. Am reprezentat pe abscisă lungimea rîului măsurată de la izvor, iar pe ordonată altitudinea punctului corespunzător de pe abscisă.

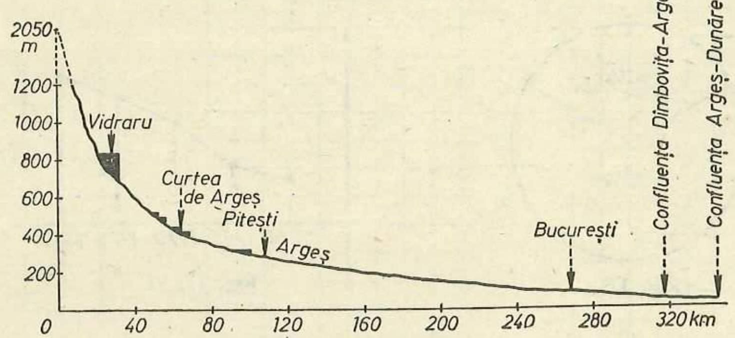


Fig. III.28

Am urmărit pînă acum cîteva moduri de a reprezenta grafic mărimi ce depind unele de altele. În două exemple am întîlnit grafice plane în care s-a trasat o linie continuă, frîntă sau curbă. Să mai considerăm un astfel de exemplu. În figura III.29 am reprezentat printr-o linie continuă creșterea populației orașului București în perioada 1835—1975, și la fel evoluția populației orașului Iași în aceeași perioadă.

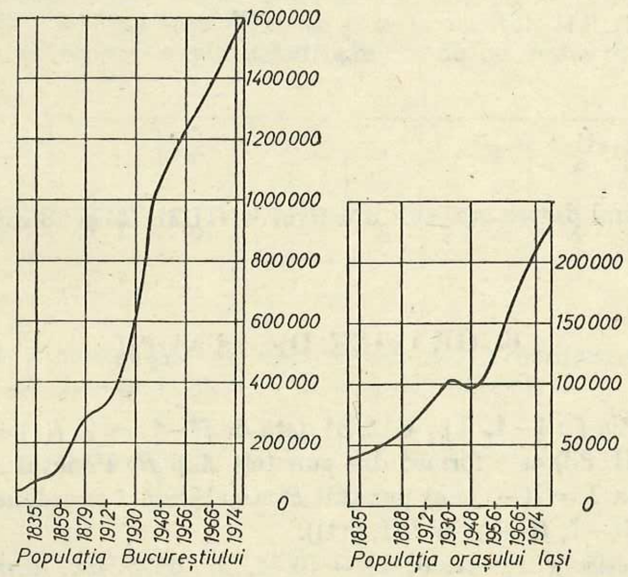


Fig. III.29

O problemă importantă a construcției graficelor o constituie păstrarea proporțiilor, prezentarea corectă a tuturor datelor. Un grafic ca cel din figura III.30, nu este corect, este evident fals. Nu este corect ca sectorului de cerc mai mare să-i corespundă 20% iar celui mai mic 80%.

În graficul de producție din figura III.31 nu a fost precizată unitatea de măsură pe axa ordonatelor, deci nu ne putem da seama în mod corect despre evoluția producției. Graficul este incomplet.

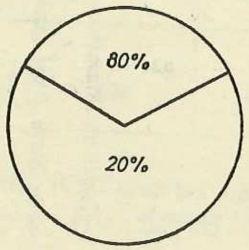


Fig. III.30

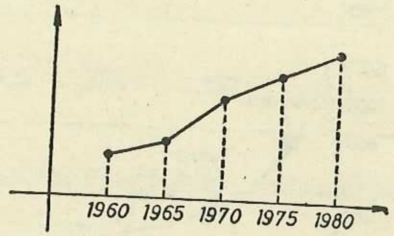


Fig. III.31

Priviți figura III.32. Și un astfel de grafic este fals, deoarece dacă la 100% corespunde aria unui cerc de rază r, atunci la 200% corespunde aria unui cerc de rază $\sqrt{2}r$ si nu $2r$(!)

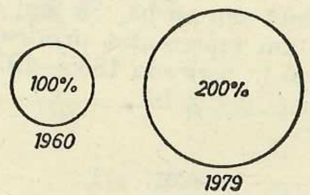


Fig. III.32

EXERCIȚIU

(oral) Unul dintre graficele din figurile III.21, 22 și 23 este fals. Care?

6. GRAFICE DE FUNCȚII

Fie funcția $f: \{-1, 1\} \to \{2, 3\}$ dată de $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$. Graficul ei (vezi fig. III. 33) este format din punctele A și B. Punctul A are abscisa -1 și ordonata $2 = f(-1)$, iar punctul B are abscisa 1 și ordonata $3 = f(1)$. Putem scrie $A(-1, f(-1))$ și $B(1, f(1))$.

Fie funcția $g: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2)$ dată de formula $g(x) = -x + 1$. Avem $g(-1) = 2$, $g(0) = 1$, $g(1) = 0$. Graficul ei este format

din punctele A, I și J din figura III. 33. Avem $A(-1, g(-1))$, $J(0, g(0))$ și $I(1, g(1))$.

Fie funcția $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, descrisă de formula $f(x) = 2x$. Avem $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$. Graficul acestei funcții este format din punctele P, O, N și M din figura III.34.

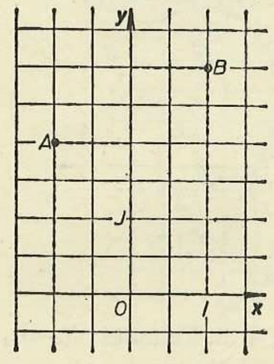


Fig. III.33

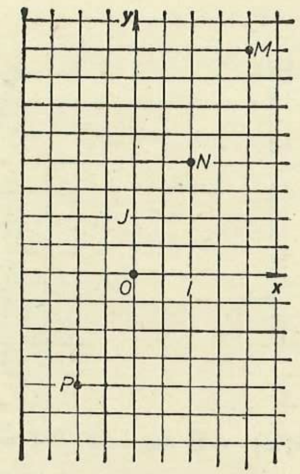


Fig. III.34

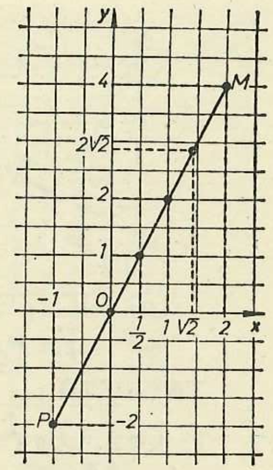


Fig. III.35

Fie funcția $g: [-1; 2] \to \mathbf{R}$ descrisă de aceeași formulă ca și funcția f, adică $g(x) = 2x$. Avem $g(-1) = -2$, $g(0) = 0$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $g(1) = 2$, $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $g(2) = 4$. Folosind teorema lui Thales putem stabili că orice punct de pe graficul acestei funcții, punct avînd abscisa x și ordonata $g(x)$, se află pe segmentul MP. Graficul acestei funcții este segmentul MP (fig. III.35).

Să trecem coordonatele punctelor marcate de pe grafic în următorul tabel:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
$g(x)$	-2	0	1	2	$2\sqrt{2}$	4

EXERCIȚII

Marcați alte puncte pe graficul funcției g și treceți-le coordonatele în tabel.

Să considerăm funcția $f: [0, 4] \to \mathbf{R}$ dată de formulele

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{dacă } x \in [0; 2]; \\ x & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Avem $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$; $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 1{,}5$; $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$, dar $f(3) = 3$, deoarece $3 \notin [0, 2]$; la fel $f(4) = 4$.

Graficul funcţiei f este format din segmentele JK şi KL din figura III.36.

Să considerăm o funcţie $f: A \to \mathbf{R}$, unde A este o mulţime de numere. Fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un număr real $f(x)$ şi un punct de coordonate $(x, f(x))$ în plan. Mulţimea acestor puncte este **graficul** funcţiei f (vezi fig. III.37).

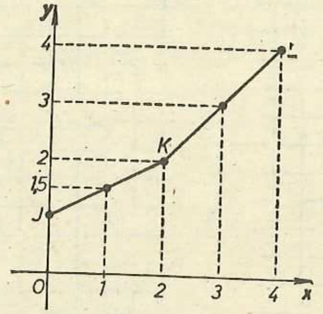


Fig. III.36

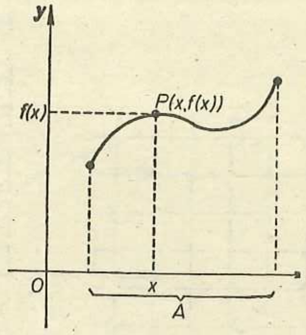


Fig. III.37

EXERCIŢII

1) Fie funcţia $f: [-3; 2] \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = -x + 2$. Calculaţi $f(-3)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{4}{3}\right)$, $f(0)$. Desenaţi apoi, într-un sistem de coordonate, graficul funcţiei.

2) Fie funcţia g: $\{-4, -2, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$ dată de formulele:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dacă } x \in \{-4, -2, 0\}; \\ 2 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Completaţi tabelul valorilor funcţiei; desenaţi apoi graficul ei.

3) Reprezentaţi grafic funcţia f: $\{-3, -1, 1\} \to \mathbf{R}$ definită de formula $f(x) = 3x + 2$.

4) Reprezentaţi grafic, în acelaşi sistem de coordonate, funcţiile $f: [-2, 2] \to \mathbf{R}$ şi $g: [-2; 2] \to \mathbf{R}$, descrise de formulele $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x - 1$. Ce observaţi?

5) Reprezentaţi grafic funcţia f: $[-1; 3] \to [-1; 2]$ definită de formulele:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [-1; 1]; \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

7. GRAFICELE FUNCŢIILOR LINIARE

Să desenăm graficul funcţiei f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = 2x$.

Avem $f(0) = 0$, deci originea $(0, 0)$ este un punct al graficului. Avem $f(1) = 2$ şi fie $U(1, 2)$.

Fie $P(a, 2a)$ şi $Q(b, 2b)$ două puncte de pe grafic, diferite între ele (şi diferite de O) ca în figura III.38. Segmentul PP_1, are aceeaşi lungime ca şi P_2O, anume $2a$; segmentul QQ_1 are aceeaşi lungime ca şi Q_2O, anume $2b$.

Avem $\dfrac{OP_1}{OQ_1} = \dfrac{a}{b}$, iar $\dfrac{PP_1}{QQ_1} = \dfrac{2a}{2b} = \dfrac{a}{b}$.

Din reciproca teoremei lui Thales aplicată paralelelor PP_1 şi QQ_1, rezultă că punctele O, P şi Q sînt pe aceeaşi dreaptă, dreaptă determinată de punctele $O(0, 0)$ şi $U(1, 2)$.

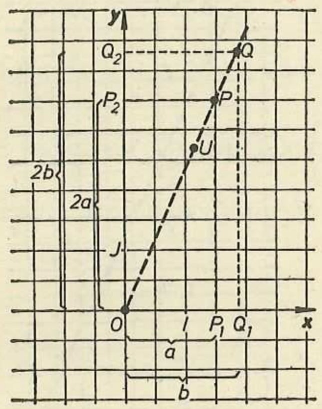


Fig. III 38

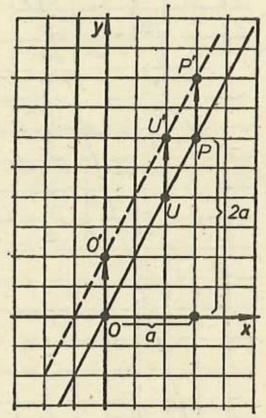


Fig. III.39

Astfel graficul funcţiei f este dreapta OU, ce trece prin origine. Din acest motiv se spune că funcţia f este **liniară.**

Să desenăm graficul funcţiei g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $g(x) = 2x + 1$.

Avem $g(0) = 0 + 1$, deci punctul O' (0,1) aparţine graficului; $g(1) = 2 + 1 = 3$; deci punctul U' (1, 3) aparţine graficului.

Avem $g(a) = 2a + 1$; punctul $P'(a, 2a + 1)$ de pe grafic se obţine prin translatarea verticală a punctului $P(a, 2a)$. Se observă (fig. III.39) că graficul funcţiei g se obţine prin translatarea graficului funcţiei f; el este deci tot o dreaptă. Şi funcţia g este liniară.

DEFINIŢIE. O funcţie f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de formula $f(x) = mx + n$ (unde m şi n sînt numere reale date) se numeşte **funcţie liniară.**

Graficul unei funcţii liniare este o dreaptă.

Să dăm două exemple.

Fie mai întîi $m = 3$ şi $n = -1$, adică fie funcţia liniară f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = 3x - 1$. Să întocmim tabelul

x	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	-7	-4	-1	0	2	$\frac{7}{2}$

ce conţine cîteva valori ale funcţiei. Să-i desenăm graficul în figura III.40.

Să observăm că dacă $b > a$, atunci $f(b) > f(a)$, pentru orice numere a şi b. Se spune că funcţia f este *crescătoare.*

Fie $m = -2$ și $n = 1$, adică fie funcția liniară $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $g(x) = -2x + 1$. Avem de exemplu $g(-2) = 5$, $g(-1) = 3$, $g(0) = 1$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $g(1) = -1$, $g(2) = -3$. Să-i desenăm graficul în figura III.41.

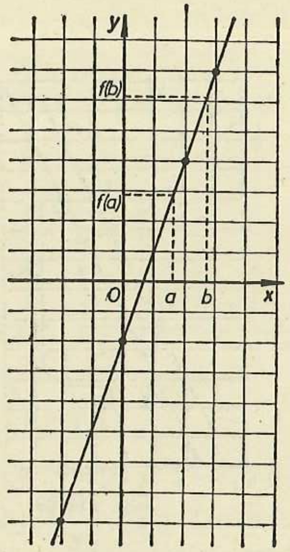


Fig. III.40

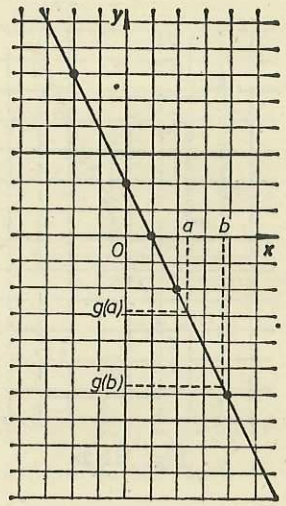


Fig. III.41

Să observăm că dacă $b > a$, atunci $g(b) < g(a)$, pentru orice numere reale a și b. Se spune că g este *descrescătoare*.

Dacă $m = 0$, atunci funcția descrisă de formula $h(x) = n$ poartă numele de **funcție constantă.** Graficul ei este o dreaptă paralelă cu axa absciselor (vezi fig. III.42).

TEOREMĂ. Fie f funcția liniară descrisă de formula $f(x) = mx + n$. Dacă $m > 0$, atunci f este crescătoare; dacă $m < 0$, atunci f este descrescătoare.

Demonstrație. Fie $m > 0$ și fie $b > a$ două numere reale. Atunci $mb > ma$; adunînd ambii membri ai inegalității cu n, obținem $mb + n > ma + n$, adică $f(b) > f(a)$. Deci funcția f este crescătoare.

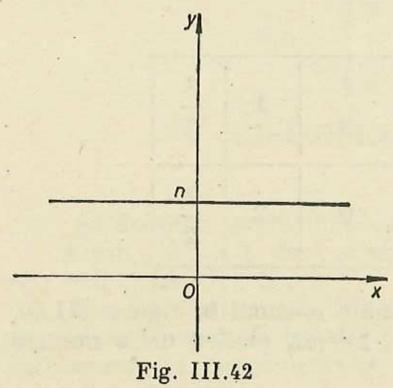


Fig. III.42

Dacă $m < 0$ și $b > a$, atunci $mb < ma$(!). La fel ca mai sus, $mb + n < ma + n$, adică $f(b) < f(a)$, ceea ce înseamnă că funcția f este descrescătoare. Teorema este demonstrată.

Graficul funcției liniare $f(x) = mx + n$ este o dreaptă. Dar, știm de la geometrie că o dreaptă este determinată de două puncte. Vom putea desena deci graficul unei funcții liniare dacă-i cunoaștem două puncte.

Să presupunem că $m \neq 0$ și $n \neq 0$. Orice punct al graficului lui f are coordonatele $(x; f(x))$ unde x este număr real.

Punctul de pe grafic ce are abscisa 0 are coordonatele $(0; f(0))$, adică $(0; n)$; acest punct este punctul de intersecție al graficului cu axa ordonatelor (vezi fig. III.43).

Să aflăm coordonatele punctului de pe grafic ce are ordonata 0; din $f(x) = 0$, adică din $mx + n = 0$, găsim că $x = -\frac{n}{m}$; deci acest punct are coordonatele $\left(-\frac{n}{m}; 0\right)$. El este punctul de intersecție al graficului cu axa absciselor.

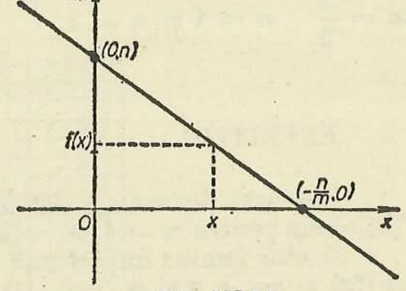


Fig. III.43

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să desenăm graficele funcțiilor $f(x) = 3x - 6$ și $g(x) = -3x + 3$, în același sistem de coordonate.

Avem $f(0) = -6$, $g(0) = 3$. Graficul funcției f intersectează axa ordonatelor în punctul $A(0, -6)$, iar axa absciselor în punctul $B(2, 0)$, deoarece $-\frac{(-6)}{3} = 2$.

Graficul funcției g intersectează axa ordonatelor în punctul $C(0, 3)$, iar axa absciselor în punctul $D(1, 0)$, deoarece $-\frac{3}{(-3)} = 1$.

Cele două drepte sînt desenate în figura III.44.

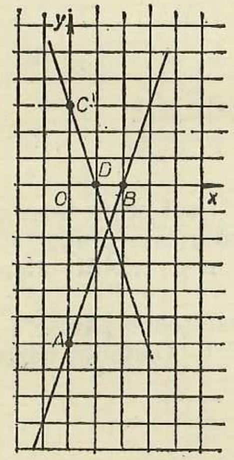


Fig. III.44

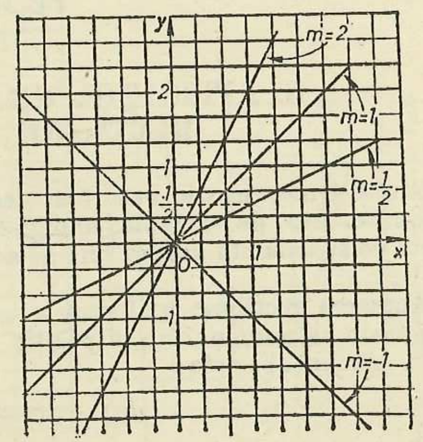


Fig. III.45

Funcţiile liniare $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrise de $f(x) = mx$ au proprietatea că graficele lor trec prin originea axelor de coordonate. Într-adevăr, pentru orice m, avem $f(0) = m \cdot 0 = 0$, adică punctul de coordonate $(0, 0)$ se află pe grafic.

Un al doilea punct pe grafic este punctul de coordonate $(1, m)$.

În figura III.45 am desenat dreptele corespunzătoare pentru $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$, $m = 1$ şi $m = 2$.

EXERCIŢIU

Desenaţi (în acelaşi sistem de coordonate) graficele funcţiilor liniare $f(x) = mx$ pentru $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ şi $m = 4$.

O altă familie importantă de drepte sînt graficele funcţiilor $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = mx + n$ şi m fixat. De exemplu, în figura III.46 am reprezentat, pentru $m = \frac{1}{2}$, graficele funcţiilor $f(x) = \frac{1}{2}x + n$ cu $n = -1$, $n = 0$, $n = \frac{3}{2}$. Aceste drepte sînt paralele între ele.

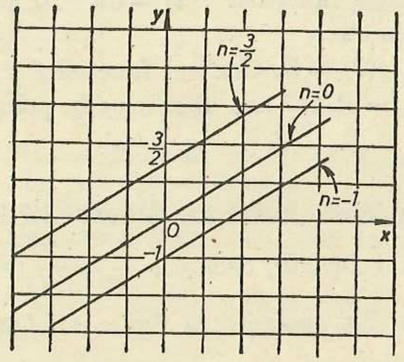


Fig. III.46

8. APLICAŢIE. GRAFICUL MIŞCĂRII RECTILINII UNIFORME

Multe fenomene din natură se desfăşoară „liniar", cel puţin între anumite limite. Aşa, de exemplu, alungirea unui arc elastic este proporţională cu forţa ce se exercită asupra lui; pe acest principiu sînt construite dinamometrele.

Mişcarea rectilinie uniformă a unui corp se desfăşoară „liniar". Să presupunem că mobilul este în poziţia d_0 la momentul t_0. Distanţa parcursă pînă la momentul t este

$$d(t) = v(t - t_0) + d_0.$$

În această formulă viteza v este presupusă constantă.

Putem scrie această formulă astfel:

$$d(t) = mt + n, \text{ cu } m = v \text{ iar } n = d_0 - vt_0$$

şi recunoaştem forma funcţiilor liniare.

Graficul acestei mişcări, desenat în figura III.47, ne permite să apreciem rapid poziţia mobilului în orice moment al mişcării. De aceea în practică sînt des utilizate astfel de grafice.

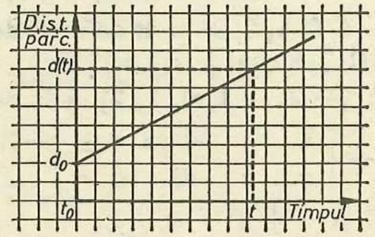


Fig. III.47

EXERCIŢIU

(oral!) În figura III.48 este prezentat un extras din Mersul trenurilor pe tronsonul 100, între Bucureşti Nord şi Roşiori Nord.

Puteţi aprecia ora la care vor trece cele trei trenuri prin dreptul staţiilor Olteni şi Vadu Lat?

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să reprezentăm grafic funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de formulele

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{dacă } x \leq 1; \\ 3x - 4 & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

În figura III.49 am reprezentat mai întîi prin linii întrerupte graficele funcţiilor $g(x) = -x + 2$ şi $h(x) = 3x - 4$. Graficul funcţiei f este format din cele două semidrepte trasate cu linie îngroşată.

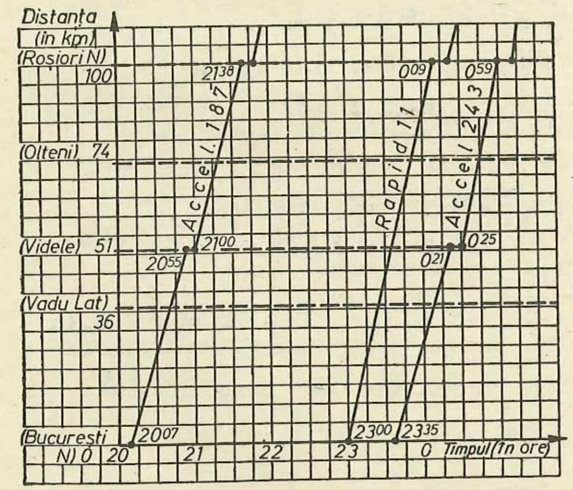


Fig. III.48

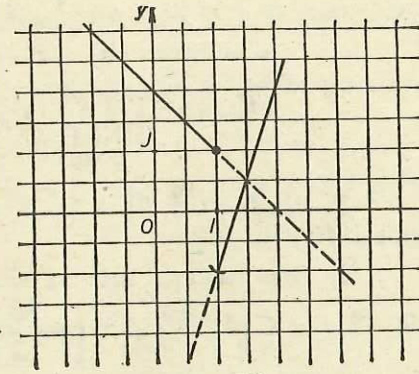


Fig. III.49

EXERCIȚII

1) Fie funcția $f: \{-2, 0, 2, 4\} \to \{-1, 0, 1, 2\}$ definită de $f(x) = \frac{1}{2}x$. Calculați $f(-2)$, $f(2)$, $f(4)$.

2) Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită de $f(x) = -x + 5$. Calculați $f(-2)$; $f(0)$; $f(3)$; $f(4)$. Aproximați cu eroare de 0,01 $f(\sqrt{26})$.

3) Fie $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbf{R}$ definită de $f(x) = x^3 - 7$. Calculați $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$ și $f(3)$.

4) Fie funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$ definită de

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dacă } x \in \{-2, -1\}; \\ x + 1 & \text{dacă } x \notin \{-2, -1\}. \end{cases}$$

Calculați $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ și $f(2)$.

5) Fie funcția $f: [-2; 2] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{dacă } x \in [-2; 0]; \\ x - 2 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Calculați $f(-2)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{2}{5}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f(2)$ și $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6) Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \{-5, 1, 7\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{3}$; b) $g: \{-5, 1, 7\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1-x}{3}$; c) $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = x - 3$; d) $s: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $s(x) = \frac{3}{2}x$; e) $t: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t(x) = \frac{3}{2}$.

7) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de formulele

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2, & \text{dacă } x \leqslant 1, \\ 3, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

1) Fie $f: \{0, 1, 2\} \to \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ dată de $f(x) = x - 3$. Calculați $f(1)$ și $f(2)$.

2) Reprezentați într-un sistem de coordonate punctele $A(0, 3)$; $B(-2, 0)$; $C\left(1, \frac{5}{2}\right)$ și $D\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

3) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = 2x - 3$.

CAPITOLUL IV

SISTEME DE ECUAȚII

1. ECUAȚII LINIARE (DE GRADUL 1) CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Să considerăm ecuația:

$$3x + 4y - 17 = 0 \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Dacă înlocuim în ecuație pe x cu 3 iar pe y cu 2, obținem propoziția adevărată: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 17 = 0$. Spunem că perechea $(3, 2)$ este soluție a ecuației.

Dacă înlocuim în ecuație pe x cu 0 iar pe y cu $\frac{17}{4}$, obținem propoziția adevărată $3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{17}{4} - 17 = 0$. Deci și perechea $\left(0, \frac{17}{4}\right)$ este soluție a ecuației.

Dimpotrivă, dacă înlocuim pe x cu -1, iar pe y cu 3, obținem propoziția falsă $3 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 - 17 = 0$. Deci perechea $(-1, 3)$ nu este soluție a ecuației.

Observăm că amîndouă soluțiile găsite sînt elemente ale produsului cartezian $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Am învățat în capitolul III că produsul cartezian $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ poate fi identificat cu un plan, în care am ales un sistem de coordonate.

Să reprezentăm soluțiile găsite ca puncte într-un astfel de plan (punctele A și B din figura IV.1).

Oare acestea sînt singurele soluții ale ecuației?

Fie x un număr real; să înlocuim în ecuație pe x cu x, iar pe y cu $\frac{17 - 3x}{4}$. Obținem

$$3 \cdot x + 4 \cdot \frac{17 - 3x}{4} - 17 = 0,$$

care este o propoziție adevărată, oricare ar fi x.

Deci punctele din plan ce au coordonatele $\left(x, \dfrac{17-3x}{4}\right)$ reprezintă soluţii ale ecuaţiei. Aceste puncte formează o dreaptă în plan, ce este determinată de punctele A şi B (vezi fig. IV.2).

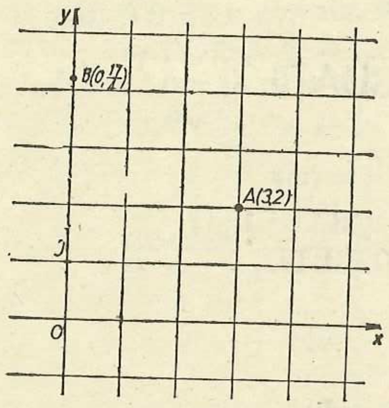


Fig. IV.1

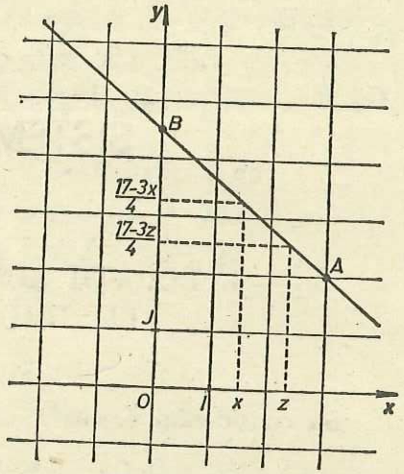


Fig. IV.2

Să calculăm coordonatele unor puncte de pe această dreaptă (vezi fig. IV.3);

Punctul	C	D	E	F
Abscisa x	$-\dfrac{1}{2}$	1	2	$3\dfrac{1}{2}$
Ordonata $\dfrac{17-3x}{4}$	$\dfrac{37}{8}$	$\dfrac{7}{2}$	$\dfrac{11}{4}$	$\dfrac{13}{8}$

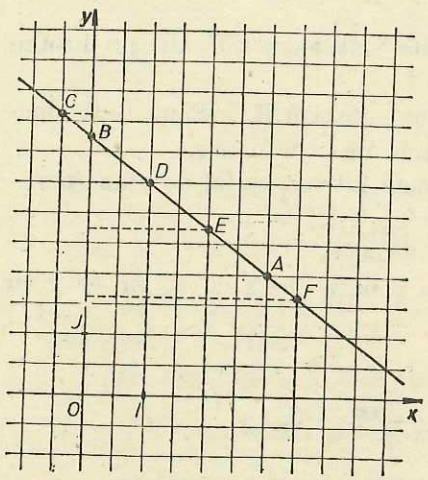


Fig. IV.3

În afara punctelor de pe această dreaptă, mai putem găsi şi alte soluţii ale ecuaţiei?

Să presupunem că avem o soluţie, reprezentată de punctul din plan cu coordonatele (x, y). Atunci $3x + 4y - 17 = 0$, de unde $4y = 17 - 3x$, adică $y = \dfrac{17-3x}{4}$. Deci punctul are coordonatele $\left(x, \dfrac{17-3x}{4}\right)$; el se află pe dreaptă.

Am stabilit că soluţiile ecuaţiei

$$3x + 4y - 17 = 0, \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

sînt numai punctele de pe dreapta AB.

Din acest motiv ecuaţia $3x + 4y - 17 = 0$ se numeşte **liniară**. Numele de „ecuaţie de gradul 1" provine din faptul că polinomul în x şi y din membrul stîng are gradul (total) 1.

Fie acum ecuaţia $2x - y - 4 = 0$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Înlocuind pe x cu 2 iar pe y cu 0, obţinem propoziţia adevărată $2 \cdot 2 - 0 - 4 = 0$; dacă înlocuim pe x cu 0 iar pe y cu -4, obţinem propoziţia adevărată $2 \cdot 0 - (-4) - 4 = 0$.

Astfel perechile $(2, 0)$ şi $(0, -4)$ sînt soluţii ale ecuaţiei.

Să presupunem că perechea (x, y) este soluţie a ecuaţiei.

Deci $2x - y - 4 = 0$ este o propoziţie adevărată. Obţinem de aici $y = 2x - 4$, ceea ce înseamnă că perechea are forma $(x, 2x - 4)$.

Putem spune deci că orice soluţie a ecuaţiei este de forma $(x, 2x - 4)$, unde x este un număr real.

Dar, oare astfel de pereche este soluţie a ecuaţiei $2x - y - 4 = 0$?

Să înlocuim pe x cu x, iar pe y cu $2x - 4$; obţinem propoziţia

$$2x - (2x - 4) - 4 = 0,$$

care este adevărată.

Deci soluţiile ecuaţiei sînt perechile de forma $(x, 2x - 4)$, unde x este un număr real oarecare. Punctele avînd aceste coordonate formează în plan o dreaptă (vezi fig. IV.4).

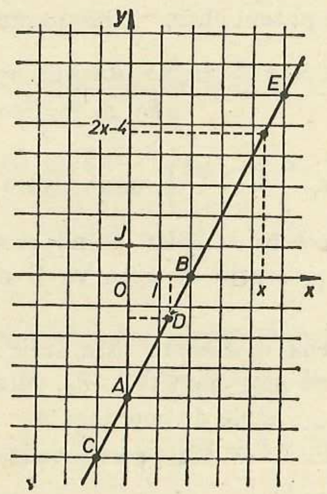


Fig. IV.4

Să calculăm coordonatele unor puncte de pe această dreaptă:

Punctul	A	B	C	D	E
Abscisa x	0	2	-1	$\sqrt{2}$	5
Ordonata $2x-4$	-4	0	-6	$2\sqrt{2}-4=-1{,}171\ldots$	6

Şi ecuaţia $2x - y - 4 = 0$ este liniară, cu două necunoscute.

Să observăm că din $2x - y - 4 = 0$ putem obține și că $x = \frac{y+4}{2}$; aceasta înseamnă că soluțiile ecuației pot fi scrise și în forma $\left(\frac{y+4}{2}, y\right)$, unde y este un număr real oarecare.

OBSERVAȚIE. Comparați mulțimea soluțiilor ecuației $2x - y - 4 = 0$ cu graficul funcției $f(x) = 2x - 4$. Ce observați?

Forma generală a **ecuației liniare cu două necunoscute este**

$$ax + by + c = 0, \ (x, y \in \mathbb{R}),$$

unde a, b, c sînt numere reale, iar $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Se mai spune și că ecuația este **de gradul 1.**

Numerele a și b se numesc **coeficienții** ecuației; de exemplu, despre a se spune că este coeficientul lui x. Numărul c se numește **termenul liber** al ecuației.

O ecuație liniară cu două necunoscute **are mai multe soluții.**

Fie (x, y) o soluție a ecuației; aceasta înseamnă că înlocuind pe x cu x, iar pe y cu y în ecuație, obținem propoziția adevărată

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0.$$

Din această egalitate putem obține (ținînd seamă că $b \neq 0$):

$$y = \frac{-c - ax}{b}.$$

Perechile de forma $\left(x, \frac{-c - ax}{b}\right)$, unde x este un număr real oarecare, sînt soluțiile ecuației. Punctele din plan avînd aceste coordonate formează o dreaptă (vezi fig. IV.5); această dreaptă va fi numită **dreapta soluțiilor ecuației** $ax + by + c = 0$.

Pentru a putea desena o dreaptă este suficient să cunoaștem două puncte ale ei. De obicei se aleg punctele de intersecție ale dreptei cu axele de coordonate.

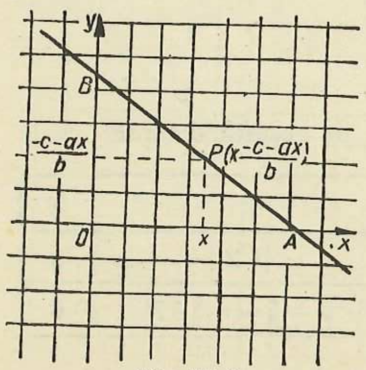


Fig. IV.5

Mai precis, punctul B are abscisa 0; ordonata lui va fi $\frac{-c - a \cdot 0}{b} = -\frac{c}{b}$; deci $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$. Punctul A are ordonata 0; din $\frac{-c - ax}{b} = 0$ deducem că $x = -\frac{c}{a}$; deci $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Desenați în plan, într-un sistem de coordonate, mulțimea soluțiilor ecuației $2x + 3y - 6 = 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Rezolvare. Să calculăm abscisa punctului $A(x, 0)$ punctul de intersecție al dreptei soluțiilor cu axa absciselor. Înlocuind pe x cu x, iar pe y cu 0, obținem propoziția adevărată

$$2 \cdot x + 3 \cdot 0 - 6 = 0,$$

de unde $x = \frac{6}{2} = 3$. Deci $A(3, 0)$.

Fie $B(0, y)$ punctul de intersecție al dreptei soluțiilor cu axa ordonatelor. Înlocuind pe x cu 0 iar pe y cu y, obținem propoziția adevărată $2 \cdot 0 + 3 \cdot y - 6 = 0$, de unde $y = \frac{6}{3} = 2$. Deci $B(0, 2)$.

Mulțimea soluțiilor ecuației se identifică cu dreapta AB (vezi fig. IV.6).

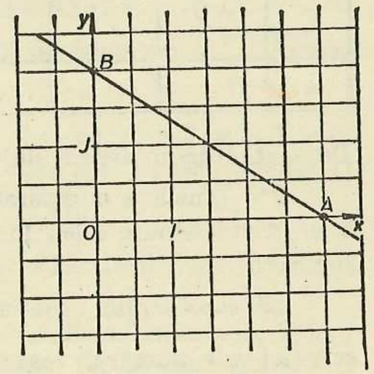


Fig. IV.6

EXERCIȚII

1) (oral) Arătați care dintre ecuațiile de mai jos nu este o ecuație liniară cu două necunoscute. Motivați de ce:

a) $8x + 5y - 6 = 0$; b) $8x - 5 = 0$; c) $x - 2y = 0$; d) $\frac{1}{3}x + y = 0$; e) $y + 1 = 0$; f) $x + y = -\frac{1}{2}$; g) $x \cdot y = 4$; h) $y = 7x - 5$; i) $3x + 0y - 0{,}5 = 0$.

2) Desenați dreapta soluțiilor pentru ecuația liniară:

a) $x + y - 4 = 0$; b) $2x - y - 4 = 0$; c) $x - 3y + 3 = 0$; d) $x + y + 1 = 0$.

3) Care dintre perechile de mai jos sînt soluții ale ecuației $7x - 9y - 2 = 0$:

a) $(-1, 1)$; b) $\left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{9}\right)$; c) $(-1, -1)$; d) $(3, 2)$; e) $(8, 6)$; f) $\left(\frac{3}{14}, -\frac{1}{18}\right)$?

4) Scrieți cinci perechi care să fie soluții ale ecuației liniare $2x + 3y - 10 = 0$; scrieți apoi trei perechi care nu sînt soluții ale acestei ecuații.

5) Desenați în același sistem de coordonate dreptele soluțiilor ecuațiilor:

a) $2x + 2y - 8 = 0$; b) $3x - y - 4 = 0$; c) $x - 2y + 2 = 0$. Ce observați?

6) Înlocuiți în ecuația $3x - 2y - 6 = 0$ necunoscuta y pe rînd cu valorile $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$; pentru fiecare dintre aceste valori, aflați soluția x a ecuației în x ce o obțineți. Completați apoi tabelul:

y	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
x								

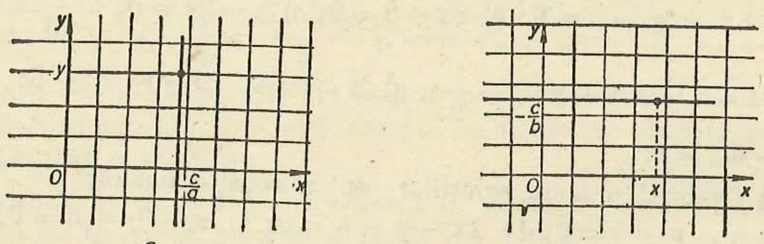
Desenați într-un sistem de coordonate punctele corespunzătoare.

7*) Ionică a cumpărat de 17 lei caiete și ascuțitori. Un caiet costă 3 lei, o ascuțitoare 4 lei. Puteți afla cîte caiete și cîte ascuțitori a cumpărat Ionică?

Să considerăm ecuația $ax + c = 0$, $(x \in \mathbf{R})$, în care $a \neq 0$. Soluția ecuației este numărul real $-\frac{c}{a}$.

S-o scriem sub forma $ax + 0 \cdot y + c = 0$, $(x,\ y \in \mathbf{R})$.

Scrisă în această formă, ea devine asemănătoare cu o ecuație liniară cu două necunoscute. Care perechi de numere reale (x, y) ar putea fi soluții ale ecuației? Este evident că y poate fi oarecare, iar $x = -\frac{c}{a}$. Dreapta soluțiilor este paralelă cu axa ordonatelor (vezi fig. IV.7, *a*).



a b

Fig. IV.7

Fie ecuația $by + c = 0$, $(y \in \mathbf{R})$ în care $b \neq 0$. Scrisă sub forma

$$0 \cdot x + by + c = 0, \quad (x,\ y \in \mathbf{R}),$$

ea devine asemănătoare cu o ecuație liniară cu două necunoscute. Soluțiile ei sînt perechile de numere reale (x, y) în care x este oarecare, iar $y = -\frac{c}{b}$. Dreapta soluțiilor este paralelă cu axa absciselor (vezi fig. IV.7, *b*).

OBSERVAȚIE. Ecuațiile $ax + 0y + c = 0$ și $0x + by + c = 0$ de mai sus sînt ecuații liniare, dar nu cu **două** necunoscute (!).

ECUAȚII ECHIVALENTE CU ECUAȚII LINIARE CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Ecuația $x + y - 1 = 0$, $(x, y \in \mathbf{R})$ și ecuația $x + y = 1$, $(x, y \in \mathbf{R})$ au aceeași mulțime de soluții: perechile de forma $(x, 1 - x)$, unde x este număr real oarecare. Ele sînt echivalente.

La fel, ecuațiile $x + 2y - 3 = 0$, $(x, y \in \mathbf{R})$ și $4y = 6 - 2x$ $(x, y \in \mathbf{R})$ sînt echivalente, ambele avînd ca soluții perechile de forma $\left(x, \frac{3 - x}{2}\right)$ unde $x \in \mathbf{R}$.

Dimpotrivă, ecuațiile $x + y - 1 = 0$, $(x, y \in \mathbf{R})$ și $x + y - 1 = 0$, $(x, y \in \mathbf{N})$ nu sînt echivalente; a doua are doar două soluții, perechile $(0, 1)$ și $(1, 0)$, iar prima are ca soluție și perechea $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

DEFINIȚIE. Vom spune că două ecuații sînt **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

În general, dată o ecuație (cu una sau mai multe necunoscute, liniară sau nu), trecînd termeni dintr-un membru în celălalt (cu semnul schimbat!) sau înmulțind ambii membri ai ecuației cu același număr real diferit de zero, obținem o ecuație echivalentă cu cea de la care am plecat.

De exemplu, ecuația $x + \frac{y}{2} + 1 = \frac{x}{2} - y$ este echivalentă cu $2x + y + 2 = x - 2y$ (am înmulțit ambii membri ai ecuației cu 2). Aceasta este echivalentă cu $2x + y + 2 + 2y - x = 0$, adică cu $x + 3y + 2 = 0$ (am trecut în membrul stîng termenii $-2y$ și x din membrul drept, apoi am redus termenii asemenea). Ultima ecuație obținută este liniară.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să rezolvăm ecuația $\frac{x - 2y + 1}{2x - y + 1} = \frac{1}{2}$.

Să presupunem că perechea (x, y) este soluție a ecuației. Atunci, pe de o parte numărul $2x - y + 1$ este diferit de zero (nu putem împărți prin zero!), iar pe de altă parte propoziția $\frac{x - 2y + 1}{2x - y + 1} = \frac{1}{2}$ este adevărată. Înmulțim ambii membri cu $2(2x - y + 1)$; obținem $2(x - 2y + 1) = 2x - y + 1$, de unde $2x - 4y + 2 = 2x - y + 1$, adică $-3y = -1$; obținem $y = \frac{1}{3}$. Deci soluțiile ecuației sînt de forma $\left(x, \frac{1}{3}\right)$. Nu toate aceste perechi sînt soluții ale ecuației; trebuie să excludem pe cele care „anulează numitorul" $2x - y + 1$. Din $2x - \frac{1}{3} + 1 = 0$ obținem $x = \frac{2}{3}$. Va trebui, deci, să excludem o singură pereche, anume $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Soluțiile ecuației sînt deci perechile $\left(x, \frac{1}{3}\right)$ cu $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

EXERCIŢII

1) Care dintre perechile de mai jos sînt soluţii ale ecuaţiei $x - y = 1$:
a) $(1, 2)$; b) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; c) $(2, -1)$; d) $(2, 1)$; e) $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$; f) $(-1, -2)$; g) $(-1, 0)$?

2) Scrieţi o ecuaţie liniară echivalentă cu ecuaţia:
a) $x - y = 1$; b) $2x = 3y + 9$; c) $3x - 1 = y + 8$; d) $2x - 5 = 8y + 16$; e) $8x - 8y + 3 = 9x - 5y + 10$; f) $\frac{x-y}{2} + \frac{y+2}{3} = \frac{x}{6} + 2y - 4$. Rezolvaţi apoi fiecare dintre ecuaţiile liniare obţinute.

3*) Rezolvaţi ecuaţiile:
a) $\frac{3x - y + 2}{2x + y - 4} = -1$; b) $\frac{2x - 2y + 3}{x + 2y - 4} = 2$; c) $\frac{x + 2y - 2}{2x - y + 1} = 2$.

2. NOŢIUNEA DE SISTEM DE ECUAŢII

Să considerăm ecuaţia $x - 1 = 0$, $(x \in Z)$ a cărei soluţie este numărul 1. De asemenea, să considerăm o altă ecuaţie, fie aceasta $x^2 = 1$, $(x \in Z)$. Să observăm că această ecuaţie are două soluţii, numerele -1 şi 1.

Fie acum mulţimea formată din aceste două ecuaţii; notăm

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 = 1, \end{cases} (x \in Z)$$

folosind o acoladă. Formăm astfel un **sistem de ecuaţii**. Numărul 1 este **soluţie** a sistemului, deoarece este soluţie a ambelor ecuaţii. Numărul -1 **nu** este soluţie a sistemului, căci nu este soluţie a primei ecuaţii. Numărul 0 nu este soluţie a sistemului, căci nu e soluţie a nici unei ecuaţii.

DEFINIŢIE. Vom numi **sistem de ecuaţii** o mulţime ale cărei elemente sînt ecuaţii.

De exemplu,
$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ x = 0, \end{cases} (x \in R)$$
este un sistem de ecuaţii. Acest sistem nu are soluţie.

De asemenea,
$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} (x, y \in R)$$
este un sistem de ecuaţii. Acest sistem are ca soluţie perechea $(1, 2)$.

Şi
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 0, \end{cases} (x, y \in R)$$
este un sistem de ecuaţii; acest sistem nu are soluţie (nu putem găsi două numere reale x şi y a căror sumă să fie şi 1 şi 0!).

Alt exemplu de sistem de ecuaţii $\begin{cases} x + y = 4, \\ x \cdot y = 4, \end{cases} (x, y \in R)$.

Vom rezolva în clasa a VIII-a şi în liceu astfel de sisteme de ecuaţii.

Fie $\begin{cases} E_1 = 0, \\ E_2 = 0 \end{cases}$

un sistem de ecuaţii. Dacă A_1 este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $E_1 = 0$, iar A_2 este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $E_2 = 0$, atunci mulţimea soluţiilor sistemului este $A_1 \cap A_2$.

3. SISTEME DE DOUĂ ECUAŢII LINIARE CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Să privim sistemul de ecuaţii
$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases} (x, y \in R).$$

În sistem apar necunoscutele x şi y. Sistemul este format din două ecuaţii; fiecare dintre ele este liniară. Un astfel de sistem este numit **sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute.**

Fie sistemul de ecuaţii
$$\begin{cases} x - 5 = 0, \\ y + 3 = 0, \end{cases} (x, y \in R).$$

Şi în acest sistem apar două necunoscute; fiecare dintre cele două ecuaţii ale sistemului este liniară. Şi acest sistem este un sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute.

Înlocuind în acest sistem necunoscuta x cu 5, iar necunoscuta y cu -3, obţinem propoziţiile
$$\begin{cases} 5 - 5 = 0, \\ (-3) + 3 = 0, \end{cases}$$
care sînt ambele adevărate. Spunem că perechea $(5, -3)$ este **soluţie** a sistemului. Înlocuind în sistem necunoscuta x cu 5, iar pe y cu 1, obţinem propoziţiile
$$\begin{cases} 5 - 5 = 0, \\ 1 + 3 = 0. \end{cases}$$

A doua este falsă. Perechea $(5, 1)$ nu este soluţie a sistemului.

Care perechi de numere reale pot fi soluţii ale sistemului? Dacă (x, y) este o soluţie, atunci înlocuind pe x cu x, iar pe y cu y, obţinem propoziţiile adevărate
$$\begin{cases} x - 5 = 0, \\ y + 3 = 0. \end{cases}$$

Deci $x = 5$ şi $y = -3$. Sistemul are o singură soluţie, perechea $(5, -3)$.

Ce legătură există între soluția sistemului și soluțiile fiecăreia dintre ecuațiile ce compun sistemul?

Să desenăm în figura IV.8 dreapta soluțiilor ecuației $x - 5 = 0$ ($x, y \in \mathbf{R}$); această dreaptă este paralelă cu axa ordonatelor. De asemenea, să desenăm dreapta soluțiilor ecuației $y + 3 = 0$ ($x, y \in \mathbf{R}$); această dreaptă este paralelă cu axa absciselor. Cele două drepte se intersectează în punctul $P(5, -3)$. Soluția sistemului este $(5, -3)$.

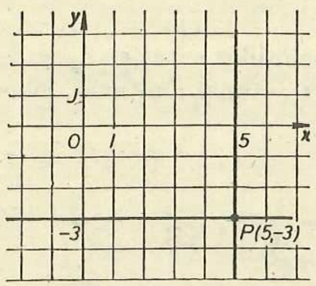


Fig. IV.8

Un *sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute* are forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Se spune că numerele reale a, b, a' (citește „a prim") și b' sînt **coeficienții** sistemului, iar numerele reale c și c' sînt **termenii liberi.**

Ambele ecuații sînt liniare (de gradul 1); aceasta înseamnă, pe de o parte, că $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, iar pe de altă parte că $a' \neq 0$ sau $b' \neq 0$.

DEFINIȚIE. Spunem că perechea de numere reale (x, y) este **soluție** a sistemului de mai sus, dacă amîndouă propozițiile $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ și $a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0$ sînt adevărate.

A **rezolva** un sistem de ecuații înseamnă a găsi toate soluțiile sale.

4. METODE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE DOUĂ ECUAȚII LINIARE CU DOUĂ NECUNOSCUTE

METODA GRAFICĂ

Fie sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Soluțiile primei ecuații se identifică cu punctele unei drepte (d_1) din plan (vezi fig. IV.9).

Soluțiile celei de-a doua ecuații se identifică cu punctele dreptei (d_2) din plan.

Dacă dreptele (d_1) și (d_2) se intersectează, atunci coordonatele (x, y) ale punctului lor de intersecție vor constitui **soluția sistemului de ecuații.**

Să ilustrăm această metodă de rezolvare a sistemelor prin cîteva exemple.

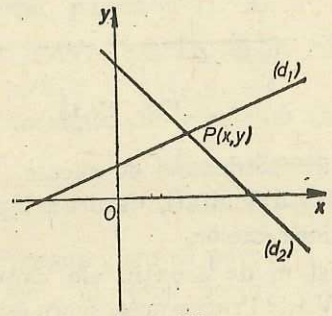


Fig. IV.9

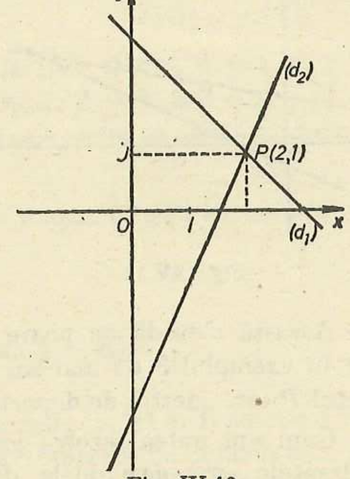


Fig. IV.10

Exemplul 1. Fie sistemul

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ \dfrac{5}{2}x - y - 4 = 0. \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Reprezentăm grafic (în același sistem de coordonate— vezi fig. IV.10) atît dreapta (d_1) a soluțiilor primei ecuații, cît și dreapta (d_2) a soluțiilor celei de-a doua ecuații. Ele se intersectează în punctul $P(2, 1)$.

Soluția sistemului este $(2, 1)$.

Exemplul 2. Să rezolvăm grafic sistemul

$$\begin{cases} 5x + 2y + 2 = 0, \\ 3x - y + 10 = 0. \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Ca în exemplul 1, reprezentăm grafic în același sistem de coordonate (fig. IV.11) dreapta (d_1) a soluțiilor primei ecuații, apoi dreapta (d_2) a soluțiilor celei de-a doua ecuații. Ele se intersectează în punctul $P(-2, 4)$.

Soluția sistemului este $(-2, 4)$.

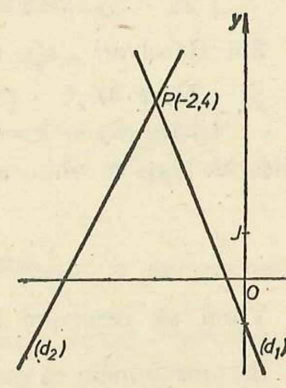


Fig. IV.11

Exemplul 3. Fie sistemul:

$$\begin{cases} x - 5y + 10 = 0, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Mulţimea soluţiilor primei ecuaţii se identifică cu dreapta (d_1) din figura IV.12, iar mulţimea soluţiilor celei de-a doua se identifică cu dreapta (d_2). Deoarece $(d_1) \cap (d_2) = P$, soluţia sistemului este (10,4).

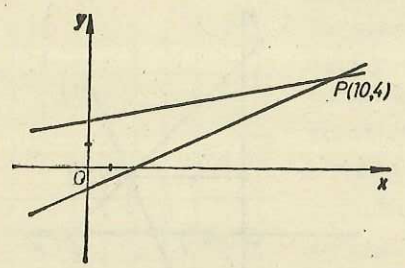


Fig. IV.12

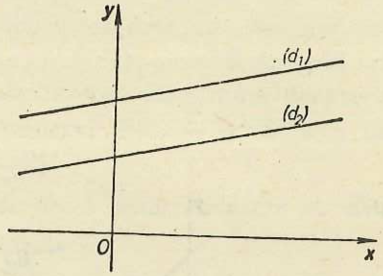


Fig. IV.13

Această metodă nu poate fi aplicată întotdeauna cu succes. De fapt, chiar în exemplul 3 de mai sus întîmpinăm dificultăţi, datorită faptului că punctul P este „destul de departe" de originea axelor.

Cum am putea rezolva grafic un sistem de ecuaţii, ale căror soluţii sînt dreptele „aproape paralele" din figura IV.13? Practic acest lucru este dificil.

Al doilea motiv pentru care metoda nu poate fi aplicată întotdeauna este imposibilitatea de a stabili cu precizie mare coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor.

În practică această metodă se utilizează atunci cînd nu se pretinde calculul exact, precis, al soluţiei sistemului.

EXERCIŢII

1) Rezolvaţi grafic sistemele:

a) $\begin{cases} -x + 2y - 5 = 0, \\ 3x + 5y - 18 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4y - 24 = 0, \\ 4x + 5y - 11 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 7y - 8 = 0, \\ 2x - 5y + 14 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 8y + 14 = 0, \\ 3x + 4y - 18 = 0. \end{cases}$

2*) Rezolvaţi grafic sistemele, apreciind cît mai corect soluţia:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0, \\ 2x - 3y - 2 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0, \\ 5x - 3y - 5 = 0. \end{cases}$

(Indicaţie: luaţi ca unitate de măsură, pe fiecare axă, 5 cm.)

METODA SUBSTITUŢIEI

Vrem să rezolvăm sistemul: $\begin{cases} 2x - y = 0. \\ 3x + 2y - 7 = 0. \end{cases}$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$

Să presupunem că perechea de numere reale (x, y) ar fi soluţie a sistemului. Aceasta înseamnă că dacă înlocuim în ambele ecuaţii necunoscuta x

cu numărul x, iar pe y cu y, obţinem propoziţiile adevărate $2x - y = 0$ şi $3x + 2y - 7 = 0$.

Din $2x - y = 0$ deducem că $y = 2x$. Din $3x + 2y - 7 = 0$ şi $y = 2x$ deducem că $3x + 2 \cdot 2x - 7 = 0$, adică $7x - 7 = 0$; deci $x = \frac{7}{7} = 1$. Apoi $y = 2 \cdot 1 = 2$.

Astfel, dacă (x, y) este soluţie a sistemului, atunci $x = 1$ şi $y = 2$.

Dar $2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0$ şi $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 7 = 3 + 4 - 7 = 0$, deci (1, 2) este soluţie a sistemului. Putem spune acum că sistemul are o singură soluţie, perechea (1, 2).

OBSERVAŢIE. În cărţile mai vechi se obişnuieşte să se scrie că sistemul are soluţia $x = 1$, $y = 2$.

Alt exemplu. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0, \\ x - 5y + 13 = 0. \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Să presupunem că perechea de numere reale (x, y) ar fi soluţie a sistemului. Deci, înlocuind necunoscutele x şi y respectiv cu numerele x şi y, obţinem propoziţiile adevărate:

$$4x - 3y + 1 = 0 \text{ şi } x - 5y + 13 = 0.$$

Din $x - 5y + 13 = 0$ deducem că $x = 5y - 13$. Din $4x - 3y + 1 = 0$ şi $x = 5y - 13$ deducem că $4(5y - 13) - 3y + 1 = 0$, adică (după reducerea termenilor asemenea) $17y - 51 = 0$. Deci $y = \frac{51}{17} = 3$. Deoarece $x = 5y - 13$, obţinem $x = 5 \cdot 3 - 13 = 15 - 13 = 2$.

Prin înlocuire directă a lui x cu 2 şi a lui y cu 3, se constată că perechea (2, 3) este soluţie a sistemului. Sistemul are deci ca singură soluţie această pereche.

Am ilustrat prin aceste două exemple **metoda substituţiei** pentru rezolvarea sistemelor de două ecuaţii liniare cu două necunoscute.

Să observăm că în al doilea exemplu am fi putut proceda conform următoarei scheme:

— „scoteam" din a doua ecuaţie pe x; $x = 5y - 13$;

— înlocuiam în prima ecuaţie: $4 \cdot (5y - 13) - 3y + 1 = 0$. Obţinem astfel o ecuaţie în y; rezolvînd-o, obţineam că are ca soluţie numărul 3;

— înlocuind pe y cu 3, obţineam $x = 5 \cdot 3 - 13 = 2$ şi deci soluţia (2, 3) a sistemului.

Metoda substituţiei constă în următoarele:

a) „scoatem" dintr-una dintre ecuaţiile sistemului o necunoscută în funcţie de cealaltă;

b) înlocuim în cealaltă ecuaţie a sistemului; obţinem o ecuaţie cu o necunoscută, pe care o rezolvăm;

c) avînd „valoarea" unei necunoscute, obţinem soluţia sistemului.

De exemplu, să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x+3y+5=0, \\ 3x+2y-4=0, \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R}),$$

folosind metoda substituţiei.

Din prima ecuaţie scoatem pe x în funcţie de y: $x=-3y-5$. Înlocuim pe x în a doua ecuaţie: $3(-3y-5)+2y-4=0$. Rezolvăm această ecuaţie în y; obţinem că ea este echivalentă cu $y=-\frac{19}{7}$.

Înlocuim: $x=-3\left(-\frac{19}{7}\right)-5=\frac{57}{7}-5=\frac{22}{7}$. Am obţinut soluţia sistemului: $\left(\frac{22}{7},\ -\frac{19}{7}\right)$.

Metoda substituţiei poate fi aplicată şi sistemelor scrise în altă formă. De exemplu, să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 8-x=2y+1, \\ 6x+5y=3, \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R}),$$

folosind metoda substituţiei.

Scoţînd din prima ecuaţie $x=7-2y$, înlocuim în a doua: $6(7-2y)+5y=3$, de unde $-7y=-39$. Deci $y=\frac{39}{7}$, apoi $x=7-2\cdot\frac{39}{7}=-\frac{29}{7}$. Soluţia sistemului este $\left(-\frac{29}{7};\frac{39}{7}\right)$.

Această metodă este avantajoasă atunci cînd într-una dintre ecuaţiile sistemului o necunoscută are coeficientul 1 (sau -1); este de preferat ca ea să fie „scoasă" în funcţie de cealaltă.

EXERCIŢII

1) Rezolvaţi sistemele prin metoda substituţiei:

a) $\begin{cases} x=2, \\ 3x+2y=9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 4x+5y=26; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+y=43, \\ 6x+5y=103; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ x+3y=4; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+3y=10, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-y=\frac{5}{3}, \\ x+\frac{3}{5}y=-1; \end{cases}$ g) $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=0, \\ \sqrt{2}x+y=4. \end{cases}$

2) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare:

a) $\begin{cases} 3x+y-5=0, \\ 2x+y-4=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-3y-1=0, \\ -x+2y-4=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x+2y-3=0, \\ 3x-y+7=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-y-\frac{1}{2}=0, \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-6y-2=0, \\ 3x+9y+3=0; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-\sqrt{6}y+2\sqrt{2}=0, \\ 2\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-7=0. \end{cases}$

3) Rezolvaţi sistemele:

a) $\begin{cases} 3x+10y=53, \\ 36x-7y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 81x-53y=3, \\ 4x+y=11. \end{cases}$

SISTEME ECHIVALENTE. FORMA STANDARD A UNUI SISTEM DE ECUAŢII LINIARE

DEFINIŢIE. Două sisteme de ecuaţii sînt numite **echivalente** dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

De exemplu, sistemele:

$$\begin{cases} x-1=0, \\ y-2=0, \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{R}) \text{ şi } \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{R})$$

sînt evident echivalente; amîndouă au ca soluţie perechea (1, 2).

Sistemele $\begin{cases} 2x=1 \\ y=2, \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{R})$ şi $\begin{cases} 2x=1, \\ y=2, \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{Z})$

nu sînt echivalente; primul are ca soluţie perechea $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$, al doilea nu are soluţie (!).

Forma standard a unui sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute este următoarea:

$$\begin{cases} ax+by=d, \\ a'x+b'y=d', \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R}).$$

În forma standard, termenii liberi sînt trecuţi în membrul drept al ecuaţiilor ce formează sistemul.

Sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} ax+by+c=0, \\ a'x+b'y+c'=0, \end{cases}$ $(x,\ y \in \mathbf{R})$

este echivalent cu sistemul scris în formă standard:

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ a'x + b'y = -c', \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{R}).$$

METODA REDUCERII

Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 5x - 3y = 15, \\ 3x + 2y = 12, \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{R}).$

Să presupunem că perechea de numere reale (x, y) ar fi soluție a sistemului. Avem astfel două propoziții adevărate:

$$5x - 3y = 15 \text{ și } 3x + 2y = 12.$$

Să înmulțim ambii membri ai primei egalități cu 2, apoi ambii membri ai celei de-a doua egalități cu 3: obținem

$$10x - 6y = 30,$$
$$9x + 6y = 36.$$

Adunînd membru cu membru cele două egalități, obținem:

$$19x \quad = 66$$

de unde $x = \frac{66}{19}$.

Acum, din egalitatea $5x - 3y = 15$ obținem $5 \cdot \frac{66}{19} - 3y = 15$, de unde $y = \frac{15}{19}$.

Constatăm imediat că $\left(\frac{66}{19}, \frac{15}{19}\right)$ este soluția sistemului.

Am dat exemplu de rezolvare a unui sistem de ecuații prin **metoda reducerii**.

Am fi putut proceda conform următoarei scheme:

— înmulțim ambii membri ai primei ecuații cu 2:

$$10x - 6y = 30;$$

— înmulțim ambii membri ai celei de-a doua ecuații cu 3:

$$9x + 6y = 36;$$

— „adunăm" cele două ecuații; obținem ecuația în x:

$$19x \quad = 66$$

pe care o rezolvăm; ea are soluția $x = \frac{66}{19}$.

— înlocuim pe x într-una dintre ecuațiile sistemului (de exemplu în prima) cu $\frac{66}{19}$; obținem ecuația în y

$$5 \cdot \frac{66}{19} - 3y = 15$$

pe care o rezolvăm; ea are soluția $\frac{15}{19}$. Sistemul are soluția $\left(\frac{66}{19}, \frac{15}{19}\right)$.

Să observăm că în prima fază am efectuat înmulțiri cu scopul de a reduce, prin adunare, termenii în y.

Alt exemplu. Să rezolvăm

$$\begin{cases} 6x + 5y = -7 \\ 4x + 7y = -12, \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{R}).$$

Procedăm astfel:

— înmulțim ambii membri ai primei ecuații cu 2: $12x + 10y = -14$;

— înmulțim ambii membri ai celei de-a doua ecuații cu -3;

$$-12x - 21y = 36;$$

— adunăm membru cu membru ecuațiile:

$$-11y = 22,$$

de unde $y = -2$;

— înlocuim în prima ecuație pe y cu -2: $6x + 5 \cdot (-2) = -7$, adică $6x - 10 = -7$, sau $6x = 3$. Deci $x = \frac{1}{2}$.

Astfel perechea $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ este soluția sistemului.

Să observăm că am efectuat înmulțirile în așa fel încît, prin adunare, termenii în x s-au redus.

Scopul metodei reducerii este înlocuirea sistemului

$$\begin{cases} ax + by = d, \\ a'x + b'y = d \end{cases}$$

cu sistemul echivalent

$$\begin{cases} ax + by = d, \\ \qquad y = e \end{cases}$$

a cărui rezolvare este imediată.

Să rezolvăm prin metoda reducerii sistemul scris în formă canonică

$$\begin{cases} ax + by = d, \\ a'x + b'y = d', \end{cases} (x,\ y \in \mathbf{R}).$$

Înmulțind ecuațiile respectiv cu b' și $-b$, astfel încît prin adunare termenii în y să se reducă, obținem:

$$ab'x - ba'x = db' - bd',$$

de unde

$$x = \frac{db' - bd'}{ab' - ba'}.$$

Înmulțind acum în mod convenabil, pentru ca termenii în x să se reducă, obținem $y = \frac{ad' - da'}{ab' - ba'}$.

Concluzii: 1) dacă $ab' - ba' \neq 0$, atunci sistemul are o soluție.

2) Pentru a calcula componentele soluției trebuie să efectuăm doar scăderi, înmulțiri și împărțiri. O „mașină de calcul" care știe să efectueze aceste operații, va putea fi „învățată" *(programată)* să rezolve sisteme prin metoda reducerii.

Să descriem algoritmul de calcul al soluției sistemului:

Pasul 1: Citește a, b, d, a', b', d';
Pasul 2: $s = a \cdot b'$ (adică „înmulțește pe a cu b', notează rezultatul înmulțirii cu s");
Pasul 3: $t = a' \cdot b$;
Pasul 4: $u = s - t$;
Pasul 5: Compară u cu 0. Dacă $u = 0$, scrie „caz de excepție". Stop. Dacă $u \neq 0$, continuă cu pasul 6.
Pasul 6: $v = d \cdot b'$;
Pasul 7: $w = b \cdot d'$;
Pasul 8: $z = v - w$;
Pasul 9: $x = z : u$. Scrie „x". Continuă cu pasul 10.
Pasul 10: $v = a \cdot d'$;
Pasul 11: $w = d \cdot a'$;
Pasul 12: $z = v - w$;
Pasul 13: $y = z : u$. Scrie „y". Stop.

Avantajul metodei reducerii constă în faptul că este algoritmică; ea poate fi programată. Uneori ni se pare că metoda substituției este mai ușor de aplicat, ceea ce este adevărat. Dar un calculator modern poate efectua milioane (!) de operații pe secundă, deci poate rezolva prin metoda reducerii sute de mii (!) de sisteme, într-o secundă.

EXERCIȚII

1) Construiți dreptele soluțiilor ecuațiilor (separat):
a) $x + y - 4 = 0$; b) $3x + 3y - 12 = 0$. Ce observați?

2) Construiți în același sistem de coordonate dreptele soluțiilor ecuațiilor: a) $x + y - 4 = 0$; b) $3x - 2y - 2 = 0$ și c) $4x - y - 6 = 0$. Cea de-a treia se obține prin adunarea membru cu membru a celorlalte două. Ce observați?

3) Rezolvați prin metoda reducerii sistemele:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ 4x - 3y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 10, \\ 2x - 6y = -10; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 5y = -1; \\ 7x + 10y = -3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 32y = 2, \\ 9x + 16y = 22. \end{cases}$

4) Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} x + y = 2{,}4, \\ x - y = 1{,}4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 18, \\ 3x + 4y = 24; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 51x + 44y = 7, \\ 34x + 33y = 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = 1, \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{15}y = 3; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 4y = 14, \\ 8x - 2y = 14. \end{cases}$

5) Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} x + 2y = 24, \\ x - 2y = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 2{,}4, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 0{,}24, \\ x - 2y = 0{,}1. \end{cases}$ Ce observați?

6*) Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 3\sqrt{2}x - y = 3, \\ x + 2\sqrt{2}y = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{3}, \\ \frac{x}{\sqrt{3}+1} = \frac{2y}{\sqrt{3}-1}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (\sqrt{2} - 1)y = 4\sqrt{2}, \\ \frac{x}{1+\sqrt{2}} + \frac{y}{1-\sqrt{2}} = 2. \end{cases}$

5. SISTEME CE SE REDUC LA SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII LINIARE CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Exemplul 1. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -1, \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R} - \{0\}).$$

Să facem înlocuirile: $x = \frac{1}{u}$, $y = \frac{1}{v}$, adică $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$;

$$\begin{cases} 2u + v = 1, \\ u - 2v = -1. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem obținem $u = \frac{1}{5}$, $v = \frac{3}{5}$. Deci soluția sistemului inițial este $x = 5$, $y = \frac{5}{3}$.

Exemplul 2. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \\ \frac{x+1}{y-1} = \frac{3}{4}. \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

Să presupunem că perechea de numere reale (x, y) este soluție a sistemului. Atunci propozițiile $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ și $\frac{x+1}{y-1} = \frac{3}{4}$ sînt adevărate.

Folosind proprietățile proporțiilor, obținem că:

$$3x = 2y \text{ și } 4(x + 1) = 3(y - 1).$$

Deci $x = \frac{2}{3}y$, apoi $4\left(\frac{2}{3}y + 1\right) = 3(y - 1)$. Deci $y = 21$, apoi $x = 14$. Soluția sistemului este $(14, 21)$.

EXERCIȚII

1) Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ \frac{2x + y - 1}{x + 2y - 1} = \frac{2}{3}. \end{cases}$

2) Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{y}{3} = \frac{40}{3}, \\ \frac{3}{x} + \frac{y}{4} = \frac{30}{4}. \end{cases}$

3) Rezolvați:

a) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{8}{3}, \\ 2x - 3y = 2y - 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3x + 2}{y - 3} = 4, \\ \frac{2x - 2}{2y - 1} = 1{,}5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8, \\ 4\sqrt{x} - 5\sqrt{y} + 1 = 0. \end{cases}$

6. REZOLVAREA PROBLEMELOR CU AJUTORUL ECUAȚIILOR

Multe probleme practice se pot rezolva folosind matematica. Rezolvarea constă din mai multe etape:

a) alegerea necunoscutelor principale ale problemei;

b) stabilirea relațiilor (legăturilor) între necunoscutele problemei. Aceste relații pot fi egalități, inegalități sau de altă formă. Ele formează așa-numitul **model matematic** al problemei;

c) rezolvarea modelului matematic;

d) interpretarea practică a rezultatelor obținute; alegerea soluției practice.

Vom da mai multe exemple:

Problema 1. Prin strunjirea unei bucăți de oțel, pentru a se obține un ax necesar motorului unei motonave, se pierde material ce cîntărește 5% din masa piesei finisate. Cît cîntărește axul finisat, dacă înainte de strunjire bucata de oțel cîntărea 210 kg?

Rezolvare. Nu cunoaștem două lucruri: masa șpanului și masa axului. Textul problemei ne îndeamnă să alegem ca necunoscută principală masa axului finisat. Fie deci x masa (în kg) a axului finisat.

Pierderile de material reprezintă 5% din x, adică $\frac{5}{100}x$ (kg). Bucata de oțel cîntărea deci, înainte de strunjire, $x + \frac{5}{100}x$ kg. Astfel $x + \frac{5}{100}x = 210$. Această egalitate este o relație ce leagă necunoscutele problemei. Modelul matematic al problemei este format din ecuația:

$$x + \frac{5}{100}x = 210, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Rezolvînd ecuația, obținem că ea are soluția 200. Deci axul cîntărește 200 kg.

Putem afla acum și masa materialului ce se pierde: 10 kg.

Problema 2. Un vapor-cursă, navigînd în sensul curentului apei, a parcurs distanța dintre două porturi în 4 ore; la întoarcere, împotriva curentului apei, vaporul a parcurs distanța în 5 ore. Să aflăm distanța dintre cele două porturi, știind că viteza de curgere a apei este de 2 km/h.

Rezolvare. Notăm cu x distanța dintre porturi (în km). Aceasta este necunoscuta principală. (Alte necunoscute ar fi viteza proprie a vaporului, sau viteza medie la întoarcere etc.) Viteza medie a vaporului, împotriva curentului apei, este de $\frac{x}{5}$ (km/h), iar în sensul curentului apei este de $\frac{x}{4}$ (km/h). Viteza proprie a vaporului (dată de puterea motoarelor sale) este deci $\frac{x}{5} + 2$ la întoarcere și $\frac{x}{4} - 2$ la ducere. Modelul matematic al problemei este ecuația

$$\frac{x}{5} + 2 = \frac{x}{4} - 2, \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Soluția acestei ecuații este 80. Deci distanța între porturi este (pe firul apei) de 80 km.

Problema 3. Un autobuz a parcurs distanța de 96 km în 2 ore. La început șoferul a mers cu 50 km/h, apoi a fost obligat să reducă viteza la 4 km/h. Cît timp a circulat autobuzul cu 50 km/h?

Rezolvare. Soluția I. Să notăm cu x durata (în ore) a primei părți a călătoriei; a doua parte a călătoriei are durata de $2 - x$ ore. Spațiul parcurs în prima parte este de $50 \cdot x$ km; în a doua parte de $40 \cdot (2 - x)$km. În total autobuzul a parcurs $50 \cdot x + 40 \cdot (2 - x)$. Modelul matematic al problemei este ecuația $50x + 40(2 - x) = 96$. Soluția ecuației este $x = 1{,}6$. Deci prima parte a călătoriei a durat 1,6 h = 1 h 36 min.

Soluția a II-a. Să notăm, ca mai sus, durata primei părți a călătoriei cu x, iar durata celei de-a doua părți a călătoriei cu y. În total călătoria a durat $x + y$ ore. Obținem prima ecuație: $x + y = 2$.

Spațiul parcurs în prima parte a călătoriei este de $50x$ km, în a doua parte de $40y$ km, deci în total autobuzul a parcurs $50x + 40y$ km. Obținem a doua ecuație: $50x + 40y = 96$.

Modelul matematic al problemei este sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 50x + 40y = 96. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obținem $x = 1{,}6$ și $y = 0{,}4$. Deci autobuzul a circulat 1,6 h = = 1 h 36 min cu viteza de 50 km/h și 0,4 h = 24 min cu viteza de 40 km/h.

Problema 4. Două forțe au același punct de aplicație și acționează pe aceeași dreaptă. Dacă acționează în același sens, rezultanta lor este de 100 N, iar dacă acționează în sens contrar, rezultanta lor este de 32 N. Ce mărime au aceste forțe?

Rezolvare. Fie x și y mărimile (în N ale) acestor forțe. Atunci

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ x - y = 32. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, găsim $x = 66$, $y = 34$. Deci forțele sînt de 66 N și 34 N.

Problema 5. Dacă pe fiecare pagină a unui album s-ar lipi cîte două fotografii, n-ar avea loc 26 de fotografii. Dacă s-ar lipi cîte trei fotografii pe pagină, ar rămîne 10 pagini fără fotografii. Cîte pagini are albumul și cîte fotografii trebuie lipite în album?

Rezolvare. Fie x numărul de pagini ale albumului, iar y numărul de fotografii ce trebuie lipite. Textul problemei se transpune în sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x = y - 26, \\ 3(x - 10) = y. \end{cases}$$

Soluția sa este $x = 56$, $y = 138$. Deci albumul are 56 pagini, iar numărul fotografiilor este 138.

Problema 6. O bucată de bronz (aliaj de cupru și cositor) are masa de 50 kg și volumul de 6 dm³. Cît cupru și cît cositor conține aliajul?

Se cunoaște densitatea cuprului = 8,9 kg/dm³ și a cositorului = 7,2 kg/dm³.

Rezolvare. Fie x masa cuprului (în kg) conținut în bucata de bronz; fie y masa cositorului (în kg) conținut în bucata de bronz. Bucata de bronz are masa $x + y$ (kg), deci $x + y = 50$.

Vom ține seamă de formula $V = \frac{m}{\rho}$. Volumul cuprului conținut în bucata de bronz este $\frac{x}{8{,}9}$ dm³; volumul cositorului este $\frac{y}{7{,}2}$ dm³. Deci $\frac{x}{8{,}9} + \frac{y}{7{,}2} = 6$.

Obținem sistemul
$$\begin{cases} x + y = 50, \\ \dfrac{x}{8{,}9} + \dfrac{y}{7{,}2} = 6; \end{cases}$$

rezolvîndu-l, găsim $x = 35{,}6$ și $y = 14{,}4$. Bucata conține deci 35,6 kg cupru și 14,4 kg cositor.

Problema 7. Într-un laborator de chimie este nevoie să se obțină 2 litri de acid sulfuric cu concentrația de 30%. În laborator există, în cantități mari, acid sulfuric cu concentrația de 20% și de 50%. Putem obține cei doi litri cu concentrația de 30%? Cum anume?

Rezolvare. Da, îi putem obține prin amestec. Fie x cantitatea (în litri) de acid sulfuric 20% ce ar intra în amestec, iar y cantitatea (în litri) de acid sulfuric 52% ce ar intra în amestec. Atunci am avea $x + y = 2$, iar amestecul ar conține $\frac{20}{100} x + \frac{52}{100} y$ litri acid sulfuric, ceea ce ar trebui să fie exact $\frac{30}{100} \cdot 2 = \frac{60}{100}$ litri. Obținem sistemul

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \dfrac{20}{100} x + \dfrac{52}{100} y = \dfrac{60}{100}. \end{cases}$$

Soluţia sa este $x = 1,375$ şi $y = 0,625$. Ar trebui să amestecăm deci 1,375 litri acid cu concentraţia 20% cu 625 ml acid cu concentraţia 52%.

Problema 8. Cumpărăm de 10 lei timbre poştale de 55 bani şi de 1,55 lei. Putem cumpăra exact 10 timbre? Dar 12 timbre?

Rezolvare. Fie x numărul de timbre de 0,55 lei cumpărate, iar y numărul de timbre de 1,55 lei cumpărate. Plătim deci $0,55 \cdot x$ lei pentru timbrele de 55 bani şi $1,55 \cdot y$ lei pentru celelalte; în total plătim $0,55x + 1,55y$ lei. Deci una dintre ecuaţii este $0,55x + 1,55y = 10$.

Să presupunem că $x + y = 10$. Rezolvînd sistemul obţinem că are soluţia $x = 5,5$ şi $y = 4,5$.

Însă x şi y trebuie să fie (amîndouă) numere naturale. Deci răspunsul la prima întrebare este: **nu**.

Nici sistemul $\begin{cases} 0,55x + 1,55y = 10, \\ x + y = 12 \end{cases}$

nu are soluţia formată din numere naturale. Din nou răspunsul este: **nu!**

Observaţie. La această problemă, interpretarea rezultatelor are o importanţă decisivă.

Problema 9. O şarjă de fontă trebuie să conţină 27 t fier si 310 kg mangan.

Minereul de fier conţine în medie 50% fier şi 0,5% mangan; dispunem şi de minereu de adaos, bogat în mangan, ce conţine în medie 15% fier şi 20% mangan.

Ce cantitate din fiecare minereu trebuie introdusă în furnal pentru a se obţine şarja cu conţinutul dorit?

Rezolvare. Să notăm cu x cantitatea de minereu de fier (măsurată în tone) ce trebuie introdusă în furnal. Această cantitate de minereu conţine $\frac{50}{100}x$ tone fier $\frac{0,5}{100}x$ tone mangan.

Fie y cantitatea de minereu de adaos (în tone) ce trebuie introdusă în furnal; ea conţine $\frac{15}{100}y$ tone fier şi $\frac{20}{100}y$ tone mangan. În total am introdus în furnal $\frac{50}{100}x + \frac{15}{100}y$ tone fier şi $\frac{0,5}{100}x + \frac{20}{100}y$ tone mangan.

Obţinem astfel sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \frac{50}{100}x + \frac{15}{100}y = 27, \\ \frac{0,5}{100}x + \frac{20}{100}y = 0,31. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, găsim că $x = \frac{107170}{1985}$ şi $y = \frac{400}{1985}$, adică x este aproximativ 54 iar y este aproximativ 0,2.

Şarja se obţine deci prin introducerea în furnal a aproximativ 54 t minereu de fier şi 200 kg minereu de adaos.

Observaţie. Şi în această problemă interpretarea rezultatelor are un rol decisiv.

Problema 10. O lentilă convergentă dă pe un ecran imaginea unui creion mărită de două ori. Deplasînd lentila spre ecran cu 12 cm, imaginea creio-

nului devine de două ori mai mică decît creionul (vezi fig. IV.14 şi 15). Care este distanţa focală a lentilei?

Rezolvare. Cunoscînd distanţele obiect-lentilă şi lentilă-imagine putem afla uşor distanţa focală a lentilei. Să notăm cu x distanţa iniţială obiect-lentilă (în cm) şi cu y distanţa iniţială lentilă-imagine (în cm). Din asemănarea triunghiurilor obţinem $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

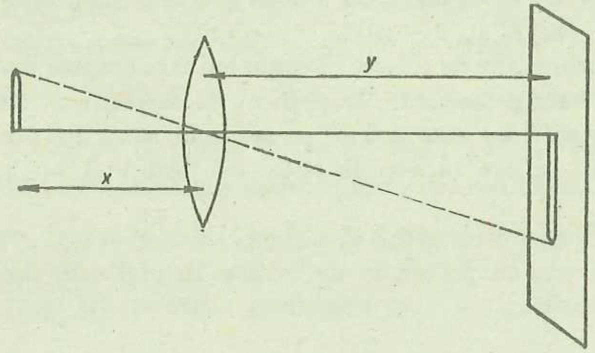


Fig. IV.14

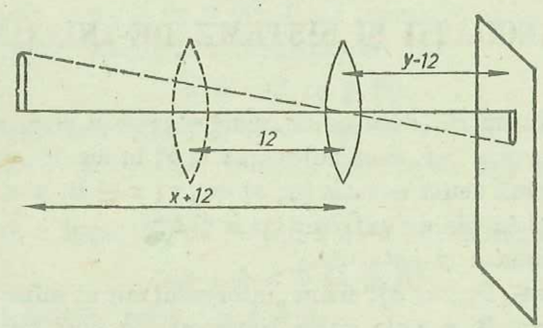


Fig. IV.15

După deplasarea lentilei spre ecran, distanţa obiect-lentilă devine $x + 12$ cm, iar distanţa lentilă-imagine devine $y - 12$ cm. Din asemănarea triunghiurilor obţinem:

$$\frac{x + 12}{y - 12} = \frac{2}{1}.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{x + 12}{y - 12} = 2, \end{cases}$$

găsim $x = 12$ şi $y = 24$. Acum, distanţa focală f se calculează din $f^2 = (x - f)(y - f)$; obţinem $f = 8$ cm.

PROBLEME

1) Într-o întreprindere chimică, instalaţia veche produce 1000 t de îngrăşăminte pe lună; noua instalaţie poate produce această cantitate de îngrăşăminte doar în 12 zile. În cîte zile sînt produse 1000 t îngrăşăminte chimice, dacă lucrează ambele instalaţii? (o lună are 30 de zile).

2) Două roţi dinţate angrenate au distanţa între axele lor de rotaţie de 35 cm; prima are 77 de dinţi, iar a doua 308 dinţi. Ştiind că înălţimea dinţilor este de 0,6 cm, aflaţi diametrul fiecărei roţi.

3) Dacă prin gurile de suflare ale unui cubilou (cuptor de topire a fontei) se suflă 1 m^3 de aer pe secundă, se obţine oţel cu conţinut de 2,5% carbon. Dacă debitul de suflare creşte la 4 m^3 pe secundă, se obţine oţel cu 0,5 % carbon. Ce debit de suflare va asigura obţinerea unui oţel moale, avînd 0,25% carbon?

Dar a unui oţel dur, cu 1,2 % carbon?

(Se presupune că procentul de carbon în oţel este funcţie liniară de debitul de aer suflat.)

7. INECUAŢII ŞI SISTEME DE INECUAŢII

Să ne reamintim că, date două numere reale a şi b, putem avea sau $a < b$, sau $a = b$, sau $a > b$, şi că notăm „$a \leqslant b$" în loc de „$a < b$ sau $a = b$".

Am folosit pînă acum notaţia $[a; b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$ pe care o citim „intervalul închis de extremităţi a şi b".

Se mai utilizează şi notaţiile:

$(-\infty;\ a] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \leqslant a\}$; citim „intervalul minus infinit, a, închis în a"; $[a,\ +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \geqslant a\}$; citim „intervalul a plus infinit, închis în a".

Observaţie. Să observăm că $(-\infty;\ b] \cap [a,\ +\infty) = [a; b]$ (vezi fig. IV. 16).

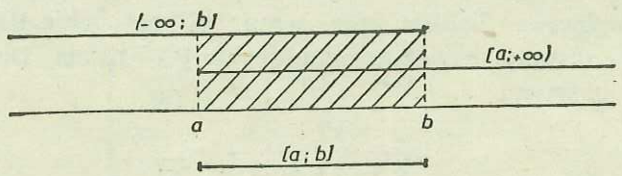


Fig. IV.16

Fie propoziţia cu variabilă:

$$x \leqslant 5 \ (x \in \mathbf{R}).$$

Aceasta este o **inecuaţie**. Înlocuind necunoscuta x cu diverse numere reale x, obţinem propoziţii adevărate sau false. Ne dăm seama imediat că mulţimea soluţiilor acestei inecuaţii este $(-\infty;\ 5]$.

Fie inecuaţia $2x - 1 \leqslant 0$ $(x \in \mathbf{R})$.

Să înlocuim necunoscuta x, pe rînd, cu valorile $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, 2 şi să întocmim tabelul:

Înlocuim pe x cu:	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
Valoarea de adevăr	a	a	a	a	f	f	f

Ne dăm seama că mulţimea soluţiilor inecuaţiei este $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$.

Pentru a rezolva inecuaţia putem proceda astfel: adunăm mai întîi 1 cu ambii membri; o transformăm astfel în inecuaţia echivalentă $2x \leqslant 1$ $(x \in \mathbf{R})$. Înmulţim acum ambii membri cu $\frac{1}{2}$, transformînd-o în inecuaţia echivalentă $x \leqslant \frac{1}{2}$ $(x \in \mathbf{R})$. Se vede acum care este mulţimea soluţiilor acestei ultime inecuaţii.

Fie inecuaţia $-x \leqslant 2$, $(x \in \mathbf{R})$. Dacă înmulţim ambii membri ai inecuaţiei cu -1, obţinem inecuaţia echivalentă cu ea

$$x \geqslant -2 \ (x \in \mathbf{R})$$

(reamintim că prin înmulţirea ambilor membri cu un număr negativ, sensul inegalităţii se schimbă!). Deci soluţiile inecuaţiei sînt elementele mulţimii $[-2;\ +\infty)$.

În general, o **inecuaţie** de gradul 1 cu o necunoscută are forma

$$ax + b \leqslant 0 \ (x \in \mathbf{R})$$

unde a şi b sînt numere reale, iar $a \neq 0$.

Distingem două cazuri posibile:

1) *Cazul* $a > 0$. În acest caz adunăm $-b$ cu ambii membri ai inecuaţiei, apoi împărţim cu a; obţinem inecuaţia (echivalentă cu prima):

$$x \leqslant -\frac{b}{a} \ (x \in \mathbf{R}),$$

a cărei mulţime de soluţii este intervalul $\left(-\infty,\ -\frac{b}{a}\right]$.

2) *Cazul* $a < 0$. Şi în acest caz adunăm $-b$ cu ambii membri ai inecuaţiei, apoi împărţim cu a; însă a este negativ, deci sensul inegalităţii se schimbă. Obţinem astfel inecuaţia

$$x \geqslant -\frac{b}{a} \ (x \in \mathbf{R}).$$

Mulţimea soluţiilor ei este intervalul $\left[-\frac{b}{a},\ +\infty\right)$.

EXERCIŢII

1) Scrieţi mulţimea de adevăr pentru propoziţia cu variabilă:

a) $3x + 1 \leqslant 0$, $(x \in \mathbb{R})$; b) $3x - 2 \leqslant 0$, $(x \in [0; 2])$; c) $-7x + 5 \leqslant 0$ $(x \in \mathbb{R})$; d) $-7x - 11 \leqslant 0$, $(x \in \mathbb{R})$.

2) Rezolvaţi inecuaţiile (în care $x \in \mathbb{R}$):

a) $4x - 11 \leqslant 2x + 11$; b) $12x + 7 \leqslant 5x + 8$; c) $2x + 8 \leqslant x + 9$; d) $17x - 22 \geqslant 10x - 8$.

3) Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $13x \geqslant -6$; b) $4x \leqslant 82$; c) $4y \leqslant -40$; d) $-2y \leqslant 16$; e) $-x \leqslant -10$; f) $-x \geqslant 13$; g) $-4x \geqslant 2$; h) $3x \geqslant 0$; i) $17x \leqslant 6x$; j) $-8x \geqslant 0$; k) $12 \leqslant -10x$; l) $-60 \leqslant -x$; m) $-14 \geqslant x$.

4) Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $-16x + 62 \geqslant 0$; b) $4x + 11 \geqslant 8x - 3$; c) $5x \geqslant 8(x + 1)$; d) $2 \leqslant 9(x + 1)$; e) $15(x + 1) \geqslant 7x$; f) $3x - \dfrac{x-1}{2} \geqslant 0$; g) $2x - \dfrac{6x-1}{8} \geqslant 0$.

INECUAŢII DE GRADUL I CU DOUĂ NECUNOSCUTE

O inecuaţie de gradul 1 cu două necunoscute este de forma

$$ax + by + c \leqslant 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

unde a, b şi c sînt numere reale, iar $a \neq 0$ sau $b \neq 0$.

De exemplu, să considerăm inecuaţia

$$2x + y - 5 \leqslant 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Să înlocuim pe x cu 1 şi pe y cu 2; obţinem propoziţia adevărată

$$2 \cdot 1 + 2 - 5 \leqslant 0.$$

Deci perechea (1, 2) este soluţie a inecuaţiei.

Să înlocuim pe x cu 0 iar pe y cu 3; obţinem propoziţia adevărată $2 \cdot 0 + 3 - 5 \leqslant 0$; deci şi perechea (0,3) este o soluţie.

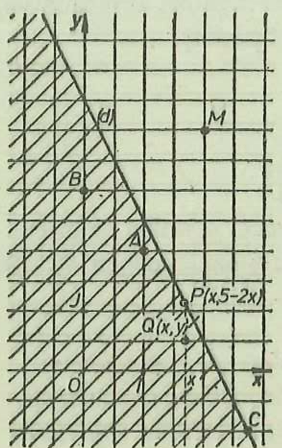


Fig. IV.17

Înlocuind pe x cu 3 iar pe y cu -1, obţinem propoziţia adevărată $2 \cdot 3 + (-1) - 5 \leqslant 0$, deci şi $(3, -1)$ este o soluţie.

Dimpotrivă, perechea (2, 4) nu este soluţie a inecuaţiei, căci propoziţia $2 \cdot 2 + 4 - 5 \leqslant 0$ este falsă.

În figura IV.17 am reprezentat punctele $A(1, 2)$, $B(0,3)$, $C(3, -1)$ corespunzătoare soluţiilor găsite ale inecuaţiei, apoi punctul $M(2, 4)$. Am desenat şi dreapta (d) a soluţiilor ecuaţiei $2x + y - 5 = 0$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Această dreaptă împarte planul în două semiplane. Observăm că toate cele trei soluţii ale inecuaţiei, găsite pînă acum, corespund unor puncte din acelaşi semiplan (cel haşurat).

Fie punctul $P(x, 5 - 2x)$, de abscisă x, aflat pe dreapta (d). Să considerăm o soluţie (x, y) a inecuaţiei, de abscisă x. Propoziţia $2x + y - 5 \leqslant 0$ este adevărată; deducem $y \leqslant 5 - 2x$, deci punctul $Q(x, y)$ se află „sub" punctul $P(x, 5 - 2x)$.

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei se identifică cu semiplanul haşurat. Ca să rezolvăm o inecuaţie de gradul 1 cu două necunoscute

$$ax + by + c \leqslant 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

desenăm mai întîi dreapta soluţiilor ecuaţiei $ax + by + c = 0$. Această dreaptă împarte planul în două semiplane. Pentru a stabili care dintre ele este mulţimea soluţiilor inecuaţiei, luăm un punct din plan (nu de pe dreapta soluţiilor) şi verificăm dacă este sau nu soluţie a inecuaţiei. Dacă este soluţie, atunci semiplanul în care se află punctul este mulţimea soluţiilor inecuaţiei.

De exemplu, să considerăm inecuaţia

$$2x + 3y \geqslant 6 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

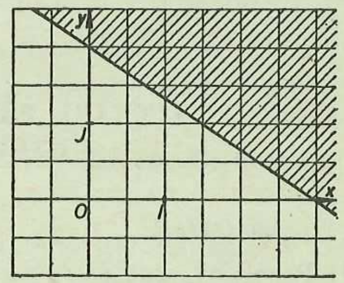


Fig. IV.18

Desenăm în figura IV.18 dreapta soluţiilor ecuaţiei $2x + 3y = 6$. Verificăm dacă punctul O (originea axelor) este sau nu soluţie a inecuaţiei. Propoziţia $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 > 6$ este falsă; deci O nu se află în semiplanul soluţiilor inecuaţiei. În figura IV.18 am haşurat semiplanul soluţiilor.

EXERCIŢIU

Care este mulţimea soluţiilor inecuaţiei: a) $x + y - 4 \leqslant 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$; b) $2x - y - 1 \leqslant 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$?

SISTEME DE INECUAŢII

Vom considera următorul tip de sistem de inecuaţii:

$$\begin{cases} ax + b \leqslant 0, \\ a'x + b' \leqslant 0, \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Să luăm două exemple:

Exemplul 1. Fie sistemul $\begin{cases} 3x - 3 \leqslant 0, \\ 5x - 10 \leqslant 0, \end{cases}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Prima ecuaţie are ca mulţime de soluţii intervalul $(-\infty; 1]$; a doua ecuaţie are ca mulţime de soluţii intervalul $(-\infty; 2]$; sistemul va avea ca mulţime de soluţii intersecţia acestor intervale, adică mulţimea $(-\infty; 1] \cap (-\infty; 2] = (-\infty; 1]$.

Exemplul. 2 Fie sistemul $\begin{cases} 4x - 16 \leqslant 0, \\ -2x + 2 \leqslant 0, \end{cases} (x \in \mathbf{R}).$

Prima ecuaţie are ca mulţime de soluţii $(-\infty; 4]$. A doua ecuaţie are ca mulţime de soluţii $[1; +\infty)$. Sistemul are ca mulţime de soluţii intersecţia acestor intervale, adică mulţimea $(-\infty; 4] \cap [1; +\infty) = [1; 4]$.

EXERCIŢIU

Rezolvaţi sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ 3x - 12 \geqslant 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 12x \geqslant 17x - 4, \\ 3x - 6 \leqslant 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 2x - 14 \leqslant 0. \end{cases}$

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUŞIRII UNOR CUNOŞTINŢE DE BAZĂ

Lucrarea I

1) Rezolvaţi ecuaţiile:
a) $x + y - 4 = 0$ $(x, y \in \mathbf{R})$; b) $4x - 5 = 2 - 3y$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

2) Rezolvaţi grafic sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x - y = 0, \end{cases} (x, y \in \mathbf{R}).$$

Lucrarea II

1) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ -x + 6y = 4. \end{cases}$

2) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{y} = 2, \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{y} = -1. \end{cases}$

3) Rezolvaţi inecuaţiile:
a) $3x + 2 \leqslant 0$ $(x \in \mathbf{R})$; b) $-2x + 1 \leqslant 0$ $(x \in \mathbf{R})$.

CAPITOLUL V

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. EXERCIŢII ŞI PROBLEME SUPLIMENTARE

1) Ce număr este mai mare: $4\sqrt{25} - 3\sqrt{64} + 2\sqrt{81} - \sqrt{49}$ sau $5\sqrt{196} - 7\sqrt{169}$?

2) Un pătrat are latura de 21 cm. Cît este mărimea diagonalei sale? Aproximaţi în mm.

3) Laturile unui dreptunghi au respectiv 3,7 cm şi 2,6 cm. Ce lungime are diagonala sa?

4) Exprimaţi printr-o formulă aria tolei de transformator din figura V.1. Calculaţi-o, ştiind că $a = 8{,}1$ cm, $b = 1{,}5$ cm, $c = 5{,}6$ cm şi $d = 4$ cm. Ştiind că tolele se debitează din benzi dreptunghiulare cu lăţimea de 6 cm, aflaţi procentul (aproximativ) de folosire a metalului.

5) În secolul trecut se folosea ca unitate de măsură pentru lungimi *piciorul* (în unele ţări se mai foloseşte şi astăzi), aşa cum aflăm din cărţile lui Jules Verne. Un „picior" are aproximativ 305 mm. Construiţi un grafic de transformare a lungimilor din metri în „picioare". Cu ajutorul lui apreciaţi cîte picioare sînt (aproximativ) în 1,2 m. Dar în 1,8 m?

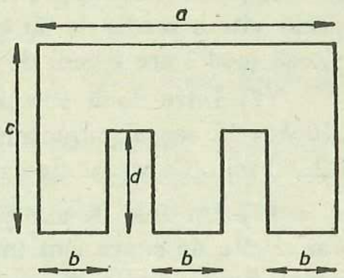


Fig. V.1

6*) Demonstraţi că nu există pătrate perfecte de formă $5n + 3$ cu $n \in \mathbf{N}$.

(D. Pompeiu*)

7) Arătaţi că există numere a şi b astfel încît, înmulţind polinoamele $X^2 + aX + b$ şi $X^2 - 3X + 4$, produsul lor să nu aibă termeni de gradele 1 şi 2.

8) Fie $A = \{0, 1, 2\}$ iar $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Construiţi toate funcţiile crescătoare $f: A \to B$. Este adevărat că sînt 4 astfel de funcţii?

9) Construiţi cele 6 funcţii crescătoare definite pe $\{5, 6\}$ cu valori în mulţimea $\{0, 1, 2, 3\}$.

---

* Dimitrie Pompeiu (1873—1954) — matematician român.

10) Fie polinomul $P(X) = X^2 - 4X - 1$, calculați numerele $P(2 + \sqrt{5})$ și $P(2 - \sqrt{5})$.

11) Puteți găsi o funcție liniară $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ al cărei grafic să „treacă" prin punctele (1, 2) și (3, 4)? Care este aceasta?

12) Determinați funcția liniară $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = mx + n$, știind că $g(2) = 2{,}1$ și $g(3) = 3{,}4$.

13) Fie fracția rațională $F(X; Y; Z) = \dfrac{4X^2Z - Y^2X}{2X^2Y + XY}$; calculați $F(2{,}6; 4{,}2; 1{,}092)$.

14) Completați tabelul (cu eroare de 0,01):

x	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	0	$0{,}05$	$0{,}1$	$0{,}2$
$\sqrt{1+x}$							
$1 + \dfrac{x}{2}$							

Ce observați?

15) Suma a 6 numere întregi pare, consecutive, este 18. Aflați cele șase numere.

16) Un tren rapid părăsește gara la 30 min după un tren de persoane; avînd viteza medie de 90 km/h depășește trenul de persoane după 2 h. Ce viteză medie are trenul de persoane?

17) Între două porturi, pe un fluviu, un vapor parcurge distanța de 140 km în sensul curentului apei în 4 ore, iar contra curentului apei în 4 h 40 min. Ce viteză de curgere are apa fluviului?

18) Un aliaj de aur și cupru are densitatea 16,9 g/cm^3. Cîte grame de aur și cîte de cupru sînt într-o bucată de 100 g din acest aliaj? Densitatea cuprului este de 8,9 g/cm^3, iar a aurului de 19,5 g/cm^3.

19) Mărim o catetă a unui triunghi dreptunghic cu 2 cm și micșorăm cealaltă catetă cu 3 cm; constatăm că ipotenuza rămîne de aceeași lungime. Suma catetelor este acum de 40 cm. Puteți afla ce lungimi aveau laturile triunghiului inițial?

20) Vrem să obținem 5 litri de alcool de 35% (concentrație); dispunem de alcool cu concentrații de 20% și 72%. Cît trebuie să amestecăm din fiecare fel?

21) Perimetrul unui dreptunghi este de 28 cm. Dacă-i mărim lățimea cu 2 cm și-i micșorăm lungimea cu 2 cm, obținem un pătrat. Puteți afla dimensiunile dreptunghiului?

22) În laborator există un cilindru gradat, dar nemarcat, din sticlă. Plin pe jumătate cu apă, cîntărește 4,5 kg; plin doar o treime cu apă, cîntărește 3,5 kg. Cît cîntărește cilindrul gol?

23) Mărind lungimea unui dreptunghi cu 12 cm, iar lățimea sa cu 3 cm, aria dreptunghiului se mărește cu 120 cm^2. Aflați dimensiunile dreptunghiului inițial, știind că perimetrul său era de 16 cm.

24) Cît cupru și cît zinc se află amestecate într-un aliaj ce cîntărește în aer 5 kg, știind că în apă el cîntărește cu 0,6 kg mai puțin? (Densitatea cuprului = 8,9 kg/dm^3, a zincului = 7,1 kg/dm^3).

25*) Cît alcool de concentrație 45% trebuie să amestecăm cu alcool de concentrație 60% pentru a obține 5 litri alcool cu concentrația de 65%?

2. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI

Prezentăm o selecție de probleme date la diverse faze ale Olimpiadelor de matematică din ultimii ani, sau la Concursurile de treaptă. Textele au fost parțial modificate.

1) Fie $E = (a - b)^3 - (a - b)^2(a + b)$ și $F = (a + b)^3 + (a + b)^2(a - b)$. Arătați că dacă a și b sînt negative, atunci $E > F$.

(O.M. 1975, mun. București)

2) Un trapez isoscel are baza mică de $x + 2$ cm, laturile neparalele de $3x + 4$ cm fiecare, perimetrul de $11x + 22$ cm, iar înălțimea de $3x$ cm. a) Calculați baza mare și aria; b) Pentru ce valori ale lui x problema are soluție?

(O.M. 1976, jud. Bacău)

3) Fie $A = 3a^3 - 8a^2x - x - x^3 + 5ax^2$, $B = a^2x - 4ax^2 - a^3 + 11x^3$ și $C = -6ax^2 + 2x^3 - 5a^2x - 5a^3$. Aflați $E = A + B + C$; $F = A - B + C$ și $C = -A + B + C$. Scrieți-le în formă canonică.

(O.M. 1976, jud. Buzău)

4) Fie polinomul $p(X) = (X + 1)(X^2 + 1)(X - 1) - (X^2 - 1)^2$.

a) Descompuneți polinomul p în factori;

b) Scrieți în formă canonică polinomul în Y obținut prin înlocuirea lui X cu polinomul $q(Y) = (4Y + 13)(Y^2 + 1) - (4Y + 3)(Y + 2)^2$.

(O.M. 1976, mun. București)

5) Fie $p(X) = X^4 - (2X - 3)(X - 1)^2 - (3X - 5)(2X + 7) - (X - 1)(X^2 + 1)(X + 1)$. a) Să se scrie polinomul sub forma canonică.
b) Calculaţi:

$$x = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) : (-2,5) - \frac{4}{5}}{\left(-\frac{1}{5}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \frac{(-2)^4(3-4)^{58}}{1,3 \cdot (-5)^2} \cdot 0,1$$

şi apoi aflaţi valoarea $p(x)$.

(O.M. 1976, jud. Alba)

6) Simplificaţi: $\dfrac{X^2 - 4XY + 4Y^2}{X^2 - 2XY + XZ - 2YZ}$.

(Concurs treaptă 1976, jud. Cluj)

7) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{3x}{2} + 2y = 0. \end{cases}$

(Concurs treaptă 1976, jud. Neamţ)

8) Simplificaţi: $\dfrac{a^3 + a}{a^4 - 1}$ şi $\dfrac{0,5^3 + 0,5}{0,5^4 - 1}$.

(Concurs treaptă 1976, jud. Caraş-Severin)

9) Rezolvaţi ecuaţiile: $\dfrac{1 - 3x}{2} = 0$; $\dfrac{2}{5x + 1} = 0$; $\dfrac{2}{x - 1} = 3$.

(Concurs treaptă 1976, jud. Caraş-Severin)

10) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 14, \\ 4x - 3(2x + y - 1) = 2(-x + y) + 8. \end{cases}$

(Concurs treaptă 1976, jud. Satu Mare)

11) Rezolvaţi ecuaţia $(x - a)^2 + b^2 = (x - b)^2 + a^2$.

(Concurs treaptă 1976, jud. Satu Mare)

12) Fie $E(X) = 13X(X + 1)^2 + (2X^2 - 5X + 1)(X^2 + 2X + 3) - 5(X + 2)(X - 2) - 23$. Descompuneţi în factori.

(Concurs treaptă 1976, jud. Arad)

13) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x - y = -3, \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} = 5. \end{cases}$

(Concurs treaptă 1976, jud. Sălaj)

14) Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{a - b}{x + 1} - \dfrac{a + b}{x - 1} = 0$, unde $b \neq 0$).

(Concurs treaptă 1976, jud. Dolj)

15) Un vapor parcurge distanţa dintre două porturi în sensul curentului apei în 4 ore, iar contra sensului curentului apei în 4 ore 20 min. În cît timp va parcurge această distanţă o plută ce se deplasează cu viteza apei?

(Concurs treaptă 1977, mun. Bucureşti)

16) Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{2x^2 - mx + m}{x - 3} = 2x - 4$, în care parametrul m este diferit de 9 şi de 10.

(Concurs treaptă 1977, mun. Bucureşti)

17) Calculaţi lungimile laturilor unui triunghi isoscel, ştiind că sînt proporţionale cu numerele 2, 5 şi 5, iar perimetrul triunghiului este de 36 m.

(O.M. 1978, jud. Dîmboviţa)

18) Calculaţi: $\dfrac{2}{7} \cdot (-1)^{k+1} + \dfrac{1}{3} \cdot (-1)^{k+2} + (-1)^{p+3}$, unde k şi p sînt numere naturale.

(O.M. 1979, mun. Bucureşti)

19) Calculaţi: $\dfrac{(0,75 - 1)^2 - 6,0625}{0,04 - \sqrt{4,1616}}$.

(O.M. 1979, mun. Bucureşti)

20) Calculaţi: $\dfrac{2}{9}(-1)^n - \dfrac{7}{9}(-1)^{n+1} + 1$, $n \in N$.

(O.M. 1979, jud. Cluj)

3. EXERCIŢII ŞI PROBLEME DISTRACTIVE. CURIOZITĂŢI

1) Media aritmetică a numerelor 0,618034 şi 2,618034 este 1,618034. Cît este produsul lor? Reţineţi primele şapte cifre.

2) Priviţi: $1 = 2 + 2 - 2 - \frac{2}{2}$; $2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2$; $3 = 2 + 2 - 2 + \frac{2}{2}$; $4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2$; $5 = 2 + 2 + 2 - \frac{2}{2}$; $6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2$; $7 = 22 : 2 - 2 - 2$. Continuaţi, scriind pe 8, 9, 10, 11 şi 12 în mod asemănător, cu cinci cifre 2.

3) Avem $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$. Puteţi scrie în alt mod numărul 100, folosind fiecare cifră o singură dată (în ordine crescătoare) şi numai semnele + şi · ?

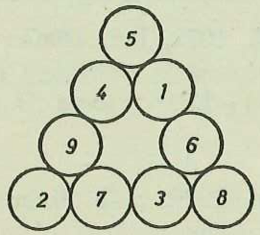
4) Curiozități: $63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3$; $(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16$; $(1 + 2 + 3) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$.

5) Alte curiozități: $\sqrt{121} = 12 - 1$; $\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$; $\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = -\sqrt{4} + 9$; $\sqrt{169} = \sqrt{16} + 9 = 16 - \sqrt{9}$; $\sqrt{256} = 2 \cdot 5 + 6$; $\sqrt{324} = 3 \cdot (2 + 4)$; $\sqrt{11881} = 118 - 8 - 1$.

6)

a)	b)	c)
$1 + 8 \cdot 1 = 9$	$9 \cdot 9 + 7 = 88$	$9 \cdot 1 + 2 = 11$
$2 + 8 \cdot 12 = 98$	$9 \cdot 98 + 6 = 888$	$9 \cdot 12 + 3 = 111$
$3 + 8 \cdot 123 = 987$	$9 \cdot 987 + 5 =$	$9 \cdot 123 + 4 =$
$4 + 8 \cdot 1234 = 9876$	$9 \cdot 9876 + 4 =$	$9 \cdot 1234 + 5 =$
$5 + 8 \cdot 12345 =$	$9 \cdot 98765 + 3 =$	$9 \cdot 12345 + 6 =$
$6 + 8 \cdot 123456 =$	$9 \cdot 987654 + 2 =$	$9 \cdot 123456 + 7 =$
$7 + 8 \cdot 1234567 =$	$9 \cdot 9876543 + 1 =$	$9 \cdot 1234567 + 8 =$
$8 + 8 \cdot 12345678 =$	$9 \cdot 98765432 + 0 =$	$9 \cdot 12345678 + 9 =$
$9 + 8 \cdot 123456789 =$		

7) Priviți triunghiul



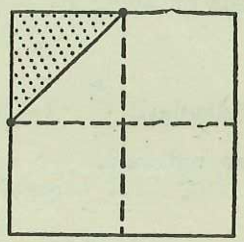


Fig. V.2

Suma numerelor scrise pe fiecare latură a sa este 20. Dar suma pătratelor acestor numere?

8) Puteți folosi patru cifre 9 pentru a forma numărul 100?

9) Aria regiunii colorate din figura V.2 reprezintă: a) $\frac{1}{8}$ din aria pătratului; b) $\frac{2}{14}$ din aria pătratului; c) $\frac{2}{16}$ din aria pătratului. Care răspuns este corect?

10) O orchestră formată din 40 de instrumentiști cîntă o melodie în 4 minute. În cîte minute va fi cîntată melodia de o orchestră formată din 60 de instrumentiști?

11) Unim printr-un segment două puncte de pe cerc. Se formează în interiorul cercului două regiuni (vezi fig. V.3). Unim prin segmente trei puncte de pe cerc. În interiorul cercului se formează patru regiuni.

Unim prin segmente patru puncte de pe cerc; se formează 8 regiuni.

Puteți spune cîte regiuni se formează în interiorul cercului dacă unim prin segmente cinci puncte de pe cerc? Dar șase puncte?

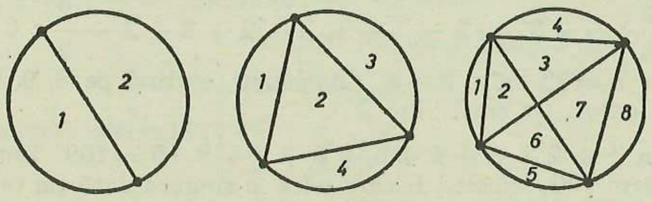


Fig. V.3

12) Un poștaș lasă, pentru cele 40 de apartamente ale unui bloc de locuințe, 22 ziare „România liberă" și 27 ziare „Scînteia". Puteți spune în cîte cutii poștale va lăsa poștașul ambele ziare?

13) $x * y$ înseamnă „adună pe x cu y și împarte rezultatul la 4". De exemplu, $8 * 12 = (8 + 12) : 4 = 5$.

Calculați $13 * 7$, apoi $2 * (3 * 5)$. Aflați numărul a din ecuația $a * 14 = 10$.

14) Ce puteți spune despre valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Toți iepurii albi au urechi lungi.

b) Nici un iepure cu urechi lungi nu este numit Timothy.

c) Eu am un iepure alb pe care-l numesc Timothy

(după Lewis Carroll, autorul cărților „Alice în țara minunilor", „Prin oglindă" și al altora).

15) O roată se rotește cu viteză constantă. Cronometrînd o rotație completă, am obținut 4,3 s, cu eroare de 0,1 s. Cîte rotații complete face roata în 43 s?

16) Puteți afla aria hîrtiei folosite pentru tipărirea acestei cărți, în centimetri pătrați? Excludeți coperta.

17) Kilometrajul mașinii arată 78 987 kilometri parcurși. Șoferul observă că acest număr este simetric. Peste două ore, aruncîndu-și privirea peste kilometraj, observă că acesta arată din nou un număr simetric. Cu ce viteză medie a mers automobilul în acest timp?

18) Priviți figura V.4. Cîte drumuri duc de la A în C? Care dintre ele este cel mai scurt?

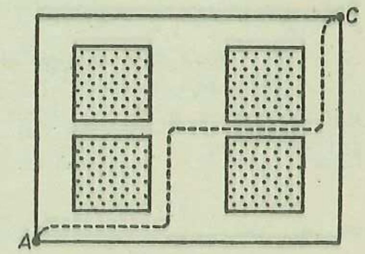


Fig. V.4

19) Cinci copii se joacă astfel: unul dintre ei stă deoparte, în timp ce ceilalți se împart în două grupe. Cei doi copii din prima grupă trebuie să spună adevărul, iar cei doi din a doua grupă trebuie să mintă (dacă sînt întrebați). Întrebînd, cel care a stat deoparte va trebui să afle în ce grupă este fiecare.

Ionică a stat deoparte, iar ceilalți s-au împărțit. Ionică revine și-l întreabă pe Petrică: „Tu ești mincinos?". Ce va răspunde Petrică?

Ionică îl întreabă pe George, apoi pe Nicu și pe Alex: „Ce mi-a răspuns Petrică?". George răspunde: „Ți-a răspuns că este mincinos"; Nicu răspunde: „Ți-a răspuns că nu este mincinos". Alex răspunde la fel ca și George. Cum se împărțiseră în grupe?

20) Din „Aritmetica" lui Diofant din Alexandria (Egipt):

a) Împărțiți un număr dat în două părți, avînd diferența dintre ele dată. De exemplu, fie numărul dat 100, iar diferența 40; găsiți cele două părți.

b) Aflați două numere, știind raportul și diferența lor.

21) Din antichitate (problemă de origine greacă):

Regele din Samos îl întreabă pe Pitagora cîți elevi are. Pitagora îi răspunde: jumătate dintre ei studiază matematica; un sfert dintre ei caută să învețe științele naturii; o șeptime încearcă să învețe filozofia. În plus, mai sînt trei femei.

Cîți elevi învățau la școala lui Pitagora?

22*) Din antichitate (tot de origine greacă).

Eu sînt un leu de marmoră. Două izvoare țîșnesc din ochii mei, unul din gura mea, altul de sub piciorul meu. În două zile, ochiul meu drept umple bazinul; ochiul meu stîng îl umple în trei, iar izvorul de sub piciorul meu în patru. Pentru a umple bazinul, izvorului din gura mea îi ajung șase ore. Călătorule, înainte de a bea, spune în cît timp va fi plin bazinul, dacă toate izvoarele curg?

23) Din evul mediu (de origine arabă).

Un hoț a intrat într-o livadă de portocali, păzită de trei paznici și a furat niște portocale. Primul paznic l-a surprins; ca să scape de el, i-a dat jumătate din portocalele furate și încă două portocale. A dat apoi peste el al doilea paznic; ca să scape, i-a dat jumătate din portocalele ce le mai avea și încă două portocale. Aproape de ieșire a nimerit peste al treilea paznic; și acestuia i-a dat jumătate din portocalele ce le mai avea, plus încă două. Odată scăpat, a văzut că mai are o singură portocală. Cîte portocale furase?

24) După „Algebra" lui Clavius (1608).

Un tată, voind să-și încurajeze fiul să rezolve probleme, îi promite că-i va da 8 lei pentru fiecare problemă bine rezolvată; dar, pentru fiecare problemă pe care n-a rezolvat-o, fiul va trebui să plătească 5 lei. După 26 de probleme, fiul nu trebuie să plătească nimic, dar nici să primească ceva. Cîte probleme a rezolvat?

25) Problemă veche indiană (probabil din secolul al IX-lea).

Erau împreună 67 de coșuri cu fructe și încă 7 fructe. Au venit 23 de călători, care și-au împărțit în mod egal între ei fructele. Cîte fructe erau într-un coș?

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Pag. 5. 1) 6; 2; 13; 12; 3; 7. **2)** nu; da; da; da. **3)** 252; 1050; 120; 56; 280. **5)** 0; $\frac{11}{30}$; $\frac{31}{20}$; $\frac{43}{8}$; $\frac{41}{15}$. **7)** $6\frac{2}{3}$; $-\frac{12}{34}$; $\frac{5}{7}$; 1. **8)** 7; -37; 4. **10)** $\frac{31}{9}$; $\frac{-437}{99}$; $\frac{-401}{90}$; $\frac{98}{99}$; $\frac{49}{45}$. **11)** $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{33}{40}$. **12)** 2,9; $-1{,}92$; 0,33; 9,7. **13)** 0,15; 0,4375; 0,2375; 0,(5); 5,(6); 0,(41463). **14)** $\frac{29}{10}$; $\frac{10}{99}$; $\frac{17}{11}$; $-\frac{1}{30}$; $\frac{1}{225}$. **15)** 0,825; 3,57; 0,(571428); 0,45; 1169,95; 538,2. **16)** -75; $+180$; -25000; $+\frac{27}{40}$; $-\frac{8}{15}$; $-\frac{5}{2}$; $-13{,}2$; $+91{,}02$. **17)** -5; $+5$; $+2$; -40; $+\frac{8}{15}$; $-\frac{10}{9}$; $-0{,}825$; -4; $\frac{5}{17}$; $\frac{8}{3}$. **18)** $+20$; $+64$; $-\frac{611}{240}$. **19)** $-\frac{3}{4}$; $-\frac{10}{21}$; $\frac{15}{8}$; $\frac{35}{24}$; $\frac{16}{3}$. **20)** $\frac{35}{24}$; $-\frac{1}{23}$; $\frac{31}{29}$. **21)** $-\frac{11}{7}$; -6. **23)** $\frac{11}{10}$; $-\frac{13}{24}$; $\frac{89}{120}$. **24)** 29,5; $\frac{199}{42}$; 1,9; 1; $-1{,}73$; 0,1; 3,3. **25)** 149,12. **26)** 0,223. **27)** 86,4; 100.

Pag. 9. 2) nu; da; da.

Pag. 12. 2) 5; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{2}$; 1,1; 1,3. **3)** b, c, e. **4)** 1,96; 1,9881; 1,999396; ... ; 2; ... ; 2,002225; 2,0164; 2,25. **5)** 100; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{9}$; 64; nu are soluție.

Pag. 16. 1) 2,2361; 0,86603; 1,0488; $-1{,}7321$. **2)** 2,44; 2,64; 2,82.

Pag. 18. 1) f; a; a; a; f. **2)** $e < c < a < 0 < 1 < d < b < f$.

Pag. 19. 1) da; da; da; da; da.

Pag. 20. 1) 3,1415; 3,141; 3,1408 și altele. **2)** 1,73; 1,731; 1,731 și altele. **3)** Știm că $s < a + \frac{1}{10^n}$ și $a < s$. De aici $\left(a + \frac{1}{10^n}\right) - \frac{1}{10^n} < s < \left(a + \frac{1}{10^n}\right) + \frac{1}{10^n}$.

Pag. 23. 2) 1,93; 3,14; 3,65. **3)** nici una.

Pag. 26. 1) 6; $2\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $4\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$; $10\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $5\sqrt{5}$; $10\sqrt{5}$. **2)** $6\sqrt{2}$; $6\sqrt{5}$; $-2\sqrt{6}$; $-10\sqrt{3}$; $-10\sqrt{5}$; $\frac{4}{9}\sqrt{2}$;

$\frac{5}{3}\sqrt{2}$; $\frac{4}{5}\sqrt{2}$; $\frac{3}{7}\sqrt{3}$. **3)** Asociativitatea. **4)** $3\sqrt{5}$; $5\sqrt{7}$; $9\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$. **5)** $8+7\sqrt{11}$; $-4+4\sqrt{5}$; $-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$. **6)** $3\sqrt{2}$; $8\sqrt{3}$; $13\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}+5\sqrt{5}$. **7)** a; c; d; e. **8)** $2\sqrt{\frac{1}{3}}$; $2\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\frac{5}{9}\sqrt{5}$; $\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\frac{7}{20}\sqrt{143}$. **9)** Nu. Este corect doar dacă $a \geqslant 0$. **10)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$. **12)** $-6+2\sqrt{6}$; $9+6\sqrt{3}$; $\sqrt{21}-\sqrt{35}$; $10+6\sqrt{5}$; $21-6\sqrt{7}$. **13)** 2; 3; 4; 13; $-21+\sqrt{3}-\sqrt{5}+5\sqrt{15}$; $24-13\sqrt{2}-6\sqrt{3}+4\sqrt{6}$.

Pag. 28. 1) $s=(\sqrt{s})^2\cdot$ **2)** 1,31... .

Pag. 30. 1) $\frac{8\sqrt{15}}{15}$; $\frac{3\sqrt{8}}{8}$; $\frac{\sqrt{33}}{11}$; $-\frac{\sqrt{12}}{3}$; $-\frac{\sqrt{8}}{4}$; $-\frac{3\sqrt{35}}{5}$. **4)** nu; nu; da; nu. **5)** $\frac{85}{3}\sqrt{2}$; $11\sqrt{3}$; $\frac{17}{4\sqrt{2}}$; $-16\sqrt{2}$. **6)** $124+14\sqrt{6}$; $-8+6\sqrt{15}$; -4. **7)** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $-2-\sqrt{6}$; $\frac{-15+9\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-11-5\sqrt{5}}{4}$; $\frac{9-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{10}}{7}$. **8)** $\frac{6-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$; $\frac{-17-3\sqrt{35}}{13}$; $-12+5\sqrt{6}$. **9)** 15; $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}$; $17-11\sqrt{2}-\sqrt{7}+\sqrt{14}$. **10)** $2a$, dacă $a+b \geqslant 0$; $-2b$, dacă $a+b<0$.

Pag. 32. 2) Din $s \geqslant [s]$ și $t \geqslant [t]$ rezultă $s+t \geqslant [s]+[t]$. Însă $[s]+[t]$ este număr întreg. **3)** Nu. Luînd $s=t=0,5$, avem $[s+t]=1$ iar $[s]+[t]=0$. **4)** Indicație. La fel ca exercițiul rezolvat.

Pag. 33. 1) 0,68; 2,87; 1,57. **2)** 4; $\sqrt{2}$; 1; 2; 2.

Pag. 35. 1) 211; 258; 9911; 12012; 74188. **2)** 1394. **3)** **111; 100100; 11100.** **4)** 620; 201; 2; 9002; 2059; 0; 99978. **5)** minim 225 litri. **6)** 1760; 672; 7350; 10403; 43400; 175680; 284600; 1680000; 5537664; 702702; 12000; 16800. **7)** **110; 110110; 1010001.** **8)** 499500. **9)** 588 t. **10)** 420; 12; 15; 32; 451; 55. **11)** 17 rest 3; 7 rest 6; 36 rest 107; 16 rest 0. **12)** a; a; a; a; f. **13)** $63=2^6-1$. **14)** f; a; a. **15)** 7; 30; 2; 2048. **16)** 42; 60; 56. **17)** $2^2\cdot31$; $2^4\cdot7\cdot11$; $3^2\cdot11^2$; $3^2\cdot19^2$; $2^2\cdot3^3\cdot5^2$; $3^2\cdot5\cdot37$; $2^3\cdot3^4\cdot5^2$. **18)** 200; 361; 12. **19)** 1800; 1260; 180. **20)** -7; $+5$; -1; -10; -36. **21)** -25; $+24$; -720; $+720$; $+360$. **22)** da; nu; nu; da. **23)** 1579; 0. **24)** 6; 72,26; $-1,2$; $-0,8$; $-65,25$. **25)** 243,2; 10030; 40; 1,5; 0,08; 78; 0,09; 0,001; 2,184; 0,067228; 42,1875. **26)** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{7}{6}$. **27)** $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{71}{200}$; $\frac{9}{50}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{2}{9}$; 75; $\frac{1}{20}$; $\frac{9}{28}$; $\frac{30}{7}$. **28)** $\frac{137}{60}$; $\frac{41}{24}=1,708(3)$; $\frac{37}{16}$; $\frac{4}{5}$. **29)** 4710 kg. **30)** 2,23 sau 2,236 sau 2,24 etc. **31)** $\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{8}$; $\sqrt{2}$; 0. **32)** f; a; f; f; a. **33)** -1; -1; 19; 3; $15-10\sqrt{6}$; $1+\sqrt{6}$; $-6+6\sqrt{5}$.

34) $5\sqrt{6}$; $20\sqrt{6}$; $4\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $|x|\sqrt{2}$. **35)** $\sqrt{18}$; $\sqrt{405}$; $\sqrt{7,2}$; $\sqrt{4,5}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$. **37)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 2; $\frac{7\sqrt{2}}{4}$. **38)** $-1+\sqrt{2}$; $-2-\sqrt{3}$; $-15-10\sqrt{2}$; 1; $11+2\sqrt{30}$. **39)** 4; $-3-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; 8; $-3+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$. **40)** 0,48.

Pag. 40. 1) Soluții: $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{8}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{15}{98}$. **2)** Nu, dacă $a=0$. **3)** $\frac{3}{10}$; 5; $-\frac{\sqrt{10}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pag. 42. Soluții: $-\frac{3}{2}$; 4; 1; orice număr real; nu are; $\sqrt{2}+1$.

Pag. 43. Soluții: orice număr real; $\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$; $-4-3\sqrt{2}$; $-\frac{1}{4}$; 3.

Pag. 44. 4) a) Soluție $\frac{15}{a-5}$ dacă $a \neq 5$. Dacă $a=5$, nu are soluție. **c)** Soluție 1 pentru $a \neq 1$. Dacă $a=1$, orice număr real este soluție. **6) a)** Soluție $6\sqrt{2}$. **c)** Soluție $-12-6\sqrt{3}$. **f)** Soluție $-3+2\sqrt{2}$. **7) a)** 2,1. **b)** 0,17. **c)** 1,21. **12) d)** Soluție 0. **e)** Orice număr real $\neq 0$ este soluție. **f)** Soluție $-\frac{2}{3}$. **14)** Pentru $a=1$. **15)** Ecuațiile sînt echivalente doar pentru $a=0$.

Pag. 49. 1) 4 înmulțiri și o adunare; $A=2\pi r(r+h)$ cu 2 înmulțiri și o adunare. **3)** $C=a(Ll-s^2)$. **4)** Indicație: stabiliți cîți călători au urcat în B.

Pag. 52. 4) da; nu; da; nu!; da; da.

Pag. 54. 3) $6X^3$; $-5X^2Y^2$; $3X^2$; $-3XYZ$; $6X^2Y$; $2a^2X^3$; **4)** $2X$; $\frac{10}{3}Y$; $\frac{2}{3}aX$; $-\frac{4}{3}aY$; $-2ab$.

Pag. 57. 2) X^2+XY+Y^2; X^3+X^2+X+1; $X^4+4X^3-2X^2+1$; $-X^2Y^2+X^2+Y^2$ sau $(-Y^2+1)X^2+Y^2$; $-X^2+Y^2+2YZ+Z^2$; $X^3-3XYZ+Y^3+Z^3$; $X^2+2XY+2XZ+Y^2+2YZ+Z^2$ sau alte forme.

Pag. 58. 7) $\overline{abcd}+\overline{cdba}=(a+d)\cdot91\cdot11+(b+c)\cdot10\cdot11$.

Pag. 61. 2) Diferă prin coeficientul lui X și prin semnele termenilor liberi **6)** X^8-Y^8; X^9-Y^9.

Pag. 64. 2) $(X-1)(X-3)$; $(3X+1)(2X+3a)$; $4X^2Y^2(3XY-2X^3+4Y^2)$; $6(2X+3)(X+1)$; $(Y-2X)^2(Y+2X)$. **4)** $(a+Y)(bc-X^2)$; $(X+Y)(X^2+Y^2)$; $(X^2+Y^2)(X+2Y)$; $2(2X-3)(X^2-X-1)$.

Pag. 65. 2) 4; 1; 36; $\pm6X$; $\pm4X$; $\pm10X$. **4)** $(X-2Y)^2$; $(6X+5Y)^2$; $(3X-2Y)^2$; $(X^2-Y)^2$; $\left(\frac{1}{2}X+1\right)^2$; $\left(3X-\frac{1}{2}Y\right)^2$; $(X^2+4Y)^2$.

Pag. 67. 5) $Y(2X+Y)$; $(X+Y+Z)(X-Y-Z)$; $4uv$; $(X^2+Y^2)(X+Y)(X-Y)$; $4t^2$. **7)** $3Y(2X+Y)$; $4Y(X+1)$; $-Y(2X+Y)$.

Pag. 71. 3) $(X+1)(X+2)$; $(X+1)(X+4)$; $(X+2)(X+3)$; $(X-\sqrt{2})^2$; $(X-\sqrt{3})^2$; $2(X+\sqrt{2})^2$; $(X^2+Y)(X^2-Y)$; $(X^2+2Y)\cdot(X^2-2Y)$; $(X^2+\sqrt{2}Y)(X^2-\sqrt{2}Y)$; $(X^2+9)(X+3)(X-3)$; $(X^4+Y^4)(X^2+Y^2)(X+Y)(X-Y)$; $(9X^2+4Y^2)(3X+2Y)(3X-2Y)$. **5) d)** $X^4-X^2+1=(X^4+2X^2+1)-3X^2=(X^2+1)^2-(\sqrt{3}X)^2$.

Pag. 74. **3)** $P(-\sqrt{2}) = P(\sqrt{2}) = 21$; $P(-1) = P(1) = 8$. **5)** Dacă c este un număr real, atunci c^2 este pozitiv sau 0. Pasul 1: $s = c \cdot c$; pasul 2: $t = a \cdot s$; pasul 3: $u = t + c$; pasul 4: $p(c) = u + 2$. **7)** $p(X) = X^2 + 4X + 1$. **8)** $E(X, Y) = (X - Y)(X + 2)$. **9)** $Q(X) = (X - 1)(X^2 + 2X + 2)$. **10)** Este același polinom. **13)** b, d și e. **14)** $P(2 + \sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$; **16)** $P(a) \cdot P(-a) = -a^6 + 10a^4 - a^2 + 1$.

Pag. 81. **3)** Pentru **a)** 0; **b)** 1; **c)** 1; **d)** -1.

Pag. 81. **1)** $A = l(a + l)$; $P = 4l + 2a$. **3)** $C = c\left(\frac{b}{a}\right)^2$.

Pag. 83. **18)** $(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$; $(X + \sqrt{3})(X - \sqrt{3})$; $(X + \sqrt{15})(X - \sqrt{15})$; $(X + \sqrt{8})(X - \sqrt{8})$; $(\sqrt{2}X + 1)(\sqrt{2}X - 1)$; $(\sqrt{3}X + \sqrt{2})(\sqrt{3}X - \sqrt{2})$; $(X - \sqrt{3})^2$; $(\sqrt{5}X + 1)^2$; $(X^2 + 2)(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$; $(12X + 13Y)(12X - 13Y)$. **19)** $(X^4 + 4X^2Y^2 + 4Y^4) - 4X^2Y^2 = (X^2 + 2Y^2)^2 - (2XY)^2 = (X^2 + 2XY + 2Y^2)(X^2 - 2XY + 2Y^2)$. **20)** $(X + 2)(X + 8)$; $(X + 3)(X + 4)$; $(X^2 + 1)(3X^2 + 1)$; $(X - 7)(X^3 + 2)$; $(X + 1)(X - Y - 1)$; $(X^2 - XY + Y^2)(X^2 - XY - Y^2)$. **21)** $(X - 1)(X - 2)(X + 3)$; $(X - 1)(X^2 - 6X - 6)$; $(X + \sqrt{3})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{5})(X - \sqrt{5})$; $(X + Y)(X + Y + 1)$; **23)** $P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$, aproximativ 1,82. **24)** Pasul 1: $s = 2 \cdot a$; pasul 2: $t = s + 1$; pasul 3: $u = t \cdot a$; pasul 4: $P(a) = u + 2$. **36)** Deoarece $(-s)^2 = s^2$, rezultă că $E(-s) = E(s)$. **40)** $F(\sqrt{2}) \cdot F(-\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} + 3} \cdot \frac{-2\sqrt{2} - 1}{-2\sqrt{2} + 3} = -7$.

Pag. 86. **3)** d; e; f.

Pag. 87. **2)** a; a; f; a. **3)** Indicație: desenați prin diagrame Venn-Euler mulțimile $(A \cap B) \cup C$ și $(A \cup C) \cap (B \cup C)$. **5)** Două soluții, după cum $d \in B$ sau $d \notin B$. $A = \{a, c, d\}$.

Pag. 88. **1)** Nu, au 12 elemente. **3)** 15 elemente.

Pag. 90. **3)** Numai dacă $a, b > 0$ sau $a, b < 0$. Construcția folosește teorema puterii punctului O față de cercul cu diametrul AB.

Pag. 93. **2)** X are abscisa 2. **3)** Un paralelogram; $M(1, 2)$. **4)** Indicație: folosiți teorema lui Thales.

Pag. 96. **1)** Nu, sînt 27 de funcții. **2)** Un exemplu este $f(x) = \sqrt{x}$, dar pot fi construite $4^4 = 256$ funcții. **4)** $h(2 < 3) = a$, $h(4 : 2 = 3) = f$, $h(2 \in \emptyset) = f$. Pot fi construite $2^3 = 8$ funcții.

Pag. 98. **2)** Nu a indicat corect domeniul de definiție. **3)** Da; nu. **4)** Da. $f(11) = 11^2$ nu e prim. **5)** $d(9) > d(11)$.

Pag. 107. **4)** Graficele sînt segmente ce fac parte din drepte paralele. **5)** Graficul e format din două segmente.

Pag. 118. **1)** b, e, f, g, h și i. **3)** b, c, e și f. **5)** Sînt concurente.

Pag. 121. **3)** $\left(\frac{5}{2}, y\right)$ cu $y \in \mathbb{R} - \{-1\}$; $\left(x \ \frac{11}{6}\right)$ cu $X \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$; $\left(x, \frac{3}{4}x + 1\right)$ cu $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{8}{5}\right\}$.

Pag. 127. **1)** $\left(2, \frac{3}{2}\right)$; $(4, 2)$; $(8, 11)$; $(1, 1)$; $(5, 3)$; $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$; $(\sqrt{2}, 2)$. **2)** $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(-1, 4)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$; $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. **3)** $(1, 5)$; $(2, 3)$.

Pag. 131. **1)** Aceeași dreaptă. **2)** Sînt concurente. **5)** $(17, 3{,}5)$; $(1, 7, 0{,}35)$, $(0{,}17, 0{,}035)$. **6)** **a)** $\left(\frac{4 + 6\sqrt{2}}{13}, \frac{-3 + 12\sqrt{2}}{13}\right)$.

Pag. 133. **2)** **b)** Indicație: notați $x = \frac{1}{u}$.

Pag. 139. **1)** Răspunsuri corecte: 9 zile, sau 8 zile 14 ore. **2)** Indicație: notați cu $2x$, $2y$ diametrele roților. Faceți un desen. Obțineți sistemul $\frac{x - 0{,}3}{y - 0{,}3} = \frac{77}{308}$; $(x - 0{,}3) + (y - 0{,}3) = 35$. Soluția: 14,6 cm și 56,6 cm. **3)** Indicație: scrieți relația între debitul de suflare d și conținutul de carbon c astfel: $c = dx + y$; aflați necunoscutele x și y din datele problemei; aflați apoi debitul d din $0{,}25 = d \cdot x + y$. Răspuns: 4,375 m^3 pe secundă; 2,95 m^3/s.

Pag. 144. **2)** 256 sau 257 mm. **3)** 4,5 cm aproximativ. **4)** $ac - d(a - 3b) = a(c - d) + 3bd$; 30,96 cm^2; cel mult 64%. **6)** Să scriem $k = 5c + r$ cu $0 \leqslant r < 5$; atunci, $k^2 = 5(5c^2 + 2cr) + r^2$. Însă, împărțind pe r^2 la 5, nu putem obține restul 3, ci numai resturile 0, 1 și 4. **7)** $a = \frac{12}{5}$; $b = \frac{16}{3}$. **8)** Da. **10)** $P(2 + \sqrt{5}) = P(2 - \sqrt{5}) = 0$. **11)** $f(x) = x + 1$. **12)** $g(x) = 1{,}3x - 0{,}5$. **16)** 72 km/h. **18)**. Aproximativ 87 g aur și 13 g cupru. **20)** Aproximativ 3,56 l și 1,44 l. **23)** Lungimea $\frac{4}{3}$ cm, lățimea $\frac{20}{3}$ cm(!) **25)** Imposibil (!).

Pag. 146. **1)** E este pozitiv, iar F este negativ. **2)** Aria $= \frac{3x \cdot (5x + 14)}{2}$. Pentru orice $x > 0$. **4)** $2(X + 1)(X - 1)$; $72Y^4 + 576Y^3 + 1\,128Y^2 - 96Y$. **6)** $\frac{X - 2Y}{X + Z}$. **8)** $\frac{a}{a^2 - 1}$; $-\frac{2}{3}$. **12)** $2X^2(X + 3)^2$. **16)** O singură soluție, anume $\frac{12 - m}{11 - m}$. **18)** Patru valori posibile: $\pm\frac{20}{21}$ și $\pm\frac{22}{21}$. **20)** Două valori posibile: 0 și 2.

Pag. 148. **3)** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 5 + 6 + 7 \cdot 8 + 9$. **9)** Corecte a și c. **12)** Cel puțin 8, cel mult 22. **14)** Nu sînt toate trei adevărate. **15)** 9 sau 10 rotații complete (!). **18)** 12 drumuri simple, 6 dintre ele au lungimea minimă. **25)** 15 fructe (mai sînt și alte soluții!).

NOTĂ ISTORICĂ

Algebra este o parte a matematicii, scopul ei principal fiind studiul operaţiilor. În dezvoltarea ei a cunoscut, pînă în prezent, trei etape.

La începuturile ei algebra s-a dezvoltat în strînsă legătură cu aritmetica; proprietăţile operaţiilor aritmetice cu numere naturale şi raţionale sînt cunoscute din cele mai vechi timpuri. În „Aritmetica" lui Diofant* apar probleme în care intervin „necunoscute"; Diofant notează necunoscuta cu litera grecească σ (se citeşte „sigma").

O altă carte asupra căreia merită să ne oprim este „Al-djabr-ual-mukabalah"**) a lui Muhammad al-Khorezmi (secolul al IX-lea). Această carte a avut o mare influenţă asupra dezvoltării matematicii în lumea arabă şi în Europa, contribuind printre altele la înlocuirea cifrelor romane (cu care se calcula greoi) cu cifrele „arabe", provenite din India. De la titlul acestei cărţi provine numele de „algebră". Ca şi în cartea lui Diofant, apar şi aici necunoscute.

În secolul al XII-lea matematicianul şi astronomul indian Bhaskara notează necunoscutele cu nume de culori şi lucrează cu polinoamele scrise în formă canonică; cartea sa „Bija Ganita" conţine multe probleme, în versuri, foarte grele dar foarte frumoase.

Începînd cu anul 1490, în cărţile de matematică apar semnele $+$ şi $-$; folosirea lor se răspîndeşte încetul cu încetul în toată Europa.

Simbolul $\sqrt{}$ pentru rădăcina pătrată este folosit pentru prima dată de către Rudolff în cartea (tipărită în limba germană în 1525) „Die Coss". În această carte necunoscuta era notată întotdeauna cu litera R, pătratul ei cu litera Z, iar cubul ei cu litera C; în loc de $+$ şi $-$ se foloseau încă literele p şi m. De exemplu, $5X^3 - 2X^2 + 3X$ era scris astfel 5 Cm · 2Zp · 3R.

Matematicianul francez Viète (1540—1603) foloseşte litere (vocale) pentru a nota necunoscutele. În cărţile sale $5X^3 - 2X^2 + 3X$ se scrie $5A$*cubus* $- 2A$*quadratus* $+ 3A$.

Olandezul Stevin (1548—1620) introduce notaţia cunoscută de noi pentru fracţiile zecimale şi arată regulile de lucru cu numerele zecimale. El foloseşte în cartea sa „Aritmetica" apărută în 1585 următoarea notaţie pentru $5X^3 - 2X^2 + 3X : 5③ - 2② + 3①$, scoţînd în evidenţă exponenţii necunoscutei.

---

* Diofant, matematician grec, a trăit (probabil) în secolul III. I se atribuie cîteva lucrări de matematică, între care „Aritmetica".

** „al-djabr" înseamnă „adunarea aceluiaşi număr la ambii membri ai unei egalităţi" iar „al-mukabalah" înseamnă „reducerea termenilor asemenea".

Primul reprezentant al matematicii moderne poate fi considerat René Descartes (1596—1650), filozof şi matematician francez. El a contribuit la dezvoltarea matematicii cu următoarele:

— a dat interpretarea numerelor negative şi le-a folosit aşa cum o facem astăzi (pînă la el matematicienii le considerau numere „imposibile");

— a folosit literele a, b, c pentru constante şi x, y, z pentru necunoscute;

— a observat că orice punct din plan este complet determinat de „coordonatele" sale, iniţiind în acest fel o nouă ramură a geometriei.

Menţionăm şi matematicianul englez Wallis (1616—1703), care în cartea sa „Algebra" publicată în 1685 foloseşte pentru prima dată formule.

Începînd din secolul al XVI-lea, algebra intră în a doua etapă de dezvoltare, dominată de încercările de rezolvare a ecuaţiilor algebrice.

La noi în ţară, la începutul secolului al XIX-lea, în primele şcoli în care se preda în limba română, întemeiate de către Gheorghe Lazăr în Bucureşti şi de către Gheorghe Asachi în Iaşi, algebra era una dintre materiile de studiu. Dintre matematicienii români care au contribuit la dezvoltarea algebrei, menţionăm pe Dan Barbilian (1895—1961).

TABELUL CU PĂTRATELE ŞI RĂDĂCINILE PĂTRATE ALE NUMERELOR NATURALE ÎNTRE 1 ŞI 100

Notă. Rădăcinile pătrate sînt date cu eroare de 0,0001.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1,0000	26	676	5,0990	51	2601	7,1414	76	5776	8,7178
2	4	1,4142	27	729	5,1961	52	2704	7,2111	77	5929	8,7749
3	9	1,7320	28	784	7,2915	53	2809	7,2801	78	6084	8,8317
4	16	2,0000	29	841	5,3851	54	2916	7,3484	79	6241	8,8881
5	25	2,2360	30	900	5,4772	55	3025	7,4162	80	6400	8,9442
6	36	2,4494	31	961	5,5677	56	3136	7,4833	81	6561	9,0000
7	49	2,6457	32	1024	5,6568	57	3249	7,5498	82	6724	9,0553
8	64	2,8284	33	1089	5,7445	58	3364	7,6157	83	6889	9,1104
9	81	3,0000	34	1156	5,8309	59	3481	7,6811	84	7056	9,1651
10	100	3,1622	35	1225	5,9160	60	3600	7,7459	85	7225	9,2195
11	121	3,3166	36	1296	6,0000	61	3721	7,8102	86	7396	9,2736
12	144	3,4641	37	1369	6,0827	62	3844	7,8740	87	7569	9,3274
13	169	3,6055	38	1444	6,1644	63	3969	7,9372	88	7744	9,3808
14	196	3,7416	39	1521	6,2450	64	4096	8,0000	89	7921	9,4339
15	225	3,8729	40	1680	6,3245	65	4225	8,0622	90	8100	9,4868
16	256	4,0000	41	1681	6,4031	66	4356	8,1240	91	8281	9,5393
17	289	4,1231	42	1764	6,4807	67	4489	8,1853	92	8464	9,5916
18	324	4,2426	43	1849	6,5574	68	4624	8,2462	93	8649	9,6436
19	361	4,3589	44	1936	6,6332	69	4761	8,3066	94	8836	9,6953
20	400	4,4721	45	2025	6,7082	70	4900	8,3666	95	9025	9,7467
21	441	4,5825	46	2116	6,7823	71	5041	8,4261	96	9216	9,7979
22	484	4,6904	47	2209	6,8556	72	5184	8,4852	97	9409	9,8488
23	529	3,7958	48	2304	6,9282	73	5329	8,5440	98	9604	9,8994
24	576	4,8989	49	2401	7,0000	74	5476	8,6023	99	9801	9,9498
25	625	5,0000	50	2500	7,0710	75	5625	8,6602	100	10000	10,0000

CUPRINS

Nr. colilor de tipar : 10
Bun de tipar : 1.IV.1988

Com. nr. 70 434/34 054
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.