

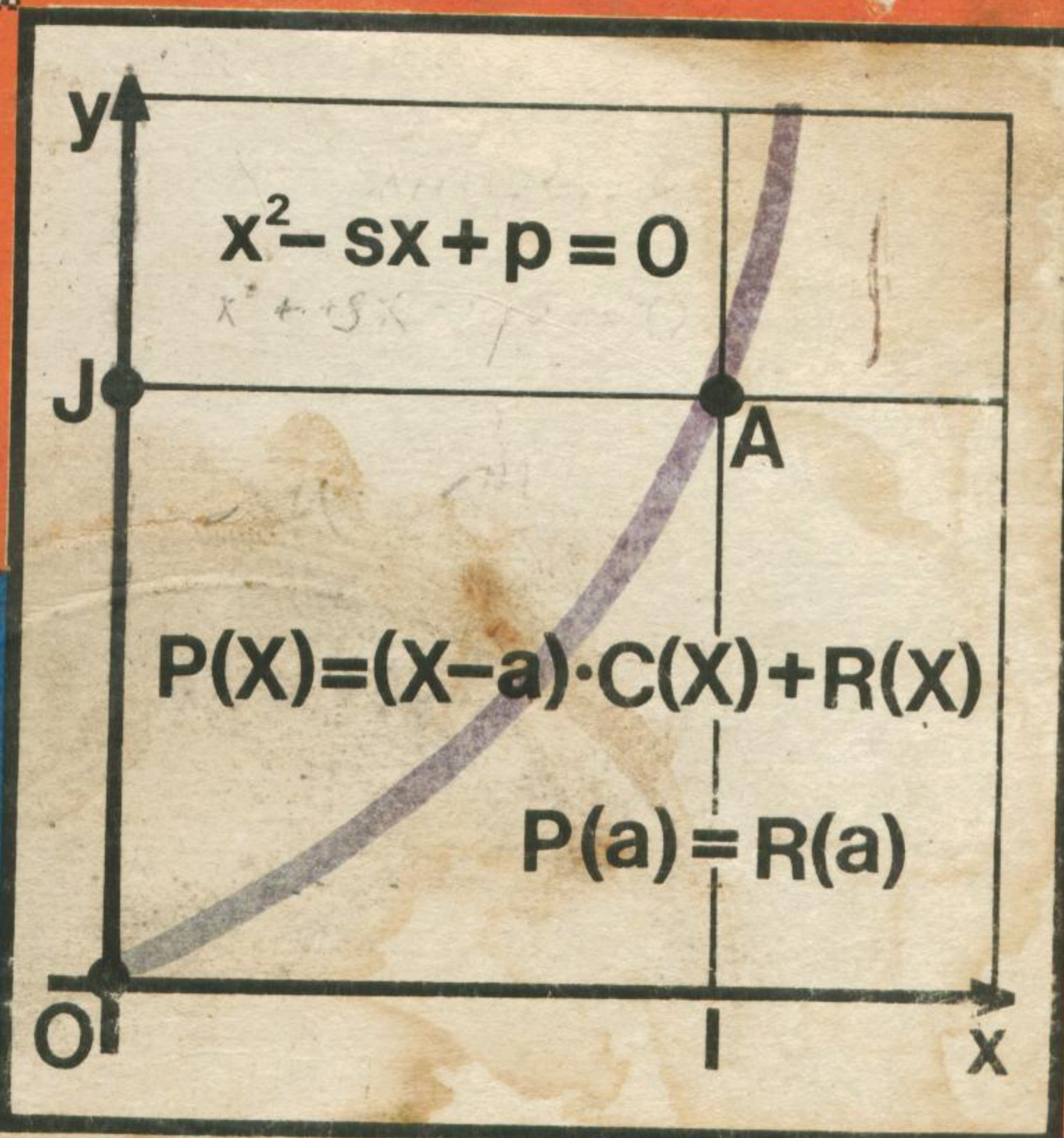
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI



# Matematică

## Algebră

Manual pentru clasa a VIII-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1986

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

IOAN CRĂCIUNEL  
PETRE SIMION

LILIANA NICULESCU  
TIBERIU SPIRCU

---

# Matematică<sup>v</sup>

---



---

## Algebră

---

Manual pentru clasa a VIII-a

---

*moresanu B*

*cristi*

*BEHUK*



---

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ  
BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățământului cu nr. 29636/1981

Referenți: Prof. univ. dr. Octavian Stănășilă  
Conf. univ. dr. Ion D. Ion  
Conf. univ. dr. Constantin Năstăsescu  
Prof. Ioan Mitrache  
Prof. Elena Matrosenco

La definitivarea manualului s-a ținut seamă și de propunerile unor cadre didactice din județele Giurgiu, Hunedoara și Vrancea.

Exercițiile și problemele propuse spre rezolvare au fost împărțite în patru categorii:

— exerciții care să fie rezolvate în clasă, cu explicațiile necesare date de către profesor; aceste exerciții sînt indicate prin caractere obișnuite, ca de exemplu 1) sau 1) a) sau 1) a\*);

— exerciții care să fie rezolvate acasă; ele sînt indicate prin caractere îngroșate, ca de exemplu **1)** sau **1) a)**;

— exerciții suplimentare: **1)**;

— exerciții suplimentare dificile: **1\*)**.

Folosirea sau nu a exercițiilor suplimentare este lăsată la alegerea profesorului. Nu se vor da, ca temă pentru acasă, exerciții suplimentare dificile.

Redactor: Prof. Valentin Radu  
Tehnoredactor: Elena Opreșeanu  
Coperta: Nicolae Sirbu

## 1. EXERCIIU

1) Reamintiți-vă  
a)  $(214 + 437) \cdot 12 + 16 \cdot 41$ ; d)  $83 \cdot 81$

2) Descompune  
a) 2904; b) 1539

3) Un muncitor execută în acest timp  
Care este procentajul

4) Pentru a obține  
miniu. După îndepărtarea  
kilogramul de aliaj  
lei/kg, iar cheltuielile

5) Efectuați:  
a)  $(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5)$ ; d)  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$

6) Scrieți în formă  
a)  $\frac{11}{4}$ ; b)  $\frac{82}{50}$ ; c)  $-\frac{1}{2}$

7) Efectuați, scrieți  
a)  $\left(-\frac{16}{3}\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

## CAPITOLUL I.

### NUMERE

#### 1. EXERCIIII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Reamintiți-vă proprietățile operațiilor cu numere. Efectuați :

a)  $(214 + 437) \cdot 12 - 45$ ; b)  $214 + 437 \cdot (12 - 45)$ ; c)  $428 \cdot 41 - (312 \cdot 41 + 16 \cdot 41)$ ; d)  $83 \cdot 815 + 815 \cdot 22 - 95 \cdot 815$ .

2) Descompuneți în factori primi numerele naturale :

a) 2904; b) 1539; c) 2156; d) 2475.

3) Un muncitor care lucrează la o mașină câștigă 12 lei într-o oră pentru executarea în acest timp a 60 de piese. Fiecare piesă are prețul de cost de 1,25 lei. Care este procentajul manoperei în prețul de cost al piesei ?

4) Pentru a obține un aliaj se topesc împreună 92 kg de cupru și 5 kg de aluminiu. După îndepărtarea zgurei, se obține un lingou cu masa de 90 kg. Cît costă kilogramul de aliaj, știind că aluminiul costă 28,20 lei/kg, cuprul costă 50,75 lei/kg, iar cheltuielile de topire (energie, manoperă) se ridică la 320 lei ?

5) Efectuați :

a)  $(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5)$ ; b)  $(+2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (-5)$ ; c)  $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (+5)$ ; d)  $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (+5)$ ; e)  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$ .

6) Scrieți în formă zecimală numerele :

a)  $\frac{11}{4}$ ; b)  $\frac{82}{50}$ ; c)  $-\frac{148}{25}$ ; d)  $\left(\frac{8}{15} - \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{18}{8-5}$

7) Efectuați, scriind rezultatul în formă zecimală :

a)  $\left(-\frac{16}{3}\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) \cdot \left(-\frac{9}{14}\right) \cdot \left(+\frac{49}{12}\right)$ ; b)  $(-1,2) \cdot (+2,1) \cdot (-3,7) \cdot (+4,5)$ .

## 2. RIDICAREA LA PUTERE

Ne-am obișnuit să notăm  $5^2$  în loc de  $5 \cdot 5$ ;  $\left(-\frac{5}{4}\right)^3$  în loc de  $\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$ ;  $0,2^4$  în loc de  $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2$ . În general, dacă  $a$  este un număr real, notăm cu  $a^n$  numărul:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

și citim „ $a$  ridicat la puterea a  $n$ -a”. În această notație,  $a$  este **baza** puterii, iar  $n$  este **exponentul** puterii.

Notația de mai sus este adecvată pentru orice număr natural  $n \geq 2$ . Pentru  $n = 1$  vom considera că  $a^1 = a$ . De asemenea, vom admite că  $a^0 = 1$ , pentru orice număr real  $a \neq 0$ .

### EXERCIIII

1) Completați tabelul de mai jos, cu puterile  $a^n$ :

$a \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
2							
3							
4							
5							

2) Calculați :

a)  $(-2)^4$ ; b)  $-2^4$ ; c)  $(-1)^7$ ; d)  $1,3^2$ ; e)  $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ .

3) Calculați suma puterilor  $2^n$  cu  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; comparați cu puterea  $2^6$ ; ce observați ?

4) a) Calculați suma puterilor  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  cu  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; comparați cu 2.

b) Calculați suma puterilor  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  cu  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; comparați cu 2. Ce observați ?

Să scriem puterile ce au ca bază pe 10. Avem  $10^0 = 1$ ,  $10^1 = 10$ , apoi  $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ ,  $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\ 000$ ,  $10^4 = 10\ 000$ . Să observăm că exponentul unei puteri de acest fel ne arată numărul de cifre 0 ce apar după cifra 1, în scrierea zecimală a puterii.

Preferăm să folosim notația  $10^9$  în loc de 1 000 000 000 (un miliard !), deoarece este mai „economică”.

Ridicarea la puterea  $n$  (cel puțin natural  $n$ ) se notează  $a^n$  și se citește „ $a$  la puterea  $n$ ”.

Ridicarea la puterea  $n$  se face înaintea efectuării altor operații (al II-lea). Așadar,

1) (oral) Ordonați:

2) (oral) Știm că:

3) Reprezentați pe o linie (măsură de 5 cm.)

4) Reprezentați pe o linie „dacă  $n > m$ , atunci  $a^n > a^m$ ”.

5) Reprezentați pe o linie:

6) Calculați :

a)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ ; b)

7) Calculați :

a)  $\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^3$

8) Care număr e

a)  $7 + 4^3$  sau  $7^4$ ?

c)  $(4^4)^4$  sau  $4^{4^4}$ ?

## 3. PE

Să luăm ca b...  
 $(-2)^1 = -2$ ;  $(-2)^2 = 4$

Observăm că semnul este pozitiv pentru exponentii impari și negativ pentru exponentii pari.

În general, dacă  $a < 0$ , atunci  $a^n > 0$  dacă  $n$  este par și  $a^n < 0$  dacă  $n$  este impar.

**Dacă  $a > 0$ ,**

Pentru  $a = 0$ , avem  $0^n = 0$  pentru orice număr real  $n > 0$ .

$\left(\frac{5}{4}\right)^3$  în loc de  $\left(-\frac{5}{4}\right)$ .

general, dacă  $a$  este un

$a$  este baza puterii, iar  $n$

ăr natural  $n \geq 2$ . Pentru  
te că  $a^0 = 1$ , pentru orice

7	8

și cu puterea  $2^6$ ; ce observați?

comparați cu 2.

comparați cu 2. Ce observați?

$10^0 = 1$ ,  $10^1 = 10$ , apoi  
0 000. Să observăm că  
de cifre 0 ce apar după

000 (un miliard!), deoa-

Ridicarea la putere poate fi gândită ca o operație: fiind date un număr real  $a$  și un număr natural  $n$  (cel puțin unul dintre ele  $\neq 0$ ), din ele obținem un nou număr real, notat  $a^n$ . Mai nou se folosește și notația  $a^{**n}$ , tocmai pentru a scoate în evidență semnul de operație „\*\*“.

Ridicarea la putere este o operație de ordinul al III-lea; ea se execută deci înainte de efectuarea înmulțirilor și împărțirilor (care sînt operații de ordinul al II-lea). Așadar, vom scrie:  $7 \cdot 10^6 = 7\,000\,000$ ;  $2,1 \cdot 10^4 = 21\,000$  etc.

## EXERCITII

1) (oral) Ordonăți crescător puterile:  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^1$ .

2) (oral) Știm că  $a^5 = -0,7$  și că  $a \in \mathbf{R}$ . Cunoașteți semnul lui  $a$ ?

3) Reprezentați pe o axă puterile  $a^n$  cu  $a = 1,2$  și  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ . (Indicație: luați unitatea de măsură de 5 cm.)

4) Reprezentați pe o axă puterile  $a^n$  cu  $a = 0,8$  și  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Este adevărată propoziția: „dacă  $n > m$ , atunci  $a^n > a^m$ ”? (Indicație: luați unitatea de măsură de 10 cm.)

5) Reprezentați pe o axă puterile  $a^n$  cu  $a = -0,9$  și  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Ce observați?

6) Calculați:

a)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ ; b)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ; c)  $(-0,1)^2$ ; d)  $(-0,1)^3$ ; e)  $(-0,1)^4$ .

7) Calculați:

a)  $\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^3$ ; b)  $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)^2$ ; c)  $(-1 + 0,1)^4$ .

8) Care număr este mai mare:

a)  $7 + 4^3$  sau  $(7 + 4)^3$ ; b)  $7^3 + 4^3$  sau  $(7 + 4)^3$ ; c)  $5 \cdot 6^3$  sau  $(5 \cdot 6)^3$ ; d)  $\frac{1}{2} \cdot 6^3$  sau  $\left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)^3$ ;

e)  $(4^4)^4$  sau  $4^{4^4}$ ?

## 3. PROPRIETĂȚILE RIDICĂRII LA PUTERE

Să luăm ca bază numărul  $-2$  și să-i calculăm puterile. Avem:  $(-2)^0 = +1$ ;  $(-2)^1 = -2$ ;  $(-2)^2 = +4$ ;  $(-2)^3 = -8$ ;  $(-2)^4 = +16$  și așa mai departe. Observăm că semnele alternează: pentru exponenții pari semnul este  $+$ , iar pentru exponenții impari semnul este  $-$ .

**În general, dacă  $a < 0$ , atunci:**

$a^n$  este  $\begin{cases} \text{pozitiv, dacă } n \text{ este par,} \\ \text{negativ, dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

**Dacă  $a > 0$ , atunci  $a^n$  este pozitiv pentru orice  $n$ .**

Pentru  $a = 0$ , avem:  $0^n = 0$ , pentru orice  $n \geq 1$ . Scrierea  $0^0$  nu este acceptată ca scriere a vreunui număr real.

## EXERCITII

1) (Oral) Stabiliți semnul puterii :

a)  $(-3)^{12}$  ; b)  $(-5)^3$  ; c)  $(+2)^6$  ; d)  $3^5$  ; e)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ .

2) Pentru ce  $n \in \mathbf{N}$  avem  $(-2)^n < 0$  ? Dar  $(-2)^{n(n+1)} > 0$  ?

Să privim cu atenție rîndul ce urmează :

$$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Deci putem scrie că  $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 2^{3+4}$ .

În general, fie  $a$  un număr real  $\neq 0$ , iar  $m$  și  $n$  numere naturale. Atunci :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

deoarece :

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ factori}}$$

Dacă  $a = 0$ , atunci  $0^m \cdot 0^n = 0^{m+n}$  pentru  $m, n \geq 1$ .

### Regula I

*Produsul a două puteri avînd aceeași bază este o putere cu aceeași bază, în care exponentul este suma exponenților factorilor.*

## EXERCITIU

Scrieți ca putere :

a)  $3^8 \cdot 3^2$  ; b)  $9^4 \cdot 9$  ; c)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$  ; d)  $\left(-\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3$  ; e)  $(-8)^4 \cdot 8^5$  ; f)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4$  ; g)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ .

## EXERCITIU REZOLVAT

Să calculăm puterea  $(-0,3)^8$ .

*Rezolvare.* Scriem  $(-0,3)^8 = (-0,3)^4 \cdot (-0,3)^4$  ; apoi  $(-0,3)^4 = (-0,3)^2 \cdot (-0,3)^2$  și  $(-0,3)^2 = (-0,3) \cdot (-0,3) = 0,09$ . Deci  $(-0,3)^4 = 0,09 \cdot 0,09 = 0,0081$  apoi  $(-0,3)^8 = 0,0081 \cdot 0,0081 = 0,00006561$ .

Să observăm că am efectuat trei înmulțiri ! Dacă am fi calculat respectînd formula :  $(-0,3)^8 = \underbrace{(-0,3) \cdot (-0,3) \cdot \dots \cdot (-0,3)}_{8 \text{ factori}}$ , ar fi trebuit să efectuăm șapte înmulțiri.

8 factori

1) Calculați :

a)  $2^{10}$  ; b)  $-0,1^6$  ; c)

puține calcule.

2) Puteți calcula

Fie numărul  $(5^2)^3$   
 $(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$

În general, fie  $a$

deoarece :

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}}$$

Dacă  $a = 0$ , atun

### Regula a II-a

*O putere a unui număr se poate scrie ca produsul a două puteri cu aceeași bază, obținute efectuînd produsul*

1) Scrieți ca putere :

a)  $(5^2)^6$  ; b)  $[(-5)^2]^6$  ;

$11^2 \cdot (11 \cdot 11^2)^3$ .

2) Calculați :

a)  $[(-1,1)^3]^2$  ; b)  $[0,1^3]^2$

3) Care dintre numerele

Fie numărul  $(4 \cdot 5)^3$   
 $(4 \cdot 5)^3 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5)$

În general, fie  $a$  și  $b$  numere naturale. Atunci :

## EXERCII

1) Calculați :

a)  $2^{10}$  ; b)  $-0,1^6$  ; c)  $(-0,8)^4$  ; d)  $\left(-\frac{3}{5}\right)^6$  ; e)  $\left(-1-\frac{1}{2}\right)^6$  ; f)  $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)^8$ , efectuând cit mai puține calcule.

2) Puteți calcula  $a^6$  efectuând patru înmulțiri ? Cum ?

Fie numărul  $(5^2)^3$ . Putem scrie :

$$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 5^{2 \cdot 3}.$$

În general, fie  $a$  un număr real  $\neq 0$ , iar  $m$  și  $n$  numere naturale. Atunci :

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

deoarece :

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot \dots \cdot (a^m)}_{n \text{ factori}} = \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ factori}} \\ & \qquad \qquad \qquad n \text{ grupe de cîte } m \text{ factori} \end{aligned}$$

Dacă  $a = 0$ , atunci  $(0^m)^n = 0^{m \cdot n}$  pentru orice  $m, n \geq 1$ .

### Regula a II-a

*O putere a unui număr real se ridică la putere păstrînd baza, iar exponentul se obține efectuînd produsul exponentilor.*

## EXERCII

1) Scrieți ca putere :

a)  $(5^2)^6$  ; b)  $[(-5)^2]^6$  ; c)  $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$  ; d)  $\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^2\right\}^4$  ; e)  $(3^5 \cdot 3^3)^3$  ; f)  $(0,4^3 \cdot 0,4^2)^2$  ; g)  $11^6 \cdot 11^2 \cdot (11 \cdot 11^2)^3$ .

2) Calculați :

a)  $[(-1,1)^3]^2$  ; b)  $[(-5)^2]^2$  ; c)  $[(-0,7)^2]^2$  ; d)  $(-3)^6 : (-2)^3$  ; e)  $1,6^3 \cdot 0,5^2 \cdot (-2,5)^2$ .

3) Care dintre numerele  $(-1,3)^4$  și  $(+1,4)^3$  este mai mare ?

Fie numărul  $(4 \cdot 5)^3$ . Putem scrie :

$$(4 \cdot 5)^3 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 4^3 \cdot 5^3.$$

În general, fie  $a$  și  $b$  două numere reale (diferite de 0), iar  $n$  un număr natural. Atunci :

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$



deoarece :

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ factori}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ factori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ factori}}$$

### Regula a III-a

*Pentru a ridica la putere produsul a două numere, ridicăm fiecare dintre factori la acea putere, apoi înmulțim rezultatele obținute.*

Aplicând de două ori formula de mai sus, obținem :

$$(a \cdot b \cdot c)^n = [(a \cdot b) \cdot c]^n = (a \cdot b)^n \cdot c^n = (a^n \cdot b^n) \cdot c^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n ;$$

la fel pentru un produs de mai mulți factori.

*Observație.* În calcule formula  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$  este folosită de obicei astfel :

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n ;$$

în loc de a efectua două ridicări la putere și o înmulțire, efectuăm doar o înmulțire și o ridicare la putere ; acest mod de calcul este avantajos în special în lucrul cu calculatoarele electronice.

## EXERCII ȘI PROBLEME

1) Calculați :

a)  $(8 \cdot 3)^2$  ; b)  $2^3 \cdot 5^3$  ; c)  $(-2)^3 \cdot (-5)^3$  ; d)  $8^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5$  ; e)  $(-4)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$  ; f)  $(2^3 \cdot 3^2)^2$ .

2) Scrieți ca putere, cu exponentul cât mai mare :

a)  $9^3 \cdot 4^3$  ; b)  $9^5 \cdot 3^3$  ; c)  $2^3 \cdot 4^2 \cdot (-1)^4 \cdot 8$ .

3) Calculați :

a)  $4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$  ; b)  $4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$  ; c)  $4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$ . Ce observați ? Este adevărat că  $4^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  ? Dovediți !

4) a) Ionică a depus la CEC, în ziua de 30 decembrie 1978, suma de 1 000 lei. Pentru sumele depuse, CEC-ul acordă o dobândă de 5% anual ; deci, la 30 decembrie 1979, Ionică avea la CEC suma de  $1\,000 + \frac{5}{100} \cdot 1\,000 = 1\,050$  lei. La 30 decembrie 1980, Ionică avea la CEC  $1\,050 +$

$\frac{5}{100} \cdot 1\,050 = 1\,102.50$  lei. Puteți spune ce sumă avea la CEC Ionică, la 30 decembrie 1982,

deci la 4 ani de la data depunerii ? (Presupunem că nu a retras bani, nici nu a depus alți bani.)

b) Calculați  $1\,000 \cdot (1.05)^4$ . Ce observați ?

5) Un brad în vîrstă de 5 ani are înălțimea de 100 cm. În fiecare an bradul crește în înălțime cu 20%. Ce înălțime va avea bradul la vîrsta de 10 ani ? (Exprimați în centimetri.)

6) Calculați :

a)  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$  ; b)  $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$  ; c)  $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$  ; d)  $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5$ . Scrieți zecimal rezultatele obținute.

7) Efectuați :

a)  $(-2ab)^3$  ; b)  $a^4 \cdot (-a)^3$  ; c)  $(-a)^2 \cdot (-a)^4$  ; d)  $a^n \cdot a^{3m}$  ; e)  $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$  ; f)  $(-a^2)^{2n}$ .

8) Calculați

a)  $5,64^3 \cdot 0,25^3$  ;

9) Un cub are

mai mare. Comparați volumele. Este adevărat că are

10) Un cub din

cub din plumb ce are lu

11) Comparați

a)  $2^{333}$  și  $3^{222}$  ; b)

## 4. PUT

Orice număr

proprietatea că :

De exemplu, deoa

sul lui 0,4 este 2,5

Observație. Inve

Să ne reamini  
rul înmulțirii :

De aceea,

Așadar,  $(a \cdot$

Observație. Pent

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ . Efectuăm

$$\cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot \dots \cdot b)$$

$n$  factori

ridicăm fiecare dintre fac-

$$) \cdot c^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n ;$$

biciei astfel :

ar o înmulțire și o ridicare la pu-  
oarele electronice.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} ; f) (2^3 \cdot 3^2)^2$$

$$e \text{ adevărat că } 4^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$$

de 1 000 lei. Pentru sumele de  
rie 1979, Ionică avea la CEC

onică avea la CEC 1 050 +

onică, la 30 decembrie 1982.

ni, nici nu a depus alți bani.)

an bradul crește în înălțime cu  
metri.)

și zecimal rezultatele obținute.

$$x^3 \cdot x^3 ; f) (-a^2)^{2n}$$

8) Calculați cât mai economic :

$$a) 5,64^3 \cdot 0,25^3 ; b) \left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 ; c) \left(-\frac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-2)^3$$

9) Un cub are lungimea muchiei egală cu  $a$  cm, iar altul are lungimea muchiei de două ori mai mare. Comparați volumele celor două cuburi. Al treilea cub are lungimea muchiei egală cu  $3a$  cm. Este adevărat că are volumul de trei ori mai mare decât volumul celui de-al doilea cub ?

10) Un cub din plumb, cu lungimea muchiei de 1 dm, cântărește 11,3 kg. Cât cântărește un cub din plumb ce are lungimea muchiei de 2 dm ? Ați putea să-l ridicați cu brațele ?

11) Comparați între ele numerele :

$$a) 2^{333} \text{ și } 3^{222} ; b) 10^{100} \text{ și } 100^{10}$$

#### 4. PUTERI CU EXPONENT (ÎNTREG) NEGATIV

Orice număr real  $a \neq 0$  are un invers; acesta este numărul, notat  $\frac{1}{a}$ , ce are proprietatea că :

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

De exemplu, deoarece  $2 \cdot 0,5 = 1$ , inversul lui 2 este 0,5 ; scriem  $\frac{1}{2} = 0,5$ . Inversul lui 0,4 este 2,5, deoarece  $0,4 \cdot 2,5 = 1$  ; scriem  $\frac{1}{0,4} = 2,5$ . Inversul lui 1 este 1.

Observație. Inversul lui  $\frac{1}{a}$  este  $a$ , căci  $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$ .

Să ne reamintim faptul că împărțirea numerelor reale se definește cu ajutorul înmulțirii :

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \text{ (dacă } b \neq 0).$$

De aceea,

$$(a : b)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n$$

$$\text{Așadar, } (a : b)^n = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n : b^n.$$

Observație. Pentru calcule vom folosi formula:  $a^n : b^n = (a : b)^n$ , care se mai scrie și așa :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n. \text{ Efectuăm astfel un număr mai mic de operații.}$$

De exemplu,  $\left(\frac{5}{8}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{8} : \frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ ;  
 $\frac{5,64^4}{1,41^4} = \left(\frac{5,64}{1,41}\right)^4 = 4^4 = 256$ .

### EXERCİȚIU REZOLVAT

Să calculăm  $18^5 : 27^4$ .

Am putea efectua cele două ridicări la putere, apoi împărțirea. Vom proceda însă în alt mod, pentru a economisi calcule. Vom descompune mai întâi, cu regula I:  $18^5 = 18 \cdot 18^4$ . Astfel:

$$\frac{18^5}{27^4} = \frac{18 \cdot 18^4}{27^4} = 18 \cdot \left(\frac{18}{27}\right)^4 = 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 18 \cdot \frac{16}{81} = \frac{32}{9}$$

### EXERCİȚIU

Calculați:

a)  $(-2)^5 : (-2)^3$ ; b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^6 : \left(\frac{3}{4}\right)^4$ ; c)  $24^3 : (-8)^4$ ; d)  $\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^5 : \left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2$ ;  
 e)  $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^4 : \left(-\frac{1}{5}\right)^2\right]^2$ ; f)  $\left(-\frac{1}{25}\right)^4 : \left(-\frac{1}{15}\right)^3$ .

Pentru a nota inversul lui  $a$  se folosește și scrierea  $a^{-1}$  sub formă de putere cu exponent  $-1$ . Așadar,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

În general, vom folosi notația  $a^{-n}$  în loc de  $\frac{1}{a^n}$ :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De exemplu,  $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$ ;  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$ ;

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{8}{27}} = -\frac{27}{8}$$

*Observație.* Scrierea  $0^{-n}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$  nu este acceptată ca scriere a vreunui număr real.

1) (oral) Calculați:

a)  $2^{-2}$ ; b)  $3^{-1}$ ;

2) Calculați:

a)  $(-3)^3$ ; b)

h)  $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right)^{-1}$ ;

3) Scrieți ca putere:

a)  $\frac{1}{10^2}$ ; b)  $\frac{1}{12}$ ;

4) Scrieți ca putere:

a) 32, 16, 8,

b)  $\frac{1}{625}$ ,  $\frac{1}{12}$

c)  $\frac{1}{10\,000}$ ,

5) Arătați că:

a)  $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$

Folosirea expresiilor cu puteri, învățată în clasa a 6-a.

De exemplu:

iar

În general,

pentru orice număr real  $a \neq 0$  și orice număr natural  $n$ :

Calculați:

a)  $4^4 \cdot 4^{-3}$ ; b)  $9^3$

Să luăm de exemplu:

Pe de altă parte,

## EXERCITII

1) (oral) Calculați :

a)  $2^{-2}$ ; b)  $3^{-1}$ ; c)  $4^{-2}$ ; d)  $5^{-3}$ ; e)  $2 \cdot 3^0$ ; f)  $(1,53^3)^0$ .

2) Calculați :

a)  $(-3)^{-3}$ ; b)  $(-5)^{-1}$ ; c)  $(-1)^{-7}$ ; d)  $(-1)^{-3}$ ; e)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ; f)  $\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$ ; g)  $\left(-1 + \frac{1}{3}\right)^{-2}$ ;

h)  $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right)^{-1}$ ; i)  $\left(\frac{1}{2} - 2\right)^{-3}$ ; j)  $0,25^{-2}$ ; k)  $0,8^{-3}$ ; l)  $(-0,4)^{-3}$ .

3) Scrieți ca putere, cu exponentul negativ:

a)  $\frac{1}{10^2}$ ; b)  $\frac{1}{5^5}$ ; c)  $\frac{1}{10\,000}$ ; d)  $\frac{1}{27}$ ; e)  $\frac{1}{16}$ .

4) Scrieți ca putere, cu bazele indicate :

a) 32, 16, 8, 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ , cu baza 2;

b)  $\frac{1}{625}$ ,  $\frac{1}{125}$ ,  $\frac{1}{25}$ ,  $\frac{1}{5}$ , 1, 5, 25, 125, 625 cu baza 5;

c)  $\frac{1}{10\,000}$ ,  $\frac{1}{1\,000}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{10}$ , 1, 10, 100, 1\,000, 10\,000 cu baza 10.

5) Arătați că :

a)  $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$ ; b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ ; c)  $0,6^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$ ; d)  $1,5^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ .

Folosirea exponentilor negativi nu intră în contradicție cu regulile de lucru cu puteri, învățate mai înainte.

De exemplu,

$$(-2)^{-4} \cdot (-2)^5 = \frac{1}{(-2)^4} \cdot (-2)^5 = \frac{1}{16} \cdot (-32) = -2,$$

iar

$$(-2)^{-4+5} = (-2)^1 = -2; \text{ deci } (-2)^{-4} \cdot (-2)^5 = (-2)^{-4+5}.$$

În general,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

pentru orice număr real  $a \neq 0$  și orice numere întregi  $m$  și  $n$ .

## EXERCITIU

Calculați :

a)  $4^4 \cdot 4^{-3}$ ; b)  $9^3 \cdot 3^{-7}$ ; c)  $(2x)^{-3} \cdot (2x)^4$ ; d)  $25^3 \cdot 5^{-4}$ .

Să luăm de exemplu numărul  $(2^{-3})^2$ ; obținem :  $(2^{-3})^2 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$ .

Pe de altă parte,  $2^{(-3) \cdot 2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ . Observăm că  $(2^{-3})^2 = 2^{(-3) \cdot 2}$ .

Alt exemplu. Dacă calculăm  $(0,5^{-2})^{-2}$ , obținem :

$$(0,5^{-2})^{-2} = \left(\frac{1}{0,5^2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{0,25}\right)^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625. \text{ Pe de altă parte,}$$

$$(0,5)^{(-2) \cdot (-2)} = (0,5)^4 = 0,0625. \text{ Observăm că avem : } (0,5^{-2})^{-2} = (0,5)^{(-2) \cdot (-2)}.$$

În general,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

pentru orice număr real  $a \neq 0$  și orice numere întregi  $m$  și  $n$ .

## EXERCITII

1) Calculați :

a)  $[(-2)^{-3}]^{-3}$ ; b)  $[-(1)^{-1}]^{-1}$ ; c)  $(-1)^{-1} \cdot (-2)^{-2} \cdot [(-3)^{-1}]^{-1}$ ; d)  $(4a)^3 \cdot [(4a)^{-2}]^2$ .

2) Printre numerele :

a)  $(x^{-2})^3$ ; b)  $(x^{-3})^2$ ; c)  $(-x^{-2})^3$ ; d)  $(-x^{-2})^{-3}$ ; e)  $(-x^3)^{-2}$ ; f)  $(-x^2)^{-3}$ ; g)  $(-x^{-3})^2$ ; h)  $(-x^{-2})^3$ , câte sînt distincte ? (Presupunem  $x \neq 0$ .)

3) Scrieți sub formă de putere :

a)  $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^{-1}$ ; b)  $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$ ; c)  $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-2}$ ; d)  $(5^{-2} \cdot 5^{-1} \cdot 5^0 \cdot 5^1)^2$ ;

e)  $\{[(-3)^{-4}]^{-3}\}^{-2}$ .

Fie, de exemplu, produsul  $(-3)^{-2} \cdot 5^{-2}$ . Să-l calculăm:

$$(-3)^{-2} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{225}. \text{ Pe de altă parte, } [(-3) \cdot 5]^{-2} =$$

$$= (-15)^{-2} = \frac{1}{(-15)^2} = \frac{1}{225}. \text{ Observăm că } (-3)^{-2} \cdot 5^{-2} = [(-3) \cdot 5]^{-2}.$$

În general,

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

pentru orice numere reale  $a, b$  (diferite de 0) și orice număr întreg  $n$ .

De asemenea, în aceleași condiții, avem:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

## EXERCITIU REZOLVAT

Să calculăm numărul  $25^4 \cdot 5^{-6}$ .

Ar trebui să calculăm mai întii puterea  $25^4 = 390\,625$ , apoi puterea

$$5^{-6} = \frac{1}{15\,625} \text{ și în final să efectuăm înmulțirea :}$$

$$25^4 \cdot 5^{-6} = 390\,625 \cdot \frac{1}{15\,625} = 390\,625 : 15\,625 = 25.$$

Dar, observăm că  $25 = 5^2$ ; putem scrie astfel :

$$25^4 \cdot 5^{-6} = (5^2)^4 \cdot 5^{-6} = 5^8 \cdot 5^{-6} = 5^2 = 25.$$



Numărul 6 poate fi scris standard astfel :  $0,6 \cdot 10^1$ . Numărul 0,15 este scris standard astfel :  $0,15 \cdot 10^0$ . Numărul 0,015 este scris standard astfel :  $0,15 \cdot 10^{-1}$ . În general, un număr real pozitiv  $a$  este scris standard în forma

$$m \cdot 10^e$$

unde  $0,1 \leq m < 1$ , iar  $e$  este un număr întreg. Numărul  $m$  este numit **mantisa** lui  $a$ . Astfel, mantisa lui 20 este 0,2, mantisa lui 0,15 este 0,15; mantisa lui 0,015 este și ea 0,15.

Să scriem în formă standard :

- viteza luminii :  $0,3 \cdot 10^9$  m/s ;
- masa Pământului :  $0,5974 \cdot 10^{22}$  t ;
- masa atomului de hidrogen :  $0,167 \cdot 10^{-23}$  g.

## EXERCIȚII

- 1) Care este mantisa numărului real :  
a)  $0,47 \cdot 10^{-3}$ ; b)  $0,12 \cdot 10^2$ ; c) 169000; d) 365; e) 0,00012; f)  $7,35 \cdot 10^3$ .
- 2) Scrieți în formă standard numărul :  
a) 10 100; b) 650 000; c) 0,002; d) 0,03005; e) 0,000067.
- 3) Scrieți în formă standard produsul numerelor :  
a)  $0,1 \cdot 10^0$  și  $0,1 \cdot 10^{-1}$ ; b)  $0,6 \cdot 10^2$  și  $0,9 \cdot 10^1$ ; c)  $0,88 \cdot 10^3$  și  $0,75 \cdot 10^2$ .
- 4) Câte secunde are un an bisect ? Câți metri parcurge o rază de lumină, într-un an bisect ?  
(Exprimați în formă standard.)
- 5) Masa Soarelui este de aproximativ  $0,2 \cdot 10^{31}$  kg. De câte ori este mai mare masa Soarelui decât masa Pământului ?
- 6) Distanța medie de la Pământ la Soare este de  $0,156 \cdot 10^9$  km. Cât timp îi trebuie unei raze de lumină să parcurgă această distanță ?

## 6. INTERVALE

Să reprezentăm mulțimea numerelor reale printr-o axă (vezi figura 1). Fiecărui număr real îi corespunde un punct pe axă : de exemplu, numărului 1 îi corespunde punctul  $I$ , lui 0 îi corespunde  $O$ , numărului  $a$  îi corespunde punctul  $A$ .

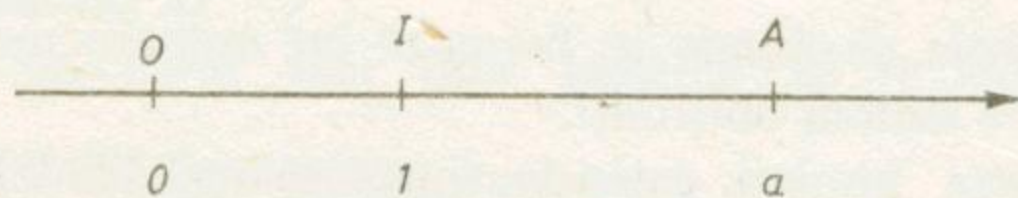


Fig. I.1

Fie  $a$  și  $b$  numerele reale (cu  $a \leq b$ ). În clasa a VII-a am învățat să notăm cu  $[a; b]$  mulțimea  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x \text{ și } x \leq b\}$ . Această mulțime se numește **interval închis de extremități  $a, b$** .

1. Numărul 0,15 este scris standard astfel:  $0,15 \cdot 10^{-1}$ .  
forma

$m$  este numit **mantisa** lui 0,15; mantisa lui 0,015 este

$10^3$ .

$5 \cdot 10^2$ .

de lumină, într-un an bisect?

este mai mare masa Soarelui de-

Cît timp îi trebuie unei raze de

axă (vezi figura 1). Fiecare exemplu, numărului 1 numărului  $a$  îi corespunde

am învățat să notăm cu  
ă mulțime se numește

Dacă extremităților  $a$  și  $b$  le corespund pe axă punctele  $A$ , respectiv  $B$ , atunci intervalului închis  $[a; b]$  îi corespunde mulțimea punctelor situate pe segmentul  $AB$  (vezi figura 2).

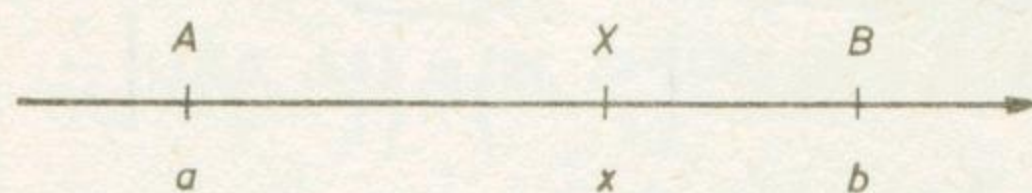


Fig. 1.2

Intervalele închise sînt mulțimi de numere; deci toate operațiile ce se pot efectua cu mulțimi (reuniunea, intersecția etc.) se pot efectua și cu intervale.

### EXERCİTIU REZOLVAT

Să scriem într-o formă mai simplă mulțimile :

$$[-7; 3] \cup [0; 8] \text{ și } [-7; 3] \cap [0; 8].$$

Reamintim că dacă  $A$  și  $B$  sînt mulțimi, atunci

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \text{ iar } A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Să reprezentăm intervalele  $[-7; 3]$  și  $[0; 8]$  prin segmente pe axa numerelor (vezi figura 3). Reuniunea lor este formată din elementele ce aparțin cel puțin unuia dintre intervale; deci :

$$[-7; 3] \cup [0; 8] = [-7; 8].$$

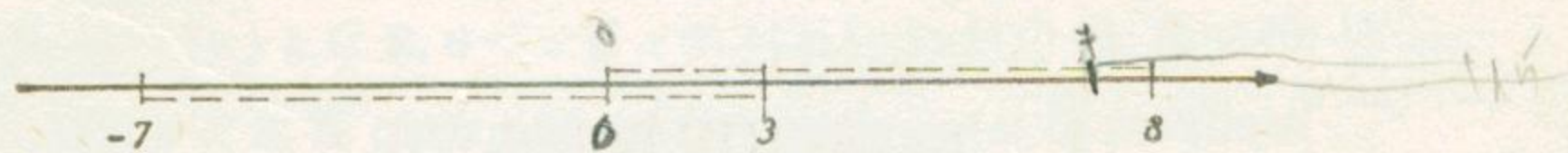


Fig. 1.3.

Intersecția lor este formată din elementele ce aparțin ambelor intervale.

Deci : 
$$[-7; 3] \cap [0; 8] = [0; 3].$$

### EXERCİȚII

1) Desenați o axă a numerelor (luați unitatea de măsură de 2 cm). Reprezentați pe ea, ca în figura 2, intervalele :

$$[-3; -2]; \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]; \left[0; \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{3}{4}; 2\right] \text{ și } [2,4; 2,5].$$



2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor :

- a)  $3 \in [0; 3]$ ; b)  $0 \in [0; 3]$ ; c)  $5 \in [4; 12]$ ; d)  $4 \in [5; 12]$ ; e)  $12 \in [4; 5]$ .

3) Arătați că dacă  $a \leq b$ , atunci  $\frac{a+b}{2} \in [a; b]$ .

[4\*] Este adevărată propoziția : „dacă  $[a; b]$  este un interval închis, atunci  $a \in [a; b]$ ?”

5) Scrieți într-o formă mai simplă mulțimile :

- a)  $[0; 7] \cup [7; 15]$ ; b)  $[1; 3] \cup [3; 9]$ ; c)  $[1; 3] \cup [2; 7]$ ; d)  $[a; a+1] \cup [a+1; a+2]$ ;

- e)  $[a-1; a] \cup [a; a+1]$ ; f)  $[-1; 2] \cup [-2; 1]$ ; g)  $[1, 2; 2, 2] \cup \left[\frac{7}{6}; \frac{13}{7}\right]$ .

[6] Efectuați :

- a)  $[2; 3] \cap [3; 9]$ ; b)  $[0; 7] \cap [4; 11]$ ; c)  $[-1; 2] \cap [-2; 1]$ ; d)  $[1; 2] \cap [-1; 10]$ ;

e)  $[a-1; a] \cap [a; a+1]$ ; f\*)  $[-a; a] \cap [-1; 1]$ , pentru  $a > 0$ .

7) Precizați elementele mulțimilor :

- a)  $\mathbb{Z} \cap [-3; 2]$ ; b)  $\mathbb{N} \cap [-3; 2]$ ; c)  $\mathbb{Z} \cap [1; 6]$ .

8) Care mulțime  $X$  satisface condițiile  $X \subset [-1; 4]$  și  $X \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$ ? Soluția este unică? Dar dacă cerem ca  $X$  să fie interval?

[9] Care interval  $[a; b]$  îndeplinește amândouă condițiile :

$$[a; b] \cup [3; 7] = [3; 9] \text{ și } [a; b] \cap [3; 7] = [5; 7]?$$

Fie  $a$  și  $b$  numere reale cu  $a < b$ . Se obișnuiește să se noteze cu  $(a; b)$  mulțimea

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \text{ și } x < b\},$$

numită **interval deschis de extremități**  $a, b$ . Deoarece nu este adevărat că  $a < a$ , rezultă că  $a \notin (a; b)$ ; la fel,  $b \notin (a; b)$ , adică intervalele deschise nu-și conțin extremitățile.

Dacă  $a < b$ , atunci intervalului deschis  $(a; b)$  îi corespunde pe axă mulțimea punctelor interioare segmentului  $AB$  (vezi figura 4).

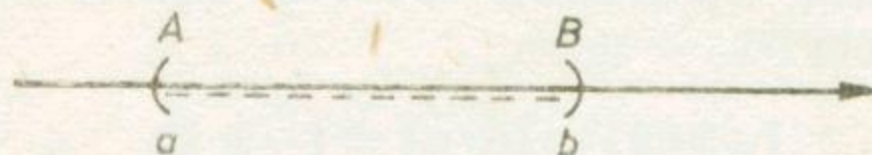


Fig. 1.4.

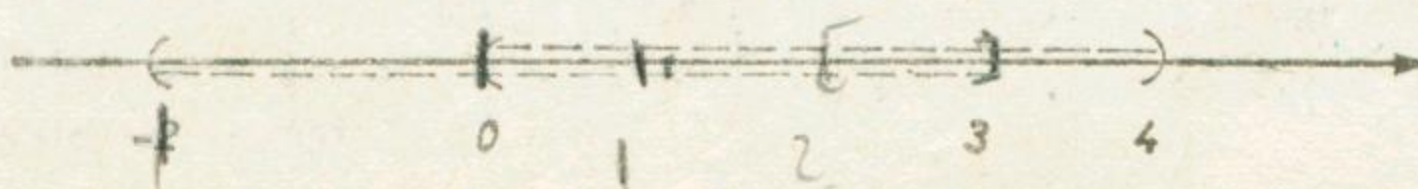
### EXERCITIUL REZOLVAT

Să scriem într-o formă mai simplă mulțimile :

$$(-2; 3) \cup (0; 4) \text{ și } (-2; 3) \cap (0; 4).$$

Să reprezentăm intervalele  $(-2; 3)$  și  $(0; 4)$  prin părți ale unei axe (vezi figura 5). Numărul 3 aparține intervalului deschis  $(0; 4)$ ; la fel, 0 aparține lui  $(-2; 3)$ . Observăm că reuniunea celor două intervale este intervalul deschis  $(-2; 4)$ , iar intersecția celor două intervale este intervalul deschis  $(0; 3)$ .

Fig. 1.5.



1) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor :

- a)  $0 \in (0; 3)$ ; b)  $0 \in [0; 3]$

d)  $\frac{81}{128} \in \left(\frac{31}{49}; \frac{50}{79}\right)$ ;

2) Efectuați :

- a)  $(0; 7) \cup (6, 5)$

e)  $\left(-1; \frac{4}{5}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$

i)  $\left(\frac{46}{73}; \frac{41}{65}\right) \cap \left(\frac{29}{46}; \frac{1}{2}\right)$

3) Precizați elementele :

- a)  $\mathbb{N} \cap (0; 5)$ ; b)  $\mathbb{Z} \cap [1; 6]$

[4] Arătați că :

Să observăm că intervalele  $(a; b)$  și  $(c; d)$  sunt închise la dreapta.

Ce obținem dacă intersectăm aceste două intervale? De exemplu intervalele  $(-1; \frac{4}{5})$  și  $(1; \frac{3}{2})$  din figura 6. Observăm că intersecția acestor două intervale este mulțimea vidă.

sint mai mari decât intersecția lor.

aparține intersecției acestor două intervale.

Deci :

$$(0; 1] = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$$

În general, dacă  $a < b$  și  $c < d$ , atunci :

ea se numește **interval deschis** la dreapta și  $x < b$ .

1) (oral) Citiți : [0; 1]

2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor :

- a)  $0 \in [0; 2)$ ; b)  $0 \in (0; 2]$

## EXERCIIII

1) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor :

a)  $0 \in (0; 3)$ ; b)  $0,1 \in (-0,1; 0,2)$ ; c)  $\frac{1}{7} \in \left(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$ ; d)  $-\frac{1}{8} \in (-1; 0)$ ; e)  $\frac{1}{8} \in \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ ;  
 f)  $\frac{81}{128} \in \left(\frac{31}{49}; \frac{50}{79}\right)$ ; g)  $-\frac{59}{93} \in \left(-\frac{33}{52}; -\frac{26}{41}\right)$ .

2) Efectuați :

a)  $(0; 7) \cup (6,5; 7,5)$ ; b)  $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(-1; \frac{1}{3}\right)$ ; c)  $(0; 3,1) \cup (-1; 4)$ ; d)  $(2; 3) \cup (1; 5)$ ;  
 e)  $\left(-1; \frac{4}{5}\right) \cup \left(1; \frac{4}{5}\right)$ ; f)  $(0; 1) \cap (1; 2)$ ; g)  $\left(-\frac{7}{13}; \frac{6}{13}\right) \cap \left(-\frac{6}{13}; \frac{7}{13}\right)$ ; h)  $(0; 3) \cap (2; 3)$ ;  
 i)  $\left(\frac{46}{73}; \frac{41}{65}\right) \cap \left(\frac{29}{46}; \frac{12}{19}\right)$ ; j)  $\left(-\frac{5}{8}; -\frac{23}{37}\right) \cap \left(-\frac{28}{45}; -\frac{41}{66}\right)$ .

3) Precizați elementele mulțimilor, enumerându-le :

a)  $\mathbb{N} \cap (0; 5)$ ; b)  $\mathbb{Z} \cap (-3; 4)$ ; c)  $\mathbb{N} \cap (-4; 3)$ .

4) Arătați că dacă  $a, b$  sînt numere reale pozitive și  $a < b$ , atunci  $ab \in (a^2; b^2)$ .

Să observăm că, intersectînd două intervale închise, obținem un interval închis. Intersectînd două intervale deschise obținem un interval deschis.

Ce obținem dacă intersectăm un interval închis cu unul deschis? Să luăm de exemplu intervalul închis  $[-1; 1]$  și intervalul deschis  $(0; 2)$ , reprezentate în figura 6. Observăm că intersecția lor este formată din toate numerele reale care sînt mai mari decît 0 și mai mici decît 1, inclusiv numărul 1, însă numărul 0 nu

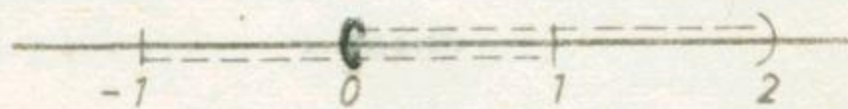


Fig. 1.6.

apartine intersecției. Această mulțime de numere se notează  $(0; 1]$  și se numește interval semideschis cu extremitățile 0 și 1, deschis la stînga și închis la dreapta. Deci

$$(0; 1] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x \text{ și } x \leq 1\} \text{ și } [-1; 1] \cap (0; 2) = (0; 1].$$

În general, dacă  $a < b$ , se obișnuiește să se noteze cu  $(a; b]$  mulțimea

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \text{ și } x \leq b\};$$

ea se numește **interval semideschis** cu extremitățile  $a$  și  $b$ , deschis la stînga și închis la dreapta. La fel, se notează cu  $[a; b)$  mulțimea  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \text{ și } x < b\}$ .

## EXERCIIII

1) (oral) Citiți :  $[0; 1)$ ;  $(0; 1]$ ;  $[-1; 3)$ ;  $(-3; 1]$ .

2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor :

a)  $0 \in [0; 2)$ ; b)  $2 \in [0; 2)$ ; c)  $1 \in [0; 2)$ ; d)  $\frac{1}{7} \in \left(\frac{1}{10}; \frac{2}{14}\right)$ ; e)  $\frac{1}{3} \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$ .

- 3) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor :
- a)  $(2; 3) \subset (2; 3]$ ; b)  $[2; 3) \subset [2; 3]$ ; c)  $(a; b) \subset [a; b]$ ; d)  $(a; b] \subset [a; b]$ ; e)  $(a; b) \subset (a; b]$ ;  
 f)  $(a; b] \subset [a; b]$ .

4) Efectuați reuniunile :

- a)  $(3; 6] \cup [2; 4)$ ; b)  $\left(-\frac{1}{7}; 1\right] \cup \left[0; \frac{7}{5}\right)$ ; c)  $[1; 2] \cup [-1; 13)$ ; d)  $(-1; 3) \cup \{1, 2, 3\}$ ;  
 e)  $(1,3; 4,1) \cup (1,4; 4,2]$ ; f)  $\left(\frac{5}{8}; 1\frac{3}{7}\right) \cup \left[\frac{7}{11}; \frac{11}{7}\right)$ ; g)  $\left(-\frac{23}{7}; -\frac{22}{7}\right) \cup \left(-\frac{25}{9}; -\frac{20}{9}\right)$ .

5) Efectuați :

- a)  $(-7; 3) \cap [0; 8]$ ; b)  $\left(-\frac{2}{9}; \frac{10}{9}\right) \cap \left[-\frac{3}{7}; \frac{5}{7}\right)$ ; c)  $(1,5; 3,2) \cap [2,3; 5,1]$ ; d)  $\left[\frac{8}{11}; \frac{20}{7}\right) \cap \left[\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$ ;  
 e)  $\left(\frac{7}{11}; \frac{23}{36}\right) \cap \left[\frac{30}{47}; \frac{16}{25}\right)$ ; f)  $\left[\frac{27}{43}; \frac{39}{62}\right) \cap \left(\frac{22}{35}; \frac{17}{27}\right)$ .

6) Care interval  $I$  îndeplinește condițiile :

$$I \cap (3; 7) = [5; 7] \text{ și } I \cup (3; 7) = (3; 9) ?$$

Intervalele de forma  $[a; b]$ ,  $(a; b)$ ,  $[a; b)$  și  $(a; b]$  au extremitățile  $a$  și  $b$ ; ele se numesc intervale **mărginite**. Vom mai folosi și intervale **nemărginite**. Anume, vom nota cu  $[a; +\infty)$  mulțimea  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x\}$  și cu  $(a; +\infty)$  mulțimea  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x\}$ . Acestea sînt intervale cu extremitatea  $a$ , nemărginite la dreapta.

Dacă extremității  $a$  îi corespunde pe o axă punctul  $A$  (vezi figura 7) atunci intervalului nemărginit  $(a; +\infty)$  îi corespunde semidreapta marcată, formată din punctele situate „la dreapta” lui  $A$ .

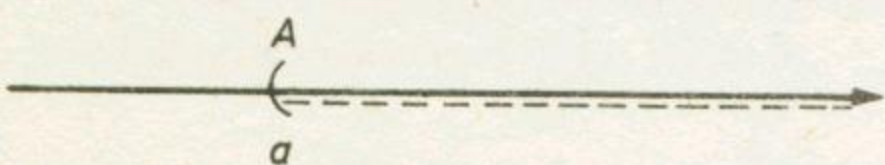


Fig. I.7.

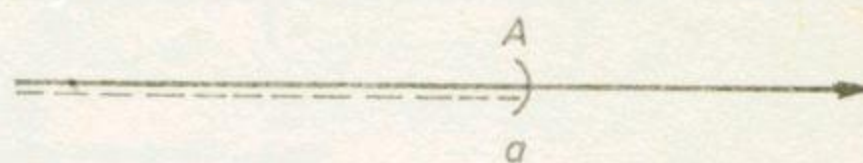


Fig. I.8.

Vom nota cu  $(-\infty; a]$  mulțimea  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \leq a\}$  și cu  $(-\infty; a)$  mulțimea  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x < a\}$ . Acestea sînt intervale cu extremitatea  $a$ , nemărginite la stînga.

Intervalului nemărginit  $(-\infty; a)$  îi corespunde pe axă o semidreaptă (cea marcată în figura 8), formată din punctele situate „la stînga” lui  $A$ .

*Observație.* Simbolurile  $+\infty$  și  $-\infty$  nu reprezintă numere reale. Se obișnuiește să se citească simbolul  $+\infty$  astfel: „plus infinit”.

Se obișnuiește să se noteze cu  $(-\infty; +\infty)$  mulțimea numerelor reale.

## EXERCITII

1) Desenați o axă, luînd unitatea de măsură de 1 cm. Pe această axă reprezentați :

a) mulțimea numerelor reale  $x$  astfel încît  $x \leq 5,1$ ;

b) mulțimea numerelor reale  $y$  astfel încît  $y \geq -1,2$ .

Există numere reale  $z$  astfel încît să avem  $z \leq 5,1$  și  $z \geq -1,2$ ? Prin ce sînt ele reprezentate pe axă?

2) Reprezentați pe aceeași axă intervalele  $(-\infty; 3]$  și  $(2; +\infty)$ . Puteți preciza intersecția lor?

3) Ce puteți spune despre numerele  $a$  și  $b$ , dacă intersecția intervalor  $(-\infty; a]$  și  $[b; +\infty)$  este mulțimea vidă?

4) Dacă  $a < b$ , ce puteți spune despre intersecția intervalor  $[a; +\infty)$  și  $[b; +\infty)$ ? Dar despre reuniunea lor?

5) Efectuați:

a)  $(-\infty; \frac{55}{89}] \cap [\frac{21}{34}; +\infty)$ ; b)  $(-\infty; -\frac{47}{76}) \cap (\frac{34}{55}; +\infty)$ ; c\*)  $(-\infty; a] \cap [b; +\infty)$ ;

d\*)  $(-\infty; a) \cap [b; +\infty)$ ; e)  $(-\infty; a) \cap (b; +\infty)$ .

6) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $(-\infty; -1] \subset (-\infty; 1)$ ; b)  $(-\infty; -1) \subset (-\infty; 2]$ ; c)  $(-\infty; -\frac{7}{5}) \subset (-\infty; -\frac{11}{8})$ ;

d)  $8 \in (-8; +\infty)$ ; e)  $-6 \in [3; +\infty)$ ; f)  $(-\infty; -\frac{44}{71}) \subset (-\infty; -\frac{31}{50})$ ; g)  $\frac{41}{66} \in (-\infty; \frac{23}{37}) \cap (\frac{18}{29}; +\infty)$ .

Să ne reamintim că am notat cu  $|x|$  pe acela dintre numerele  $x$  și  $-x$  care este pozitiv, numindu-l **valoarea absolută** a lui  $x$  (sau **modulul** lui  $x$ ). Mai precis,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 0; \\ -x & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

De exemplu,  $|0,75| = 0,75$ ,  $|-0,75| = 0,75$ ,  $|-1| = 1$ ,  $|1,25| = 1,25$ ,  $|-1,25| = 1,25$ . Să observăm că mulțimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \leq 1\}$$

este de fapt intervalul închis  $[-1; 1]$ .

### EXERCIȚII

1) (oral) Există numere reale  $x$  astfel încât  $|x| = -3$ ? De ce? Care numere reale  $y$  au proprietatea că  $|y| = 2,13$ ?

2) Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a)  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \leq 4\}$ ; b)  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x-1| < 3\}$ ; c)  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x-0,5| \leq 1,5\}$ ;

d)  $\{y \mid y \in \mathbf{R} \text{ și } |y-3| \leq 2\}$ .

3) Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a)  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x-1| < 1\}$ ; b)  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x-1| < 0,1\}$ ; c)  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x-1| < 0,01\}$ ;

d)  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x-1| < 0,001\}$ .

Reprezentați pe o axă aceste intervale. Ce observați?

4) Reprezentați pe o axă numerele  $a = 1,2$  și  $b = 7,6$  (luați unitatea de măsură de 1 cm). Calculați media aritmetică a numerelor  $a$  și  $b$ , fie aceasta  $c$ ; reprezentați-o pe axă.

Calculați apoi  $d = \frac{a+c}{2}$ ,  $e = \frac{a+d}{2}$ ,  $f = \frac{a+e}{2}$  și reprezentați numerele  $d$ ,  $e$ ,  $f$  pe

axă. Ce observați?

5) Reprezentați pe o axă mulțimea numerelor  $z$  cu  $|z| \geq 2$ .

$b] \subset [a; b)$ ; e)  $(a; b) \subset (a; b]$ ;

13); d)  $(-1; 3) \cup \{1, 2, 3\}$ ;

$$; -\frac{22}{7}) \cup (-\frac{25}{9}; -\frac{20}{9}]$$

$$2) \cap [2,3; 5,1]; d) [\frac{8}{11}; \frac{20}{7}] \cap$$

$$9) \cap (\frac{22}{35}; \frac{17}{27}]$$

extremitățile  $a$  și  $b$ ; ele se  
le **nemărginite**. Anume,  
i cu  $(a; +\infty)$  mulțimea  
atea  $a$ , nemărginite la

$A$  (vezi figura 7) atunci  
eapta marcată, formată

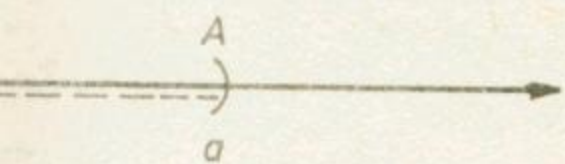


Fig. 1.8.

și cu  $(-\infty; a)$  mulțimea  
atea  $a$ , nemărginite la

axă o semidreaptă (cea  
a lui  $A$ .

Se obișnuiește să se citească

reprezentați:

Prin ce sînt ele reprezentate

6) Notăm  $A = [-5; 8]$ ,  $B = [2; 7]$ ,  $C = (-3; 0)$ ,  $D = (0; 5]$  și  $E = (-3; 8)$ .

Efectuați :

a)  $A \cup B$ ; b)  $C \cap D$ ; c)  $(A \cup B) \cup C$ ; d)  $(A \cap B) \cap D$ ; e)  $(A \cap B) \cup E$ ; f)  $Z \cap E \cap D$ ; g)  $D \setminus B$ .

## 7. APROXIMĂRI ȘI APROXIMAȚII

Numerele reale ne apar ca rezultat al unor măsurări sau al unor calcule. Reamintim că „a măsura” un obiect înseamnă a-l compara cu un alt obiect de același fel, ales ca unitate de măsură. Practic nu există posibilitatea unei măsurări exacte; precizia oricărei măsurări depinde de instrumentul de măsură folosit.

1) De exemplu, să privim figura 9. Să măsurăm cu rigla (gradată în mm) laturile; obținem că segmentul  $AB$  are lungimea cuprinsă între 2,1 cm și 2,2 cm, iar segmentul  $BC$  are și el lungimea cuprinsă între 2,1 cm și 2,2 cm.

Putem afirma oare că patrulaterul  $ABCD$  este un pătrat? Cu toate că și lungimile segmentelor  $CD$  și  $DA$  sînt cuprinse între 2,1 cm și 2,2 cm, nu putem afirma aceasta; s-ar putea întîmpla ca, măsurînd lungimile cu un instrument de măsură mai precis, să obținem că lungimea segmentului  $AB$  este  $< 2,13$  cm, iar lungimea segmentului  $BC$  este  $> 2,13$  cm.

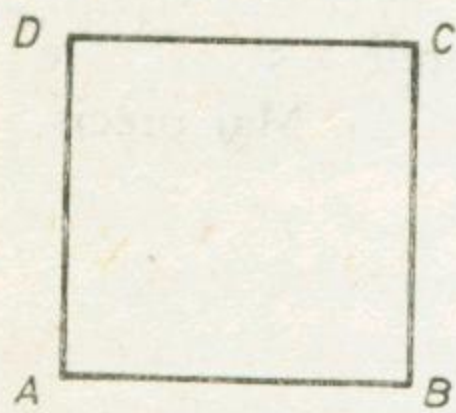


Fig. 1.9.

Să acceptăm totuși ideea că patrulaterul  $ABCD$  ar fi un pătrat. Lungimea (în cm) unei laturi a acestui pătrat este dată de un număr real  $l$ . Măsurînd cu rigla, am stabilit că acest număr este mai mare decît 2,1 și mai mic decît 2,2 :

$$2,1 < l < 2,2.$$

În practică îl aproximăm pe  $l$ , de exemplu cu numărul 2,15. Scriem  $l \approx 2,15$  și citim „ $l$  este aproximativ 2,15”. Spunem că „lungimea laturii pătratului este aproximativ de 2,15 cm”.

Nu este obligatoriu să-l aproximăm pe  $l$  prin 2,15; îl putem aproxima prin multe alte numere, ca de exemplu 2,13; 2,1; 2,2 sau chiar 2.

Aproximîndu-l pe  $l$  printr-un număr  $a$ , facem o eroare\*.

Să ne ocupăm acum de aria pătratului. Ce putem spune despre această arie (măsurată în  $\text{cm}^2$ )? Formula  $A = l^2$  ne arată că avem

$$2,1^2 < A < 2,2^2,$$

adică

$$4,41 < A < 4,84.$$

Putem aproxima de exemplu numărul  $A$  prin 4,5; scriem

$$A \approx 4,5,$$

acceptînd astfel că aria pătratului este aproximativ  $4,5 \text{ cm}^2$ . Putem scrie și că  $A \approx 4,8$ , acceptînd astfel că aria pătratului este aproximativ de  $4,8 \text{ cm}^2$ .

\* Cuvîntul „eroare” are în matematică înțelesul de „greșală involuntară, inevitabilă”. De obicei, prin „eroare a unei aproximări” înțelegem valoarea absolută a diferenței dintre aproximare și numărul pe care-l aproximează. În practică alegerea unei aproximații se face în așa fel încît precizia ei să ne satisfacă.

De regulă, mere reale) prin male.

2) Știm că, trului său (mă scrie zecimal cu

În tehnică ximări ale sale.

după necesități

Să observ mică decît 0,01

Aproximînd p 3,1415 este ma

3) Citim p

Aceasta însear

Numărul  $x$  est Pe etichet

Pe un re imprimat :

Dacă rez

deoarece 5% mată de 20 ki

Cele de r

Vom spu dacă

Aceasta însea

$$E = (-3; 8).$$

$$b) \cup E; f) Z \cap E \cap D; g) D \setminus B.$$

## ATAȚII

ări sau al unor calcule.  
ompara cu un alt obiect  
există posibilitatea unei  
instrumentul de măsură

u rigla (gradată în mm)  
între 2,1 cm și 2,2 cm,  
și 2,2 cm.

pătrat? Cu toate că și  
cm și 2,2 cm, nu putem  
ntimpla ca, măsurînd  
măsură mai precis, să  
 $AB$  este  $< 2,13$  cm, iar  
13 cm.

patrulaterul  $ABCD$  ar fi  
laturi a acestui pătrat  
Măsurînd cu rigla, am  
are decît 2,1 și mai mic

al 2,15. Scriem  $l \approx 2,15$   
a laturii pătratului este

l putem aproxima prin

une despre această arie

<sup>2</sup>. Putem scrie și că  $A$   
e  $4,8 \text{ cm}^2$ .

ntară, inevitabilă". De obi-  
erenței dintre aproximare și  
face în așa fel încît precizia

De regulă, în practică aproximăm măsurile obiectelor (care sînt date de numere reale) prin numere raționale scrise zecimal, avînd de obicei doar cîteva zecimale.

2) Știm că, pentru orice cerc, raportul dintre lungimile circumferinței și diametrului său (măsurate cu aceeași unitate de măsură) este numărul real  $\pi$  care se scrie zecimal cu o infinitate de cifre :

$$3,141592653589793238\dots$$

În tehnică, în fizică, în astronomie se lucrează nu cu acest număr, ci cu aproximații ale sale, ca de exemplu :

$$3,14 ; 3,141 ; 3,1415 \text{ sau } 3,141593,$$

după necesități.

Să observăm că înlocuind (aproximînd) pe  $\pi$  cu 3,14 facem o eroare mai mică decît 0,01, deoarece

$$|3,14 - \pi| = 0,00159\dots \leq 0,01.$$

Aproximînd pe  $\pi$  cu 3,1415, facem o eroare mai mică decît 0,0001 ; aproximația 3,1415 este **mai precisă** decît 3,14.

3) Citim pe eticheta unei sticle de oțet :

$$\text{Conținut } 1\,000 \pm 20 \text{ ml.}$$

Aceasta înseamnă că, dacă sticla conține  $x$  ml de oțet, atunci

$$1\,000 - 20 \leq x \leq 1\,000 + 20.$$

Numărul  $x$  este aproximat de 1 000, cu o eroare ce nu depășește 20.

Pe eticheta unui borcan de muștar citim :

$$\text{Conține } 445 \pm 13 \text{ g.}$$

Pe un rezistor electric, ce se folosește în construcția aparatelor de radio, este imprimat :

$$20 \text{ k}\Omega \pm 5\%.$$

Dacă rezistorul a fost fabricat de  $R$  kiloohmi, atunci

$$20 - 1 \leq R \leq 20 + 1,$$

deoarece 5% din 20 kiloohmi este 1 kiloohm. Valoarea rezistenței este aproximată de 20 kiloohmi, cu eroare de cel mult 1 kiloohm.

Cele de mai sus ne justifică următoarea definiție :

**Vom spune că numărul  $a$  aproximează numărul  $x$  cu o eroare de cel mult  $e$ , dacă**

$$a - e \leq x \leq a + e.$$

Aceasta înseamnă de fapt că  $x \in [a - e; a + e]$ , sau că  $|a - x| \leq e$ .

Astfel, 3,14 aproximează pe  $\pi$  cu eroare de cel mult 0,01; 3,1415 aproximează pe  $\pi$  cu eroare de cel mult 0,0001, iar 1,8 aproximează pe 1,807 cu eroare de cel mult 0,01, căci

$$|1,8 - 1,807| = 0,007 \leq 0,01.$$

Numărul  $e$  este pozitiv. De obicei,  $e$  este „mic” (comparativ cu numărul  $a$ ) și este ales de forma  $10^{-n}$  unde  $n \in \mathbb{N}$ .

Dacă  $e = 10^{-1} = 0,1$ , se spune că  $a$  aproximează pe  $x$  cu eroare de cel mult o zecime; dacă  $e = 10^{-2} = 0,01$ , se spune că  $a$  aproximează pe  $x$  cu eroare de cel mult o sutime etc.

### EXERCIIII REZOLVATE

1) Care dintre numerele 2,14 și 2,15 aproximează pe  $\frac{15}{7}$  cu eroare de cel mult 0,01?

Luând  $a = 2,14$ ,  $e = 0,01$  și  $x = \frac{15}{7} = 2,142\dots$ , constatăm că este adevărat că  $2,14 - 0,01 \leq \frac{15}{7} \leq 2,14 + 0,01$ . De asemenea, este adevărat că  $2,15 - 0,01 \leq \frac{15}{7} \leq 2,15 + 0,01$ . Așadar amîndouă numerele 2,14 și 2,15 aproximează pe  $\frac{15}{7}$  cu eroare de cel mult 0,01.

2) Pentru numărul  $\pi$ , care aproximare este mai bună: 3,14 sau 3,15? 3,14 sau 3,144?

Să comparăm între ele numerele  $|3,14 - \pi|$  și  $|3,15 - \pi|$ . Avem:  $|3,14 - \pi| = \pi - 3,14 = 0,00159\dots$  iar  $|3,15 - \pi| = 3,15 - \pi = 0,0084\dots$  și astfel 3,14 aproximează mai precis pe  $\pi$  decît 3,15.

De asemenea, deoarece  $|3,144 - \pi| = 3,144 - \pi = 0,0024\dots$  este mai mare decît  $|3,14 - \pi|$ , numărul 3,14 aproximează mai precis pe  $\pi$  și decît 3,144.

### EXERCIIII

1) Scrieți zecimal numărul  $\frac{2}{7}$ ; aproximați-l apoi prin alte trei numere, cu eroare de cel mult o miime.

2) Numărul  $\frac{5}{11}$  este aproximat prin 0,45 și 0,46. Care dintre aceste aproximații o considerați mai precisă? Dar dintre aproximațiile 0,454 și 0,455?

3) Putem spune că numărul 1,9 aproximează pe 1,8971 cu eroare de cel mult: a) 0,1; b) 0,01; c) 0,005; d) 0,001?

4) Aflați numărul  $x$ , știind că:

a)  $|a - x| = 0,2$  și  $a = 5,3$ ; b)  $|x - a| = 0,1$  și  $a = 10$ ; c)  $|a - x| = 0,01$  și  $a = \frac{3}{4}$ .

5) Știm că numerele 3,14 și 3,15 aproximează un număr  $x$  cu eroare de cel mult 0,01. Puteți scrie un alt număr care aproximează pe  $x$  cu eroare de cel mult 0,01?

6) Știm că  $x \in [1,723; 1,732]$ . Arătați că extremitățile intervalului aproximează pe  $x$  cu eroare de cel mult 0,01.

7\*) Dacă  $x \in [3,226; 3,245]$ , arătați că cel puțin una dintre extremitățile intervalului îl aproximează pe  $x$  cu eroare de cel mult 0,01.

8) Pe eticheta unei sticlute cu cerneală este scris :  $30 \pm 3$  ml. Ce puteți spune despre cantitatea de cerneală din sticluta ?

9) Aproximați numărul  $\frac{18}{13}$  printr-un număr rațional scris ca fracție cu numitorul 100. Ce puteți spune despre eroarea aproximării ?

## 8. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII

Să ne amintim că o **ecuație** este o propoziție cu variabilă (propozițiile cu variabilă se mai numesc **predicată**), în care apare, o singură dată, semnul „=”.

De exemplu, să considerăm propozițiile cu variabilă (predicatul) :

- 1) Elevul cu numele  $x$  este în clasa a VIII-a A,  $x \in \{\text{Ionescu, Popescu, Constantinescu}\}$  ;
- 2)  $2x - 5 = 2$ ,  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$  ;
- 3) Litera  $x$  este în alfabetul latin,  $x \in \{a, b, \pi, \rho, x\}$  ;
- 4)  $2x + y = 7$ ,  $x, y \in \mathbf{N}$  ;
- 5)  $\frac{2x + 3}{3x^2 + 1} = 2$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ;
- 6)  $4x - 1 = 1 = x + 2$ ,  $x \in \{1, 2\}$ .

Prima, a treia și a șasea nu sînt ecuații. A doua și a cincea sînt ecuații cu o necunoscută, iar a patra este o ecuație cu două necunoscute.

Mulțimea în care ia valori necunoscuta se precizează în dreptul ecuației ; în cazul în care nu este scrisă, vom considera că este mulțimea numerelor reale.

O ecuație cu o necunoscută are forma generală :

$$S(x) = D(x), x \in M ;$$

necunoscuta  $x$  apare *efectiv* în enunțul ecuației, în membrul stîng  $S$  sau în membrul drept  $D$ .

Necunoscuta poate fi înlocuită, în enunțul ecuației, cu orice element din mulțimea  $M$  ; ca rezultat enunțul poate exprima sau nu un adevăr. Acele elemente ale lui  $M$  care înlocuite în enunț, în locul necunoscutei, fac ca enunțul să exprime un adevăr, vor fi numite **soluții** ale ecuației. **Rezolvarea** unei ecuații înseamnă aflarea tuturor soluțiilor sale.

De exemplu, prin înlocuire directă, constatăm că ecuația

$$2x - 5 = 2, x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

nu are nici o soluție. Însă ecuația

$$2x - 5 = 2, x \in \mathbf{R}$$

are o soluție (și numai una), numărul 3,5.



## EXERCITII

- 1) Verificați dacă : a) 2 este sau nu soluție a ecuației  $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} - 1 = \frac{5x-6}{4}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ;  
 b) -4 este sau nu soluție a ecuației  $(x-5)^2 + (x+6) \cdot (x-6) = 2(x+3)^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

2) Care dintre numerele : -3, -2,  $-\frac{5}{3}$ , -1,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{3}$ , 3 este soluție a ecuației :

- a)  $2x+3 = x+1$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ; b)  $x^2+1 = 4$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ; c)  $1-x^2 = -8$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ; d)  $2x+3 = 4x-1$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ?

3) Ecuația  $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$  are :

- a) o soluție ; b) nici o soluție ; c) mai mult de două soluții ; d) două soluții. Care răspuns este corect ?

Două ecuații sînt numite **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții. În rezolvarea ecuațiilor se folosesc următoarele două proprietăți ale egalității (valabile pentru numere reale) :

**Proprietatea 1.** Adunînd la (sau scăzînd din) ambii membri ai unei ecuații același număr real, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

Conform acestei proprietăți, putem trece termeni dintr-un membru într-altul, schimbîndu-le semnul.

**Proprietatea 2.** Înmulțind (sau împărțind) ambii membri ai unei ecuații cu același număr real, diferit de 0, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

De exemplu, să rezolvăm ecuația :  $3x - 1 = 9$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

Adunînd la ambii membri numărul 1, obținem ecuația  $3x = 9 + 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , echivalentă cu prima. Împărțim acum ambii membri cu 3 : obținem ecuația  $x = \frac{10}{3}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , care este echivalentă cu prima. Această ultimă ecuație are

evident o singură soluție, numărul  $\frac{10}{3}$ . Deci și ecuația  $3x - 1 = 9$ ,  $x \in \mathbf{R}$  are o

singură soluție, numărul  $\frac{10}{3}$ .

O ecuație de forma

$$ax + b = 0, x \in \mathbf{R}$$

în care  $a \neq 0$  și  $b$  sînt numere reale, este numită **ecuație de gradul I cu o necunoscută**. Am învățat în clasa a VII-a că orice ecuație de gradul I cu o necunoscută are o singură soluție, numărul  $-\frac{b}{a}$ .

### EXERCITIU REZOLVAT

Să rezolvăm ecuația  $ax + 3 = 4x - 2a$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , în care  $a$  este un parametru real.

Trecem în membrul stîng toți termenii în care apare necunoscuta, iar în membrul drept ceilalți termeni ; ecuația este înlocuită cu ecuația echivalentă :

$$-4x + ax = -2a - 3, x \in \mathbf{R},$$

sau

$$(a - 4)x = -2a - 3, x \in \mathbf{R}.$$

Distingem două cazuri :

1)  $a \neq 4$ . În acest caz împărțim ambii membri ai ecuației cu numărul  $a - 4$  (care este  $\neq 0$ ); obținem astfel ecuația echivalentă

$$x = \frac{-2a - 3}{a - 4}, x \in \mathbf{R}$$

care are evident o singură soluție : numărul  $\frac{-2a - 3}{a - 4}$

2)  $a = 4$ . În acest caz ecuația se scrie :

$$0 \cdot x = -2 \cdot 4 - 3, x \in \mathbf{R};$$

această ecuație nu are nici o soluție.

### PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Într-un vas s-a turnat acid sulfuric, mai întâi 0,8 l cu concentrația de 12% apoi 1,2 l cu concentrația de 20%. Cît acid sulfuric cu concentrația de 15% mai trebuie turnat, pentru a obține o concentrație a amestecului de 16%? Dar de 18%?

*Rezolvare.* Să notăm cu  $x$  cantitatea (în litri) de acid sulfuric cu concentrația de 15% ce trebuie turnată în vas pentru a obține amestecul dorit. Totalizînd acidul sulfuric pur din cele trei componente ale amestecului, obținem pe de o parte  $0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100}$  litri, iar pe de altă parte  $(0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{16}{100}$  litri. Rezolvînd ecuația :

$$0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100} = (0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{16}{100}$$

obținem soluția  $x = 1,6$ . Deci, pentru a obține un amestec cu concentrația de 16%, va trebui să mai turnăm în vas 1,6 l acid sulfuric cu concentrația de 15%.

În același mod, să încercăm să răspundem la a doua întrebare. De data aceasta sîntem conduși la ecuația

$$0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100} = (0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{18}{100}$$

care are soluția  $-0,8$ . Această soluție fiind negativă, putem spune că nu este posibil să mai obținem (în condițiile date) amestec cu concentrația de 18%.

## EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile de gradul I :

a)  $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = 0$ ; b)  $0,25x - 1,8 = 0$ ; c)  $-\frac{3}{5}x + 2 = 0$ ; d)  $1,15x + 3,31 = 0$ .

Scrieți soluțiile sub formă zecimală.

2) Știm că 6 este soluție a ecuației  $\frac{5}{2}x + m = 5$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Aflați numărul  $m$ . Ecuația mai are și alte soluții ?

3) Este adevărat că ecuația  $2 + \frac{5}{2}x = \frac{5x + 4}{2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , are soluția 0 ? Rezolvați-o !

4) Rezolvați ecuația :  $\frac{x}{1,6} + 3,11 = 4,03$ .

5) Rezolvați ecuațiile :

a)  $8x - 3 = 5x - \frac{1}{2}(11x - 5)$ ; b)  $\frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{4}(4x - 1) + \frac{1}{8}(8x - 1) + \frac{1}{8} = 2x$ ;

c)  $(x - 3)(x - 5) + 2 = (x - 4)^2 + \frac{x}{6}$ ; d)  $(3 - 4x)^2 + (4 - 3x)^2 = (5x - 5)^2$ ; e)  $(1 - 12x)^2 + (2 - 5x)^2 = (3 - 13x)^2$ ; f)  $(x + 2)(x + 3) - 6 = (x + 5)(4 + x) - 12$ ;

g)  $\frac{4x + 1}{3 - 8x} = \frac{1 - 2x}{3 + 8x}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{8}, \frac{3}{8} \right\}$ ; h)  $\frac{1 - 2x}{3 - 4x} - \frac{5 - 3x}{4 - 6x} = 0$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\}$ .

6) Rezolvați ecuațiile, analizând toate cazurile ce pot apărea ( $a$  și  $m$  sînt parametri reali) :

a)  $a^2 - x = 1 + ax$ ; b)  $\frac{x}{a} - \frac{x}{a - 1} = \frac{a}{a + 1}$ ; c)  $\frac{x}{a} + 2 = ax + 1$ ;

d)  $(m + 1)x + a = x$ ; e)  $a(x - a) = m(x - m)$ .

7) Pentru ce valori ale parametrului  $a$ , ecuația

$$-2(a - 1)^2x + 2a(ax - 2) = (5a - 1)x$$

nu are o singură soluție ?

Să luăm de exemplu ecuația :

$$2x + y = 4, x, y \in \mathbf{R}.$$

Ea este o ecuație de gradul I cu două necunoscute. Înlocuind necunoscuta  $x$  cu  $\frac{1}{2}$ , iar necunoscuta  $y$  cu 3, obținem

propoziția adevărată :  $2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$ .

Putem spune astfel că perechea  $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

este soluție a ecuației. Putem constata, prin înlocuire directă, că și perechile  $(0; 4)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(3; -2)$  sînt soluții ale ecuației. Orice soluție a ecuației are forma  $(t; 4 - 2t)$ , unde  $t$  este un număr real.

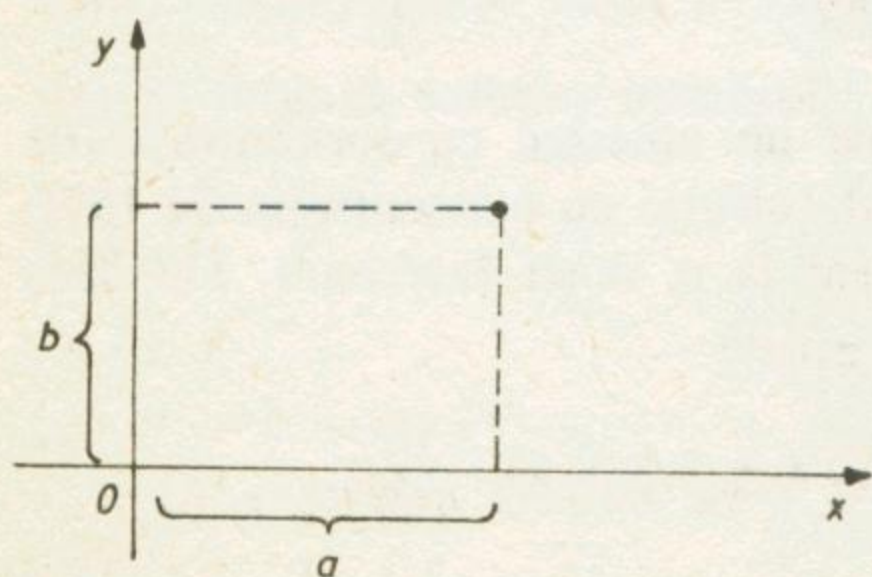


Fig. 1.10

Orice pereche de numere reale  $(a; b)$  poate fi identificată cu un punct din plan, ce are abscisa  $a$  și ordonata  $b$  (vezi figura 10). În clasa a VII-a am arătat că mulțimea soluțiilor ecuației poate fi identificată cu o dreaptă din planul  $xOy$  (vezi figura 11).

O ecuație de gradul I cu două necunoscute  $x$  și  $y$  are forma

$$ax + by + c = 0, x, y \in \mathbb{R}$$

unde  $a \neq 0$  sau  $b \neq 0$ . Soluțiile acestei ecuații sînt perechi de numere reale.

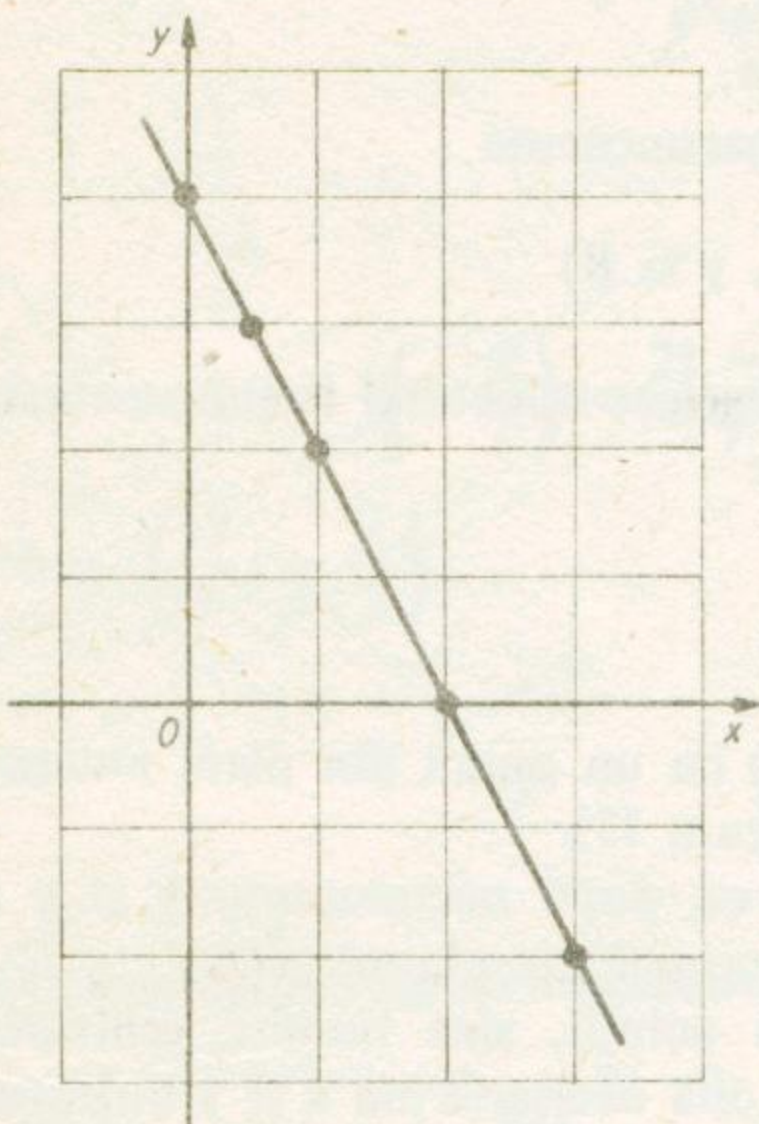


Fig. I.11

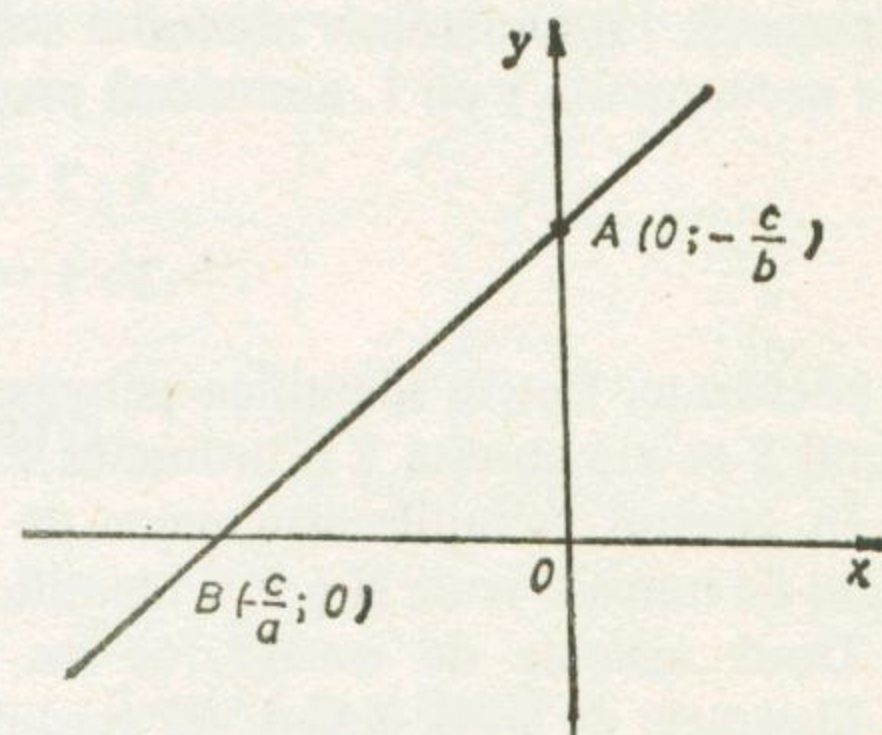


Fig. I.12

Aceste perechi se identifică cu punctele unei drepte din planul  $xOy$ . Dacă  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ , această dreaptă este determinată de punctele

$$A\left(0; -\frac{c}{b}\right) \text{ și } B\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \text{ (fig. 12).}$$

Ce se întîmplă dacă  $a = 0$  sau dacă  $b = 0$ ?

### EXERCITII

1) Reprezentați, într-un sistem de coordonate, dreapta soluțiilor ecuației :

a)  $3x + 2y - 6 = 0$ ; b)  $5x - y - 8 = 0$ ; c)  $-4x - 2y - 3 = 0$ ; d)  $-2x + 5y = 12$ .

2) Reprezentați în același sistem de coordonate, dreptele :

a)  $2x - y - 4 = 0$ ; b)  $x + y + 1 = 0$ ; c)  $4x - 4y = 12$ ; d)  $2x + y = 0$ . Ce observați ?

3\*) Reprezentați în același sistem de coordonate dreptele de ecuații  $4x + 2y - 5 = 0$  și  $6x + 3y - 9 = 0$ . Puteți dovedi că ele sînt paralele ?

Un sistem de ecuații este format din două sau mai multe ecuații, cu aceleași necunoscute. De exemplu,

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 1 + x = y - 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

este un sistem de ecuații cu două necunoscute. La fel,

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \text{și chiar} \quad \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

sînt sisteme de două ecuații cu două necunoscute.

Să luăm sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

Perechea (2; 1) este soluție a acestui sistem, deoarece înlocuind necunoscuta  $x$  cu 2, iar necunoscuta  $y$  cu 1, amîndouă propozițiile

$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$

și

$$3 \cdot 1 = 3$$

sînt adevărate. Putem identifica perechea (2; 1) cu un punct din plan, anume cu punctul  $S$  ce are abscisa 2 și ordonata 1 (vezi figura 13).

În general, soluțiile sistemelor de ecuații cu două necunoscute  $x$  și  $y$  sînt perechi de numere reale și pot fi identificate cu puncte din planul  $xOy$ .

Două sisteme de ecuații, ce au aceleași soluții, sînt numite echivalente. Sistemele de două ecuații de gradul I cu două necunoscute  $x$  și  $y$  au forma :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

Am învățat în clasa a VII-a mai multe metode de rezolvare a unor astfel de sisteme.

De exemplu, să rezolvăm sistemul  $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -4x + 7y = 2 \end{cases}$  prin metoda reducerii.

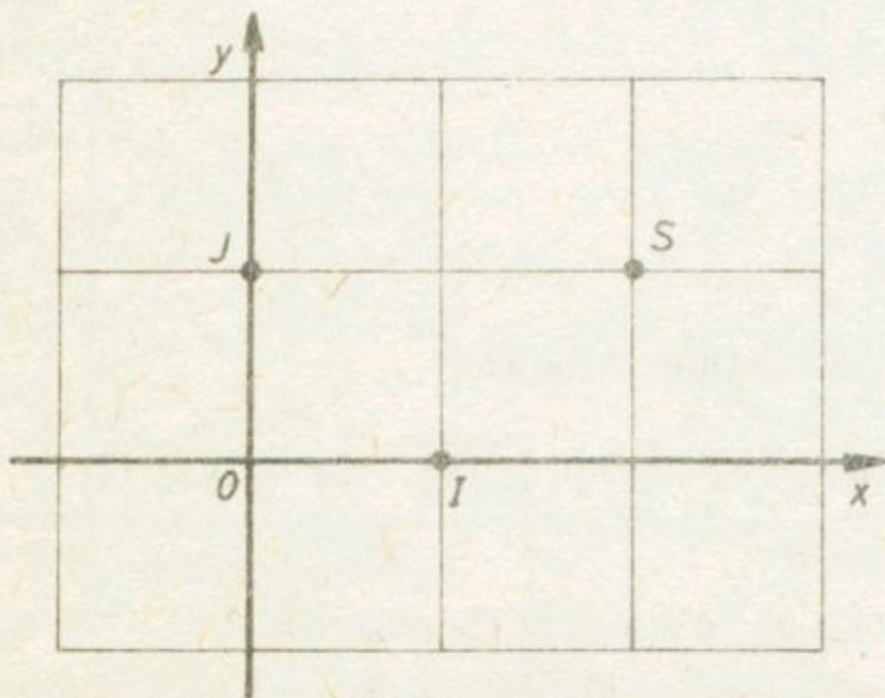


Fig. 1.13

Înmulțim ambii membri ai primei ecuații cu 4, iar ambii membri ai celei de-a doua cu 3 ; obținem sistemul :

$$\begin{cases} 12x - 8y = 20 \\ -12x + 21y = 6. \end{cases}$$

Adunăm acum membru cu membru cele două ecuații ; obținem :

$$13y = 26,$$

de unde  $y = 2$ .

Din prima ecuație obținem  $3x = 5 + 2y$ , adică  $3x = 5 + 2 \cdot 2$ , deci  $x = 3$ .  
Soluția sistemului este deci perechea  $(3; 2)$ .

Să rezolvăm sistemul  $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$  prin metoda substituției. Din prima ecuație obținem  $x = 3 + 4y$ ; înlocuim în a doua :

$$3(3 + 4y) + 2y = 5.$$

Aceasta este o ecuație doar în necunoscuta  $y$ , pe care o rezolvăm :

$$9 + 12y + 2y = 5,$$

$$14y = -4,$$

$$y = -\frac{2}{7}.$$

Așadar  $x = 3 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{21 - 8}{7} = \frac{13}{7}$ . Soluția sistemului este deci

perechea  $\left(\frac{13}{7}; -\frac{2}{7}\right)$ .

## EXERCIȚII

1) Rezolvați prin metoda reducerii sistemele :

a)  $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} 8x - 3y = 2 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$  ; c)  $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + 10y = 3 \end{cases}$

2) Rezolvați prin metoda substituției sistemele :

a)  $\begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$  ; c)  $\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$  ;

d)  $\begin{cases} 4x - 6y + 10 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$  ; e)  $\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ 5x + 4y = 13 \end{cases}$  ; f)  $\begin{cases} 3x + 5y + 1 = 0 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

3) Rezolvați sistemele (alegeți-vă singuri metoda de rezolvare) :

a)  $\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ 4x + 10y = 3 \end{cases}$  ; c)  $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x - 10y = 3 \end{cases}$  ;

d)  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$  ; e)  $\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}y = 18 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 21 \end{cases}$

Să considerăm sistemul de două ecuații de gradul I, cu două necunoscute :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Știm că mulțimea soluțiilor primei ecuații se identifică cu o dreaptă  $(d)$  din planul  $xOy$ ; soluțiile celei de-a doua ecuații se identifică cu punctele dreptei

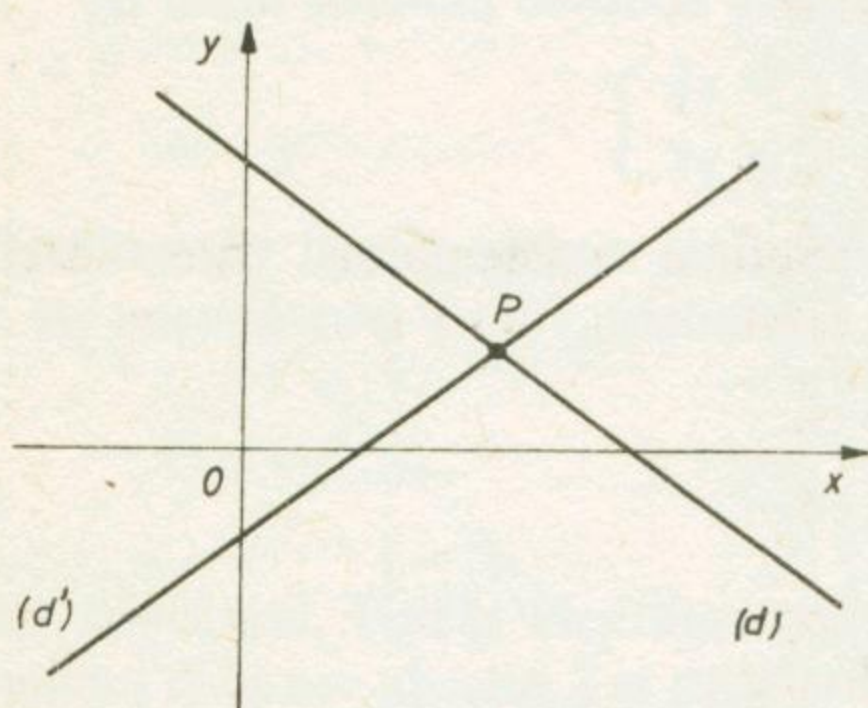


Fig. 1.14

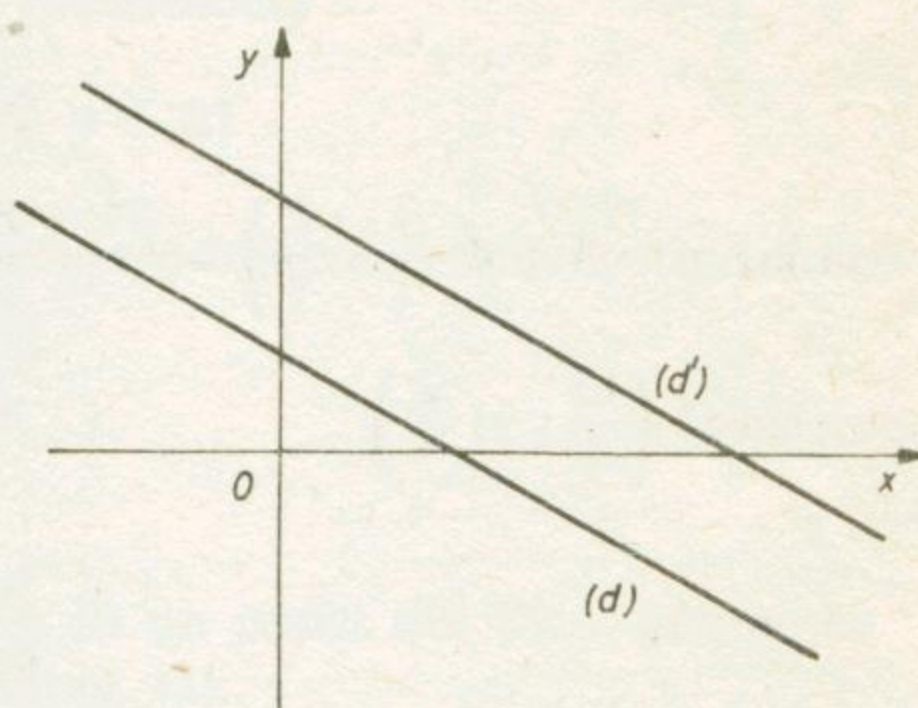


Fig. 1.15

$(d')$  (vezi figura 14). Soluția sistemului se identifică cu punctul  $P$  de intersecție a celor două drepte. În acest caz sistemul este **compatibil determinat**.

Dar se poate întâmpla ca cele două drepte  $(d)$  și  $(d')$  să fie paralele, ca în figura 15. În acest caz sistemul de ecuații nu are nici o soluție ; se spune că sistemul este, în acest caz, **incompatibil**.

De exemplu, să considerăm sistemul :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbf{R}).$$

Dacă reprezentăm într-un sistem de coordonate  $xOy$  dreptele soluțiilor celor două ecuații ce formează sistemul (vezi figura 16), constatăm că ele sînt paralele. Dacă sistemul ar avea ca soluție perechea  $(x; y)$ , atunci am avea  $x + y = 1$  și  $x + y = 2$ , ceea ce este absurd. Sistemul este deci incompatibil.

Se mai poate întâmpla ca dreapta  $(d')$  să fie aceeași cu dreapta  $(d)$ . În acest caz sistemul de ecuații are mai multe soluții ; fiecărui punct al dreptei  $(d)$  îi corespunde o soluție a sistemului. Se spune că sistemul este, în acest caz, **compatibil, însă nedeterminat**.

Să considerăm sistemul :

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbf{R}).$$

Amîndouă e  
zentată în fig  
sînt perechile  
compatibil n  
Observăm c

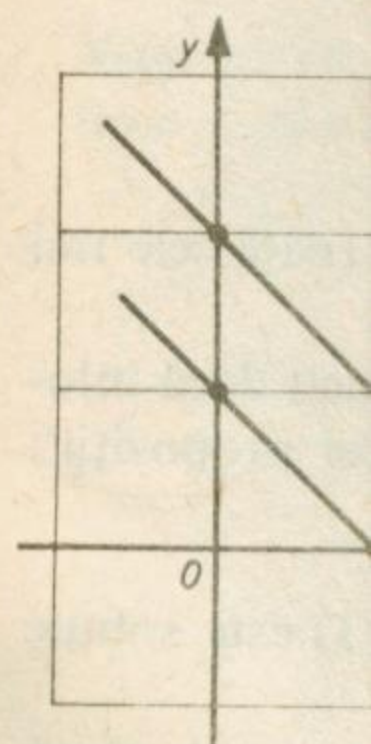


Fig.

1) Rezo

a) {

d) { 0,1x +  
1,1x -

2) Rezo

a) {

c) { 9x +  
6x -

cu două necunoscute :

ă cu o dreaptă  $(d)$  din  
ă cu punctele dreptei

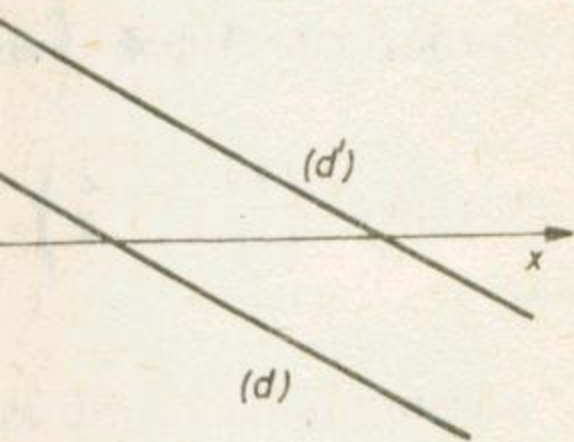


Fig. I.15

punctul  $P$  de intersecție a  
erminat.

$(d')$  să fie paralele, ca în  
o soluție ; se spune că

dreptele soluțiilor celor  
atăm că ele sînt paralele.  
ci am avea  $x + y = 1$  și  
atibil.

cu dreapta  $(d)$ . În acest  
nct al dreptei  $(d)$  îi corespunde  
în acest caz, **compatibil**,

Amîndouă ecuațiile ce formează sistemul au aceeași dreaptă a soluțiilor, reprezentată în figura 17. Deci sistemul are mai multe soluții ; mai precis, soluțiile sale sînt perechile de forma  $(x ; 2x - 1)$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ . Putem spune că sistemul este compatibil nedeterminat.

Observăm că a doua ecuație se obține din prima prin înmulțire cu 2.

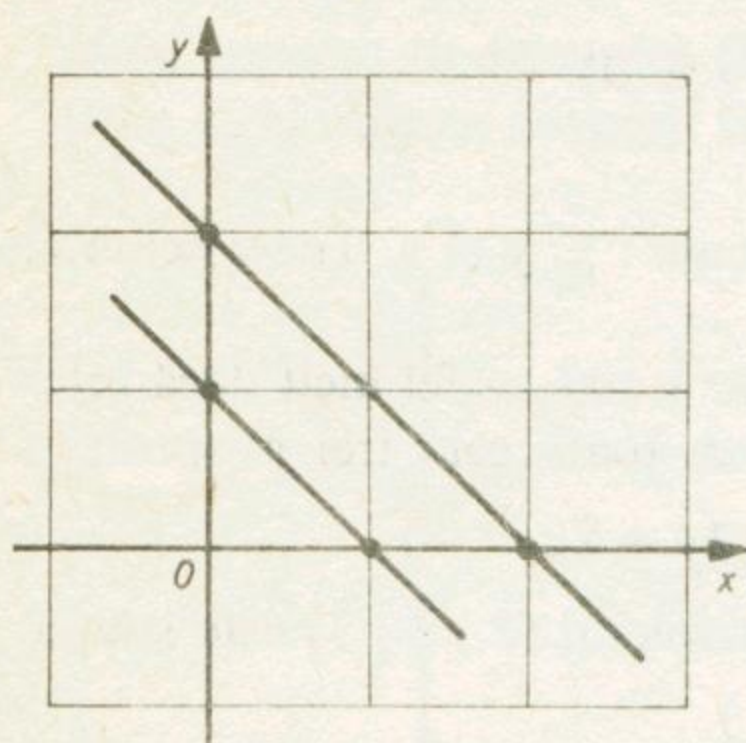


Fig. I.16

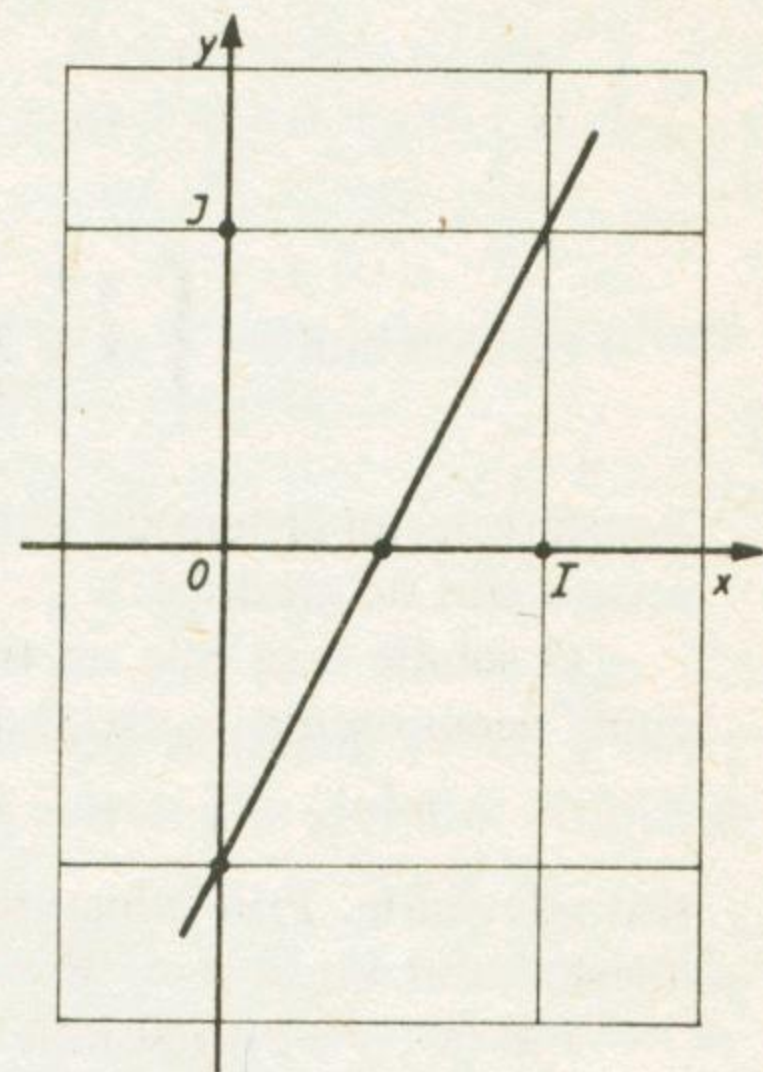


Fig. I.17

### EXERCIIII

1) Rezolvați sistemele de ecuații :

$$\text{a) } \begin{cases} 90x + 100y - 3 = 0 \\ 100x + 110y = 1,5 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 12 \\ \frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 4 \end{cases} ;$$

$$\text{d) } \begin{cases} 0,1x + 1,7y = 30 \\ 1,1x - 0,1y = 10,4 \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} 10x + 7y = 14,7 \\ 11x - 10y = 5,1 \end{cases}$$

2) Rezolvați sistemele de ecuații :

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{4x + 81}{10y - 17} = 6 \\ 4x - 20y + 55 = 0 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x + y} = \frac{2}{x - y} \\ \frac{2}{3x + 7y} = \frac{3}{2x - 9} \end{cases} ;$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{9x + 2y - 1}{3} = \frac{12x - 3y - 1}{10} \\ \frac{6x - 3y + 1}{4} - \frac{3x - 2y + 2}{6} = 1 \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{13}{x + 2y + 3} = -\frac{3}{4x - 5y + 6} \\ \frac{3}{6x - 5y + 4} = \frac{19}{3x + 2y + 1} \end{cases}$$



3) Rezolvați sistemele de ecuații :

$$a) \begin{cases} (x+1)(y+2) = (x-1)(y+1) + 18 \\ (2x+1)(y-4) = (x+2)(2y-3) - 31 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} \frac{x+1}{y+1} = \frac{x-2}{y-3} \\ \frac{x-2}{y-1} = \frac{x+5}{y+3} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x+1)y = (x+5)(y-4) \\ (x+2)(y+4) = (x+4)y \end{cases}$$

Fie sistemul : 
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 5y + 7z = 24 \\ -3y + 8z = -1 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Acesta este un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute :  $x$ ,  $y$  și  $z$ . Toate cele trei ecuații sînt de gradul I.

O soluție a sa este un triplet de numere reale  $(x; y; z)$ , astfel încît dacă înlocuim necunoscuta  $x$  cu  $x$ , pe  $y$  cu  $y$  iar pe  $z$  cu  $z$ , toate cele trei propoziții :

$$x + y + z = 6, \quad x + 5y + 7z = 24 \quad \text{și} \quad -3y + 8z = -1,$$

sînt adevărate. Prin înlocuire directă, constatăm că tripletul  $(2; 3; 1)$  este soluție a sistemului.

Fie  $(x; y; z)$  o soluție a sistemului. Din faptul că propoziția  $x + y + z = 6$  este adevărată, deducem că  $x = 6 - y - z$ . Din faptul că propoziția  $x + 5y + 7z = 24$  este adevărată, înlocuind pe  $x$ , obținem  $(6 - y - z) + 5y + 7z = 24$ . Mai știm că propoziția  $-3y + 8z = -1$  este adevărată ; așadar perechea  $(y; z)$  este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} (6 - y - z) + 5y + 7z = 24 \\ -3y + 8z = -1 \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, obținem  $y = 3$ ,  $z = 1$ . Acum  $x = 6 - 3 - 1 = 2$ . Ajungem la concluzia că tripletul  $(2; 3; 1)$  este singura soluție a sistemului de trei ecuații cu trei necunoscute.

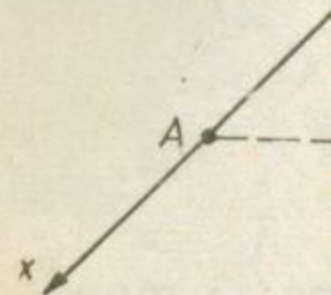
Să observăm că în rezolvarea sa am folosit metoda substituției : din prima ecuație a sistemului am „scos” necunoscuta  $x$  în funcție de celelalte apoi am înlocuit-o în celelalte ecuații ale sistemului (mai precis, doar într-a doua). Am obținut astfel un sistem de două ecuații, în necunoscutele  $y$  și  $z$ .

Să aplicăm metoda substituției și pentru rezolvarea sistemului :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 13, \\ 3x + 2y - 2z = 13, \\ 5x - 4y - 2z = 11. \end{cases}$$

Observăm că cel mai comod este să „scoatem” din prima ecuație pe  $z$  :  $z = 2x + 3y - 13$ . Să înlocuim în celelalte :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2(2x + 3y - 13) = 13, \\ 5x - 4y - 2(2x + 3y - 13) = 11. \end{cases}$$



$$a) \begin{cases} x \\ x \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y \\ x - y \\ x - 2y \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2x - 5y \\ \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x+1}{y+1} = \frac{x-2}{y-3} \\ \frac{x-2}{y-1} = \frac{x+5}{y+3} \end{cases}$$

Efectuând calculele, acest sistem de ecuații se transformă în :

$$\begin{cases} -x - 4y = -13 \\ x - 10y = -15 \end{cases};$$

rezolvându-l, obținem  $x = 5$  și  $y = 2$ . Apoi  $z = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 - 13 = 3$ . Deci soluția sistemului este tripletul  $(5; 2; 3)$

Alt exemplu : sistemul 
$$\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ x - y = 1 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

Vom scoate, de exemplu, din a doua ecuație  $y = x - 1$ , și vom înlocui în prima (în a treia nu este nevoie). Obținem sistemul în  $x$  și  $z$  :

$$\begin{cases} 2x + (x - 1) + z = 9 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

Rezolvându-l, obținem  $x = 3$ ,  $z = 1$ ; sistemul are ca soluție tripletul  $(3; 2; 1)$ .

Tripletele  $(x; y; z)$  pot fi identificate cu puncte ale spațiului, înzestrat cu un sistem de coordonate  $Oxyz$  (vezi figura 18). Mai precis, tripletul  $(x; y; z)$  se identifică cu punctul  $P$  ce are abscisa  $x$ , ordonata  $y$  și cota  $z$ . (În figura 19 abscisa lui  $P$  este lungimea segmentului  $OA$ , ordonata lui  $P$  este lungimea segmentului  $OB$ , iar cota lui  $P$  este lungimea segmentului  $OC$ .)

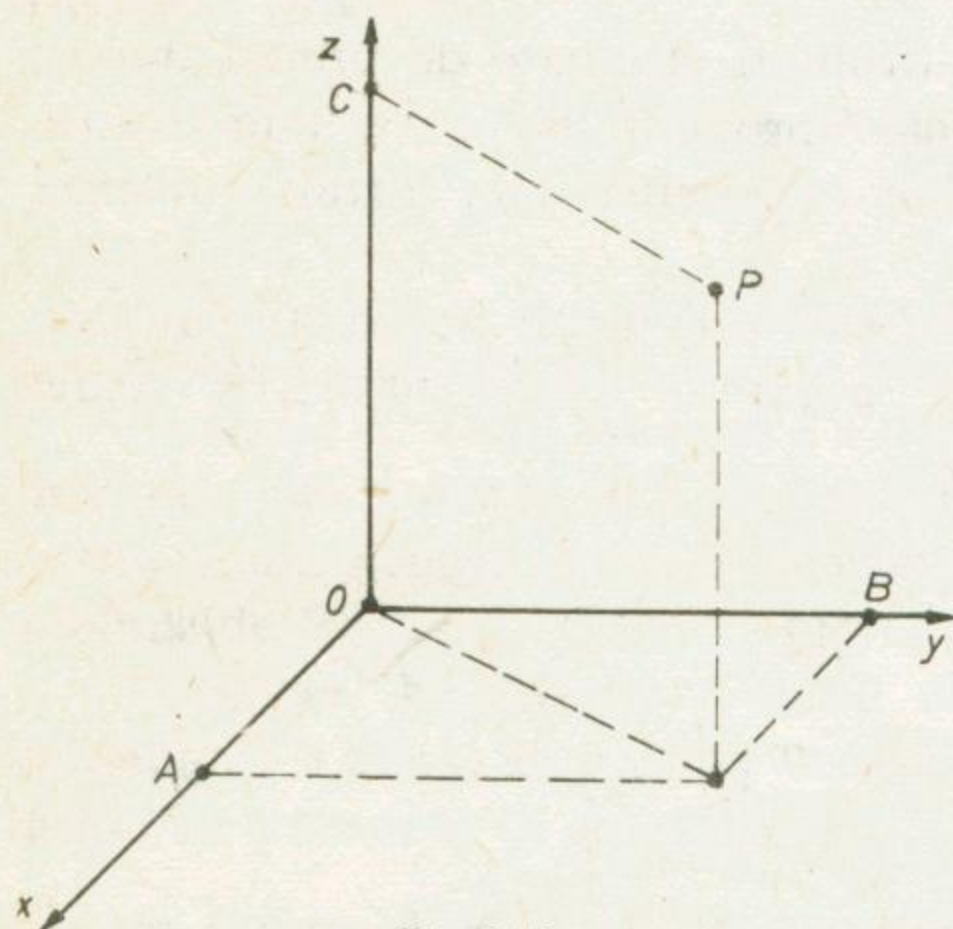


Fig. I.18

## EXERCIȚII

1) Rezolvați sistemele de ecuații :

$$a) \begin{cases} x + y = 16 \\ y + z = 28 \\ x + z = 22 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 40 \\ 2x - 3y = 0 \\ 5y - 6z = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x + 4z = 47 \\ 2y - 5z = -34 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ x - y + 2z = 18 \\ x - 2y - 2z = -30 \end{cases} \quad e) \begin{cases} -x + z = 6 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ -x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

2\*) Rezolvați sistemele de ecuații :

$$a) \begin{cases} 2x - 5y + 4z = 42 \\ \frac{1}{4}x = \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}z \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + 3y + z = 42 \\ \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{3} \end{cases}$$

## 9. PROBLEME

Multe probleme ridicate de practică pot fi rezolvate cu ajutorul unui model matematic. De obicei, un model matematic asociat unei probleme este format din ecuații și inecuații, ce reflectă problema concretă.

**Problema 1.** Pentru construcția a două blocuri de locuințe de același tip au fost pregătite 212 panouri prefabricate. Un tractor cu remorcă transportă, la fiecare drum, câte trei panouri la blocul mai apropiat. Pentru transportul spre blocul mai depărtat a fost alocat un alt tractor, ce poate transporta în remorcă, la fiecare drum, 4 panouri.

După o săptămână, al doilea tractor a făcut cu 14 drumuri mai puțin decât primul și au mai rămas să fie transportate 30 panouri.

Aflați câte panouri mai trebuie transportate spre blocul mai apropiat și câte drumuri mai are de făcut primul tractor.

*Rezolvare.* Să notăm cu  $x$  numărul de drumuri efectuate de primul tractor (cel care transportă panouri spre blocul mai apropiat), iar cu  $y$  numărul de drumuri efectuate de cel de-al doilea, în acea săptămână. Din textul problemei rezultă că  $y = x - 14$ .

În total primul tractor a transportat  $3x$  panouri, iar al doilea  $4y$  panouri. Rămânând de transportat încă 30 panouri, avem  $3x + 4y + 30 = 212$ . Astfel  $x$  și  $y$  formează soluția sistemului de ecuații :

$$\begin{cases} y = x - 14 \\ 3x + 4y + 30 = 212 \end{cases}$$

Acest sistem de ecuații, împreună cu condițiile  $x \in \mathbf{N}$  și  $y \in \mathbf{N}$ , formează modelul matematic al problemei. Rezolvând sistemul, obținem  $x = 34$  și  $y = 20$ .

Deci primul tractor a transportat  $3 \cdot 34 = 102$  panouri. Până la epuizarea celor 106 panouri ce trebuie transportate spre blocul mai apropiat, ar mai trebui transportate 4 panouri, deci 2(!) transporturi cu primul tractor. Pentru blocul mai depărtat mai sînt de transportat 26 de panouri, adică 7(!) transporturi cu al doilea tractor. Puteți găsi o organizare mai bună a transporturilor ?

**Problema 2.** În port, două conducte ce descărcau țiței dintr-un petrolier de 21 000 t trebuiau să-l descarce în 12 ore. După 5 ore, la conducta principală apare o defecțiune ; ea este imediat înlocuită cu conducta de rezervă, care are însă un debit de două ori mai mic. În consecință, descărcarea durează 15 ore. Puteți afla debitele celor trei conducte ?

*Rezolvare.* Fie  $x$  debitul (în tone pe oră) al primei conducte,  $y$  debitul celei de-a doua, iar  $z$  debitul conductei de rezervă. Dacă descărcarea ar fi decurs normal, atunci în 12 ore conductele 1 și 2 ar fi descărcat  $12(x + y)$  tone țiței. În cele 5 ore de funcționare normală ele descarcă  $5(x + y)$  tone ; apoi, în cele  $15 - 5 = 10$  ore rămase, conductele 2 și de rezervă descarcă  $10(y + z)$  tone.

În plus, știm că  $z = \frac{x}{2}$ .

Așadar  $x$ ,  $y$  și  $z$  formează soluția sistemului de ecuații

Acesta es  
 $y = 600$ ,

**Probl**  
trecînd p  
Aflați dis

*Rezo*  
cu  $z$  dista  
prin  $B$ , es  
sistemului

Rezolvînd  
**Probl**

nete : unu  
pentru su  
dobînda d

*Rezo*  
dobînda d  
blemei se t

Obține  
**Proble**  
tor de temp

Se bănuieș  
de forma :

Determ  
peratura de

$$\begin{cases} 12(x + y) = 21\,000 \\ 5(x + y) + 10(y + z) = 21\,000 \\ z = \frac{x}{2} \end{cases}$$

Acesta este *modelul matematic* al problemei. Rezolvându-l, obținem  $x = 1\,150$ ,  $y = 600$ ,  $z = 575$ .

**Problema 3.** Din  $A$  pînă în  $C$ , trecînd prin  $B$ , sînt 104 km. Din  $A$  pînă în  $B$ , trecînd prin  $C$ , sînt 128 km, iar din  $B$  pînă în  $C$ , trecînd prin  $A$ , sînt 96 km. Aflați distanțele între  $A$  și  $B$ ,  $B$  și  $C$ ,  $A$  și  $C$ .

*Rezolvare.* Să notăm cu  $x$  distanța între  $A$  și  $B$ , cu  $y$  distanța între  $B$  și  $C$  și cu  $z$  distanța între  $A$  și  $C$ , măsurate în km. Astfel, distanța între  $A$  și  $C$ , trecînd prin  $B$ , este de  $(x + y)$  km și așa mai departe. Numerele  $x$ ,  $y$  și  $z$  formează soluția sistemului de ecuații :

$$\begin{cases} x + y = 104, \\ y + z = 128, \\ x + z = 96. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obținem  $x = 36$ ,  $y = 68$ ,  $z = 60$ .

**Problema 4.** Tatăl lui Ionică a depus la CEC suma de 4 000 lei pe două cunete : unul cu dobîndă de 3,5%, celălalt cu dobîndă de 5%. După un an a primit pentru suma depusă dobînzii în valoare de 185 lei. Cît a depus pe carnetul cu dobînda de 5% ?

*Rezolvare.* Notăm cu  $x$  suma depusă de tatăl lui Ionică pe carnetul cu dobîndă de 3,5% și cu  $y$  suma depusă pe carnetul cu dobînda de 5%. Textul problemei se transpune în condițiile :

$$\begin{cases} x + y = 4\,000 \\ \frac{3,5}{100}x + \frac{5}{100}y = 185 \end{cases}$$

Obținem  $y = 3\,000$ . Deci a depus 3 000 lei pe carnetul cu dobînda de 5%.

**Problema 5.** Studiindu-se în laborator dependența rezistenței unui termistor de temperatură, au fost obținute următoarele date :

temperatura $T$ (în $^{\circ}\text{C}$ )	20	40	80
rezistența $R$ (în $\text{k}\Omega$ )	1	0,3	0,1

Se bănuiește că legătura între temperatura  $T$  și rezistența  $R$  este descrisă de o lege de forma :

$$R = \frac{T + a}{bT + c}.$$

Determinați valorile lui  $a$ ,  $b$  și  $c$ . Care va fi rezistența termistorului la temperatura de  $60^{\circ}\text{C}$  ? (Se presupune că formula găsită este corectă.)

Rezolvare. Datele obținute ne arată că  $a, b, c$  satisfac relațiile :

$$1 = \frac{20 + a}{b \cdot 20 + c} ; 0,3 = \frac{40 + a}{b \cdot 40 + c} ; 0,1 = \frac{80 + a}{b \cdot 80 + c}$$

„Coeficienții”  $a, b$  și  $c$  formează astfel soluția sistemului de ecuații :

$$\begin{cases} -a + 20b + c = 20, \\ -a + 12b + 0,3c = 40, \\ -a + 8b + 0,1c = 80. \end{cases}$$

Rezolvându-l, obținem  $a = -220, b = -20, c = 200$ . Formula este deci

$$\text{următoarea : } R = \frac{T - 220}{-20T + 200}$$

Folosind această formulă, obținem pentru temperatura de  $60^\circ\text{C}$  valoarea rezistenței egală cu  $0,16 \text{ k}\Omega$ .

## PROBLEME

- 1) Aflați laturile unui triunghi, știind că adunând câte două laturi se obține pe rând 45 m, 52 m, 48 m.
- 2) Două triunghiuri sînt asemenea ; primul are laturile de lungime 7 cm, 10 cm și 11 cm, iar al doilea are perimetrul de 70 cm. Aflați lungimile laturilor celui de-al doilea triunghi.
- 3) Un triunghi  $ABC$  are laturile de lungime  $a, b, c$ . Notînd cu  $M, N, P$  punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile triunghiului ( $M$  se află pe latura  $BC, N$  pe latura  $AC$ ) aflați lungimile segmentelor  $BM, MC, AN, NC, BP$  și  $PA$ . Caz particular :  $a = 14 \text{ cm}, b = 16 \text{ cm}, c = 20 \text{ cm}$ .
- 4) Un container conține 30 de televizoare și 28 aparate de radio și cîntărește 729 kg ; alt container de același tip conține doar 10 televizoare și 40 de aparate de radio, cîntărind 473 kg ; un al treilea container la fel cu primele două conține 16 televizoare și 62 aparate de radio, cîntărind 601 kg. Aflați masa unui container gol, precum și masa unui televizor. Toate televizoarele sînt de același tip. De asemenea, aparatele de radio.
- 5) Suma a trei numere naturale este 100. Dacă împărțim primul număr la al doilea obținem cîtul 5 și restul 1 ; dacă împărțim al doilea număr la al treilea, obținem din nou cîtul 5 și restul 1. Care sînt numerele ?

6) Un bazin cu capacitatea de 1 500 l poate fi umplut prin trei conducte prevăzute cu robinete. Lăsînd deschise doar robinetele primelor două conducte, bazinul se umple în 30 minute. Dacă deschidem robinetele conductelor 1 și 3, bazinul se umple în 25 minute. Debitul celei de-a treia conducte este de 3 ori mai mare decît debitul celei de-a doua. Aflați debitele celor trei conducte. În cît timp s-ar umple bazinul, dacă ar fi lăsat deschis numai un robinet ?

## 10. RĂDĂCINA PĂTRATĂ ȘI CUBICĂ

În figura 19 am desenat un pătrat cu lungimea laturii de 4 cm. Să-i măsurăm diagonala  $AC$  cu rigla (gradată în mm). Lungimea  $d$  a diagonalei este cuprinsă între 5,6 și 5,7 cm.

Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic  $ABC$ , obținem

$$d^2 = 4^2 + 4^2,$$

adică :  $d^2 = 32$ .

Așadar  $d$  este un număr real, cuprins între 5,6 și 5,7, al cărui pătrat este 32. Acest număr se notează  $\sqrt{32}$  și se numește *rădăcina pătrată* a lui 32. Putem afla scrierea sa zecimală aplicînd lui 32 algoritmul de aflare a rădăcinii pătrate,

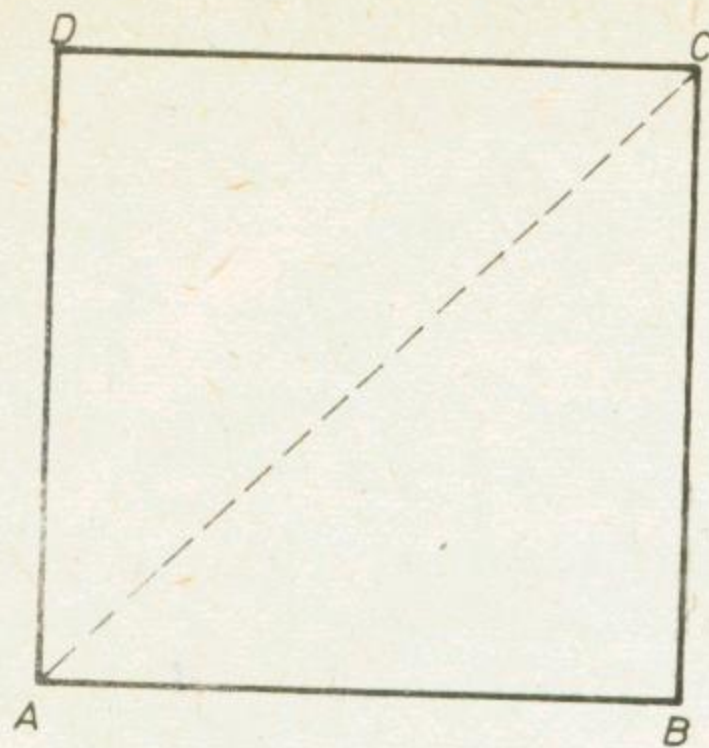


Fig. I.19

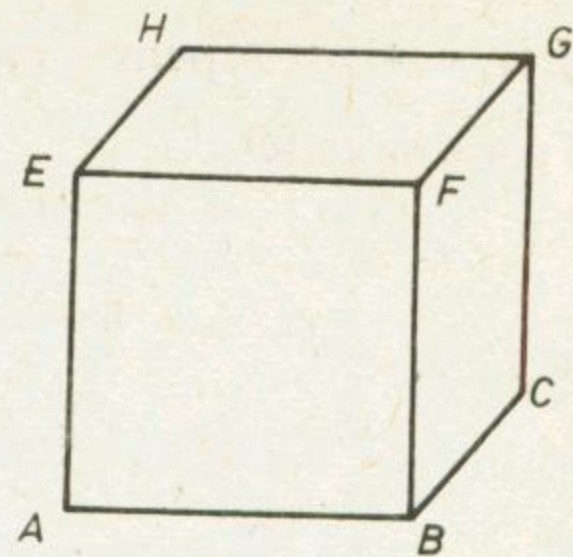


Fig. I.20

învățat în clasa a VI-a. Obținem :

$$\sqrt{32} = 5,656854\dots$$

În figura 20 am desenat un cub ce are volumul de  $10 \text{ cm}^3$ . Dacă i-am măsura muchia  $AB$  cu rigla, am constata că lungimea  $l$  a sa este cuprinsă între 2,1 și 2,2 (cm).

Pe de altă parte, știm că volumul cubului este  $l^3 \text{ cm}^3$ . Deci :

$$l^3 = 10.$$

Așadar  $l$  este un număr real, cuprins între 2,1 și 2,2 al cărui cub este 10. Acest număr se notează  $\sqrt[3]{10}$  și se numește *rădăcina cubică* a lui 10 (sau radicalul de indice 3 din 10).

Atât numărul  $\sqrt{32}$ , cât și numărul  $\sqrt[3]{10}$ , scrise zecimal, au o infinitate de cifre în dreapta virgulei, cifre care nu se repetă în mod periodic. De aceea, în practică sîntem nevoiți să lucrăm cu aproximații ale lor, de forma 5,65 respectiv 2,15.

**Definiție.** Fiind dat un număr real  $a \geq 0$ , vom numi *rădăcina pătrată* a lui  $a$  și vom nota  $\sqrt{a}$ , numărul real  $\geq 0$  ce are proprietatea că pătratul său este  $a$ . Fiind dat un număr real  $b$ , vom numi *rădăcina cubică* a lui  $b$  și vom nota cu  $\sqrt[3]{b}$ , numărul real ce are proprietatea că  $b$  este cubul său.

*Observație.* Nu putem vorbi despre rădăcina pătrată a lui  $-25$ , deoarece nu există nici un număr real al cărui pătrat să fie  $-25$ . De asemenea, cu toate că  $(-6)^2 = 36$ , rădăcina pătrată a lui 36 nu este  $-6$ , ci 6.

*Exemple.* Deoarece  $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$ , avem  $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$ ; deoarece  $0,12^2 = 0,0144$ ,

avem  $\sqrt{0,0144} = 0,12$ .

Deoarece  $2^3 = 8$ , avem  $\sqrt[3]{8} = 2$ ; deoarece  $(-2)^3 = -8$ , avem  $\sqrt[3]{-8} = -2$ .

De asemenea,  $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ ,  $\sqrt[3]{-27} = -3$ .

Am învățat în clasa a VII-a să lucrăm cu rădăcini pătrate. Vom reaminti principalele proprietăți :

1)  $(\sqrt{a})^2 = a$  pentru  $a \geq 0$  ;

2)  $\sqrt{a^2} = |a|$  pentru orice număr  $a$  ;

$$3) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ pentru } a \geq 0 \text{ și } b \geq 0 ;$$

$$4) \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \text{ pentru } a \geq 0 \text{ și } b > 0,$$

care se mai scrie și astfel :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

### EXERCIȚII

1) Calculați :

a)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$  ; b)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$  ; c)  $\sqrt{450} \cdot \sqrt{50}$  ; d)  $\sqrt{48} \cdot \sqrt{108}$ .

2) Este adevărat că  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$  pentru orice  $a, b$  ? Demonstrați sau dați un contraexemplu.

3) Scoateți factori de sub radical :

a)  $\sqrt{750}$  ; b)  $\sqrt{160}$  ; c)  $\sqrt{1620}$  ; d)  $\sqrt{216}$  ; e)  $\sqrt{2a^2}$  ; f)  $\sqrt{2a^4}$  ; g)  $\sqrt{2a^4b^3}$  ; h)  $\sqrt{50a^3}$ .

4) Introduceți sub radical :

a)  $3\sqrt{0,5}$  ; b)  $0,5\sqrt{3}$  ; c)  $11\sqrt{5}$  ; d)  $5\sqrt{11}$  ; e)  $0,5\sqrt{2}$  ; f)  $1,2\sqrt{10}$ .

5) Scoateți factori de sub radical, apoi efectuați adunările :

a)  $\sqrt{200} + \sqrt{288} + \sqrt{128}$  ; b)  $\sqrt{125} - \sqrt{720} + \sqrt{180}$  ; c)  $\sqrt{108} - \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{300}$  ;

d)  $\sqrt{176} - \sqrt{275} + \sqrt{396}$ .

6) Efectuați împărțirile :

a)  $\sqrt{45} : \sqrt{5}$  ; b)  $\sqrt{27} : \sqrt{75}$  ; c)  $\sqrt{\frac{a^2}{b}} : \sqrt{\frac{a}{b^2}}$  ; d)  $\sqrt{ab} : \sqrt{\frac{a}{b}}$ .

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr  $a \geq 0$  este anevoioasă. De aceea se obișnuiește să se utilizeze tabele. La sfârșitul manualului este prezentat tabelul ce conține rădăcinile pătrate ale numerelor naturale mai mici decât 100.

Cum calculăm  $\sqrt{0,2}$  folosind tabelul ? Să scriem  $0,2 = \frac{20}{100}$  ;

$$\text{deci } \sqrt{0,2} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{100}} = \frac{4,4721 \dots}{10} = 0,4472 \dots$$

$$\text{La fel, } \sqrt{0,84} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{100}} = \frac{9,1651 \dots}{10} = 0,9165 \dots$$

Extragerea rădăcinii cubice dintr-un număr este și mai anevoioasă decât extragerea rădăcinii pătrate. La sfârșitul manualului prezentăm tabelul ce conține rădăcinile cubice ale numerelor naturale mai mici decât 100.

Întâlnim uneori în calcule numere de forma  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ,  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ,  $\frac{2}{\sqrt{2}}$ .

$\frac{1}{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}$  • Cum operăm cu aceste numere ?

De exemplu :

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \text{ (ceea ce înseamnă } 7 \cdot \sqrt{3} \text{)} ;$$

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 1 = 2 - \sqrt{2} ;$$

$$(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{6} ;$$

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(4\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 20 + \sqrt{15} + 8\sqrt{15} + 6 = 26 + 9\sqrt{15} ;$$

$$\sqrt{3} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{6} ; \text{ spunem că am raționalizat}$$

numitorul ;

$$\sqrt{3} : (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{1} = \sqrt{6} + \sqrt{3}.$$

La fel ca mai înainte, am raționalizat numitorul, de data aceasta prin amplificarea cu  $\sqrt{2} + 1$ .

Să reamintim felul în care putem obține, mai simplu, scrierea zecimală a unor numere.

De exemplu, fie numărul  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ . Nu putem obține ușor scrierea zecimală a sa efectuând împărțirea  $2 : 2,23606\dots$ . De aceea amplificăm fracția cu  $\sqrt{5}$ , pentru a obține numitorul rațional ; obținem :  $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} = 0,4 \cdot 2,23606\dots = 0,89442\dots$

*Alt exemplu.* Fie numărul scris sub formă de fracție  $\frac{3}{\sqrt{3} - 1}$ . Vom amplifica fracția cu  $\sqrt{3} + 1$  ; în acest fel numitorul devine număr rațional :  $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$ . Deci :

$$\frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1) = 1,5 \cdot (1,732\dots + 1) = 4,098\dots$$



Alt exemplu. Vom amplifica pe  $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$  cu  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ , pentru a raționaliza numitorul :

$$\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 1,008\dots$$

### EXERCITIUL REZOLVAT

Arătați că  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} = 2$ .

Într-adevăr,

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \sqrt{3^2 - 5} = \sqrt{4} = 2.$$

### EXERCITII

1) Efectuați înmulțirile :

a)  $\sqrt{216} \cdot \sqrt{50}$ ; b)  $\sqrt{48} \cdot \sqrt{18}$ ; c)  $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{ab}$ ; d)  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ ;

e)  $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ; f)  $(5 - 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})$ ; g)  $\sqrt{6 - \sqrt{11}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{11}}$ .

2) Raționalizați numitorul :

a)  $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ ; b)  $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ; c)  $\frac{3\sqrt{8} - 4\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$ ; d)  $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ; e)  $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ ; f)  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ ;

g)  $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ ; h)  $\frac{4}{7 - \sqrt{2}}$ ; i)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ ; j)  $\frac{7}{\sqrt{20} - 4}$ ; k)  $\frac{8}{\sqrt{17} + 3}$ ; l)  $\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$ .

3) Efectuați împărțirile :

a)  $\sqrt{75} : \sqrt{12}$ ; b)  $2\sqrt{8} : 3\sqrt{3}$ ; c)  $\sqrt{54} : \sqrt{6}$ ; d)  $\sqrt{27a} : \sqrt{\frac{3}{a}}$  ( $a \neq 0$ ).

4) Aproximați (cu eroare de cel mult 0,01) numerele :

a)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ; b)  $\frac{12}{\sqrt{10}}$ ; c)  $\frac{4}{\sqrt{2} - 1}$ ; d)  $\frac{2}{1 - \sqrt{3}}$ ; e)  $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ .

Rădăcina cubică a numărului  $a$  este acel număr  $u$  ce are proprietatea că  $u^3 = a$ . Acest număr se notează  $\sqrt[3]{a}$ . Astfel :

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Numărul  $u$  ce are proprietatea că  $u^3 = a$  este unic. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că ar mai exista un număr  $v$ , diferit de  $u$ , astfel încât  $v^3 = a$ .

Atunci  $u^3 - v^3 = 0$ , ceea ce putem scrie și  $(u - v)(u^2 + uv + v^2) = 0$  (verificați !).

Împărțind cu  $u - v$  :

$$\left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = 0.$$

Avem o sumă de numere pozitive egală cu zero, ceea ce contrazice faptul că  $u = v = 0$ , ceea ce contrazice faptul că  $u^3 = v^3 = a \neq 0$ .  
Contradicția obținută arată că presupunerea noastră este falsă.

**Teoremă.** Dacă  $a, b$  sunt numere reale :

- 1)  $\sqrt[3]{a^3} = a$ ;
- 2)  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$ ;
- 3)  $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ .

*Demonstrație.* Pentru 1) :

Fie  $u = \sqrt[3]{a}$  și  $v = \sqrt[3]{a^3}$ . Atunci  $u^3 = v^3 = a$ .  
Prin urmare, aceste două egalități sunt echivalente.

Aceasta înseamnă că :

Proprietatea 3) se deduce din 2).

Încercați să o demonstrați !

Să observăm că :

1) Completați tabelul :

$x$	-27	$-\frac{125}{8}$
$\sqrt[3]{x}$		

2) Scoateți factori de  $\sqrt[3]{a}$  :

a)  $\sqrt[3]{81}$ ; b)  $\sqrt[3]{32}$ ; c)  $\sqrt[3]{54}$ .

j)  $\sqrt[3]{125a^3b^2}$ ; k)  $\sqrt[3]{27a^2b^3}$ .

3) Introduceți sub radical :

a)  $3\sqrt[3]{2}$ ; b)  $2\sqrt[3]{3}$ ; c)  $2\sqrt[3]{6}$ .

4) Efectuați :

a)  $5\sqrt[3]{24} + 6\sqrt[3]{81}$ ;

d)  $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{16}$ .

$\sqrt{3}$ , pentru a rațio-

$$\frac{-\sqrt{3}}{-(\sqrt{3})^2} =$$

$$-5 = \sqrt{4} = 2.$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) :$$

$$\sqrt{11} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{11}} .$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{2} + 1}; f) \frac{1}{2 + \sqrt{3}};$$

$$g) \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} .$$

( $a \neq 0$ ).

ce are proprietatea că

să presupunem prin absurd că

0 (verificați !).

Împărțind cu  $u - v$  (care este diferit de zero) obținem  $u^2 + uv + v^2 = 0$  sau  $(u + \frac{1}{2}v)^2 + \frac{3}{4}v^2 = 0$ .

Avem o sumă de numere pozitive egală cu 0. Deci  $u + \frac{1}{2}v = 0$  și  $v = 0$ . Așadar obținem  $u = v = 0$ , ceea ce contrazice presupunerea făcută :  $u \neq v$ .

Contradicția obținută ne arată că presupunerea pe care am făcut-o este falsă.

**Teoremă.** Dacă  $a, b$  sînt două numere reale, atunci :

- 1)  $\sqrt[3]{a^3} = a$  ;
- 2)  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$  ;
- 3)  $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b}$  ( $b \neq 0$ ).

*Demonstrație.* Proprietatea 1) rezultă direct din definiția rădăcinii cubice. Fie  $u = \sqrt[3]{a}$  și  $v = \sqrt[3]{b}$ ; atunci  $u^3 = a$  și  $v^3 = b$ . Să înmulțim membru cu membru aceste două egalități ; obținem :  $u^3 \cdot v^3 = a \cdot b$ , sau  $(u \cdot v)^3 = a \cdot b$ .

Aceasta înseamnă că  $u \cdot v = \sqrt[3]{a \cdot b}$ , adică  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$ .

Proprietatea 3) se mai scrie și astfel :

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} .$$

Încercați să o stabiliți !

Să observăm că  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ , și în general :

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a, \text{ pentru orice număr } a.$$

## EXERCII

1) Completați tabelul :

$x$	-27	$-\frac{125}{8}$	$-\frac{125}{27}$	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	$\frac{125}{27}$	$\frac{125}{8}$
$\sqrt[3]{x}$											

2) Scoateți factori de sub radical :

- a)  $\sqrt[3]{81}$ ; b)  $\sqrt[3]{32}$ ; c)  $\sqrt[3]{54}$ ; d)  $\sqrt[3]{4000}$ ; e)  $\sqrt[3]{0,008^{-2}}$ ; f)  $\sqrt[3]{8a^2}$ ; g)  $\sqrt[3]{a^6}$ ; h)  $\sqrt[3]{a^6b^2}$ ; i)  $\sqrt[3]{81a^3b}$ ;  
 j)  $\sqrt[3]{125a^3b^2}$ ; k)  $\sqrt[3]{16a^4b^6}$ ; l)  $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^2}$ ; m)  $\sqrt[3]{\frac{(a-b)^3}{(a+b)^2}}$ .

3) Introduceți sub radical :

- a)  $3\sqrt[3]{2}$ ; b)  $2\sqrt[3]{3}$ ; c)  $2\sqrt[3]{0,5}$ ; d)  $5\sqrt[3]{4}$ ; e)  $a\sqrt[3]{ab}$ ; f)  $(a-b)\sqrt[3]{\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}}$ .

4) Efectuați :

- a)  $5\sqrt[3]{24} + 6\sqrt[3]{81}$ ; b)  $2\sqrt[3]{375} - 5\sqrt[3]{192}$ ; c)  $5\sqrt[3]{3a} + \sqrt[3]{24a} - 2\sqrt[3]{192a}$ ;  
 d)  $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2000}$ .

5) Efectuați :

a)  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200}$ ; b)  $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{16}$ ; c)  $\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ ; d)  $\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4}$ ; e)  $2 : \sqrt[3]{2}$ ; f)  $1 : \sqrt[3]{0,027}$ ;

Fie numărul  $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$ ; amplificând cu  $\sqrt[3]{2}$ , raționalizăm numitorul; obținem

$$\frac{6 \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{6 \sqrt[3]{2}}{2} = 3 \sqrt[3]{2}; \text{ deci } \frac{6}{\sqrt[3]{4}} = 3 \sqrt[3]{2}.$$

Să observăm că  $(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt[3]{4} - 1 \cdot \sqrt[3]{2} - 1 = 2 - 1 = 1$ . Așadar, pentru a raționaliza numitorul fracției  $\frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1}$ , amplificăm cu  $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ ; obținem ca rezultat  $3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = 3(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$ .

### EXERCITII

1) Raționalizați numitorul :

a)  $\frac{3}{5\sqrt[3]{2}}$ ; b)  $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ ; c)  $\frac{2}{2 - \sqrt[3]{4}}$ ; d)  $\frac{5}{\sqrt[3]{6} - 1}$ ; e)  $\frac{5}{\sqrt[3]{2} + 1}$ .

2) Ordonăți crescător numerele :

a)  $2\sqrt[3]{7}$ ,  $5$ ,  $3\sqrt[3]{3}$  și  $\sqrt[3]{120}$ ; b)  $9$ ,  $3\sqrt[3]{8}$ ,  $\sqrt[3]{74}$  și  $3\sqrt[3]{30}$ .

3) Fie  $a = 2\sqrt{4 - \sqrt{15}}$  și  $b = \sqrt{6} - \sqrt{10}$ . Determinați semnul fiecărui număr.

Calculați apoi pătratele  $a^2$ ,  $b^2$ . Ce observați ?

4) Rezolvați sistemele de ecuații :

a)  $\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}}x - 2y = 1 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} x - \sqrt[3]{2}y = \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}y = 0 \end{cases}$

### LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

#### LUCRAREA I

1) Calculați : a)  $(2 \cdot 3)^3$ ; b)  $(-3)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$ ; c)  $(-1)^k \cdot (-1)^{k+1}$  pentru  $k = 8, 9$  și  $10$ ;

d)  $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ; e)  $(3^3 \cdot 3^{-2} + 4^4 \cdot 4^{-3} + 1) \cdot 2^{-3}$ .

$$2: \sqrt[3]{2}; \boxed{f} \quad 1: \sqrt[3]{0,027};$$

numitorul ; obținem

$$3 \sqrt[3]{2}.$$

$$+ \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \cdot 1 -$$

raționaliza numitorul

$$\text{m ca rezultat } 3(\sqrt[3]{4} +$$

semnul fiecărui număr.

UȘIRII

pentru  $k = 8, 9$  și  $10$ ;

2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor :

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$  ; b)  $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 0,0625$  ; c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3$  ; d)  $2 \in [2; 3)$  ; e)  $3 \in [2; 3)$ .

3) Calculați :

a)  $0,12 \cdot 10^4 + 0,12 \cdot 10^3$  ; b)  $0,71 \cdot 10^{-4} + 0,3 \cdot 10^{-3}$  ; c)  $(0,62 \cdot 10^2) \cdot (0,155 \cdot 10^2)$ . Scrieți rezultatele în formă standard.

4) Calculați : a)  $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{32})$  ; b)  $\sqrt{25} \cdot \sqrt{250} \cdot \sqrt{25000}$  ; c)  $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{25}$ .

5) Raționalizați numitorii : a)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  ; b)  $\frac{1}{-\sqrt{7}}$  ; c)  $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$  ; d)  $\frac{1}{1-\sqrt{5}}$  ; e)  $\frac{3}{\sqrt{5}+2}$

## LUCRAREA A II-A

1) Care dintre numerele  $-8, 7, 8$  și  $9$  este soluție a ecuației  $\frac{x^2+63}{16x} = 1$  ?

2) Rezolvați ecuațiile : a)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 3$  ; b)  $5(x-1) = 4(3-x) + 7$ .

3) Rezolvați sistemele de ecuații :

a)  $\begin{cases} \frac{x+y}{2} + x = 6 \\ \frac{x-y}{8} - y = 4 \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} x-y = \frac{1}{6} \\ 8x-6y = 2 \end{cases}$  ; c)  $\begin{cases} x+2y+3z = 8 \\ 3x-y-z = 0 \\ x-2y+2z = -1 \end{cases}$

4) Un muncitor cheltuiește 952 lei pentru a-și cumpăra un costum, o cămașă și o cravată. Cămașa este cu 38 lei mai scumpă decât cravata, iar costumul este de 9 ori mai scump decât cămașa. Aflați prețul costumului, al cămășii și al cravatei.

## CAPITOLUL II

### FUNCȚII

#### I. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE

Să notăm cu litera  $A$  intervalul închis  $[0; 1]$ , iar cu litera  $B$  intervalul închis  $[0; 2]$ . Putem stabili o legătură între aceste intervale; anume, fiecărui element  $x$  din  $A$  îi putem face să-i corespundă dublul său  $2x$ , care este un element din mulțimea  $B$ . Am definit astfel o funcție pe mulțimea  $A$ , cu valori în mulțimea  $B$ . O notăm astfel  $f: A \rightarrow B$ ; această funcție este descrisă (dată) de formula  $f(x) = 2x$ .

În general, să ne imaginăm că am făcut să corespundă fiecărui element  $x$  dintr-o mulțime  $A$  un (singur) element  $y$  dintr-o mulțime  $B$ ; spunem că am definit o **funcție** de la  $A$  la  $B$ .

Folosim notația  $f: A \rightarrow B$ , citind „funcția  $f$ , definită pe mulțimea  $A$ , cu valori în mulțimea  $B$ ”. Mulțimea  $A$  se numește **domeniul de definiție** al funcției  $f$ , iar mulțimea  $B$  se numește **codomeniul** (sau **domeniul de valori** al) funcției  $f$ .

În exemplul de mai sus am folosit litera  $x$  pentru a nota un element oarecare din domeniul de definiție; orice literă folosită în acest scop poartă numele de **argument**.

*Exemplu.* Perimetrul unui dreptunghi este de 12 cm. Ce putem spune despre aria sa?

Să notăm cu  $b$  (cm) lungimea bazei dreptunghiului. Deoarece semiperimetrul este de 6 cm, înălțimea dreptunghiului va fi de  $6 - b$  (cm). Aria  $a$  (în  $\text{cm}^2$ ) a dreptunghiului este dată deci de:

$$a = b \cdot (6 - b).$$

Putem spune că această formulă ne dă aria dreptunghiului în funcție de lungimea bazei sale. Să precizăm această funcție.

Numărul  $a$ , reprezentând o arie, nu poate fi negativ; putem considera că  $a \in [0; +\infty)$ . Deoarece  $b$  și  $6 - b$  reprezintă lungimi, trebuie să avem  $b \geq 0$  și  $6 - b \geq 0$ ; astfel  $b \in [0; 6]$ .

Deci dependența ariei de lungimea bazei dreptunghiului este exprimată prin funcția

$$f: [0; 6] \rightarrow [0; +\infty),$$

descrisă de  $f(b) = b(6 - b)$ .

Aici a  
Dar codom  
Să rep  
tabel de val

Înzestr  
tem în evic  
unim printr

Observă  
numărul  $a$   
lul  $[0; 9]$ .  
mea bazei  
mată și prin

$g: [0; 6]$

Observație  
are alt codomen

Alte ex  
de descrește  
vide, dând n  
oră, fiecare  
apărind ast  
oră, fiecare  
apărind opt  
Putem comp

Să obse  
numărăm. A  
scrisă de  $n(t)$   
din plan; cite

Aici argumentul este litera  $b$ . Care este domeniul de definiție al funcției ?  
Dar codomeniul ?

Să reprezentăm grafic această funcție, prin puncte. Completăm mai întâi un tabel de valori :

$b$	0	1	2	3	4	5	6
$f(b)$	0	5	8	9	8	5	0

Înzestrăm planul cu un sistem de axe de coordonate (vezi figura 1). Scoatem în evidență punctele ce au abscisa  $b$  și ordonata  $f(b)$ , trecute în tabel. Le unim printr-o linie „continuă”. Graficul obținut este o linie curbă.

Observăm, privind acest grafic, că numărul  $a$  poate lua valori doar în intervalul  $[0; 9]$ . Deci dependența ariei de lungimea bazei dreptunghiului poate fi exprimată și prin funcția :

$$g : [0; 6] \rightarrow [0; 9], g(b) = b(6 - b).$$

Observație. Funcția  $g$  diferă de funcția  $f$ , căci are alt codomeniu !

Alte exemple. 1) *Procese de creștere și de descreștere.* O celulă de bacterie se divide, dând naștere la două celule ; după o oră, fiecare dintre acestea se divide, apărând astfel patru celule ; după încă o oră, fiecare dintre cele 4 celule se divide, apărând opt celule și așa mai departe. Putem completa un tabel :

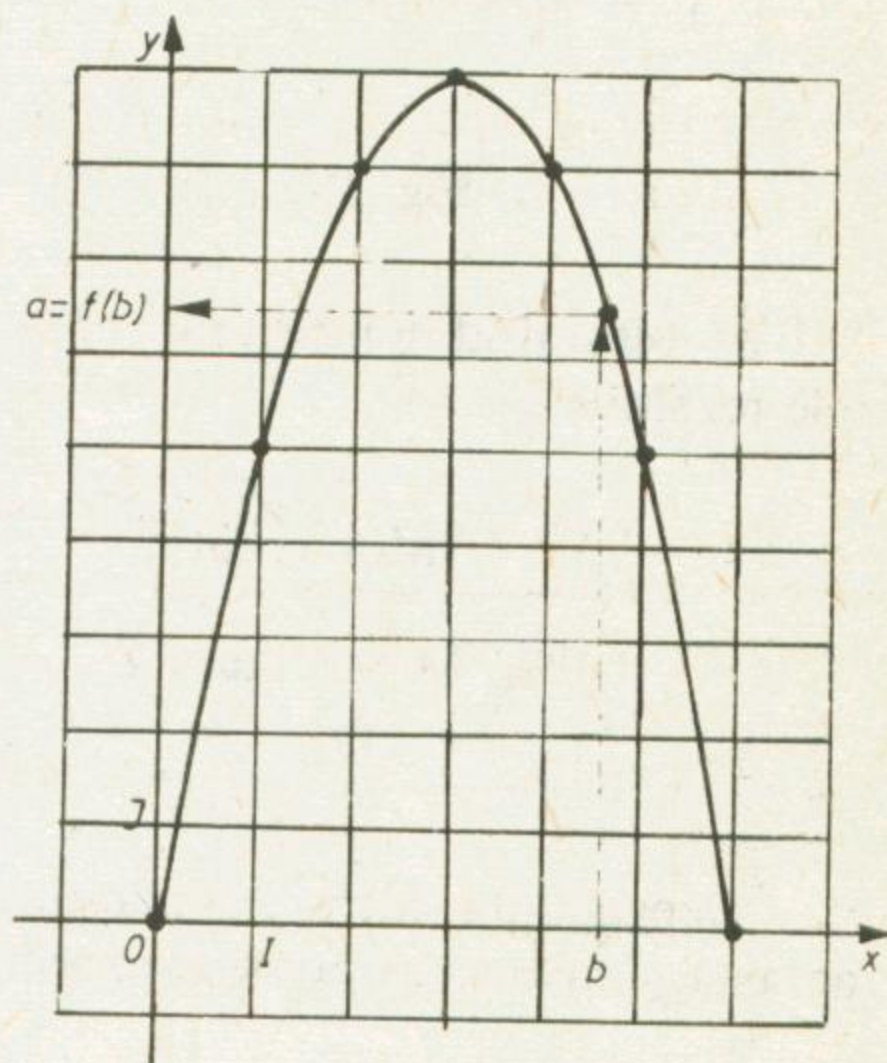


Fig. II.1

Momentul $t$	0	1	2	3	4	...
Numărul total de bacterii	1	2	4	8	16	...

Să observăm că numărul total de bacterii,  $n$ , depinde de momentul în care le numărăm. Acest fenomen *de creștere* este exprimat prin funcția  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , descrisă de  $n(t) = 2^t$  (verificați !). Graficul acestei funcții este o mulțime de puncte din plan ; câteva sînt desenate în figura 2.

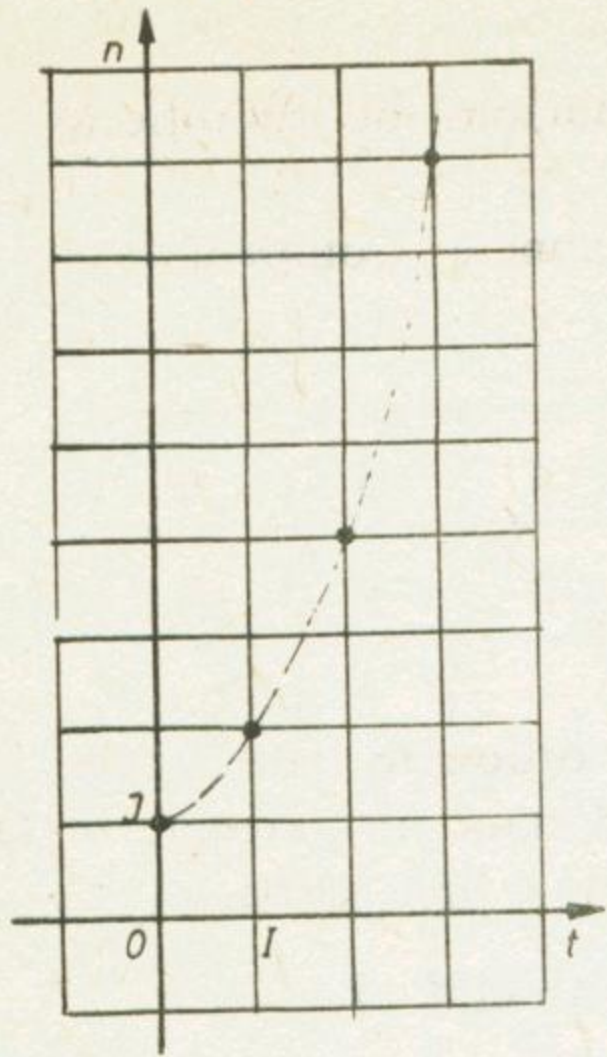


Fig. II.2

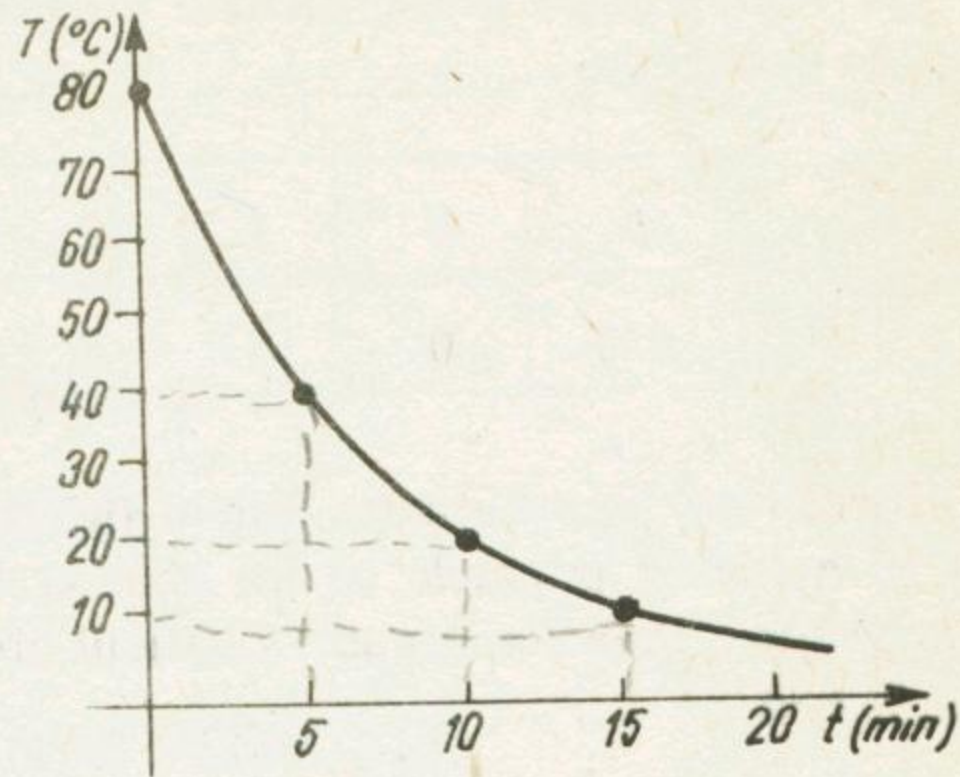


Fig. II.3

b) Măsurând temperatura  $T$  a ceaiului dintr-o cană, s-au obținut următoarele rezultate :

Momentul $t$	0	5	10	15
Temperatura $T$ (în $^{\circ}\text{C}$ )	80	40	20	10

Dependența între temperatura ceaiului și momentul în care s-a măsurat această temperatură poate fi exprimată prin funcția :

$$T : [0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

descrisă de  $T(t) = 80 \cdot 2^{-t/5}$  (verificați !).

Graficul acestei funcții a fost trasat în figura 3 printr-o linie „continuă“, ce trece prin punctele ce corespund măsurătorilor.

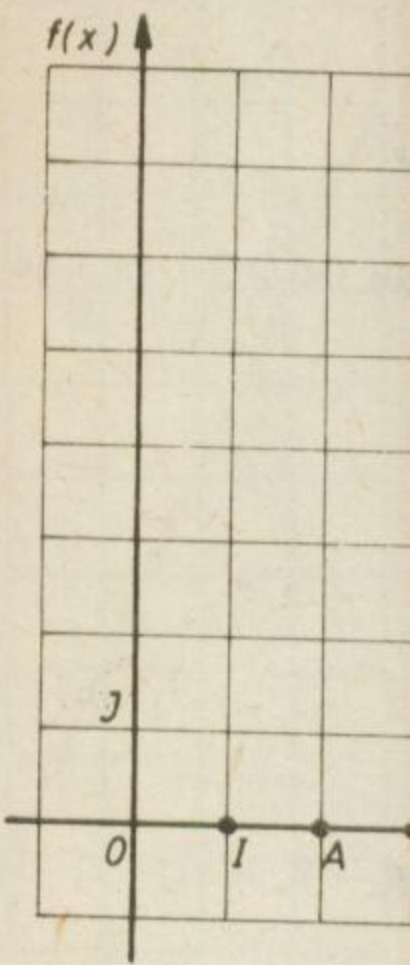
2) Elevii unei clase au obținut la teză următoarele rezultate : două note de 4, patru note de 5, trei note de 6, cinci note de 7, opt note de 8, șase note de 9 și patru note de 10. Construim funcția

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \mathbf{N}$$

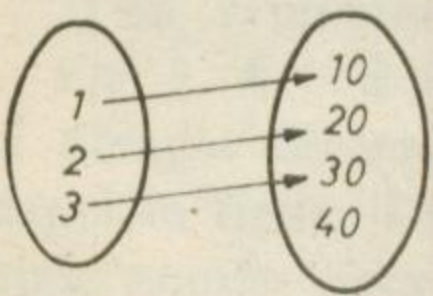
care face să corespundă fiecărei note *frecvența* ei (numărul care arată de câte ori a fost obținută nota). Funcția este descrisă de tabelul :

Nota $x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența ei $f(x)$	0	0	0	2	4	3	5	8	6	4

Graficul ace  
 $C(4; 2), D(5; 4),$



1) (oral) Care din



a

2) Fie  $A = \{1, 2,$   
de valori al funcției.

3) Fie funcția  $g :$

Calculați  $g(-1), g(0), g(1)$

4) Un pieton pleacă  
mergând cu viteză (constanță)  
lari a timpului  $t$  din interva-  
tul  $t$  ( $t$  este exprimat în

Ați putea completa  
funcția ?

Graficul acestei funcții este alcătuit din punctele  $I(1; 0)$ ,  $A(2; 0)$ ,  $B(3; 0)$ ,  $C(4; 2)$ ,  $D(5; 4)$ ,  $E(6; 3)$ ,  $F(7; 5)$ ,  $G(8; 8)$ ,  $H(9; 6)$ , și  $K(10; 4)$  (vezi figura 4).

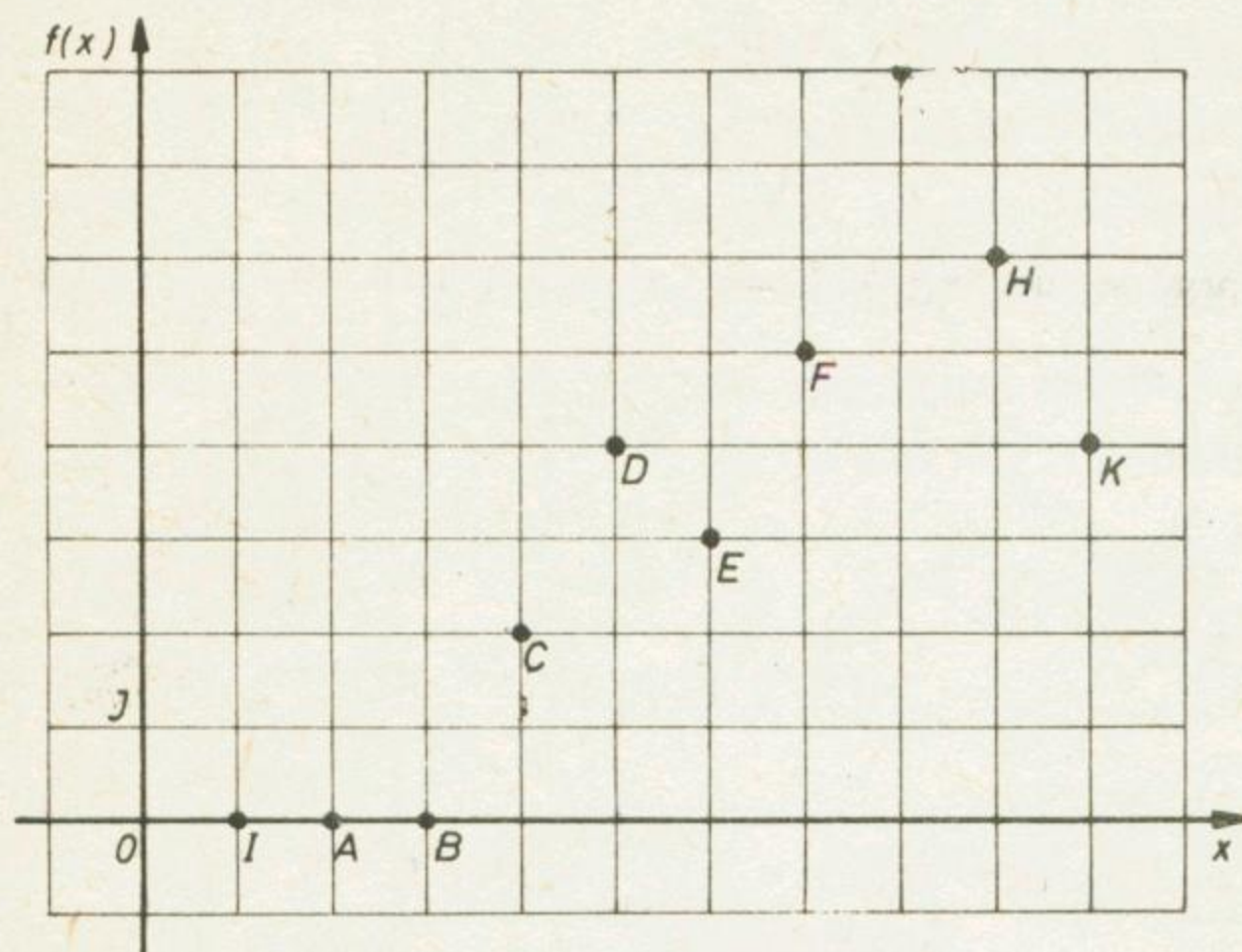
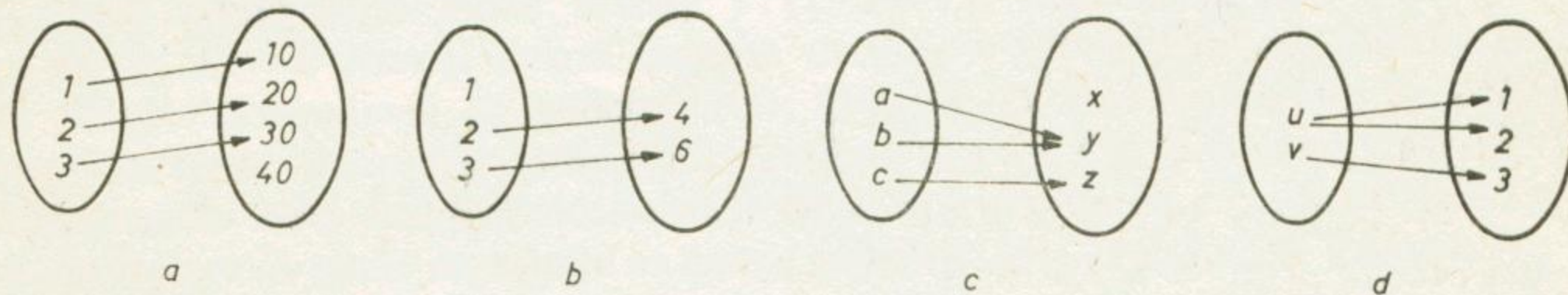


Fig. II.4

### EXERCIȚII

1) (oral) Care dintre diagramele următoare nu definesc funcții? De ce?



2) Fie  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  și fie funcția  $f: A \rightarrow A$  dată prin formula  $f(x) = 6 - x$ . Alcătuiți tabelul de valori al funcției.

3) Fie funcția  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  descrisă astfel:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \leq 2; \\ x - 2 & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Calculați  $g(-1)$ ,  $g(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g(1.5)$ ,  $g(2)$ ,  $g(2.5)$ ,  $g(3)$ ,  $g(4)$ .

4) Un pieton pleacă la ora 8 din localitatea A și ajunge la ora 12 în localitatea B (în aceeași zi), mergând cu viteza (constantă) de 5 km/h. Considerăm funcția  $d: [8; 12] \rightarrow \mathbf{R}$ , care face ca fiecărei valori a timpului  $t$  din intervalul  $[8; 12]$  să-i corespundă distanța  $d(t)$  parcursă de la ora 8 pînă la momentul  $t$  ( $t$  este exprimat în ore, iar  $d(t)$  în kilometri). Scrieți formula care descrie pe  $d$  și completați tabelul:

$t$	8	8,5	9	10	10,5	11	12
$d(t)$	0						

Ați putea completa tabelul și cu alte valori? Ați putea alcătui un tabel care să descrie complet funcția?



5) Un parașutist se aruncă dintr-un avion și își deschide parașuta la 7 secunde după momentul saltului. Tabelul de mai jos ne dă distanța parcursă în cădere liberă, în metri :

$t$	1	2	3	4
distanța $d$	4,9	19,6	44,1	78,4

Puteți descrie dependența între  $d$  și  $t$  printr-o funcție ? (Indicație : comparați prin împărțire valorile lui  $d$  cu pătratele lui  $t$ .)

6) Reprezentați grafic funcțiile :

a)  $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - x$ ;

b)  $g: \{-2, -1, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ .

7) Care dintre graficele funcțiilor :

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x^5 - 7x^3 - 4x$ ; b)  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ; c)  $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = x + 1$ ,

conține originea axelor ?

8) Pentru ce valoare a lui  $m$ , graficul funcției

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - m,$$

conține punctul  $A(1; -5)$  ?

## 2. FUNCȚII LINIARE

O funcție  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin  $f(x) = mx + n$ , unde  $m$  și  $n$  sînt numere reale date, se numește **funcție liniară**. Graficul oricărei funcții liniare este o dreaptă în plan. Cunoaștem de asemenea că, dacă  $m > 0$ , atunci funcția este **crescătoare** (ceea ce înseamnă că dacă  $a < b$ , atunci  $f(a) < f(b)$ ); dacă  $m < 0$  funcția este **descrescătoare** (ceea ce înseamnă că dacă  $a < b$ , atunci  $f(a) > f(b)$ ). Dacă  $m = 0$  funcția este **constantă**; graficul ei este o dreaptă paralelă cu axa  $Ox$ .

Pentru reprezentarea grafică a unei funcții liniare este suficient să cunoaștem doar două puncte ale graficului.

*Exemple.* 1) Fie funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dată de  $f(x) = 2x - 4$ . Ea este o funcție liniară; aici  $m = 2$  și  $n = -4$ . Avem  $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$  și  $f(1) = -2$ ; deci punctele  $A(-1; -6)$  și  $B(1; -2)$  aparțin graficului. Graficul funcției va fi dreapta  $AB$  (vezi figura 5). Dacă  $M(x; y)$  este un punct al dreptei  $AB$ , atunci

coordonatele sale  
tei  $AB$  nu există  
de ecuație  $y = 2x$

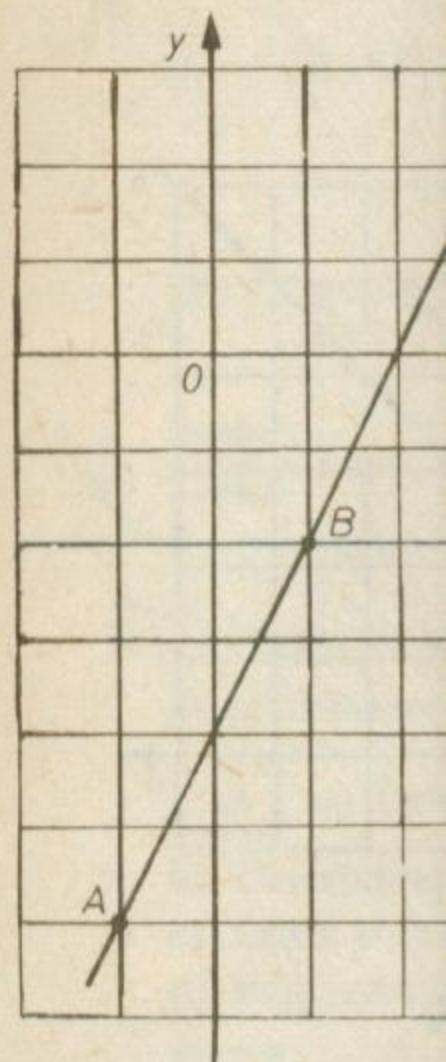


Fig. II.5

Deci dreapta se

2) Să reprez

Fie  $g: \mathbf{R} \rightarrow$

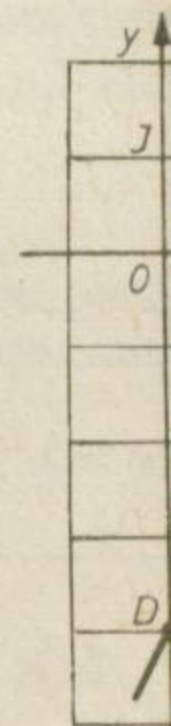
este dreapta dete

dreaptă în figura

drepte, anume ac

și 4. Deci  $f$  are ca

și  $B$  aparțin grafic



secunde după momentul

și prin împărțire valorile

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x + 1,$

de  $m$  și  $n$  sînt numere  
funcții liniare este o  
 $> 0$ , atunci funcția este  
 $f(a) < f(b)$ ; dacă  $m < 0$   
 $< b$ , atunci  $f(a) > f(b)$ .  
dreaptă paralelă cu axa

este suficient să cunoaș-

4. Ea este o funcție li-  
 $= -6$  și  $f(1) = -2$ ; deci  
cul funcției va fi dreapta  
al dreptei  $AB$ , atunci

coordonatele sale  $x$  și  $y$  verifică relația  $y - 2x + 4 = 0$ . În afară de punctele dreptei  $AB$  nu există altele care să verifice această relație. Spunem că  $AB$  este **dreapta de ecuație**  $y - 2x + 4 = 0$ .

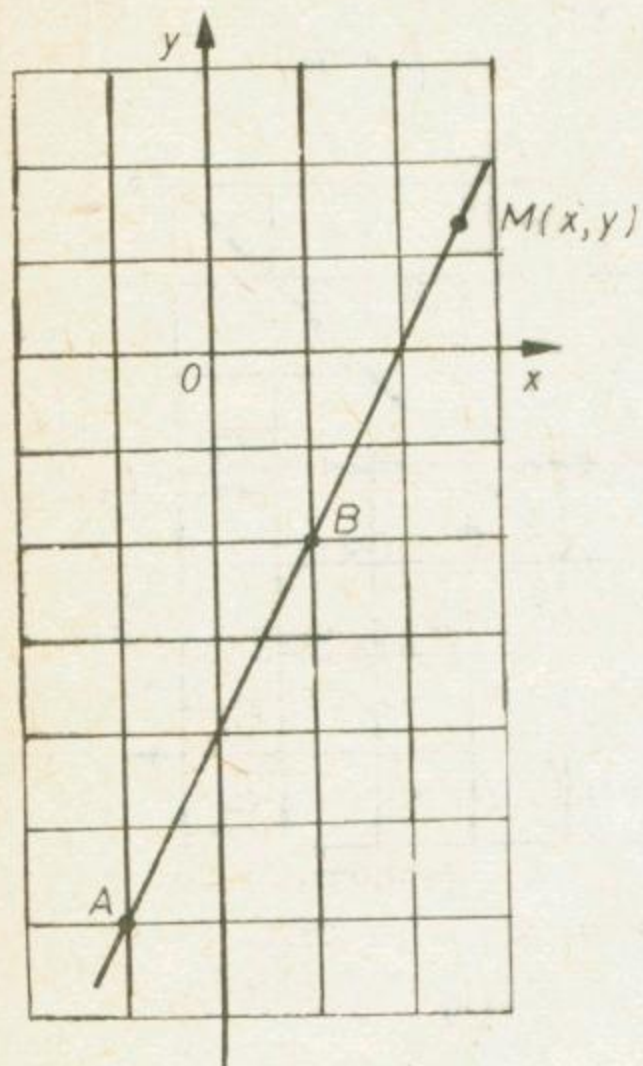


Fig. II.5

Adesea, pentru a reprezenta grafic o funcție liniară, determinăm punctele în care graficul intersectează axele de coordonate. Pentru aceasta, ținem seamă de faptul că **axa  $Ox$  are ecuația  $y = 0$** , iar **axa  $Oy$  are ecuația  $x = 0$** . Pentru funcția din acest exemplu, găsim intersecția graficului cu axa  $Ox$  rezolvînd sistemul :

$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} ; \text{obținem soluția } (2; 0).$$

Intersecția cu axa  $Oy$  este dată de soluția sistemului:

$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} , \text{adică de } (0; -4).$$

Deci dreapta se obține unind punctele  $C(2; 0)$  și  $D(0; -4)$  (vezi figura 6).

2) Să reprezentăm grafic funcția  $f: [1; 4] \rightarrow \mathbb{R}$  descrisă de  $f(x) = x + 1$ .

Fie  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcția liniară descrisă de  $g(x) = x + 1$ . Graficul funcției  $g$  este dreapta determinată de punctele  $(-1; 0)$  și  $(0; 1)$ . Am reprezentat această dreaptă în figura 7 (cu linie întreruptă). Graficul funcției  $f$  va fi o parte a acestei drepte, anume aceea formată din punctele  $(x; y)$  care au abscisa  $x$  cuprinsă între 1 și 4. Deci  $f$  are ca grafic segmentul ce unește punctele  $A(1; 2)$  și  $B(4; 5)$ . Punctele  $A$  și  $B$  aparțin graficului funcției  $f$ .

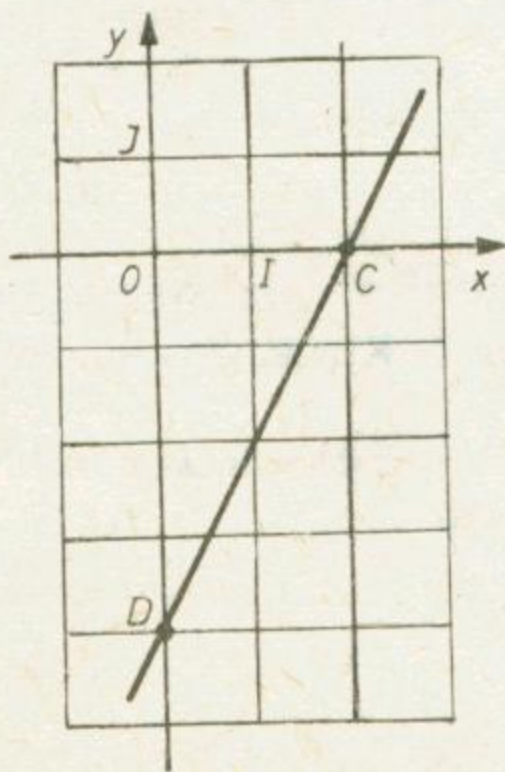


Fig. II.6

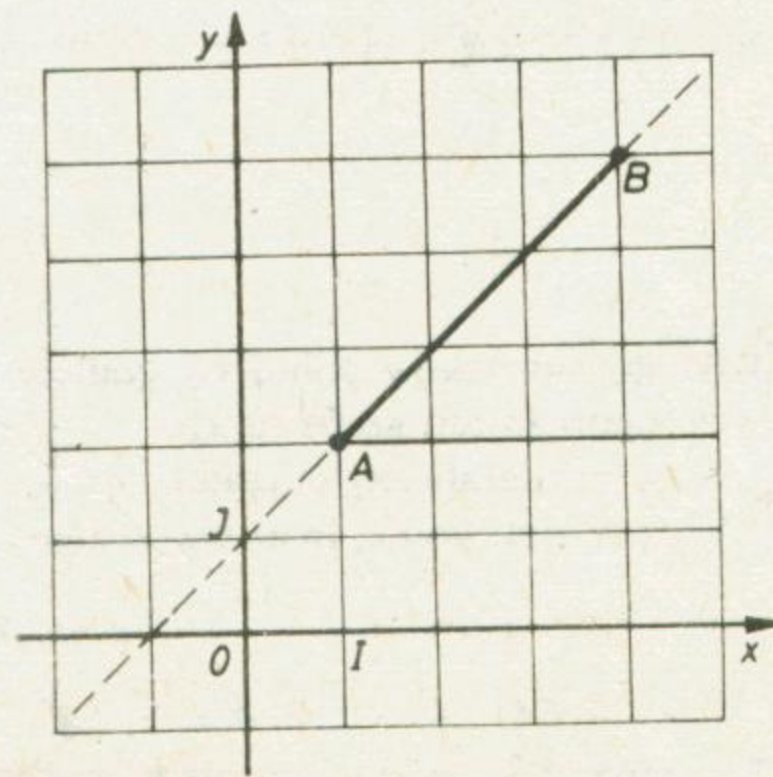


Fig. II.7

3) Funcția  $h : (1; 4) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = x + 1$  are graficul desenat în figura 8. Punctele  $A$  și  $B$  nu aparțin graficului.

4) Funcția  $k : (1; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k(x) = x + 1$  are ca grafic semidreapta cu originea în  $A$  reprezentată în figura 9. Punctul  $A$  nu aparține graficului.

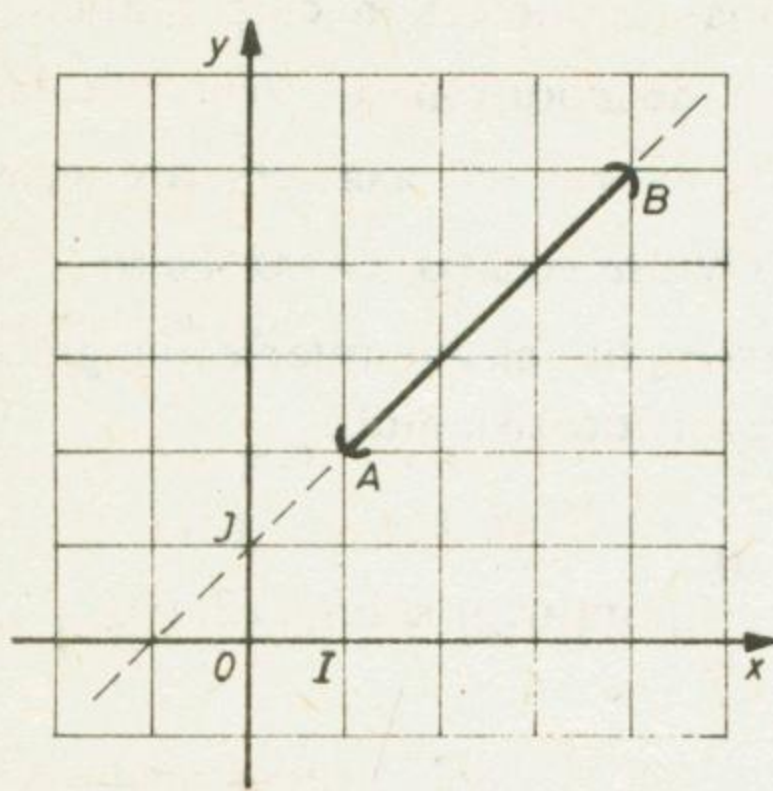


Fig. II.8

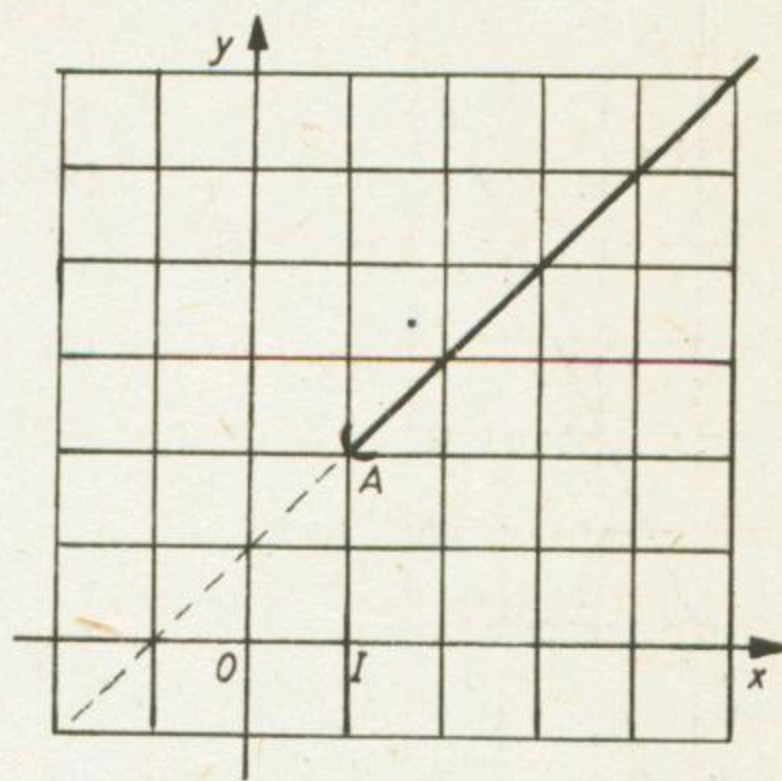


Fig. II.9

### EXERCITIUL REZOLVAT

Să aflăm funcția liniară  $f$  pentru care  $f(1) = 3$  și  $f(2) = 5$  (deci al cărui grafic conține punctele  $A(1; 3)$  și  $B(2; 5)$ ).

Funcția  $f$  fiind liniară, este descrisă de  $f(x) = mx + n$ , pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ . Rămâne să aflăm valorile lui  $m$  și  $n$ .

Avem  $f(1) = m \cdot 1 + n = m + n$ , iar  $f(2) = m \cdot 2 + n = 2m + n$ . Deci pentru a afla valorile lui  $m$  și  $n$ , va trebui să rezolvăm sistemul :

$$\begin{cases} m + n = 3, \\ 2m + n = 5. \end{cases}$$

Rezolvându-l, găsim  $m = 2$ ,  $n = 1$ . Funcția liniară căutată este descrisă de formula  $f(x) = 2x + 1$ .

### EXERCITII

- 1) Aflați numărul  $a$  știind că graficul funcției constante  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = a$ , conține punctul  $M(-3; -5)$ . Reprezentați grafic funcția.
- 2) Construiți graficele funcțiilor :  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = 3$  și  $h : [-2; 2] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = 3$ .
- 3) Reprezentați grafic, în același sistem de coordonate, funcțiile :

$f, g, h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , descrise de :

$$f(x) = -x, g(x) = -x + 2, h(x) = -x - 2. \text{ Ce observați ?}$$

- 4) Comparați între ele graficele funcțiilor :

$$f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = -2x + 2 ;$$

$$f_2 : [0; 3] \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = -2x + 2 ;$$

5) Reprezentați  
a)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

b)  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

6) Reprezentați  
 $f : (2; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$

7) Pentru ce valori ale lui  $a$  funcția  
a) crescătoare

8) a) Determinați

b) Determinați

c) Există o funcție

d) Reprezentați

9) Să reprezentați

temperatura crește

a) Stabiliți o

b) Ce temperatură

c) La ce adâncime

10) Reprezentați

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \geq 0 \\ -x & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

Ne propunem să studiem  
real pătratul său

Să completați

$x$
$f(x)$

Valorile funcției  
descrescătoare

cul desenat în figura 8.

afic semidreapta cu origi-  
graficului.

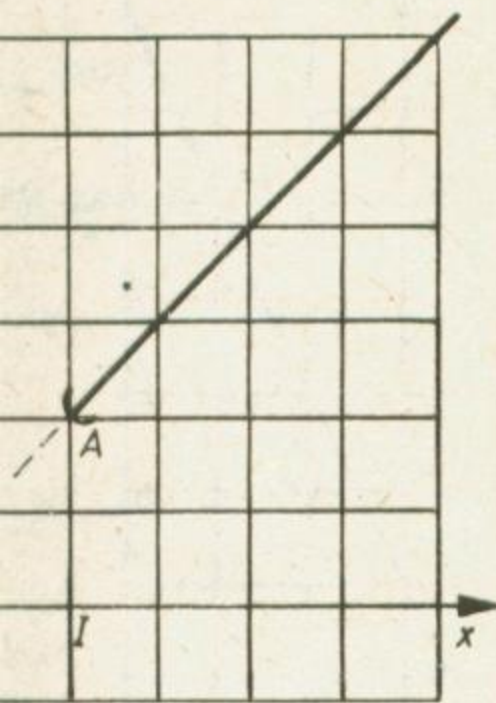


Fig. II.9

) = 5 (deci al cărei grafic

+ n, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

- n = 2m + n. Deci pen-  
ul :

căutată este descrisă de

-  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = a$ , conține punctul

2] -  $\mathbb{R}$ ,  $h(x) = 3$ .

$$f_3 : (0; 3) \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = -2x + 2;$$

$$f_4 : \{0; 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = -2x + 2.$$

5) Reprezentați grafic funcțiile :

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dacă } x < 0, \\ -1 & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases}$$

$$b) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} -x & \text{dacă } x \leq 0, \\ 0 & \text{dacă } 0 < x < 2, \\ x - 2 & \text{dacă } x \geq 2. \end{cases}$$

6) Reprezentați grafic funcțiile :

$$f: (2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = 5 - z \text{ și } g: (-\infty; -2) \rightarrow \mathbb{R}, g(z) = 5 - z.$$

7) Pentru ce valori ale lui  $m$  funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată de  $f(x) = (m - 2)x + m$  este :

a) crescătoare ; b) descrescătoare ; c) constantă ?

8) a) Determinați funcția liniară  $f$  pentru care  $f(1) = 10, f(2) = -4$ .

b) Determinați funcția liniară  $g$  pentru care  $g(0) = 2, g(1) = 4, g(2) = 6$  și  $g(3) = 8$ .

c) Există o funcție liniară  $h$  astfel încât  $h(-1) = -3, h(0) = 2, h(1) = 1$  ?

d) Reprezentați grafic funcțiile  $f$  și  $g$ .

9) Să presupunem că, pe măsură ce coborâm spre centrul Pământului, la fiecare 30,5 metri

temperatura crește cu  $1^\circ\text{C}$ ; iar la suprafață temperatura este de  $20^\circ\text{C}$ .

a) Stabiliți o formulă care să descrie dependența temperaturii de adâncime.

b) Ce temperatură va fi la adâncimea de 122 m ?

c) La ce adâncime temperatura va fi de  $36^\circ\text{C}$  ?

10) Reprezentați grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dacă } x \geq 2, \\ -x + 2 & \text{dacă } x < 2. \end{cases}$$

### 3. FUNCȚII PĂTRATICE

Ne propunem să studiem funcția care face să corespundă fiecărui număr real pătratul său :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2.$$

Să completăm mai întâi un tabel de valori :

$x$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Valorile funcției trecute în tabel ne îndeamnă să presupunem că funcția este descrescătoare pe intervalul  $(-\infty; 0]$  și crescătoare pe  $[0; +\infty)$ .

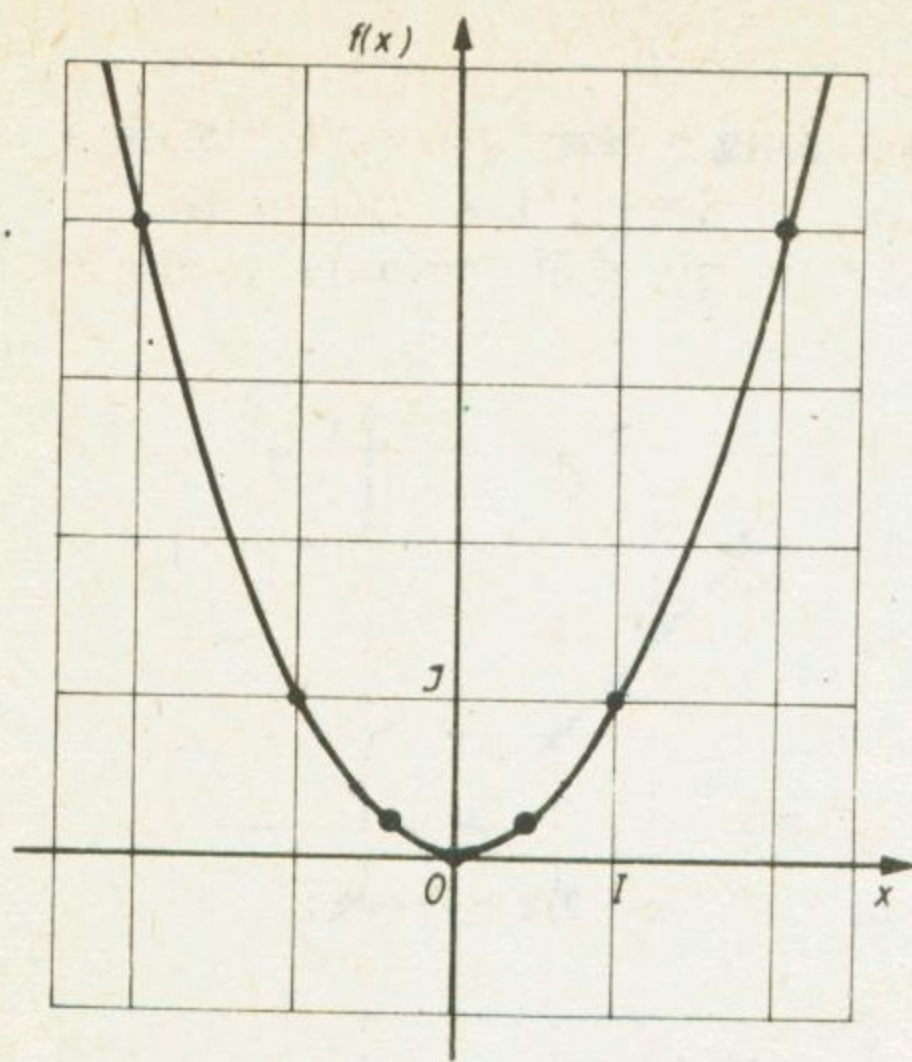


Fig. II.10

În figura 10 prezentăm graficul acestei funcții. Am scos în evidență punctele ale căror coordonate sînt trecute în tabelul de valori de mai sus. Graficul funcției este o parabolă.

Vom numi funcție pătratică orice funcție de forma :

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = ax^2 + bx + c;$$

unde  $a, b, c$  sînt numere reale, iar  $a \neq 0$ .

În particular, funcția  $f$  de mai sus este o funcție pătratică ( $a = 1, b = c = 0$ ).

Graficul oricărei funcții patratice este o parabolă.

### EXERCİTIU REZOLVAT

Să determinăm funcția pătratică  $g$  ce are proprietatea că  $g(1) = 0, g(2) = 1$  și  $g(3) = 4$ .

Știm că  $g(x) = ax^2 + bx + c$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ . Rămîne să determinăm coeficienții  $a, b$  și  $c$ . Avem  $g(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$ ;  $g(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$ ;  $g(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$ . Deci coeficienții îi aflăm rezolvînd sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 4a + 2b + c = 1, \\ 9a + 3b + c = 4. \end{cases}$$

Înlocuim acest sistem prin altul, echivalent cu el, scăzînd din a doua ecuație pe prima, iar din a treia pe a doua :

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 3a + b = 1, \\ 5a + b = 3. \end{cases}$$

Scăzînd acum din a treia ecuație pe a doua, obținem :

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 3a + b = 1, \\ 2a = 2. \end{cases}$$

Acest ultim s  
Așadar funcția

1) Completați tab

$x$	
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$	
$f_2(x) = x^2$	
$f_3(x) = 2x^2$	
$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$	
$f_5(x) = -x^2$	
$f_6(x) = -2x^2$	

Reprezentați graf  
valori reale (luați ca un  
2) Aceeași probl

$x$	
$g_1(x) = x^2$	
$g_2(x) = x^2 + 1$	
$g_3(x) = x^2 + 2$	
$g_4(x) = x^2 - 1$	
$g_5(x) = x^2 - 2$	

Ce observați ?

3) Aceeași proble

$x$	
$h_1(x) = x^2$	
$h_2(x) = x^2 - x$	
$h_3(x) = x^2 - 2x$	
$h_4(x) = x^2 + x$	

10 prezentăm graficul  
Am scos în evidență  
or coordonate sînt tre-  
e valori de mai sus. Gra-  
o parabolă.

funcție pătratică orice

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

numere reale, iar  $a \neq 0$ .  
r, funcția  $f$  de mai sus  
pătratică ( $a = 1$ ,  $b =$

ărei funcții patratice este

ea că  $g(1) = 0$ ;  $g(2) = 1$

Rămîne să determinăm  
 $+ c = a + b + c$ ;

$3 + c = 9a + 3b + c$ . Deci

zînd din a doua ecuație

m :

Acest ultim sistem se rezolvă ușor ; soluția sa este  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$ .  
Așadar funcția pătratică căutată este  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = x^2 - 2x + 1$ .

## EXERCIIII

1) Completați tabelul :

$x$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$											
$f_2(x) = x^2$											
$f_3(x) = 2x^2$											
$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$											
$f_5(x) = -x^2$											
$f_6(x) = -2x^2$											

Reprezentați grafic, în același sistem de coordonate, funcțiile  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ , definite pe  $\mathbf{R}$ , cu valori reale (luați ca unitate de măsură, pe ambele axe, 1 cm).

2) Aceeași problemă, pentru funcțiile  $g_1, g_2, g_3, g_4$  și  $g_5$ .

$x$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g_1(x) = x^2$									
$g_2(x) = x^2 + 1$									
$g_3(x) = x^2 + 2$									
$g_4(x) = x^2 - 1$									
$g_5(x) = x^2 - 2$									

Ce observați ?

3) Aceeași problemă, pentru funcțiile  $h_1, h_2, h_3, h_4$ .

$x$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h_1(x) = x^2$								
$h_2(x) = x^2 - x$								
$h_3(x) = x^2 - 2x$								
$h_4(x) = x^2 + x$								

4) Aceeași problemă, pentru funcțiile  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .

$x$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$k_1(x) = x^2$									
$k_2(x) = (x - 1)^2$									
$k_3(x) = (x - 2)^2$									
$k_4(x) = (x + 1)^2$									

Ce observați ?

5) Determinați funcția pătratică ce are proprietatea că  $g(0) = 0, g(1) = -2, g(2) = 0$ .

6) Care funcție pătratică are graficul o parabolă ce conține punctele  $A(1; 4), B(2; 3)$  și  $C(3; 4)$  ?

7) Reprezentați grafic funcția ce descrie dependența ariei unui pătrat (măsurată în  $\text{cm}^2$ ) de lungimea laturii sale (măsurată în cm). Alegeți unitatea de măsură de 4 cm pe fiecare axă de coordonate. Completați apoi tabelul :

latura $l$ (cm)	1,4	2	10
aria $A$ ( $\text{cm}^2$ )		8	10

8\*) În figura 11 vedeți desenată o curbă ce seamănă cu un arc de parabolă. Ea este graficul unei funcții  $f$ . Completați tabelul :

$x$	0,5	1	1,5
$f(x)$			

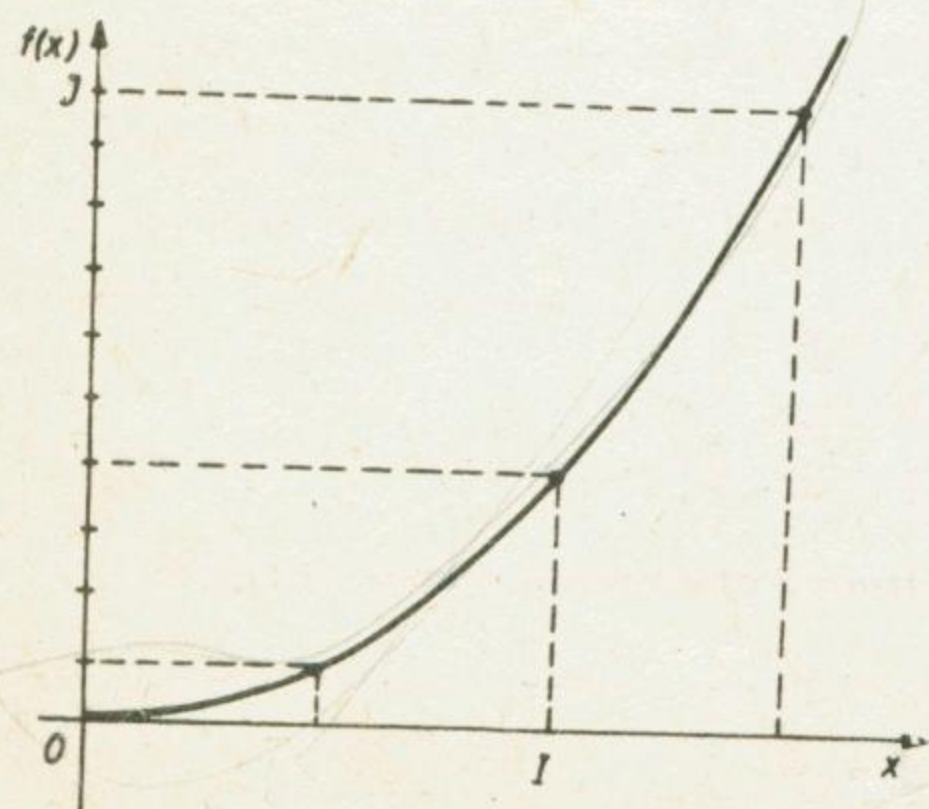


Fig. II.11

Este într-adevăr un arc de parabolă ?

9) Înălțimea  $h$  (în kilometri) atinsă de o rachetă la  $t$  minute după lansare este dată în tabelul :

durata zborului $t$	0	1	2	3	4
înălțimea $h$	0	25	100	225	400

Puteți descrie mișcarea rachetei printr-o funcție ? Aflați înălțimea atinsă după 10 minute de la lansare, presupunând că motoarele rachetei funcționează tot timpul.

## 4. ALTE FUNCȚII

Orice număr real  $x$ , diferit de zero, are un invers, care a fost notat  $\frac{1}{x}$  sau  $x^{-1}$ . Să considerăm tabelul :

$x$	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Putem considera funcția

$$f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$$

Graficul acestei funcții (vezi figura 12) este o hiperbolă.

Fie  $x$  un număr real  $\geq 0$ ; putem extrage rădăcina pătrată din  $x$ ; ca rezultat obținem numărul real  $\sqrt{x}$ .

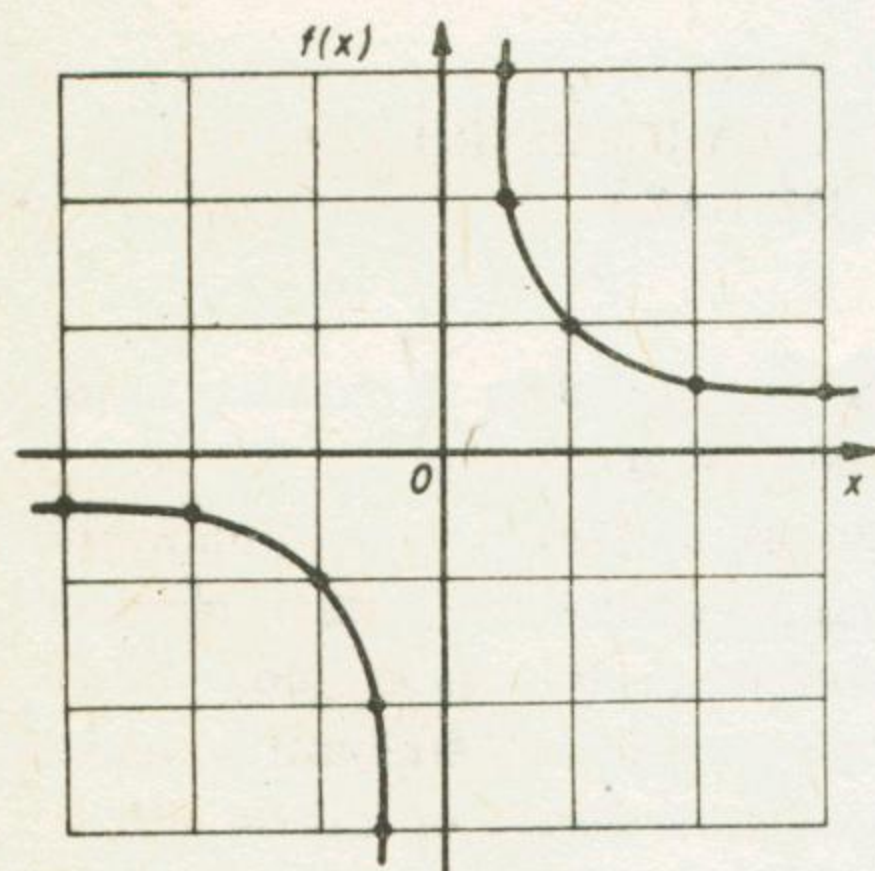


Fig. II.12

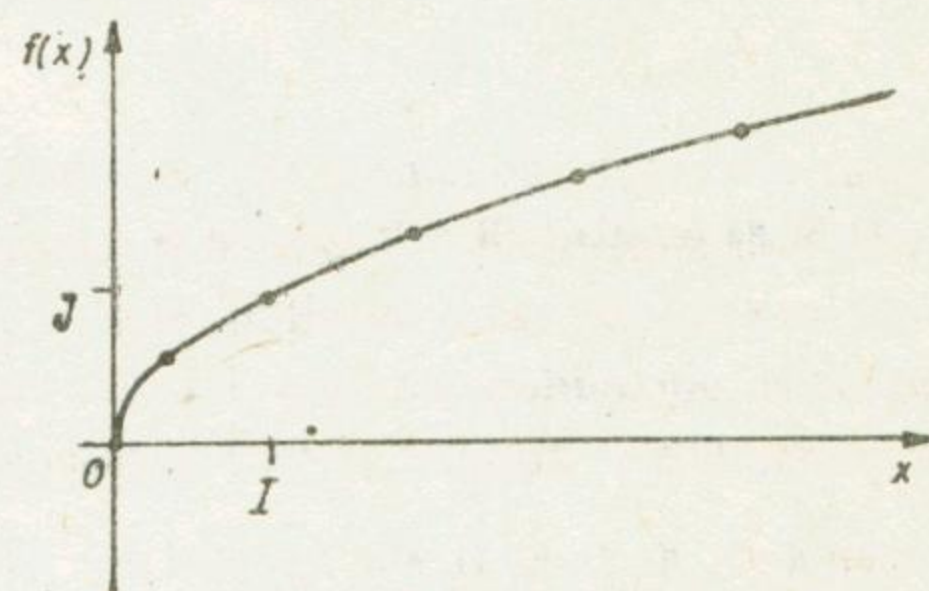


Fig. II.13

Să completăm un tabel (consultați și tabelul de la sfârșitul manualului) :

$x$	0	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2} = 1,41\dots$	$\sqrt{3} = 1,73\dots$	2

Funcția  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  descrisă de  $f(x) = \sqrt{x}$  are graficul prezentat în figura 13.



## EXERCIȚII

1) Reprezentați grafic, completând mai întâi un tabel de valori, funcția :

$$f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2}{x}$$

2) Un arhitect vrea să proiecteze o cameră dreptunghiulară avînd suprafața de 15 m<sup>2</sup>. Stabiliți cum variază lungimea camerei în funcție de lățimea ei. Reprezentați grafic această dependență.

3) Între București și Ploiești, pe șosea, sînt 60 km. În cît timp parcurge un automobil această distanță, mergînd cu viteza (constantă)  $v$ ? Reprezentați grafic dependența între durata călătoriei și viteză.

4) Știm că tensiunea curentului electric din rețea este de 220 V. Făcîndu-l să treacă printr-un rezistor de rezistență  $R$  (ohmi), intensitatea sa  $I$  variază astfel :

$$I(R) = \frac{220}{R}$$

- a) Trasați graficul dependenței lui  $I$  față de  $R$ .
- b) Rezistorul este protejat de o siguranță fuzibilă de 5 A. Care este valoarea minimă a rezistenței rezistorului, ce nu provoacă întreruperea curentului prin distrugerea siguranței ?

5) Reprezentați grafic funcția  $f: [1; 3] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{3}{x}$ .

### LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

1) Se dă funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{pentru } x \leq 0, \\ 2 - x & \text{pentru } 0 < x \leq 2, \\ -x & \text{pentru } x > 2. \end{cases}$$

Calculați  $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ .

2) Reprezentați grafic funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

3) Punctul  $A(2; 3)$  aparține graficului funcției liniare date de  $f(x) = 2x - 7$ ? Dar punctul  $B(2; -3)$ ?

4) Un kilogram de portocale costă 18 lei. Alcătuiți graficul funcției care exprimă modul în care prețul unei cantități de portocale depinde de masa acestora. Folosind graficul, stabiliți cît costă 700 g portocale. Cît cîntărește o pungă cu portocale care a costat 21,60 lei?

Am învățat în  
tate prin litere și în  
Să ne reaminti

este un polinom în

este un polinom în  
de 0 pot fi consid  
uniformitate, vom  
Numerele reale co  
Ne vom ocu  
aceasta va fi notată  
Am învățat în  
nonică. De asemen  
narea, scăderea și în

1) Scrieți în formă

a)  $\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + X^3 +$

2) Scrieți în formă

a)  $7X^2 - 3X + 5$   
 $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 ; c$

3) Ce polinom tr

### CAPITOLUL III

## POLINOAME ȘI FRAȚII RAȚIONALE

### 1. POLINOAME. OPERAȚII CU POLINOAME

Am învățat în clasele a VI-a și a VII-a să facem calcule cu numere reprezentate prin litere și în primul rând cu polinoame.

Să ne reamintim că, de exemplu,

$$X^3 Y^2 - 2Y^4 + 3$$

este un **polinom** în nedeterminatele  $X$  și  $Y$ , de gradul 5 ;

$$Z^2 + \frac{1}{2}Z + 4$$

este un polinom în nedeterminata  $Z$ , de gradul 2. De asemenea, numerele diferite de 0 pot fi considerate polinoame de gradul 0 în orice nedeterminată ; pentru uniformitate, vom considera că numărul 0 este polinom (dar că nu are grad). Numerele reale considerate ca polinoame vor fi numite **polinoame constante**.

Ne vom ocupa în special cu polinoame într-o singură nedeterminată ; aceasta va fi notată de obicei cu litera  $X$ .

Am învățat în clasele anterioare că orice polinom poate fi scris în formă canonică. De asemenea, am învățat să efectuăm trei operații cu polinoame : adunarea, scăderea și înmulțirea ; să le repetăm prin :

### EXERCIIII

1) Scrieți în formă canonică polinoamele :

a)  $\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + X^3 + 5$  ; b)  $X + 1 + 2X^2 + 3X^3$  ; c)  $1 - 2X + 4X^3 - 8X^7$  ; d)  $-X^5 - X + X^3 - X^2$ .

2) Scrieți în formă canonică suma polinoamelor :

a)  $7X^2 - 3X + 5$  și  $2X^2 + 7$  ; b)  $2X - 5$  și  $4X^2 - 3X + 6$  ; c)  $1 - X + X^2 - X^3 + X^4$  și  $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$  ; d)  $X^2 - X + 1$ ,  $X^2 + X + 1$  și  $X^3 - 2X^2 + 1$ .

3) Ce polinom trebuie adunat cu  $X^3 + 2X - 3$  pentru a obține ca rezultat  $X^4 - X^2 + 1$  ?

- 4) Efectuați calculele :  
 a)  $(3X^2 - 3X + 5) - (2X^2 - 3X + 4)$ ; b)  $(X^3 + 2X - 6) - (3X^3 - X^2 + 2)$ ; c)  $(5X^2 + 6X + 3) - (X^2 + 2X) + (2X^2 + 5)$ .  
 5) Efectuați înmulțirile :  
 a)  $3X^2 \cdot (4X - 1)$ ; b)  $(4X^3 - 5X - 1) \cdot 2X^2$ ; c)  $(X^2 - 7X - 3) \cdot (2X - 1)$ ; d)  $(X^4 + X^3 - 8) \cdot (2X^2 - 3X + 1)$ .

## 2. ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

Fie monoamele  $6X^5$  și  $2X^3$ . Constatăm că :

$$6X^5 = 3X^2 \cdot 2X^3;$$

putem scrie astfel :

$$6X^5 : 2X^3 = 3X^2.$$

Observați relația între gradele monoamelor :  $5 - 3 = 2$ .

În general, dacă  $m \geq n$  și  $b \neq 0$ , atunci :

$$aX^m : bX^n = (a : b)X^{m-n}$$

care se mai scrie și :

$$aX^m : bX^n = \frac{a}{b} X^{m-n}.$$

La fel procedăm și în cazul unor monoame în mai multe nedeterminate ; de exemplu :

$$12X^3Y^2 : 4XY = (12 : 4)X^{3-1}Y^{2-1} = 3X^2Y,$$

$$(-14XY^3Z) : 2XY^2 = (-14 : 2)X^{1-1}Y^{3-2}Z^{1-0} = -7YZ,$$

$$(-3X^2Y^3) : (-2Y) = ((-3) : (-2))X^{2-0}Y^{3-1} = \frac{3}{2} X^2Y^2 = 1,5X^2Y^2,$$

$$22X^4 : 11 = (22 : 11)X^{4-0} = 2X^4.$$

### EXERCITII

- 1) Efectuați împărțirile :  
 a)  $8X^4 : (-2X^2)$ ; b)  $(-6X^5) : 4X^3$ ; c)  $(-5X^6) : (-X^2)$ ; d)  $4X^7 : 8X$ ; e)  $25X^2 : 5X$ ;  
 f)  $5X^3 : (-10X)$ .

- 2) Efectuați :  
 a)  $(-15X^4Y^2) : (-5X^2Y^2)$ ; b)  $4X^6Y^2 : \left(-\frac{2}{3} X^3Y\right)$ ; c)  $3XY^4 : 2XY$ ; d)  $3X^3Y^2 : 4X^2Y^2$ ; e)  $25X^3Y^3 : 5XY^2$ ; f)  $(-6X^5Y^2) : 3X^2Y$ .

Fie polinoamele  $P(X) = 2X^2 + 4X$  și  $Q(X) = X + 2$ . Constatăm că  $P(X) = Q(X) \cdot 2X$ ; putem spune că polinomul  $C(X) = 2X$  este *cîtul* împărțirii polinomului  $P(X)$  la  $Q(X)$ .

Alt exemplu : deoarece

$$X^2 - 4 = (X - 2) \cdot (X + 2),$$

putem spune că polinomul  $X - 2$ .

Să încercăm să împărțim  $Q(X) = X^2 + X$ . Cît este acest cît este polinomul

de unde :  $2X^3 + 5X^2$

Identificînd coeficienții

ceea ce este absurd.

Presupunerea făcută este falsă. Nu putem împărți „fără rest”

Să observăm însă că

$$2X^3 + 5X^2 = 2X^2(X + 2) + X^2$$

astfel putem spune că  $2X^2$  este *cîtul*  $2X^3 + 5X^2$  și *restul* este  $X^2$ .

Să observăm că  $X^2 + X = X(X + 1)$ , care este 2.

Practic, procedăm astfel :

- împărțim monomul  $2X^3$  la  $2X^2$  și obținem  $X$ , care-l scădem din  $2X^3 + 5X^2$  și obținem  $-2X^2$  la monomul  $X^2$ ,
- înmulțim pe  $X$  cu  $2X^2$  și obținem  $2X^3$ , care-l scădem din  $-2X^2$  și obținem  $-2X^2 + X$ ,
- deîmpărțim  $-2X^2$  la  $2X^2$  și obținem  $-1$ , care-l scădem din  $-2X^2 + X$  și obținem  $X + 1$ , care este *restul*.

(-)

putem spune că polinomul  $X + 2$  este cîtul împărțirii polinomului  $X^2 - 4$  la polinomul  $X - 2$ .

Să încercăm să împărțim polinomul  $P(X) = 2X^3 + 5X + 1$  la polinomul  $Q(X) = X^2 + X$ . Cîtul lor ar trebui să aibă gradul  $3 - 2 = 1$ . Să presupunem că acest cît este polinomul  $C(X) = aX + b$ ; atunci :

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (aX + b),$$

$$\text{de unde : } 2X^3 + 5X + 1 = aX^3 + (a + b)X^2 + bX.$$

Identificînd coeficienții, obținem :

$$2 = a \quad (\text{coeficienții lui } X^3),$$

$$0 = a + b \quad (\text{coeficienții lui } X^2),$$

$$5 = b \quad (\text{coeficienții lui } X),$$

$$1 = 0 \quad (\text{termenii liberi}),$$

ceea ce este absurd.

Presupunerea făcută ne-a condus la o concluzie absurdă ; ea este deci falsă. Nu putem împărți „fără rest“ polinomul  $2X^3 + 5X + 1$  la  $X^2 + X$ .

Să observăm însă că :

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (2X - 2) + 7X + 1 ;$$

astfel putem spune că prin împărțirea lui  $2X^3 + 5X + 1$  la  $X^2 + X$  am obținut cîtul  $2X - 2$  și restul  $7X + 1$ .

Să observăm că gradul restului este 1, mai mic decît gradul împărțitorului  $X^2 + X$ , care este 2.

Practic, procedăm astfel :

— împărțim monomul  $2X^3$  la monomul  $X^2$  și obținem  $2X$  ;

— înmulțim pe  $2X$  cu  $X^2 + X$  și obținem produsul parțial  $2X^3 + 2X^2$  pe care-l scădem din deîmpărțit ;

— deîmpărțitul se înlocuiește cu  $-2X^2 + 5X + 1$  ; împărțim monomul  $-2X^2$  la monomul  $X^2$ , obținînd  $-2$  ;

— înmulțim pe  $-2$  cu  $X^2 + X$  și obținem produsul parțial  $-2X^2 - 2X$ , pe care-l scădem din  $-2X^2 + 5X$  ;

— deîmpărțitul se înlocuiește cu  $7X + 1$  ; deoarece monomul  $7X$  nu mai poate fi împărțit la monomul  $X^2$ , împărțirea s-a terminat. Cîtul este  $2X - 2$ , iar restul este  $7X + 1$ .

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 & + 5X + 1 \\ (-) + 2X^3 + 2X^2 & \\ \hline & -2X^2 + 5X + 1 \\ (-) -2X^2 - 2X & \\ \hline & 7X + 1 \end{array} \begin{array}{l} X^2 + X \\ 2X - 2 \\ \hline \text{cîtul} \\ \hline \text{restul} \end{array}$$

Se obișnuiește să se schimbe semnul fiecărui produs parțial, efectuându-se adunări în loc de scăderi; calculele se aranjează astfel:

$$\begin{array}{r} 2X^3 \quad + 5X + 1 \\ - 2X^3 - 2X^2 \\ \hline -2X^2 + 5X \\ 2X^2 + 2X \\ \hline 7X + 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} X^2 + X \\ 2X + 2 \end{array} \right.$$

Urmăriți etapă cu etapă, împărțirea polinomului  $81X^4 - 10X^2 + 35X + 1$  la polinomul  $9X^2 + X + 4$ :

$$\begin{array}{r} 81X^4 \quad - 10X^2 + 35X + 1 \\ - 81X^4 - 9X^3 - 36X^2 \\ \hline -9X^3 - 46X^2 + 35X \\ 9X^3 + X^2 + 4X \\ \hline -45X^2 + 39X + 1 \\ 45X^2 + 5X + 20 \\ \hline 44X + 21 \end{array} \left| \begin{array}{l} 9X^2 + X + 4 \\ 9X^2 - X - 5 \end{array} \right.$$

Deci cîmul împărțirii este  $9X^2 - X - 5$ , iar restul  $44X + 21$ .

În general, se poate demonstra o *teoremă a împărțirii cu rest* pentru polinoame. Aceasta se enunță astfel:

**TEOREMĂ.** Fie polinoamele  $P(X)$  de gradul  $p$  și  $Q(X)$  de gradul  $q$ , cu coeficienți numere reale.

Există un polinom  $C(X)$  și un polinom  $R(X)$  astfel încît

$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$$

și astfel încît gradul polinomului  $R(X)$  să fie mai mic decît  $q$ . Polinoamele  $C(X)$  și  $R(X)$  cu aceste proprietăți sînt unice.

*Observație.* Înainte de efectuarea împărțirii, atît deîmpărțitul cît și împărțitorul trebuie scriși în formă canonică.

## EXERCIIII

1) Efectuați împărțirile:

a)  $(3X^3 - 6X^2 + 2X) : 3X$ ; b)  $(6X^5 - 5X^4 + 4X^3) : (-2X^2)$ .

2) Efectuați împărțirile:

a)  $(X^2 - 5) : (X - 2)$ ; b)  $(3X^2 + 20) : (X - 3)$ ; c)  $(3X^2 - 27) : (X - 3)$ ; d)  $(8X^3 - 2) : (2X - 1)$ ; e)  $(25 - 30X + 9X^2) : (3X - 5)$ ; f)  $(X^3 - 6X^2 + 11X - 10) : (X - 4)$ .

3) Efectuați împărțirile:

a)  $(X^2 + 1) : (X + 1)$ ; b)  $(X^3 + 1) : (X + 1)$ ; c)  $(X^4 + 1) : (X + 1)$ ; d)  $(X^5 + 1) : (X + 1)$ ; e)  $(X^6 + 1) : (X + 1)$ ; f)  $(X^7 + 1) : (X + 1)$ . Puteți spune care va fi cîmul și restul împărțirii lui  $X^{19} + 1$  la  $X + 1$ ?

4) Efectuați împărțirile:  
a)  $(X^3 + 1) : (X + 1)$

5) Efectuați împărțirile:  
Ce observații?

6) Fie  $C(X)$  cîmul împărțirii polinomului  $X^3 - 2X^2 + X + 2$  la  $X^2 - 2$ . De ce?

7) Efectuați împărțirile:  
a)  $(X^5 - 2X^3 + X + 2) : (X^2 - 2)$ ; b)  $(X^4 - 7X^2 + 6X) : (X^2 - 2)$ ; d)

8) Efectuați împărțirile:  
nonică):

a)  $(X^4 - Y^4) : (X^2 - Y^2)$ ; b)  $(X^4 - Y^4) : (X^2 - Y)$ ; d)  $(6X^2 - 2X) : (X^2 - Y)$

9) Aflați restul împărțirii:  
rîndu-le:

a) polinoame în nedet.

10) Efectuați calculele:

$[(X^2 - 9) : (X - 3)]$

## 3. DIVIZIBILITATEA

**Definiție.** Vom spune că un polinom  $Q(X)$  divide pe un polinom  $P(X)$  și vom scrie  $Q(X) \mid P(X)$  sau  $Q \mid P$  (și vom citi „ $Q$  divide pe  $P$ ”) dacă există un polinom  $C(X)$  astfel încît  $P(X) = Q(X) \cdot C(X)$ .

Dacă  $Q \mid P$ , vom spune că  $P$  se divide cu  $Q$ .

De exemplu,  $X + 1 \mid X^2 - 3$  și vom scrie  $(X + 1) \mid (X^2 - 3)$ .

Polinomul  $2X^3 - 3$  se divide cu  $X + 2$ :  $2X^3 - 3 = (2X^2 + 4X + 6) \cdot (X + 2) - 9$ .

Polinomul constant  $2$  se divide cu  $X + 2$ :  $2 = 2 \cdot (X + 2) - 2X - 2$ .

$$= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} \right).$$

Polinomul  $X$  nu se divide cu  $X + 1$ ; la împărțirea lui  $X$  obținem restul  $1$ ; la  $X + 1$ .

*Observație.* Polinomul  $X^2 - 1$  se divide cu  $X + 1$  și cu  $X - 1$ . confundați divizibilitatea polin.

us parțial, efectuându-se

+ X

- 2

$81X^4 - 10X^2 + 35X + 1$

+ X + 4

- X - 5.

21. rțirii cu rest pentru poli-

(X) de gradul q, cu coefi-

cit

cit q. Polinoamele C(X) și

și împărțitorul trebuie scriși în

27) : (X - 3); d) (8X^3 - 2) :

0) : (X - 4).

(X + 1); d) (X^5 + 1) : (X + 1);

mul și restul împărțirii lui X^19 + 1

4) Efectuați împărțirile :

a)  $(X^3 + 1) : (X + 2)$ ; b)  $(X^6 + 1) : (X^2 + 2)$ ; c)  $(X^9 + 1) : (X^3 + 2)$ . Ce observați ?

5) Efectuați împărțirile :  $(X^4 + X^2 + 1) : (X^2 + X + 1)$  și  $(X^4 + X^2 + 1) : (X^2 - X + 1)$ .

Ce observați ?

6) Fie C(X) citul împărțirii polinomului  $X^3 + X^2 + X + 1$  la  $X^2 - X + 2$ . Efectuați împărțirea polinomului  $X^3 + X^2 + X + 1$  la C(X). Este adevărat că obținem citul  $X^2 - X + 2$ ? De ce ?

7) Efectuați împărțirile :

a)  $(X^5 - 2X^3 + X + 2) : (X^3 - X^2 - X + 1)$ ; b)  $(X^3 + 2 - X - 2X^2) : (4 - 4X + X^2)$ ; c)  $(X^4 - 7X^2 + 6X) : (X^2 - 2)$ ; d)  $(18X^4 - 8X^3 + 4X^2 - 1) : (4X^2 + X - 1)$ .

8) Efectuați împărțirile polinoamelor în nedeterminata X (scrieți-le mai întâi în formă canonică) :

a)  $(X^4 - Y^4) : (X + Y)$ ; b)  $(15X^2 + 26XY + 8Y^2) : (3X + 4Y)$ ; c)  $(2X^3 + 3X^2Y + 2XY - Y^2) : (X^2 - Y)$ ; d)  $(6X^2 - 2XY - 8Y^2 + 5) : (3X + 5Y + 2)$ ; e)  $(9X^3 - 6X^2Y - 2XY^2 + 4Y^3) : (3X + 2Y)$ .

9) Aflați restul împărțirii polinomului  $X^2 - 6XY + 9Y^2$  la polinomul  $X^2 - 9Y^2$ , considerându-le :

a) polinoame în nedeterminata X; b) polinoame în nedeterminata Y.

10) Efectuați calculele :

$$[(X^2 - 9) \cdot (X^2 + 2X)] : [(X + 2)(X - 3)] ; (X^2 - 3X)^2 : (X + 2)^2.$$

### 3. DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR. POLINOAME IREDUCTIBILE

**Definiție.** Vom spune că polinomul Q(X) **divide** polinomul P(X) dacă există un polinom C(X) astfel încât  $P(X) = Q(X) \cdot C(X)$  (adică dacă restul împărțirii lui P(X) la Q(X) este polinomul nul). În acest caz vom nota  $Q(X) | P(X)$  sau  $Q | P$  (și vom citi „Q divide pe P”).

Dacă  $Q | P$ , vom mai spune că polinomul P este **multiplu** al polinomului Q, sau că P se divide cu Q.

De exemplu,  $X + 1$  divide pe  $X^2 - 1$ , deoarece  $X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1)$ ; scriem  $(X + 1) | (X^2 - 1)$ .

Polinomul  $2X^3 - 1$  divide polinomul  $2X^5 + 6X^3 - X^2 - 3$ , deoarece  $2X^5 + 6X^3 - X^2 - 3 = (2X^3 - 1) \cdot (X^2 + 3)$ .

Polinomul constant 2 divide polinomul  $2X + 4$ , deoarece  $2X + 4 = 2 \cdot (X + 2)$ ; constanta 2 divide și polinomul  $X + 1$ , deoarece  $X + 1 =$

$$= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} \right).$$

Polinomul X nu divide polinomul  $X^2 + 1$ , deoarece împărțind pe  $X^2 + 1$  la X obținem restul 1; la fel,  $X + 3$  nu divide pe  $X^3 + 3X - 5$ .

**Observație.** Polinomul constant 2 divide polinomul constant 3, deoarece  $3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$ . Nu confundați divizibilitatea polinoamelor cu divizibilitatea numerelor naturale !

$\frac{5}{3}$

## EXERCITII

- 1) Stabiliți dacă polinomul  $Q$  divide sau nu polinomul  $P$ , unde a)  $P = 4X^5 - 3$ ,  $Q = 3X - 2$ ;  
 b)  $P = X^3 - 2X + 1$ ,  $Q = X - 1$ ; c)  $P = X^3 - 8$ ,  $Q = X^2 + 2X + 4$ ; d)  $P = X^5 + 1$ ,  $Q = X - 1$ ;  
 e)  $P = X^6 - 1$ ,  $Q = X^2 + X + 1$ ; f)  $P = 3X^2 - 14X + 15$ ,  $Q = 2X - \frac{10}{3}$ .

- 2) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
 a)  $(X^2 - 1) \mid (X - 1)$ ; b)  $(X + 1) \mid (X^2 + 1)$ ; c)  $(X - 2) \mid (X^2 - X - 2)$ ; d)  $3 \mid 4X$ ;  
 e)  $(X + 1) \mid (2X - 1)$ .

- 3) Pentru ce valori ale lui  $m$ , polinomul  $2X^5 + 5X^2 + m$  se divide cu polinomul  $X + 2$ ?

- 4) Fie polinomul  $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ ; scrieți trei polinoame care îl divid. Aceeași problemă pentru polinomul  $X^3 - 3X^2 + 9X - 27$ .

5) Arătați că dacă polinomul  $R$  divide polinomul  $Q$ , iar polinomul  $Q$  divide polinomul  $P$ , atunci  $R$  divide pe  $P$ . Ce proprietate a relației de divizibilitate între polinoame este aceasta?

6) Arătați că dacă  $Q$  divide pe  $P$  și pe  $R$ , atunci  $Q$  îl divide și pe  $P + R$ .

**Definiție.** Vom spune că un polinom  $P(X)$  este **reductibil** dacă poate fi scris ca produs de polinoame:

$$P(X) = Q(X) \cdot R(X),$$

factorii  $Q$  și  $R$  având gradele  $\geq 1$ .

De exemplu, polinomul  $X^2 - 1$  este reductibil:

$$X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1);$$

de asemenea, polinomul  $X^2 + X - 2$  este reductibil:

$$X^2 + X - 2 = (X - 1) \cdot (X + 2).$$

Și polinomul  $X^4 + 1$  este reductibil:

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1) \cdot (X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

Ca exemple de polinoame ce nu sînt reductibile avem în primul rînd polinomul nul; apoi polinoamele constante  $\neq 0$ ; celelalte polinoame ce nu sînt reductibile vor fi numite **ireductibile**.

Observați schema de clasificare a polinoamelor:

- Polinoame ireductibile
- Polinomul nul
- Polinoame constante  $\neq 0$
- Polinoame reductibile

Comparați-o cu schema de clasificare a numerelor naturale:

- Numere prime
- Numărul 0
- Numărul 1
- Numere compuse

Vom arăta c  
 Să consideră

Dacă am pro

cu gradele lui  $Q$   
 $1 \geq 1 + 1$ , ceea

este ireductibil.

1) Descompunet

a)  $X^2 - 1$ ; b)  $X$

2) Precizați care

a)  $X^2 - 4$ ; b)  $X$

3) Fie  $P(X) = X$

(Notăm cu  $P(a)$  num

operațiile indicate; de

4) Fie  $P(X) = X$

pentru  $a \in \{-2, -1, 0$

4

Să luăm de  
 binomul  $X - 2$ :

Obținem cîtul  $X^2$

$P(2) : P(2) = 2^3 -$

oare aceasta o întî

Să considerăm

$X - a$ ; teorema în

astfel încît:

a)  $P(X) = (X$

b) gradul lui  $A$

Vom arăta că polinoamele de gradul 1 sînt ireductibile.  
Să considerăm polinomul de gradul 1 :

$$aX + b, a \neq 0.$$

Dacă am presupune că este reductibil :

$$aX + b = Q(X) \cdot R(X)$$

cu gradele lui  $Q$  și  $R$  mai mari decît 1, atunci din compararea gradelor am obține  $1 \geq 1 + 1$ , ceea ce este absurd. Deci orice polinom de gradul 1

$$aX + b, a \neq 0$$

este ireductibil.

### EXERCIIII

1) Descompuneți în factori polinoamele :

a)  $X^2 - 1$  ; b)  $X^3 - 1$  ; c)  $X^4 - 1$  ; d)  $X^6 - 1$  ; e)  $X^8 - 1$  ; f)  $X^9 - 1$ .

2) Precizați care polinoame sînt reductibile :

a)  $X^2 - 4$  ; b)  $X^2 - 2$  ; c)  $X^2 - 4X + 4$  ; d)  $2X + 2$  ; e)  $4X - 2$  ; f)  $X^3 + 8$  ; g)  $X^2 + 2$  ; h)  $X^4 + 1$ .

3) Fie  $P(X) = X^3 + 2X^2 - 3X - 1$ . Calculați  $P(-2)$ ,  $P(-1)$ ,  $P(0)$ ,  $P(1)$ ,  $P(\sqrt{2})$ ,  $P(\sqrt{3})$  și  $P(2)$ . (Notăm cu  $P(a)$  numărul obținut înlocuind în polinom nedeterminata  $X$  cu numărul  $a$  și efectuind operațiile indicate ; de exemplu,  $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 1 = 35$ .)

4) Fie  $P(X) = X^3 - 2X^2 - 4X - 5$  și  $Q(X) = [(X - 2) \cdot X - 4] \cdot X - 5$ . Calculați  $P(a)$  și  $Q(a)$  pentru  $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Ce observați ? De ce ?

### 4. ÎMPĂRȚIREA PRIN BINOMUL $X - a$

Să luăm de exemplu polinomul  $P(X) = X^3 - X + 1$  și să-l împărțim la binomul  $X - 2$  :

$$\begin{array}{r|l} X^3 & -X + 1 \\ -X^3 + 2X^2 & \\ \hline & 2X^2 - X \\ & -2X^2 + 4X \\ \hline & 3X + 1 \\ & -3X + 6 \\ \hline & 7 \end{array}$$

Obținem cîtul  $X^2 + 2X + 3$  și restul 7. Pe de altă parte, să calculăm numărul  $P(2) : P(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$ . Observăm că restul împărțirii este exact  $P(2)$ . Este oare aceasta o întîmplare ?

Să considerăm un polinom  $P(X)$  și să-l împărțim (cu rest) la binomul  $X - a$  ; teorema împărțirii cu rest ne spune că există polinoamele  $C(X)$  și  $R(X)$  astfel încît :

a)  $P(X) = (X - a) \cdot C(X) + R(X)$ ,

b) gradul lui  $R$  este mai mic decît gradul lui  $X - a$ .



Însă gradul lui  $X - a$  este 1 ; aşadar polinomul rest  $R(X)$  este constant :  $R(X) = r$ . Putem deci scrie :

$$P(X) = (X - a) \cdot C(X) + r.$$

Putem afla restul  $r$  fără a face împărţirea ? În egalitatea de mai sus să înlocuim nedeterminata  $X$  prin numărul  $a$  :

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + r.$$

Deoarece  $a - a = 0$ , obţinem că  $r = P(a)$ . Am dovedit de fapt următoarea :

**Teoremă.** Restul împărţirii polinomului  $P(X)$  la binomul  $X - a$  se obţine calculând valoarea  $P(a)$ .

Cum calculăm valoarea  $P(a)$  ? Să luăm câteva exemple.

Fie  $P(X) = X^2 + 2X + 3$  ; atunci  $P(a) = a \cdot a + 2 \cdot a + 3$ . Observăm că pentru a obţine pe  $P(a)$  trebuie să efectuăm două înmulţiri, apoi două adunări. Dacă scriem însă  $P(X) = (X + 2) \cdot X + 3$ , atunci pentru a obţine pe  $P(a) = (a + 2) \cdot a + 3$  efectuăm doar o înmulţire şi două adunări.

Alt exemplu. Fie polinomul  $T(X) = X^3 + 5X^2 - 6X + 4$  ; atunci  $T(a) = a \cdot (a \cdot a) + 5 \cdot (a \cdot a) - 6 \cdot a + 4$ . Pentru a-l obţine pe  $T(a)$  sînt necesare deci 4 înmulţiri şi 3 adunări (scăderea este considerată adunare). Putem proceda mai economic, calculînd cu formula  $T(X) = [(X + 5) \cdot X - 6] \cdot X + 4$  ; efectuăm doar 2 înmulţiri şi 3 adunări.

### EXERCİTIU REZOLVAT

Aflaţi valorile lui  $m$  şi  $n$  astfel încît polinomul  $P(X) = X^2 + mX + n$  să dea restul 2 la împărţirea cu  $X - 1$  şi restul 5 la împărţirea cu  $X - 3$ . Ce rest vom obţine dacă vom împărţi polinomul  $P(X)$  la  $X - 2$  ?

*Rezolvare.* Scriem  $P(1) = 2$  şi  $P(3) = 5$ , adică :

$$\begin{cases} 1 + m + n = 2, \\ 9 + 3m + n = 5. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii, obţinem  $m = -\frac{5}{2}$ ,  $n = \frac{7}{2}$ .

Putem calcula acum restul împărţirii polinomului la  $X - 2$  :

$$P(2) = 2^2 - \frac{5}{2} \cdot 2 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}.$$

### EXERCİTII

1) Aflaţi restul împărţirii polinomului  $5X^4 - 21X^2 + 7$  la binomul :

a)  $X - 1$ ; b)  $X - 2$ ; c)  $X + 1$ ; d)  $X - \frac{1}{2}$ ; e)  $X - \sqrt{2}$ .

2) Aflaţi restul

a)  $2X^2 + X -$

3) Aflaţi restul restul  $-3$ .

4) Aflaţi împărţirea la  $X - 3$

5) Împărţiri restul  $-2$ . Ce

6\*) Arătaţi du-l la  $vX - u$  obţin

În clasa a 2, 3, 5. Vom scrie  $X - a$ .

**Teoremă.** Dacă  $P(a) = 0$ .

*Demonstraţie.*  $P(X)$  la  $X - a$  e Reciproc, există un polinom  $P(X)$  se divide c

**Observaţie.** Dă mul este divizibil cu

se divid cu  $X - 1$ .

1) Care dintre a)  $7X^3 - 5X^2 +$  c)  $2X^3 - 3X^2 +$  2) Verificaţi dacă

a)  $2X^2 + X -$  şi  $X - 2$ ; d)  $2X^4 - 3$

3) Să prescrie a)  $X^4 + X^2 - 9$  36; c)  $X^4 - 10X^2 +$

omul rest  $R(X)$  este constant :

- r.

egalitatea de mai sus să înlo-

r.

dovedit de fapt următoarea :

la binomul  $X - a$  se obține

emple.

$- 2 \cdot a + 3$ . Observăm că pen-

lțiri, apoi două adunări. Dacă

entru a obține pe  $P(a) =$

adunări.

$- 6X + 4$ ; atunci  $T(a) = a \cdot$

e  $T(a)$  sînt necesare deci 4 în-

dunare). Putem proceda mai

$\cdot X - 6] \cdot X + 4$ ; efectuăm

T

$P(X) = X^2 + mX + n$  să dea

țirea cu  $X - 3$ . Ce rest vom

$$\frac{5}{2}, n = \frac{7}{2}.$$

la  $X - 2$ :

2) Aflați restul împărțirii la binomul  $X - 2$  a polinoamelor :

a)  $2X^2 + X - 10$ ; b)  $3X^4 - 4X^2 - 5X - 2$ ; c)  $2X^4 - 3X + 5$ ; d)  $4X^6 - X^2 + 5$ ; e)  $3X^2 - 8X - 3$ .

3) Aflați restul împărțirii polinomului  $3X^3 - mX^2 + 15$  la  $X - 4$ , știind că împărțit la  $X - 2$  dă restul  $-3$ .

4) Aflați restul împărțirii polinomului  $X^3 + 3aX + a - 1$  la binomul  $X - a$ , știind că prin împărțirea la  $X - 3$  dă restul 5.

5) Împărțind polinomul  $2X^3 - mX^2 + nX - 16$  la  $X - 3$  și  $X + 1$ , obținem în ambele cazuri restul  $-2$ . Ce rest vom obține dacă-l vom împărți la  $X - 1$ ?

6\*) Arătați că dacă împărțind polinomul  $P(X)$  la  $X - \frac{u}{v}$  obținem restul  $r$ , atunci împărțindu-l la  $vX - u$  obținem același rest  $r$ .

În clasa a V-a am învățat criterii de divizibilitate cu anumite numere prime : 2, 3, 5. Vom stabili acum un criteriu de divizibilitate cu polinomul ireductibil  $X - a$ .

**Teoremă.** Un polinom  $P(X)$  este divizibil cu binomul  $X - a$  dacă și numai dacă  $P(a) = 0$ .

*Demonstrație.* Dacă  $P(X)$  este divizibil cu  $X - a$ , atunci restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $X - a$  este 0; însă acest rest coincide cu  $P(a)$ .

Reciproc, dacă  $P(a) = 0$ , atunci teorema împărțirii cu rest ne asigură că există un polinom  $C(X)$  astfel încît  $P(X) = (X - a) \cdot C(X)$ , ceea ce înseamnă că  $P(X)$  se divide cu  $X - a$ . Teorema este demonstrată.

**Observație.** Dacă într-un polinom  $P(X)$  suma coeficienților este 0, atunci  $P(1) = 0$ , deci polinomul este divizibil cu  $X - 1$ . De exemplu, polinoamele

$$2X^2 - 3X + 1, 5X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X - 2, X^8 - 2X + 1$$

se divid cu  $X - 1$ .

## EXERCIIII

1) Care dintre polinoamele de mai jos sînt divizibile cu  $X - 1$ ?

a)  $7X^3 - 5X^2 + 4$ ; b)  $6X^3 - 5X - 1$ ; c)  $42X^2 + 27X - 69$ ; d)  $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X + 3$ ;

e)  $2X^3 - 3X^2 + 8X - 5$ .

2) Verificați dacă primul polinom este divizibil sau nu cu al doilea; în caz afirmativ aflați citul:

a)  $2X^2 + X - 10$  și  $X + \frac{5}{2}$ ; b)  $4X^3 - 5X^2 + 9X + 1$  și  $X - 3$ ; c)  $3X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 5X - 38$

și  $X - 2$ ; d)  $2X^4 - 3X + 5$  și  $X - 3$ .

3) Să presupunem că  $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Pentru ce valori ale lui  $a$ , polinomul:

a)  $X^3 + X^2 - 9X - 9$ ; b)  $X^3 + 3X^2 - 4X - 12$ ; c)  $X^3 - 3X^2 - X + 3$ ; d)  $X^3 - 4X^2 - 9X$

$\cdot 36$ ; e)  $X^4 - 10X^2 + 9$ ; f)  $X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$ , este divizibil cu  $X - a$ ?

## 5. DESCOMPUNEREA POLINOAMELOR ÎN FACTORI. FORMULE SPECIALE

Scrierea unui polinom ca produs de factori ireductibili prezintă aceleași avantaje ca și scrierea unui număr natural ca produs de factori primi ; este utilă în special atunci când efectuăm operații cu fracții.

Nu putem descompune întotdeauna *efectiv* un polinom în factori ireductibili ; de cele mai multe ori ne limităm la a-l descompune în doi factori.

În clasa a VII-a am învățat câteva formule speciale, care ne ajută în descompunerea în factori a polinoamelor. Să le reamintim :

— formula de scoatere a factorului comun :

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

— formula de restrângere a pătratului binomului :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

— formula de descompunere în factori a diferenței pătratelor :

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Să folosim aceste formule pe câteva exemple.

*Exemplul 1.* Polinomul  $X^8 + 4X^6$  se descompune în factori în mod evident :

$X^6(X^2 + 4)$ . La fel, polinomul  $\frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{3}X$  se descompune de exemplu

astfel :  $X \cdot \left( \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X - \frac{1}{3} \right)$ , sau astfel :

$$\frac{1}{2}X \cdot (3X^2 + X - 2).$$

*Exemplul 2.* Constatăm imediat că polinomul  $X^8 + 4X^4 + 4$  este pătratul unui binom :  $(X^4 + 2)^2$ . La fel, polinomul  $(5X + 2)^2 + 2(5X + 2) + 1$  este pătratul lui  $(5X + 2) + 1 = 5X + 3$ .

*Exemplul 3.* Polinomul  $25X^4 - 9$  poate fi descompus în produsul  $(5X^2 + 3)(5X^2 - 3)$ , sau în produsul  $(5X^2 + 3)(\sqrt{5}X + \sqrt{3})(\sqrt{5}X - \sqrt{3})$  ; ultima descompunere este o descompunere în factori ireductibili.

### EXERCIIII

1) Eliminați parantezele :

a)  $(2X + 4)^2$  ; b)  $(2X - 3)(X + 5)$  ; c)  $5X \left( \frac{1}{5}X + 2 \right)^2$  ; d)  $2X(3X - 8)(X - 3)$  ;

e)  $(X - 1)(X - 3)(X - 5)$ .

2) Scoateți factor comun :

a)  $14X^5 - 3X^3$  ; b)  $8X^4 + 4X^3 + X^2$  ; c)  $(3X - 1)^2 + 5(3X - 1)$  ; d)  $(6X + 1)^4 + 3(6X + 1)^3$  ;

e)  $2 \left( X + \frac{1}{2} \right)$

3) Complet

a)  $9X^4 + \dots$

4) Restring

a)  $X^6 + \dots$

e)  $12X^2 - 12X + \dots$

5) Descom

a)  $49X^6$

6\*) De

a)  $X^2 - 2$

O altă f

mula diferent

Asemănr

Observați cu

1) Desco

a)  $8X^3 - \dots$

2) Desco

a)  $X^3 + \dots$

3\*)

a)  $X^3 - \dots$

Uneor  
gradul 1.

De ex

săi,  $1 - 5$

rea, obține

$P(X) = (X$

Alt e

$- 12X +$

$T(X) = (X$

descompu

$T(X) = (X$

## IN FACTORI.

...abili prezintă aceleași factori primi; este utilă

...m în factori ireductibili de doi factori.

...re ne ajută în descom-

$$a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

...ctori în mod evident :

...compune de exemplu

$4X^4 + 4$  este pătratul  $(X + 2) + 1$  este pătra-

...s în produsul  $(5X^2 + \sqrt{3})$ ; ultima des-

d)  $2X(3X - 8)(X - 3)$  ;

d)  $(6X + 1)^4 + 3(6X + 1)^3$  ;

e)  $2 \left( X + \frac{1}{2} \right) + \left( X + \frac{1}{2} \right)^2$  ; f)  $(X + 3)(X - 4) + (X - 4)^2 + (X + 6)(X - 4)$ .

3) Completați pină la pătratul unui binom :

a)  $9X^4 + \dots + 25$  ; b)  $9X^4 - \dots + 100$  ; c)  $25 - 10X^3 + \dots$  ; d)  $16 + 24X + \dots$  ; e)  $4X^6 - 12X^3 + \dots$ .

4) Restringeți :

a)  $X^6 + X^3 + 0,25$  ; b)  $9X^4 - 12X^2 + 4$  ; c)  $9 - 12X^2 + 4X^4$  ; d)  $\frac{1}{2} X^2 + X + \frac{1}{2}$  ;

e)  $12X^2 - 12X + 3$ .

5) Descompuneți în factori :

a)  $49X^6 - 16$  ; b)  $(3X + 2)^2 - (2X + 3)^2$  ; c)  $(5X + 1)^2 - 16X^2$  ; d)  $8X^4 - 2X^2$  ; e)  $25X^5 - 16X^4$ .

6\*) Descompuneți în factori :

a)  $X^2 - 2$  ; b)  $X^4 - 3X^2$  ; c)  $2X^3 - X$ .

O altă formulă specială, mult utilizată în descompunerile în factori, este formula diferenței cuburilor :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Asemănătoare este și formula sumei cuburilor :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Observați cu atenție deosebirile dintre cele două formule.

### EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori polinoamele :

a)  $8X^3 - 27$  ; b)  $(X + 2)^3 + (X - 2)^3$  ; c)  $\frac{1}{64} X^4 - X$  ; d)  $X^6 - 27X^3$  ; e)  $8X^3 + 125$  ; f)  $16X^9 + \frac{1}{4}$ .

2) Descompuneți în factori :

a)  $X^3 + 2X^2(X - 1) - 1$  ; b)  $X^6 + 2X^3 + 1$  ; c)  $X^6 + X^3 - X^2 - 1$  ; d)  $X^5 - X^3 + X^2 - 1$ .

3\*) Descompuneți în factori :

a)  $X^3 - 2$  ; b)  $X^3 - 3$  ; c)  $X^3 - 4$  ; d)  $X^3 + 2$ .

Uneori putem descompune un polinom în factori căutându-i un factor de gradul 1.

De exemplu, fie polinomul  $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ . Suma coeficienților săi,  $1 - 5 + 8 - 4$ , este 0. Deci polinomul se divide cu  $X - 1$ . Efectuând împărțirea, obținem  $P(X) = (X - 1) \cdot (X^2 - 4X + 4)$  și observăm că putem descompune  $P(X) = (X - 1)(X - 2)^2$ .

Alt exemplu. Să descompunem în factori polinomul  $T(X) = X^4 - 7X^2 - 12X + 18$ . Deoarece suma coeficienților săi este 0, polinomul se divide cu  $X - 1$  :  $T(X) = (X - 1)(X^3 + X^2 - 6X - 18)$ . Deoarece  $3^3 + 3^2 - 6 \cdot 3 - 18 = 0$ , putem descompune  $X^3 + X^2 - 6X - 18 = (X - 3)(X^2 + 4X + 6)$ . Deci am descompus :  $T(X) = (X - 1)(X - 3)(X^2 + 4X + 6)$ .

Din exemplele de mai sus rezultă că în general, descompunerea în factori a unui polinom este dificil de executat. Nu există reguli generale de lucru ; trebuie folosite toate posibilitățile avute la îndemână, uneori chiar artificii de calcul ce denotă ingeniozitate.

*Observație.* Dacă un polinom are toți coeficienții numere întregi și se divide cu  $X - a$ , unde  $a \in \mathbb{Z}$ , atunci  $a$  este divizor al termenului liber al polinomului. Verificați aceasta pe exemplele de mai sus.

## EXERCIIII

1) Descompuneți în factori :

a)  $X^2 - X - 6$  ; b)  $X^2 + X - 6$  ; c)  $X^2 - 10X + 16$  ; d)  $X^2 - 7X + 12$  ; e)  $X^2 - 9X + 18$  ; f)  $3X^2 - 7X + 2$ .

2) Descompuneți în factori :

a)  $X^3 - 7X + 6$  ; b)  $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$  ; c)  $X^3 - 7X - 36$  ; d)  $X^3 - 3X + 2$  ; e)  $X^3 - 12X + 16$  ; f)  $4X^3 - 4X^2 - 9X + 9$ .

3) Descompuneți în factori :

a)  $X^4 - 25X^2 + 60X - 36$  ; b)  $X^4 - 6X^3 + 11X^2 + 6X - 24$  ; c)  $X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$  ; d)  $X^4 - 5X^2 + 4$  ; e)  $X^4 + 4X^2 - 32$  ; f)  $X^5 - X^3 - 8X^2 + 8$ .

Polinoamele în mai multe nedeterminate se descompun mult mai greu în factori. Nu există metode generale ; reușita descompunerii depinde foarte mult de utilizarea adecvată a formulelor speciale.

De exemplu, pentru a descompune în factori polinomul

$$X^2 + 2XY + Y^2 + XZ + YZ,$$

grupăm termenii în două grupe : prima grupă (formată din primii trei termeni) este pătratul unui binom ; în a doua grupă scoatem factor comun pe  $Z$ . Polinomul se scrie :  $(X + Y)^2 + (X + Y)Z$ . Scoțind încă o dată factor comun, am descompus în factori :  $(X + Y)(X + Y + Z)$ .

Alt exemplu : fie polinomul  $9X^2 - 6XY + Y^2 - 9$ . Primii trei termeni pot fi restrânși ; polinomul devine :  $(3X - Y)^2 - 9$ . Folosind formula diferenței pătratelor, am reușit descompunerea polinomului în factori :

$$(3X - Y + 3)(3X - Y - 3).$$

Alte exemple :

$$X^4 - 3X^2Y^2 + Y^4 = X^4 - 2X^2Y^2 + Y^4 - X^2Y^2 = (X^2 - Y^2)^2 - (XY)^2 = (X^2 - Y^2 + XY)(X^2 - Y^2 - XY) ;$$

$$X^2Y^2 + X^2 - Y^2 - 1 = X^2(Y^2 + 1) - (Y^2 + 1) = (X^2 - 1)(Y^2 + 1) = (X + 1)(X - 1)(Y^2 + 1) ;$$

$$X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ - 2X + 1 = (X^2 - 2X + 1) - (Y^2 - 2YZ + Z^2) = (X - 1)^2 - (Y - Z)^2 = (X + Y - Z - 1)(X - Y + Z - 1) ;$$

$$X^2 - 5XY + 6Y^2 = X^2 - 2XY - 3XY + 6Y^2 = X(X - 2Y) - 3Y(X - 2Y) = (X - 3Y)(X - 2Y) ;$$

$$X^4 + X^2Y^2 + Y^4 = X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 - X^2Y^2 = (X^2 + Y^2)^2 - (XY)^2 = (X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2) ;$$

$$X^5 - X^4Y + Y^4(X - Y) = (X^4 + Y^4)(X - Y) = (X^4 + Y^4)(X - Y)$$

1) Descompuneți

a)  $X^3 - X^2Y + Y^3 + 5Y + 15$  ; e)  $X^2Y + Y^3 + 15Y$

2) Descompuneți

a)  $X^3 + 2X^2Y^2 - 16Y^4$  ; f)  $27X^3 - 64Y^3$

3\*) Descompuneți

a)  $(XY + 1)^3 + 1$  ; d)  $(aX + bY)^2 + (bX - aY)^2 + 9Y^4$

4) Descompuneți

a)  $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$  ; e)  $X^3 + 3X^2 + 4X + 2$

## 6. CEL MAI MARE COMUN DIVIZOR

Fie polinomul

$$P(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

$$Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 4)$$

Fie polinoamele

Descompunem

Să observăm

$Q(X)$  ; spunem că  $P$  și  $Q$  au ca cel mai mare comun divizor

Iată lista polinoamelor

— polinoamele

— polinoamele

— polinoamele

— polinoamele

$$X^5 - X^4Y + X^3Y^2 - X^2Y^3 + XY^4 - Y^5 = X^4(X - Y) + X^2Y^2(X - Y) + Y^4(X - Y) = (X^4 + X^2Y^2 + Y^4)(X - Y) = (X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2)(X - Y).$$

## EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori (toate literele care apar sînt considerate nedeterminate):

a)  $X^3 - X^2Y + XY^2 - Y^3$ ; b)  $A^3 + A^2B + AB^2 + B^3$ ; c)  $X^2 + AX + BX + AB$ ; d)  $XY + 3X + 5Y + 15$ ; e)  $X^2Y + XY^2 + aXY - a^2X - a^2Y - a^3$ ; f)  $X^3 + aX^2 + 3a^2X + 3a^3$ .

2) Descompuneți în factori:

a)  $X^4 + 2X^2Y^2 - 3Y^4$ ; b)  $X^6 - Y^6$ ; c)  $9X^2 - 12XY + 4Y^2$ ; d)  $9X^2 - 12XY + 3Y^2$ ; e)  $81X^2Y^2 - 16Y^4$ ; f)  $27X^3 - 64Y^3$ .

3\*) Descompuneți în factori:

a)  $(XY + 1)^3 + (X + Y)^3$ ; b)  $(X - Y)(X^2 - Z^2) + (X - Z)(X^2 - Y^2)$ ; c)  $X^2 - a^2 - b^2 + 2ab$ ; d)  $(aX + bY)^2 + (bX - aY)^2$ ; e)  $X^3 - 2XY^2 + Y^3$ ; f)  $(X + Y)^4 - (X^2 - 4XY + Y^2)^2$ ; g)  $X^4 + 2X^2Y^2 + 9Y^4$ .

4) Descompuneți în factori ireductibili, căutînd mai întîi un factor de forma  $X - a$ :

a)  $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ ; b)  $X^3 - 4X^2 + X + 6$ ; c)  $X^3 + 2X^2 - 5X - 6$ ; d)  $X^3 - 2,3X^2 - 1,7X + 3$ ; e)  $X^3 + 3X^2 + 4X + 2$ .

## 6. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN A DOUĂ POLINOAME

Fie polinomul  $T(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ . Care sînt polinoamele care îl divid? Observînd că se divide cu  $X - 1$ , putem să-l descompunem în factori:  $T(X) = (X - 1)(X - 2)^2$ .

Acum este evident că polinomul  $T(X)$  se divide cu  $X - 1$ , cu  $X - 2$ , cu  $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$  și cu  $(X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$ .

Fie polinoamele:

$$P(X) = 6X^5 - 24X^3 \text{ și } Q(X) = 3X^3 - 12X^2 + 12X.$$

Descompunîndu-le în factori, putem scrie:

$$P(X) = 6X^3(X + 2)(X - 2), \quad Q(X) = 3X(X - 2)^2.$$

Să observăm că binomul  $X - 2$  este divizor al ambelor polinoame  $P(X)$  și  $Q(X)$ ; spunem despre el că este **divizor comun** polinoamelor  $P$  și  $Q$ . De asemenea, polinoamele  $X$  și  $X(X - 2) = X^2 - 2X$  sînt divizori comuni polinoamelor  $P$  și  $Q$ .

Iată lista polinoamelor care sînt divizori comuni lui  $P$  și  $Q$ :

- polinoamele constante  $a$ ;
  - polinoamele de forma  $aX$ ;
  - polinoamele de forma  $a(X - 2)$ ;
  - polinoamele de forma  $aX(X - 2)$ ,
- unde  $a$  este un număr real  $\neq 0$ .

Observăm că toți divizorii comuni lui  $P$  și  $Q$  divid și pe  $X(X-2) = X^2 - 2X$ ; acesta este numit cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$ .

Dacă luăm polinomul  $3X(X-2)$  și polinomul  $2X(X-2)$ , observăm că ele sînt multipli ai tuturor divizorilor lui  $P$  și  $Q$ ; putem să le numim și pe ele „cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$ ”; preferăm însă să lucrăm cu  $X(X-2) = X^2 - 2X$ , deoarece coeficientul termenului de gradul cel mai înalt este 1.

Să observăm că divizorii comuni lui  $P$  și  $Q$  au gradele 0, 1 și 2, iar cel mai mare divizor comun lui  $P$  și  $Q$  are gradul 2.

**Definiție.** Fie două polinoame  $P(X)$  și  $Q(X)$ . Un polinom  $D(X)$  ce are următoarele proprietăți :

- 1) este divizor al lui  $P(X)$  și al lui  $Q(X)$  ;
- 2) orice divizor al lui  $P$  și  $Q$  este divizor și al lui  $D(X)$ , va fi numit **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor  $P$  și  $Q$ .

*Observații.* 1) Cel mai mare divizor comun a două polinoame *nu este unic* ; orice polinom de formă  $aD(X)$ , unde  $a$  este un număr real  $\neq 0$ , are și el proprietățile 1) și 2).

2) Cel mai mare divizor comun a două polinoame  $P$  și  $Q$  este divizor comun al lui  $P$  și al lui  $Q$  ; gradul său este cel mai mare dintre gradele divizorilor comuni lui  $P$  și  $Q$ .

Cum putem obține efectiv cel mai mare divizor comun a două polinoame ? Dacă polinoamele  $P$  și  $Q$  sînt **descompuse în factori ireductibili**, atunci cel mai mare divizor comun al lor se obține luînd produsul factorilor ireductibili comuni, la puterea cea mai mică cu care apar în cele două descompuneri.

De exemplu, fie polinoamele :

$$P(X) = X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 14X^2 + 12X + 8 = (X + 2)^3(X^2 + 1) \text{ și}$$

$$Q(X) = 2X^5 + 6X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 8 = 2(X + 2)^2(X^2 + 1)(X - 1).$$

În cele două descompuneri apar factorii ireductibili  $X + 2$ ,  $X^2 + 1$  și  $X - 1$ . Dintre aceștia, doar primii doi apar în ambele descompuneri. Factorul  $X + 2$  apare cu exponenții 3 și 2, deci va apărea cu exponentul 2 în cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$ . Cel mai mare divizor comun al lui  $P$  și  $Q$  va fi polinomul :

$$D(X) = (X + 2)^2(X^2 + 1) = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 4X + 4.$$

*Alt exemplu.* Fie  $A(X) = 2X + 1$  și  $B(X) = (X - 1)(X + 3)$ . Nu există nici un factor ireductibil comun polinoamelor  $A$  și  $B$ ; deci cel mai mare divizor comun al lui  $A$  și  $B$  este 1 ; polinoamele  $A$  și  $B$  sînt prime între ele.

## EXERCITII

- 1) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor :
- a)  $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$  și  $(X + 1)(X - 2)(X + 3)$  ; b)  $(X - 1)^2(X + 5)$  și  $(X - 1)(X + 5)^2$  ;
  - c)  $(X + 3)(X - 3)$  și  $(X + 3)^2$  ; d)  $14X(X + 7)$  și  $4X^2(X - 7)$  ; e)  $3X^3(X - 1)^2(X + 1)(X^2 + 1)$  și  $4X(X - 1)^2(X^2 + 1)$ . Scrieți-l în formă canonică.

2) Aflați  
a)  $X^3 -$   
d)  $X^2 - 3X +$   
g)  $2X^2 + 2X -$   
3) Scrieți  
 $Q(X)$  să fie  $D(X)$   
a)  $Q(X) =$   
 $- 12X + 4, D(X)$

4)

a)  $X^2$

5)

a)  $X^2 +$

Nu în  
bili. Metod  
nu este ap  
mică, numi  
Să lu  
+  $X - 20$ .  
Împăr

Obținem c

Împăr

Obținem c

Deoa  
este cel ma

Alt

$Q(X) = X^3$

\* Eucli  
autorul unui

- 2) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor :
- a)  $X^3 - X$  și  $X^2 + 2X + X$ ; b)  $X^2 + X$  și  $X^2 + 2X + 1$ ; c)  $4X^2 + 12X + 9$  și  $8X^2 + 27$ ;  
d)  $X^2 - 3X + 2$  și  $X^2 - X - 2$ ; e)  $8X^2 - 32$  și  $2X^2 - 14X + 20$ ; f)  $X^2 - 7X + 12$  și  $3X^2 - 6X - 24$ ;  
g)  $2X^2 + 2X - 4$  și  $4X^2 - 12X - 40$ ; h)  $X^2 - X - 2$  și  $X^3 - X^2 - 4X + 4$ .
- 3) Scrieți un polinom  $P(X)$  de gradul 2 astfel încât cel mai mare divizor comun al lui  $P(X)$  și  $Q(X)$  să fie  $D(X)$ , unde :
- a)  $Q(X) = X^2 + 1$ ,  $D(X) = X + 1$ ; b)  $Q(X) = 2X^2 - 8$ ;  $D(X) = X - 2$ ; c)  $Q(X) = 9X^2 - 12X + 4$ ,  $D(X) = 3X - 2$ .

4) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor :

- a)  $X^2 - XY$  și  $X^2 - 2XY + Y^2$ ; b)  $6(X^2 - Y^2)^3$  și  $9(X^4 - Y^4)(X - Y)^2$ .

5) Arătați că polinoamele :

- a)  $X^2 + 1$  și  $X^3 + 1$ ; b)  $X^2 + 3X + 2$  și  $X^3 - 1$  sînt prime între ele.

Nu întotdeauna putem descompune efectiv polinoamele în factori ireductibili. Metoda de aflare a celui mai mare divizor comun, prezentată mai înainte, nu este aplicabilă întotdeauna. De aceea vom prezenta încă o metodă, algoritmică, numită *algoritmul lui Euclid\**.

Să luăm de exemplu polinoamele  $P(X) = X^2 + 2X - 24$  și  $Q(X) = X^2 + X - 20$ .

Împărțim polinomul  $P$  la polinomul  $Q$  :

$$\begin{array}{r|l} X^2 + 2X - 24 & X^2 + X - 20 \\ - X^2 - X + 20 & 1 \\ \hline & X - 4 \end{array}$$

Obținem câtul 1 și restul  $R_1(X) = X - 4$  :

$$P(X) = Q(X) \cdot 1 + (X - 4).$$

Împărțim polinomul  $Q$  la polinomul  $R_1$  :

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X - 20 & X - 4 \\ - X^2 + 4X & X + 5 \\ \hline & 5X - 20 \\ & - 5X + 20 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Obținem câtul  $X + 5$  și restul  $R_2(X) = 0$  :

$$Q(X) = R_1(X) \cdot (X + 5) + 0.$$

Deoarece restul  $R_2$  este 0, algoritmul se oprește ; restul  $R_1(X) = X - 4$  este cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$ .

*Alt exemplu.* Fie polinoamele  $P(X) = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 4X + 4$  și  $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 2X - 6$ .

\* Euclid — matematician grec ce a trăit în secolul III î.e.n. în orașul Alexandria (Egipt) ; este autorul unui faimos tratat de geometrie.



Împărțim polinomul  $P$  la polinomul  $Q$  (efectuați împărțirea!). Obținem cîțul  $X + 1$  și restul  $R_1(X) = 5X^2 + 10$ :

$$P(X) = Q(X) \cdot (X + 1) + (5X^2 + 10).$$

Împărțim polinomul  $Q$  la polinomul  $R_1$  (efectuați!). Obținem cîțul  $\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}$  și restul  $R_2(X) = 0$ :

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}\right) + 0.$$

Deoarece restul  $R_2$  este 0, algoritmul se oprește; restul  $R_1(X) = 5X^2 + 10$  este cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$ .

*Observație.* Putem spune că și  $X^2 + 2$  este cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$ .

*Alt exemplu.* Să aplicăm algoritmul lui Euclid polinoamelor  $P(X) = 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 2X - 4$  și  $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 4$ .

Împărțim polinomul  $P$  la polinomul  $Q$ . Obținem cîțul  $2X + 4$  și restul  $R_1(X) = 2X^2 - 10X + 12$ :

$$P(X) = Q(X) \cdot (2X + 4) + (2X^2 - 10X + 12).$$

Împărțim polinomul  $Q$  la polinomul  $R_1$ . Obținem cîțul  $\frac{1}{2}X + 1$ , iar restul  $R_2(X) = 8X - 16$ :

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{2}X + 1\right) + (8X - 16).$$

Împărțim polinomul  $R_1$  la polinomul  $R_2$ . Obținem cîțul  $\frac{1}{4}X - \frac{3}{4}$  și restul  $R_3(X) = 0$ :

$$R_1(X) = R_2(X) \cdot \left(\frac{1}{4}X - \frac{3}{4}\right) + 0.$$

Algoritmul se oprește aici. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$  este ultimul rest  $\neq 0$  obținut, anume  $R_2(X) = 8X - 16$ .

## EXERCII

1) Folosind algoritmul lui Euclid, calculați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:  
a)  $X^2 + 3X + 2$  și  $X^2 - X - 2$ ; b)  $X^2 - 5X + 4$  și  $X^2 + 2X - 63$ ; c)  $12X^2 + 5X - 3$  și  $6X^2 + X - 1$ ;  
d)  $5X^3 - 4X - 1$  și  $X^2 - 2X + 1$ .

2) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a)  $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$  și  $X^3 - 8X^2 + 19X - 12$ ; b)  $6X^3 + 13X^2 + 15X - 25$  și  $2X^3 + 4X^2 + 4X - 10$ ; c)  $6X^4 + X^3 - X$  și  $4X^3 - 6X^2 - 4X + 3$ ; d)  $2X^4 - 12X^3 + 19X^2 - 6X + 9$  și  $4X^3 - 18X^2 + 19X - 3$ ; e)  $X^4 + 2X^3 - X + 2$  și  $X^4 - X^3 + 2X^2 + X + 3$ ; f)  $2X^5 - 11X^2 - 9$  și  $4X^5 + 11X^4 + 81$ ;  
g)  $3X^5 - X^4 - 3X + 1$  și  $3X^4 + X^3 + X^2 + X - 2$ ; h)  $X^8 - 17X^4 + 16$  și  $X^7 - 12X + 11$ .

3) Sînt polinoamele  $3X^2 - 4X + 1$  și  $2X^2 + X + 1$  prime între ele? Dar polinoamele  $4X^2 - 5X + 1$  și  $X^2 - 5X + 4$ ?

**Cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor  $P(X)$  și  $Q(X)$  este un polinom  $M(X)$  ce are proprietățile:

- polinoamele  $P(X)$  și  $Q(X)$  divid polinomul  $M(X)$ ;
- dacă  $P(X)$  și  $Q(X)$  divid un polinom  $T(X)$ , atunci și polinomul  $M(X)$  îl divide pe  $T(X)$ .

Cu alte cuvinte:

- $M(X)$  este un multiplu al polinoamelor  $P(X)$  și  $Q(X)$ ;
- dacă  $T(X)$  este multiplu al polinoamelor  $P(X)$  și  $Q(X)$ , atunci  $T(X)$  este multiplu și al lui  $M(X)$ .

Între polinoamele  $P(X)$ ,  $Q(X)$ , cel mai mare divizor comun  $D(X)$  al lor și cel mai mic multiplu comun  $M(X)$  al lor există relația:

$$P(X) \cdot Q(X) = D(X) \cdot M(X)$$

Această relație ne permite să-l aflăm pe  $M(X)$ , dacă îl cunoaștem pe  $D(X)$ :

$$M(X) = [P(X) \cdot Q(X)] : D(X)$$

Dacă polinoamele  $P(X)$  și  $Q(X)$  sînt descompuse în factori ireductibili, atunci  $M(X)$  poate fi luat produsul tuturor factorilor ce apar în descompuneri, fiecare factor la puterea cea mai mare.

De exemplu, cel mai mic multiplu comun al polinoamelor  $P(X) = (X - 1)^2(X + 2)(X + 3)$  și  $Q(X) = (X - 1)(X + 2)^3$  este polinomul  $M(X) = (X - 1)^2(X + 2)^3(X + 3)$ .

#### EXERCITIUL REZOLVAT

Să aflăm cel mai mic multiplu comun al polinoamelor  $2X^3 - X^2$ ,  $2X^2 + X$  și  $4X^2 - 1$ .

*Rezolvare.* Descompunem cele trei polinoame în factori ireductibili:

$$2X^3 - X^2 = X^2(2X - 1),$$

$$2X^2 + X = X(2X + 1),$$

$$4X^2 - 1 = (2X + 1)(2X - 1).$$

În descompuneri apar factorii ireductibili  $X$ ,  $2X - 1$  și  $2X + 1$ . Primul apare cu exponentul 2 în prima descompunere. Cel mai mic multiplu comun va fi  $X^2(2X - 1)(2X + 1) = 4X^4 - X^2$ .

#### EXERCITII

1) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

a)  $(X - 1)^2(X - 2)$  și  $(X - 1)(X - 2)^2$ ; b)  $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$  și  $(X - 1)^2(X - 3)$ ; c)  $(X - 1)^2$  și  $(X - 1)(X + 1)^2$ .

2) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

$$X^2 - (a+b)X + ab \text{ și } X^2 - (a+c)X + ac.$$

Scrieți-l în formă canonică.

3) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

- a)  $X^2 - 4X$  și  $X^2 - 8X + 16$ ; b)  $X^2 + 2X$  și  $X^3 + 8$ ; c)  $X^3 + 1$  și  $X^3 - X^2 + X$ ;  
d)  $9X^2 + 12X + 4$  și  $27X^3 + 8$ ; e)  $X^3 - X$  și  $X^3 - 1$ ; f)  $X^2 - 3X + 2$  și  $X^2 - X - 2$ .

4) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

- a)  $1 - X$ ,  $1 + X$  și  $1 - X^2$ ; b)  $(X+2)^2$ ,  $(X+2)(X+1)$  și  $(X+2)(X+3)$ ; c)  $X - 2$ ,  $(X-2)^2$  și  $(X-2)^3$ ; d)  $X$ ,  $X-1$  și  $X^2 - 1$ ; e)  $3X - 1$ ,  $3X + 1$  și  $1 - 9X^2$ ; f)  $3X^2 + 5$  și  $4X^2 - X + 1$ .

5\*) Aflați cel mai mic multiplu comun :

- a)  $X^4 - 6X^2 + 11X - 6$  și  $X^3 - 8X^2 + 19X - 12$ ; b)  $X^4 - 1$  și  $X^6 - 1$ .

## 7. FUNCȚII POLINOMIALE ȘI ECUAȚII POLINOMIALE. TEOREMA LUI BÉZOUT

Am întâlnit în lecțiile anterioare multe exemple de polinoame. Putem scrie acum forma generală a unui polinom în nedeterminata  $X$ , de gradul  $n$  :

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

sau

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n,$$

unde coeficienții  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  sînt numere reale, iar  $a_n \neq 0$ .

Să luăm de exemplu polinomul  $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 5$ . Scriindu-l astfel :  $P(X) = 2X^3 + (-3)X^2 + 0X + 5$ , recunoaștem coeficienții :

$$a_3 = 2, a_2 = -3, a_1 = 0, a_0 = 5.$$

Să înlocuim în acest polinom nedeterminata  $X$  cu numărul 1 ; obținem ca rezultat numărul  $2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 = 4$  ; îl notăm  $P(1)$ . Deci  $P(1) = 4$ .

Dacă înlocuim nedeterminata  $X$  cu numărul  $\frac{3}{2}$ , obținem ca rezultat numărul  $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = 5$  ; îl notăm  $P\left(\frac{3}{2}\right)$ . Deci  $P\left(\frac{3}{2}\right) = 5$ . La fel,

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 = 9, P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 = 0.$$

Înlocuind nedeterminata  $X$  cu un număr  $x$ , obținem ca rezultat numărul  $2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 5$ , care se notează  $P(x)$ . Putem defini o funcție  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  prin  $h(x) = P(x)$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ . Aceasta este o funcție polinomială.

În general, polinomul

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

determină o funcție polinomială  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , definită de formula  $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ .

Funcțiile liniare, descrise de

$$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$$

sînt exemple simple de funcții polinomiale.

Și funcțiile pătratice  
Fie  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

Orice număr  $r$  cu  
 $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} +$   
sînt tocmai soluții

Dacă  $a_n \neq 0$ , se sp  
De exemplu,  
cum am văzut. Pu  
III-lea

Am văzut că ecua

(cu  $a_1 \neq 0$ ) au o

$a_1 X + a_0$  are o sî  
o rădăcină reală  
 $2X^3 - 3X^2 + 5$  ar

Polinoamele,  
probleme ridicate  
rădăcinilor polino  
datorată lui Bézou

**Teoremă.** Nu  
binomul  $X - r$  îl c

Arătați că p  
numărul natural  
Într-adevăr,  
 $+ (n - 1) = 0$  ; d

Care polino  
 $P\left(\frac{1}{2}\right) = 3$  ?

Fiind un pol

\* Bézout, Étien

Și funcțiile pătratice  $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$  sînt funcții polinomiale.  
Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție polinomială, definită de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Orice număr  $r$  cu proprietatea că  $f(r) = 0$  va fi numit **rădăcină** a polinomului  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ . Rădăcinile reale ale acestui polinom sînt tocmai soluțiile ecuației polinomiale

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, x \in \mathbf{R}.$$

Dacă  $a_n \neq 0$ , se spune că aceasta este o ecuație de **gradul al  $n$ -lea**.

De exemplu, numărul  $-1$  este rădăcină a polinomului  $2x^3 - 3x^2 + 5$ , așa cum am văzut. Putem spune că  $-1$  este soluție a ecuației polinomiale de gradul al III-lea

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = 0, x \in \mathbf{R}.$$

Am văzut că ecuațiile de gradul I :

$$a_1 x + a_0 = 0, x \in \mathbf{R}$$

(cu  $a_1 \neq 0$ ) au o singură soluție, numărul  $-\frac{a_0}{a_1}$ . Deci polinomul de gradul I  $a_1 x + a_0$  are o singură rădăcină. Polinomul de gradul al II-lea  $x^2 + 1$  nu are nici o rădăcină reală (de ce?). Se poate arăta că polinomul de gradul al III-lea  $2x^3 - 3x^2 + 5$  are ca rădăcină reală doar pe  $-1$ .

Polinoamele, în special sub formă de funcții polinomiale, apar în multe probleme ridicate de fizică, chimie, tehnică. De multe ori interesează aflarea rădăcinilor polinoamelor. În acest scop se folosește mult următoarea teoremă, datorată lui Bézout\* :

**Teoremă.** Numărul  $r$  este rădăcină a polinomului  $P(X)$  dacă și numai dacă binomul  $X - r$  îl divide pe  $P(X)$ .

#### EXERCITIUL REZOLVAT

Arătați că polinomul  $X^{n+1} - nX^n + (n-1)$  se divide cu  $X - 1$ , oricare ar fi numărul natural  $n$ .

Într-adevăr, înlocuind nedeterminata  $X$  cu  $1$ , obținem  $1^{n+1} - n \cdot 1^n + (n-1) = 0$ ; deci  $1$  este rădăcină a polinomului.

#### EXERCITIUL REZOLVAT

Care polinom  $P(X)$  de gradul al II-lea are valorile  $P(-2) = 3$ ,  $P(-1) = 6$ ,

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 3?$$

Fiind un polinom de gradul al II-lea, îl vom scrie

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0.$$

\* Bézout, Étienne — matematician francez (1730—1783).

A găsi polinomul ce satisface condițiile date înseamnă a preciza valorile coeficienților  $a$ ,  $b$  și  $c$ .

Condiția  $P(-2) = 3$  se scrie  $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 3$ . La fel, celelalte condiții se scriu :

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 6$$

și

$$a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + c = 3.$$

Coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  formează soluția sistemului de ecuații. Rezolvându-l, obținem  $a = -2$ ,  $b = -3$ ,  $c = 5$ .

### EXERCITII

✓ 1) Fie polinomul  $P(X) = 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 5X + 1$ .

a) Calculați valorile  $P(-3)$ ,  $P(-2)$ ,  $P(-1)$ ,  $P(0)$ ,  $P(1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(3)$ .

b) Calculați  $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $P\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $P\left(\frac{3}{2}\right)$ .

c) Aproximați (cu eroare de cel mult 0,01) valorile  $P(-\sqrt{2})$ ,  $P(\sqrt{2})$ ,  $P(\sqrt{3})$ .

✓ 2) În împărțirea  $(2X^5 - 5X + a) : (X - 2)$ , determinați coeficientul  $a$  în așa fel încât restul să fie 0.

✓ 3) Care dintre numerele  $-3$ ,  $-2$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $-1$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $2$ ,  $\frac{5}{2}$  este rădăcină a polinomului :

a)  $X^3 + 4X^2 + 4X + 3$ ; b)  $4X^2 + 12X + 9$ ; c)  $2X^5 - X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 4X - 1$ ;  
d)  $2X^6 - X^5 - 5X^3 - 5X^2 - X$ ?

4) Aflați polinomul de gradul al doilea  $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$  știind că :

a)  $P(-3) = -39$ ,  $P(0) = 0$ ,  $P(3) = -33$ ; b)  $P(-1) = 0$ ,  $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ ,  $P(1) = 0$ ; c)  $P(-2) = -3$ ,  
 $P(-1) = -4$ ,  $P(1) = 12$ .

Fie polinomul în nedeterminatele  $X$  și  $Y$  :

$$P(X, Y) = 2X^2 + XY + 5Y + 1.$$

Înlocuind nedeterminata  $X$  cu numărul 3, iar nedeterminata  $Y$  cu numărul  $-4$ , obținem ca rezultat numărul  $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) + 1 = -13$ , pe care îl notăm  $P(3, -4)$ . Deci  $P(3, -4) = -13$ .

Înlocuind nedeterminata  $X$  cu un număr  $x$ , iar pe  $Y$  cu numărul  $y$ , obținem numărul  $2 \cdot x^2 + x \cdot y + 5 \cdot y + 1$ , care va fi notat  $P(x, y)$ . Acest număr este numit **valoarea** polinomului  $P$  în  $(x, y)$ .

Așadar,  $P(1, 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 1 = 9$ ;  $P\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 1 = \frac{17}{2}$ ;  $P(-4, 3) = 2 \cdot (-4)^2 + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 36$ ;  
 $P(\sqrt{2}, 3) = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 20 + 3\sqrt{2}$ .

## EXERCIIII

- 1) Aflați valoarea polinomului  $Q(X, Y) = 2X - Y^2 + 2$  în :
- a) (1, 1); b) (1, 2); c) (-1, 1); d) (1, -2); e) (3, 2); f) (4,  $2\sqrt{2}$ ); g) (-2,  $\sqrt{3}$ ).
- 2) Pentru polinomul  $P(X, Y) = 5X^2 - XY^2 + Y^3 + X$ , calculați :
- a)  $P(x, 2)$ ; b)  $P(x, -1)$ ; c)  $P(1, y)$ ; d)  $P(-2, y)$ .
- 3) Fie polinomul  $P(X, Y) = X^2 - 3XY + 2Y - X + 3$ . Pentru ce număr  $y$  avem  $P(3, y) = 0$ ? Dar  $P(3, y) = 9$ ?

## 8. FRAȚII RAȚIONALE. AMPLIFICAREA ȘI SIMPLIFICAREA

O fracție rațională este o pereche de polinoame  $P$  și  $Q$ , scrisă astfel :  $\frac{P}{Q}$ . Numitorul  $Q$  trebuie să fie diferit de polinomul nul 0.

De exemplu,  $\frac{2X+1}{3X^2+1}$ ,  $\frac{X^2}{X}$ ,  $\frac{2X+1}{4}$ ,  $\frac{4X^2-4X+1}{(3X-1)^2}$  sînt fracții raționale în nedeterminata  $X$ , iar  $\frac{2X+Y}{X+2Y}$ ,  $\frac{X+1}{Y+1}$ ,  $\frac{Y^2}{X}$ ,  $\frac{X+Y^3}{1}$  sînt fracții raționale în nedeterminatele  $X$  și  $Y$ .

Fracțiile raționale ale căror numitori sînt constante  $\neq 0$  sînt de fapt polinoame. De exemplu, fracția  $\frac{2X^2+1}{1}$  se identifică cu polinomul  $2X^2+1$ ; fracția  $\frac{X^2+2}{2}$  se identifică cu polinomul  $\frac{1}{2}X^2+1$ ; fracția  $\frac{2X+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$  se identifică cu polinomul  $\frac{2}{\sqrt{2}}X + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}X + \sqrt{3}$ .

Putem amplifica o fracție rațională  $\frac{P}{Q}$  cu orice polinom  $R \neq 0$ ; ca rezultat obținem fracția rațională  $\frac{R \cdot P}{R \cdot Q}$ . De exemplu, amplificînd fracția rațională  $\frac{2X+1}{3X^2+1}$  cu polinomul  $X^2+X$ , obținem ca rezultat fracția rațională  $\frac{(X^2+X)(2X+1)}{(X^2+X)(3X^2+1)} = \frac{2X^3+3X^2+X}{3X^4+3X^3+X^2+X}$ .

Pentru a simplifica o fracție rațională  $\frac{P}{Q}$  cu un polinom  $R \neq 0$ , este necesar ca atît numărătorul  $P$  cît și numitorul  $Q$  să fie divizibile prin  $R$ .

De exemplu, fracția rațională  $\frac{2X^2+X}{3X^3+X}$  poate fi simplificată cu

polinomul  $X$ ; ca rezultat obținem fracția  $\frac{2X+1}{3X^2+1}$ ; fracția  $\frac{2X^3+3X^2+X}{3X^4+3X^3+X^2+X}$

poate fi simplificată cu  $X$ , cu  $X+1$  sau cu  $X^2+X$ . Obținem pe rând:

$$\frac{2X^2+3X+1}{3X^3+3X^2+X+1}, \frac{2X^2+X}{3X^3+X}, \text{ respectiv } \frac{2X+1}{3X^2+1}.$$

Primele două fracții obținute mai pot fi simplificate: prima cu  $X+1$ , a doua cu  $X$ ; ca rezultat obținem cea de-a treia fracție. Aceasta nu mai poate fi simplificată cu polinoame de grad  $\geq 1$ ; spunem că ea este *irreductibilă*.

Alt exemplu: fracția  $\frac{2X^2+X}{4X+2}$  poate fi simplificată cu polinomul

$2X+1$ ; ca rezultat obținem polinomul  $\frac{1}{2}X$ .

### EXERCITII

1) Simplificați fracțiile raționale:

a)  $\frac{2X^3}{3X^4}$ ; b)  $\frac{4X^2Y^3}{6X^4Y^3}$ ; c)  $\frac{8a^2XY^2}{12aX^2Y}$ ; d)  $\frac{5X^2-6X}{5X}$ ; e)  $\frac{XY-X}{XY+X}$

2) Simplificați:

a)  $\frac{9X^2+9X}{4X+4}$ ; b)  $\frac{X^2+2X+1}{X^2-1}$ ; c)  $\frac{X^2-1}{(X-1)^2}$ ; d)  $\frac{X^2-25}{X^2-10X+25}$ ; e)  $\frac{7X^4-7}{2X^2+2}$

f)  $\frac{X^3+8}{X^2+X}$ ; g)  $\frac{X^3+X^2+X}{X^3-1}$

3) Simplificați:

a)  $\frac{3X^2-3XY}{9XY-9Y^2}$ ; b)  $\frac{X^2-16Y^2}{X^2+8XY+16Y^2}$ ; c)  $\frac{X^3-Y^3}{2X-2Y}$ ; d)  $\frac{X^3-125Y^3}{X^2-10XY+25Y^2}$

4\*) Simplificați:

a)  $\frac{X^3-6X^2+11X-6}{X^2-3X+2}$ ; b)  $\frac{X^2-Y^2-2YZ-Z^2}{Y^2-X^2-2XZ-Z^2}$ ; c)  $\frac{9X^4-9XY^3}{X^3+X^2Y+XY^2-\frac{1}{2}(X^3-Y^3)}$

5) Amplificați cu  $X$ , apoi cu  $X-1$  fracțiile:

a)  $\frac{X}{X+1}$ ; b)  $\frac{X-1}{X}$ ; c)  $\frac{X^2+X+1}{X+1}$ ; d)  $\frac{X+1}{X^2+1}$

6) Amplificați fracțiile

$$\frac{X+1}{X^2-X} \text{ și } \frac{X-1}{X^2+X}$$

astfel încât să obțineți fracții având același numitor.

## 9. VALORILE UNEI FRAȚII RAȚIONALE FUNȚII RAȚIONALE

Fie de exemplu fracția rațională  $F(X) = \frac{X-1}{X^2-1}$ . Să înlocuim nedeterminata  $X$  cu numărul 2; obținem numărul  $\frac{2-1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$ , care se notează  $F(2)$ .

Deci  $F(2) = \frac{1}{3}$ . Dacă înlocuim nedeterminata  $X$  cu numărul  $-\frac{1}{2}$ , obținem ca

rezultat numărul  $\frac{-\frac{1}{2}-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}} = 2$ ; acesta se notează

$F\left(-\frac{1}{2}\right)$ . Deci  $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ . Se spune că fracția rațională are valoarea  $\frac{1}{3}$  în

2 și că are valoarea 2 în  $-\frac{1}{2}$ . De asemenea,  $F(0) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1$ .

Însă, dacă înlocuim nedeterminata  $X$  cu  $-1$  (sau cu 1), numitorul fracției se anulează: Se spune că fracția rațională  $F$  nu are definită valoarea în  $-1$  și în 1.

În general, dacă într-o fracție rațională  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  înlocuim nedeterminata  $X$  cu un număr real  $r$ , pot apărea două cazuri:

**Cazul 1:**  $Q(r) = 0$ . În acest caz spunem că fracția rațională  $F$  nu are definită valoarea în  $r$ , sau că nu este definită în  $r$ .

**Cazul 2:**  $Q(r) \neq 0$ . În acest caz fracția rațională  $F$  are valoarea  $\frac{P(r)}{Q(r)}$  în  $r$ ;

notăm  $F(r) = \frac{P(r)}{Q(r)}$ .

De exemplu, pentru a calcula efectiv valoarea  $F(r)$ , unde  $F(X) = \frac{8X^2 + 12X + 1}{(X-1)(X-6)}$ , vom scrie  $F(X) = \frac{1 + X \cdot (12 + X \cdot 8)}{6 + X \cdot (-7 + X)}$  și vom folosi

următorul algoritm:

**Pasul 0.** Citește numărul  $r$ . Dacă  $r \neq 1$  și  $r \neq 6$ , continuă cu pasul 1.

În caz contrar scrie „*excepție*”. Stop.

**Pasul 1.**  $a = r \cdot 8$ ;

**Pasul 2.**  $b = 12 + a$ ;

**Pasul 3.**  $c = r \cdot b$ ;

**Pasul 4.** numărător =  $1 + c$ ;

**Pasul 5.**  $d = -7 + r$ ;

**Pasul 6.**  $e = r \cdot d$ ;

**Pasul 7.** numitor =  $6 + e$ ;

**Pasul 8.**  $F(r) = \text{numărător} : \text{numitor}$ ;

**Pasul 9.** Scrie rezultatul  $F(r)$ . Stop.



Fie fracția  $\frac{X+1}{X^2-3X+2}$ . Numitorul are două rădăcini, anume 1 și 2.

Pentru orice număr real  $x$ , diferit de 1 și de 2, fracția are valoare în  $x$ , și anume  $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ . Putem defini o funcție  $h: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  prin  $h(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ ; aceasta este o funcție rațională.

În general, fie  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  o fracție rațională. Să notăm cu  $M$  mulțimea rădăcinilor reale ale numitorului  $Q(X)$ . Putem defini o funcție  $f: \mathbb{R} \setminus M \rightarrow \mathbb{R}$ , prin  $f(x) = F(x)$ . O astfel de funcție se numește funcție rațională.

Astfel, funcțiile  $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{3x^2+1}{x-1}$  și  $i: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i(x) = \frac{1}{x}$

sînt exemple de funcții raționale.

Și funcția  $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  descrisă de  $t(x) = \frac{1}{x^2+1}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , este o funcție rațională.

Studierea funcțiilor raționale va fi făcută în liceu.

### EXERCITII

1) Calculați valoarea fracțiilor raționale de mai jos în:  $-1$ ,  $1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $2$  și  $-\frac{5}{3}$ :

a)  $\frac{X+4}{X+6}$ ; b)  $\frac{2X+1}{X-3}$ ; c)  $\frac{3X^2-2}{X^2-3X}$ ; d)  $\frac{2X^2-5X+3}{X^3+2X+2}$ ; e)  $\frac{3X^2-5X+2}{X^2-6X+9}$

2) Pentru ce numere  $a$ , fracția rațională:

a)  $\frac{2X-3}{X-1}$ ; b)  $\frac{5}{2X+1}$ ; c)  $\frac{4X-3}{X+2}$ ; d)  $\frac{3X-17}{3X+15}$ ; e)  $\frac{12X-4}{6X}$  nu are definită valoarea în  $a$ ?

3) Scrieți algoritmul pentru calculul valorii  $F(r)$ , dacă  $F(X)$  este fracția rațională:

a)  $\frac{X+1}{X-2}$ ; b)  $\frac{X^2-2X+2}{3X+4}$ ; c)  $\frac{5X^2-4X+3}{X^2+1}$ .

## 10. OPERAȚII CU FRAȚII RAȚIONALE

Priviți circuitul electric desenat în figura 1: doi rezistori, avînd aceeași rezistență  $R$ , au fost legați în paralel cu rezistori de  $1 \text{ k}\Omega$  respectiv  $2 \text{ k}\Omega$ , iar cele două celule obținute au fost legate în serie. Care este rezistența totală a circuitului?

Cunoscînd formulele de calcul ale rezistențelor, vom putea afla rezistența primei celule:  $\frac{R}{R+1} \text{ k}\Omega$  (am presupus că și rezistența  $R$  este exprimată în ki-

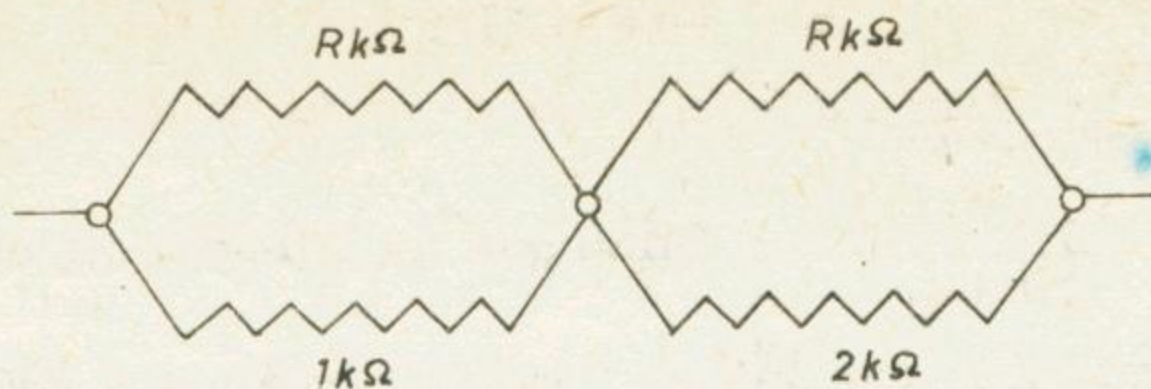


Fig. III.1

loohmi). Rezistența celei de-a doua celule este  $\frac{2R}{R+2}$  kΩ. Deci rezistența totală a circuitului este de  $\frac{R}{R+1} + \frac{2R}{R+2}$ . Aducînd la același numitor, putem să scriem :

$$\begin{aligned} \frac{R}{R+1} + \frac{2R}{R+2} &= \frac{R^2 + 2R}{(R+2)(R+1)} + \frac{2R^2 + 2R}{(R+1)(R+2)} = \\ &= \frac{(R^2 + 2R) + (2R^2 + 2R)}{(R+1)(R+2)} = \frac{3R^2 + 4R}{R^2 + 3R + 2} \end{aligned}$$

Avem un exemplu de adunare a două fracții raționale (în nedeterminata  $R$ ).

În fracțiile raționale nedeterminatele reprezintă de obicei numere reale ; chiar și fracțiile reprezintă numere reale ; de aceea este natural să definim operații cu fracții raționale, care să extindă operațiile cu numere : adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea.

De exemplu, pentru a aduna fracțiile raționale  $\frac{2X-1}{X}$  și  $\frac{5X-2}{X}$ , avînd în vedere că au același numitor, vom proceda astfel :

$$\frac{2X-1}{X} + \frac{5X-2}{X} = \frac{(2X-1) + (5X-2)}{X} = \frac{7X-3}{X}$$

La fel,

$$\frac{3}{X-1} + \frac{4X+1}{X-1} = \frac{3 + (4X+1)}{X-1} = \frac{4X+4}{X-1} ;$$

$$\frac{3X+Y}{X+Y} + \frac{X+2Y}{X+Y} = \frac{(3X+Y) + (X+2Y)}{X+Y} = \frac{4X+3Y}{X+Y} ;$$

$$\frac{X-2}{X^2-1} + \frac{X}{X^2-1} = \frac{(X-2) + X}{X^2-1} = \frac{2X-2}{X^2-1}$$

Să observăm că putem simplifica ultima fracție cu  $X-1$ ; ca rezultat obținem

$$\frac{2}{X+1}$$

Așadar, putem spune că suma fracțiilor  $\frac{X-2}{X^2-1}$  și  $\frac{X}{X^2-1}$ , după simplificare, este  $\frac{2}{X+1}$ . Se obișnuiește să se scrie :

$$\frac{X-2}{X^2-1} + \frac{X}{X^2-1} = \frac{2}{X+1}$$

## EXERCIȚII

1) Adunați fracțiile raționale:

a)  $\frac{1}{X+1}$  și  $\frac{5}{X+1}$ ; b)  $\frac{X+2}{X^2+X}$  și  $\frac{X-1}{X^2+X}$ ; c)  $\frac{5X-4}{11}$  și  $\frac{3X+2}{11}$ ;  
 d)  $\frac{X+2Y^2}{X^2Y}$  și  $\frac{2X-Y^2}{X^2Y}$ ; e)  $\frac{X-3}{X^2-2X}$  și  $\frac{X-1}{X^2-2X}$ ; f)  $\frac{X-Y^2}{X^2Y^2}$  și  $\frac{2X+Y^2}{X^2Y^2}$ .

2) Efectuați adunările, simplificând rezultatele:

a)  $\frac{5X}{X+2} + \frac{10}{X+2}$ ; b)  $\frac{X^{3x}}{X^2+X} + \frac{1}{X^2+X}$ ; c)  $\frac{2X+3}{(X-1)(X+3)} +$   
 $+$   $\frac{3}{(X-1)(X+3)}$ ; d)  $\frac{X^2}{X^3+1} + \frac{1-X}{X^3+1}$ ; e)  $\frac{X^2+1}{X^3-1} + \frac{X}{X^3-1}$ .

În general, dacă  $\frac{P}{Q}$  și  $\frac{R}{Q}$  sînt două fracții raționale cu același numitor, definim suma lor astfel:  $\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$ .

Pentru a aduna două fracții raționale cu numitorii diferiți, le vom aduce mai întii la același numitor, prin amplificarea convenabilă, apoi le vom aplica regula de mai sus.

De exemplu, fie fracțiile  $\frac{X^2}{X-1}$  și  $\frac{1}{X}$ . Pentru a le aduna, le vom aduce mai întii la același numitor, amplificîndu-le cu  $X$ , respectiv cu  $X-1$ :

$$x) \frac{X^2}{X-1} + \frac{1}{X} = \frac{X^3}{X(X-1)} + \frac{X-1}{X(X-1)} = \frac{X^3 + (X-1)}{X(X-1)} = \frac{X^3 + X - 1}{X^2 - X}$$

*Alt exemplu.* Pentru a aduna fracțiile  $\frac{X}{(X-1)^2}$  și  $\frac{3}{X^2-1}$ , să observăm că cel mai mic multiplu comun al numitorilor lor este  $(X-1)^2(X+1)$ . Așadar, pentru a le aduce la același numitor, le vom amplifica cu  $X+1$ , respectiv cu  $X-1$ :

$$\begin{aligned} x+1) \frac{X}{(X-1)^2} + \frac{3}{X^2-1} &= \frac{X^2+X}{(X+1)(X-1)^2} + \frac{3X-3}{(X-1)(X^2-1)} = \\ &= \frac{X^2+4X-3}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{X^2+4X-3}{X^3-X^2+X-1} \end{aligned}$$

Să adunăm fracțiile  $\frac{X}{X+1}$  și  $\frac{1}{X-1}$ . Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este produsul lor:  $(X+1)(X-1) = X^2-1$ . Vom proceda astfel:

$$\begin{aligned} x-1) \frac{X}{X+1} + \frac{1}{X-1} &= \frac{X^2-X}{X^2-1} + \frac{X+1}{X^2-1} = \\ &= \frac{(X^2-X) + (X+1)}{X^2-1} = \frac{X^2+1}{X^2-1} \end{aligned}$$

Să adunăm polinomul  $2X + 5$  cu fracția rațională  $\frac{3X^2}{X-1}$ . Polinomul poate fi scris ca fracție rațională cu numitorul 1:  $\frac{2X+5}{1}$ . Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este chiar numitorul fracției  $\frac{3X^2}{X-1}$ . Vom proceda astfel:

$$x^{-1}(2X+5) + \frac{3X^2}{X-1} = \frac{(X-1)(2X+5) + 3X^2}{X-1} = \frac{5X^2 + 3X - 5}{X-1}$$

De regulă, rezultatul adunării a două fracții raționale trebuie simplificat pe cât posibil. Preferăm, din motive evidente, scrierea lui sub forma unei fracții ireductibile (însă aceasta este, în general, dificil de realizat).

Astfel, să luăm ca exemplu fracțiile raționale  $\frac{X+2}{X^2+X}$  și  $\frac{1}{X+1}$ . Adunându-le, obținem:

$$\frac{X+2}{X^2+X} + \frac{1}{X+1} = \frac{(X+2) + X}{X(X+1)} = \frac{2X+2}{X(X+1)}$$

Rezultatul obținut poate fi simplificat cu  $X+1$ ; se obișnuiește să se scrie:

$$\frac{X+2}{X^2+X} + \frac{1}{X+1} = \frac{2}{X}$$

*Alt exemplu.* Să luăm fracțiile raționale

$$\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2} \text{ și } \frac{3X+1}{X^4 + X^3 + X^2}$$

Adunându-le (observând că cel mai mic multiplu comun al numitorilor este  $X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X^2+X+1)$ ), obținem:

$$\begin{aligned} & \frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2} + \frac{3X+1}{X^4 + X^3 + X^2} = \\ & = \frac{(X^3 - 3X^2 + 2X) + (3X^2 - 2X - 1)}{X^5 - X^2} = \frac{X^3 - 1}{X^5 - X^2} \end{aligned}$$

Putem simplifica rezultatul obținut cu  $X^3 - 1$ ; vom scrie:

$$\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2} + \frac{3X+1}{X^4 + X^3 + X^2} = \frac{1}{X^2}$$

*Observație.* Am fi putut evita o serie de calcule dacă am fi observat de la început că fracția  $\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^5 - X^2}$  poate fi simplificată cu  $X-1$  și înlocuită cu  $\frac{X^2 - 2X}{X^4 + X^3 + X^2}$ . De aceea, atunci când adunăm fracții raționale, este bine să verificăm înainte de toate dacă ele sînt sau nu ireductibile, eventual să le simplificăm.

*Alte exemple.* Să efectuăm:  $\frac{5}{3X} + \frac{2X}{X^2+1}$  și  $\frac{X}{1-X^2} + \frac{1}{X+1}$ .

=57

Avem :

$$\overset{x^2+1)}{\frac{5}{3X}} + \overset{3X)}{\frac{2X}{X^2+1}} = \frac{5X^2+5}{(X^2+1) \cdot 3X} + \frac{6X^2}{3X(X^2+1)} = \frac{11X^2+5}{3X^3+3X} ;$$

$$\overset{x^2)}{\frac{X}{1-X^2}} + \overset{1-X^2)}{\frac{1}{X+1}} = \frac{(X^2+X) + (1-X^2)}{(1-X^2)(X+1)} =$$

$$= \frac{X+1}{(1-X^2)(X+1)} \overset{(X^2)}{=} \frac{1}{1-X^2} ,$$

sau, observînd că cel mai mic multiplu comun al numitorilor  $1 - X^2$  și  $X + 1$  este  $1 - X^2 = (X + 1)(1 - X)$  :

$$\frac{X}{1-X^2} + \overset{1-X)}{\frac{1}{X+1}} = \frac{X + (1-X)}{1-X^2} = \frac{1}{1-X^2} .$$

În general, dacă  $\frac{P}{Q}$  și  $\frac{R}{S}$  sînt două fracții raționale cu numitorii diferiți, atunci suma lor este fracția rațională

$$\frac{S \cdot P + Q \cdot R}{Q \cdot S} .$$

Adunarea fracțiilor raționale are aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor reale : este comutativă și asociativă. Putem astfel să adunăm trei sau mai multe fracții raționale, indiferent în ce ordine.

### EXERCITIUL REZOLVAT

Să adunăm fracțiile raționale  $\frac{X+1}{X-1}$ ,  $\frac{X-1}{X+1}$  și  $\frac{7X^2-18X+7}{X^2-1}$ .

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este  $X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1)$ . Pentru a aduce toate cele trei fracții la același numitor, vom amplifica prima cu  $X + 1$ , iar a doua cu  $X - 1$ . Obținem astfel :

$$\overset{x+1)}{\frac{X+1}{X-1}} + \overset{x-1)}{\frac{X-1}{X+1}} + \frac{7X^2-18X+7}{X^2-1} =$$

$$= \frac{(X^2+2X+1) + (X^2-2X+1) + (7X^2-18X+7)}{X^2-1} =$$

$$= \frac{9X^2-18X+9}{X^2-1} = \frac{9(X-1)^2}{X^2-1} \overset{(X^2)}{=} \frac{9X-9}{X+1} .$$

## EXERCİTIU REZOLVAT

Să adunăm fracțiile raționale  $\frac{3X^2 + Y^2}{X^2 + 2XY + Y^2}$  și  $\frac{-2X}{X + Y}$ .

Pentru a aduce fracțiile la același numitor, va trebui să amplificăm a doua cu  $X + Y$ . Deci :

$$\begin{aligned} \frac{3X^2 + Y^2}{X^2 + 2XY + Y^2} + \frac{X+Y}{X+Y} \cdot \frac{-2X}{X+Y} &= \frac{3X^2 + Y^2 - 2X^2 - 2XY}{(X+Y)^2} = \\ &= \frac{(X-Y)^2}{(X+Y)^2} = \left( \frac{X-Y}{X+Y} \right)^2. \end{aligned}$$

De ce credeți că am scris rezultatul ca pătrat și nu astfel :

$$\frac{X^2 - 2XY + Y^2}{X^2 + 2XY + Y^2} ?$$

### EXERCİTII

1) Aduceți la același numitor fracțiile, simplificându-le în prealabil :

a)  $\frac{2X^2 + 3X}{X(X+7)}$  și  $\frac{4X+4}{X^2-1}$  ; b)  $\frac{X+6}{9X^2+12X+4}$  și  $\frac{4-6X}{9X^2-4}$  ; c)  $\frac{X+3}{X^3-9X}$  și

$$\frac{2X^2 - 6X}{X^2 - 6X + 9}$$

2) Efectuați adunările :

a)  $\frac{5X+2}{2X} + \frac{-2X+1}{4}$  ; b)  $\frac{X+1}{X^2} + \frac{X-1}{X}$  ; c)  $\frac{X-1}{X+1} + \frac{1}{X}$  ; d)  $\frac{X}{2} + \frac{X}{X-1}$  ;

e)  $\frac{X-1}{X+2} + \frac{X+1}{X-2}$  ; f)  $\frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$  ; g)  $\frac{2X-5}{2-5X} + \frac{2X+5}{2+5X}$  ; h)  $\frac{4X-3}{4X+3} +$

$$+ \frac{3X+4}{3X-4}$$

3) Efectuați adunările :

a)  $\frac{1}{X+Y} + \frac{1}{X-Y}$  ; b)  $\frac{2X}{X+2Y} + \frac{2Y}{X-2Y}$  ; c)  $\frac{Y}{X+2Y} + \frac{4X}{2X+Y}$  ;

d)  $\frac{X+Y}{X^2-XY} + \frac{X-Y}{XY+Y^2}$

4) Efectuați adunările, simplificând (dacă este posibil) rezultatul :

a)  $\frac{1}{X} + \frac{2}{X-1} + \frac{3X+1}{1-X^2}$  ; b)  $\frac{2X+3}{X-2} + \frac{2-3X}{X+2} + \frac{X^2-16X}{X^2-4}$  ;

c)  $\frac{X+Y}{2X-2Y} + \frac{Y-X}{2X+2Y} + \frac{2Y^2}{X^2-Y^2}$  ; d)  $\frac{1}{X-2} + \frac{2}{(X-2)^2} + \frac{-1}{(X-2)^3}$  ;

e)  $\frac{4}{(X-2)(X-3)} + \frac{3}{(X-1)(X-2)}$  ; f)  $\frac{2}{X^2-Y^2} + \frac{1}{(X+Y)^2} + \frac{1}{(X-Y)^2}$  ;

$$g) \frac{X+Y}{(Y-Z)(Z-X)} + \frac{Y+Z}{(Z-X)(X-Y)} + \frac{X+Z}{(X-Y)(X-Z)} ; \quad h) \frac{YZ}{(X+Y)(X+Z)} +$$

$$+ \frac{XZ}{(Y+X)(Y+Z)} + \frac{XY}{(Z+X)(Z+Y)} ; \quad i) \frac{1}{X-3} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+3}$$

5) Efectuați adunările :

a)  $1 + \frac{1}{X-1}$  ; b)  $1 + X + \frac{X^2}{1-X}$  ; c)  $1 + X + X^2 + \frac{X^3}{1-X}$  ; d)  $X + \frac{2X}{X-1}$

6\*) Fie fracțiile :

$$F(X) = \frac{2X-1}{X^2-2X} ; G(X) = \frac{3X-2}{X^2+2X} ; H(X) = \frac{4X-3}{X^2-4}$$

Calculați  $U(X) = F(X) + G(X)$  ;  $V(X) = 2G(X) + H(X)$  ;  $W(X) = F(X) + 3G(X) + 2H(X)$ .

7\*) Efectuați adunările :

a)  $\frac{X+1}{X^2-3X+2} + \frac{X+2}{X^2-4X+3}$  ; b)  $\frac{X^2-4}{X^2+4X+3} + \frac{X^2-9}{X^2+6X+8}$

**Opusa** fracției raționale  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  este fracția rațională  $-\frac{P(X)}{Q(X)}$

care se notează  $-F$ . **Scăderea** fracțiilor raționale se definește cu ajutorul adunării, prin :

$$G - F = G + (-F).$$

De exemplu, dacă vrem să scădem fracția rațională  $\frac{3X-4}{X^2-1}$  din fracția  $\frac{7}{X+1}$ , vom proceda astfel :

$$\begin{aligned} \frac{7}{X+1} - \frac{3X-4}{X^2-1} &= \frac{7}{X+1} + \frac{-3X+4}{X^2-1} = \\ &= \frac{7(X-1) + (-3X+4)}{X^2-1} = \frac{4X-3}{X^2-1} \end{aligned}$$

Practic vom proceda ca și în cazul adunării :

$$\overset{X-1}{\frac{7}{X+1}} - \frac{3X-4}{X^2-1} = \frac{7(X-1) - (3X-4)}{X^2-1}$$

*Observație.* Să observăm că opusa fracției  $\frac{-P}{Q}$  este fracția  $\frac{P}{Q}$  :  $-\frac{-P}{Q} = \frac{P}{Q}$

De asemenea, să observăm că prin amplificarea fracției  $\frac{-P}{Q}$  cu  $-1$  obținem fracția  $\frac{P}{-Q}$

## EXERCIȚII

1) Efectuați :

a)  $\frac{1}{X} - \frac{4}{3X+2}$  ; b)  $\frac{5X}{X+2} - \frac{2X}{X-1}$  ; c)  $\frac{2X-1}{X+3} - \frac{-2X}{X-2}$  ; d)  $\frac{3}{X^2-1}$

$$1) \frac{YZ}{(X+Y)(X+Z)} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+3}$$

$$) X + \frac{2X}{X-1}$$

$$\frac{X-3}{X^2-4}$$

$$H(X) + 3G(X) + 2H(X)$$

$$\frac{X^2-9}{X^2+6X+8}$$

rațională  $\frac{-P(X)}{Q(X)}$   
 efinește cu ajutorul

$$\frac{3X-4}{X^2-1}$$

din fracția

$$\frac{P}{Q} : -\frac{-P}{Q} = \frac{P}{-Q}$$

obținem fracția  $\frac{P}{-Q}$

$$d) \frac{3}{X^2-1}$$

$$-\frac{2X}{X^2+2X+1}; \text{ e) } \frac{3X+7}{X^2-3X} - \frac{X+2}{X^2-9}; \text{ f) } \frac{1}{(X-2)^3} - \frac{X}{(X-2)^4}$$

2) Efectuați, simplificând pe cât posibil rezultatul :

$$a) \frac{1}{X} + \frac{2}{X-1} - \frac{3X+1}{X^2-1}; \text{ b) } \frac{3+2X}{X-2} - \frac{3X-2}{X+2} + \frac{X^2-16X}{X^2-4}; \text{ c) } \frac{3}{2X-1} + \frac{7}{2X+1} - \frac{20X-4}{4X^2-1};$$

$$d) \frac{2}{X^2+3} + \frac{1}{X+1} - \frac{8}{(1-X^2)(X^2+3)}; \text{ e) } \frac{X^2}{X^3+1} - \frac{2X}{X^2-X+1} + \frac{3}{X+1}$$

3) Fie fracțiile raționale  $F(X) = \frac{2X-1}{X^2-2X}$ ,  $G(X) = \frac{3X-2}{X^2-2X}$  și  $H(X) = \frac{4X-3}{X^2-4}$ .  
 Calculați fracțiile raționale  $U(X) = F(X) + G(X) - H(X)$ ;  $V(X) = F(X) - G(X)$ ;  $W(X) = H(X) - F(X)$ .  
 Calculați apoi fracția  $E(X) = U(X) + V(X) + W(X)$ . Ce observați? Puteți explica?

4) Efectuați :

$$a) \frac{X}{X+Y} + \frac{X}{X-Y} - \frac{2XY}{X^2-Y^2}; \text{ b) } \frac{3X}{(X-2Y)^2} + \frac{2X+Y}{(X+Y)(X-2Y)} - \frac{5}{X+Y};$$

$$c) \frac{X+Y}{X-Y} + \frac{X^2+Y^2}{X^2-Y^2} - \frac{X-Y}{X+Y}; \text{ d) } \frac{X+Y}{(X+2Y)(2X+3X)} - \frac{13X+36Y}{(X+2Y)(3X-4Y)};$$

$$e) \frac{(X+Y)^2}{XY} + \frac{(Y+Z)^2}{YZ} + \frac{(X+Z)^2}{XZ} - 4$$

**Produsul** a două fracții raționale  $\frac{P}{Q}$  și  $\frac{R}{S}$  este, prin definiție, fracția rațională  $\frac{P \cdot R}{Q \cdot S}$  :

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot S}$$

Observăm că numărătorul produsului este produsul numărătorilor, iar numitorul produsului este produsul numitorilor fracțiilor.

De exemplu, să calculăm produsul fracțiilor  $\frac{X^2-4}{X^2}$  și  $\frac{2X}{X+2}$  :

$$\frac{X^2-4}{X^2} \cdot \frac{2X}{X+2} = \frac{(X^2-4) \cdot 2X}{X^2(X+2)} = \frac{2X^3-8X}{X^3+2X^2}$$

Se obișnuiește să se simplifice (pe cât posibil) rezultatul ; în acest exemplu putem simplifica cu  $X(X+2) = X^2+2X$  și putem scrie :

$$\frac{X^2-4}{X^2} \cdot \frac{2X}{X+2} = \frac{2X-4}{X}$$

Simplificarea poate fi făcută chiar de la început, după ce am descompus în factori numărătorii și numitorii. Orice factor care apare într-unul dintre numărători și într-unul dintre numitori poate fi simplificat.



Luînd din nou exemplul de mai sus, să descompunem numărătorii și numitorii în factori :

$$\frac{X^2 - 4}{X^2} \cdot \frac{2X}{X + 2} = \frac{(X + 2)(X - 2)}{X^2} \cdot \frac{2X}{X + 2}$$

Observăm că  $X$  apare ca factor la numitor și la numărător ; la fel  $X + 2$ . Îi simplificăm ; rămîne  $\frac{X - 2}{X} \cdot \frac{2}{1}$ , adică  $\frac{2X - 4}{X}$ .

Pentru a efectua produsul fracțiilor raționale  $\frac{X - 2}{X}$  și  $\frac{X^2}{X + 1}$ , observăm că  $X$  poate fi simplificat :

$$\frac{X - 2}{X} \cdot \frac{X^2}{X + 1} = \frac{X - 2}{1} \cdot \frac{X}{X + 1} = \frac{X^2 - 2X}{X + 1}$$

*Alt exemplu.* Să înmulțim fracția  $\frac{X^3 - 1}{X^2 + 2X + 1}$  cu fracția  $\frac{X + 1}{X^2 - X}$ .

Descompunem în factori numitorii și numărătorii ; cele două fracții se scriu :

$$\frac{(X - 1)(X^2 + X + 1)}{(X + 1)^2} \text{ și } \frac{X + 1}{X(X - 1)}$$

Observăm că  $X - 1$  și  $X + 1$  apar ca factori la un numărător și la un numitor ; îi simplificăm și scriem :

$$\begin{aligned} \frac{X^3 - 1}{X^2 + 2X + 1} \cdot \frac{X + 1}{X^2 - X} &= \frac{(X - 1)(X^2 + X + 1)}{(X + 1)^2} \cdot \frac{X + 1}{X(X - 1)} = \\ &= \frac{X^2 + X + 1}{X + 1} \cdot \frac{1}{X} = \frac{X^2 + X + 1}{X^2 + X} \end{aligned}$$

Să înmulțim polinomul  $X^2 - 2X + 1$  cu fracția  $\frac{X + 1}{X^2 - X}$ . Vom scrie polinomul ca fracție rațională cu numitorul 1 :  $\frac{X^2 - 2X + 1}{1}$ . Observăm că putem simplifica factorul  $X - 1$  :

$$\frac{X^2 - 2X + 1}{1} \cdot \frac{X + 1}{X^2 - X} = \frac{X - 1}{1} \cdot \frac{X + 1}{X} = \frac{X^2 - 1}{X}$$

Să efectuăm produsul fracțiilor raționale  $\frac{X}{X^2 - Y^2}$ ,  $\frac{X + 2}{XY}$  și  $\frac{X - Y}{X}$

Observăm că putem simplifica factorii  $X - Y$  și  $X$  (o singură dată !). Așadar :

$$\begin{aligned} \frac{X}{X^2 - Y^2} \cdot \frac{X + 2}{XY} \cdot \frac{X - Y}{X} &= \frac{1}{X + Y} \cdot \frac{X + 2}{Y} \cdot \frac{1}{X} = \frac{1 \cdot (X + 2) \cdot 1}{(X + Y) \cdot Y \cdot X} = \\ &= \frac{X + 2}{X^2 Y + X Y^2} \end{aligned}$$

**Inversa** fracției raționale  $\frac{R}{S}$  este fracția rațională  $\frac{S}{R}$  (presupunind că polinomul  $R$  este diferit de polinomul 0). Într-adevăr, după simplificarea cu  $R \cdot S$ , avem:  $\frac{R}{S} \cdot \frac{S}{R} = \frac{R \cdot S}{S \cdot R} = \frac{1}{1} = 1$ .

**Împărțirea** fracțiilor raționale se definește cu ajutorul înmulțirii, astfel:

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R}$$

Cîtul unei fracții raționale prin alta se obține înmulțind prima fracție cu inversa celei de-a doua.

Rețineți și formula :

$$\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot R}$$

De exemplu, să împărțim fracția rațională  $\frac{X^2 - 2X}{X + 1}$  la fracția  $\frac{X - 2}{X}$ .

Procedăm astfel :

$$\frac{X^2 - 2X}{X + 1} : \frac{X - 2}{X} = \frac{X^2 - 2X}{X + 1} \cdot \frac{X}{X - 2} = \frac{X}{X + 1} \cdot \frac{X}{1} = \frac{X^2}{X + 1}$$

(am simplificat cu  $X - 2$ ).

Să scriem cîtul  $\frac{(X + 3)(2X + 1)}{9X^2 - 4}$  ca fracție rațională. Folosind for-

mula, îl putem înlocui cu  $\frac{(X + 3)(2X + 1) \cdot (3X + 2)}{(9X^2 - 4) \cdot (X + 3)}$ . Simplificînd cu

$X + 3$  și cu  $3X + 2$ , obținem  $\frac{2X + 1}{3X - 2}$ . Putem scrie :

$$\frac{(X + 3)(2X + 1)}{9X^2 - 4} = \frac{2X + 1}{3X - 2}$$

## EXERCITII

1) Efectuați înmulțirile de mai jos, scriind mai întii polinoamele ca fracții cu numitorul 1 :

a)  $X^2 \cdot \frac{3}{X}$ ; b)  $(X^2 - 2X + 1) \cdot \frac{5}{X - 1}$ ; c)  $X^2 \cdot \frac{2}{X^3}$ ; d)  $(X^2 + 4X + 4) \cdot \frac{1}{X^2 - 4}$ .

2) Efectuați :

a)  $\frac{2}{X-3} \cdot \frac{X^2-9}{8X}$  ; b)  $\frac{3}{X^2-1} \cdot \frac{X+1}{6X}$  ; c)  $\frac{X^2-4}{X^2+4} \cdot \frac{4X}{X+2}$

3) Efectuați înmulțirile :

a)  $\frac{3X^3Y}{Z^2} \cdot \frac{5Z}{6XY^2}$  ; b)  $\frac{3X}{X-Y} \cdot \frac{X^2-Y^2}{6Y}$  ; c)  $\frac{X+1}{Y} \cdot \frac{4Y^2}{X^2-1}$  ; d)  $\frac{3(X^2-Y^2)}{5XY}$   
 e)  $\frac{10Y}{9(X+Y)}$  ; e)  $\frac{2X+Y}{9X^2-Y^2} \cdot \frac{3X-Y}{2XY+Y^2}$  ; f)  $\frac{(3X+2)^2}{16X^2-25} \cdot \frac{4X-5}{9X+6}$

4) Efectuați înmulțirile :

a)  $(X+Y)^4 \cdot \frac{3X^2}{(X+Y)^2}$  ; b)  $\frac{X^3-Y^3}{X^2+4XY+4Y^2} \cdot \frac{X+2Y}{X-Y}$  ; c)  $\frac{X^3+XY^2}{X^3-Y^3} \cdot \frac{X^2-XY}{X^4-Y^4}$   
 d)  $\frac{XY}{X^2-Y^2} \cdot \frac{X+Y}{X} \cdot \frac{X-Y}{2Y}$  ; e)  $\frac{X^4-Y^4}{(X-Y)^2} \cdot \frac{X-Y}{X^2+XY}$  ; f)  $\frac{4X^2}{Y^2} \cdot \frac{XY}{X+Y} \cdot \frac{X^2-Y^2}{2XY}$   
 g)  $\frac{1-X^2}{1+Y} \cdot \frac{1-Y^2}{X+X^2} \cdot \left(1 + \frac{X}{1-X}\right)$

5) Efectuați împărțirile :

a)  $\frac{1}{X^3} : \frac{2}{X^2}$  ; b)  $X^2 : \frac{X+1}{2X}$  ; c)  $\frac{5X-2}{X-3} : \frac{X+2}{4X-12}$  ; d)  $\frac{X^2-Y^2}{4XY} : \frac{X-Y}{3Y}$   
 e)  $\frac{X^2+3X}{4XY-16Y} : \frac{X+3}{3X-12}$  ; f)  $\frac{XY+Y^2}{X^2-2XY+Y^2} : \frac{Y^2}{X^2-Y^2}$  ; g)  $\frac{(X+Y)^3}{X^4-Y^4} : \frac{(X+Y)^2}{X-Y}$

6) Scrieți ca fracție rațională :

a)  $\frac{X^4-81}{9X^2+12X+4} : \frac{X^2+9}{9X^2-4}$  ; b)  $\frac{X^2-2XY}{Y^2+4} : \frac{XY-2Y^2}{Y^4-16}$

7) Efectuați :

a)  $\left(X - \frac{1}{X-1}\right) \cdot \frac{(X-1)^2}{X^2-X-1}$  ; b)  $\frac{X^3+8}{X^2+2X+2} \cdot \left(\frac{1}{X+2}\right)$  ; c)  $\frac{(X^2-Y^2)^2}{(X^2+Y^2)^2} + \frac{4X}{X^2+Y^2} \cdot \frac{XY^2}{X^2+Y^2}$  ; d)  $\left(X + \frac{X}{X-1}\right) : \left(X - \frac{X}{X-1}\right)$  ; e)  $\left(\frac{X^2}{Y^3} + \frac{1}{X}\right) : \left(\frac{X}{Y^2} - \frac{1}{Y} + \frac{1}{X}\right)$   
 f)  $\frac{1}{1 + \frac{X}{Y+Z}} + \frac{1}{1 + \frac{Y}{X+Z}} + \frac{1}{1 + \frac{Z}{X+Y}}$

8) Efectuați :

a)  $\frac{\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} + 1}{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}} : \frac{X^3-Y^3}{X^2-Y^2}$  ; b)  $\frac{\frac{X^2+Y^2}{Y} - X}{\frac{1}{Y} - \frac{1}{X}} : \frac{X^3+Y^3}{X^2-Y^2}$

1) Efectuați :  
 a)  $(3X^2-6X+3)$   
 d)  $(X^6-3X^4-4X^2)$   
 2) Descompuneri:  
 a)  $16X^2-4$   
 3) Arătați că:  
 4) Aflați cel mai mic număr natural  $n$  astfel încât  $X^2+4X+4$  și  $X^3+1$  să împartă  $X^n-1$

1) Simplificări:  
 a)  $\frac{-8X^3Y^4}{6X^4Y^3}$   
 2) Efectuați :  
 a)  $\frac{X-3}{3} + \frac{X+2}{X-1}$   
 3) Ce fracție este egală cu:  
 a)  $\frac{X^2+2X}{X-1}$   
 4) Efectuați :

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE  
ȘI DEPRINDERI DE BAZĂ

LUCRAREA I

- 1) Efectuați :  
 a)  $(3X^2 - 6X + 2) + (3X^2 + 2X - 4)$  ; b)  $(5X^2 - 4X + 3) - (2X^2 - 5X + 4)$  ; c)  $(8X - Y + 3) \cdot (5X^2 - Y)$  ;  
 d)  $(X^6 - 3X^4 - 4X^3 + 6X + 4) : (X^3 - 3X - 2)$ .
- 2) Descompuneți în factori :  
 a)  $16X^2 - 4$  ; b)  $3X^4 + 6X^3 + 3X^2$  ; c)  $8X^3 - Y^3$  ; d)  $X^4 - X^3 + 8X - 8$ .
- 3) Arătați că polinomul  $X - 3$  divide polinomul  $X^3 - 8X - 3$ .
- 4) Aflați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :  
 $X^2 + 4X + 4$  și  $X^3 + 8$ .

LUCRAREA A II-a

- 1) Simplificați fracțiile raționale :

a)  $\frac{-8X^3Y^4}{6X^4Y^3}$  ; b)  $\frac{3XY - 3Y^2}{3Y^2 + 3XY}$  ; c)  $\frac{4(X+Y)^2 - 4(X+Y) + 1}{2X + 2Y - 1}$

- 2) Efectuați :

a)  $\frac{X-3}{3} + \frac{2X^2}{6X}$  ; b)  $2X - 1 - \frac{X+4}{2X}$  ; c)  $\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} - \frac{X-Y}{-XY}$

- 3) Ce fracție rațională poate fi scrisă în locul semnelui ..., astfel încît :

a)  $\frac{X^2 + 2X + 1}{X - 1} + \dots = \frac{X^2 - 2X + 1}{X - 1}$  ; b)  $\frac{X^2 + 2X + 1}{X - 1} \cdot (\dots) = \frac{X^2 - 2X + 1}{X - 1}$  ?

- 4) Efectuați :

$$\left( \frac{X^2 - X}{X^2 + 1} + \frac{2X^2}{X^3 - X^2 + X - 1} \right) : \frac{X^2}{X^2 - 1}$$

$$\frac{4X}{X+2}$$

$$\frac{4Y^2}{Y^2-1} ; d) \frac{3(X^2 - Y^2)}{5XY}$$

$$\frac{X-5}{X+6}$$

$$\frac{(x+y)(x-y)(x+xy+y)}{(x-y)(x+y)}$$

$$\frac{X^3 + XY^2}{X^3 - Y^3} \cdot \frac{X^2 - XY}{X^4 - Y^4}$$

$$\frac{XY}{X+Y} \cdot \frac{X^2 - Y^2}{2XY}$$

$$\frac{X^2 - Y^2}{4XY} : \frac{X - Y}{3Y}$$

$$\frac{(X+Y)^3}{X^4 - Y^4} : \frac{(X+Y)^2}{X - Y}$$

$$\frac{1}{+2} \Big) ; c) \frac{(X^2 - Y^2)^2}{(X^2 + Y^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{X} \Big) : \left( \frac{X}{Y^2} - \frac{1}{Y} + \frac{1}{X} \right) ;$$

## CAPITOLUL IV

### ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA

#### 1. PREZENTARE

Multe probleme practice se pot rezolva folosind ecuațiile. De exemplu, să presupunem că un arhitect vrea să proiecteze o cameră de  $15 \text{ m}^2$ , dorind ca lungimea camerei să fie cu 2 m mai mare decât lățimea.

Dacă notăm cu  $x$  lățimea camerei (măsurată în m), atunci lungimea camerei este  $x + 2$ , iar aria camerei este  $(x + 2) \cdot x$ . Putem rezolva problema arhitectului dacă reușim să rezolvăm ecuația :

$$(x + 2) \cdot x = 15 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Această ecuație este echivalentă cu ecuația :

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

care este o ecuație de gradul al II-lea. O soluție a sa este evidentă, anume  $x = 3$ . Dar ecuația mai are încă o soluție, anume  $-5$  (verificați !).

Arhitectul își rezolvă problema dacă proiectează camera avînd lungimea de 5 metri și lățimea de 3 metri. Aceasta este oare singura soluție acceptabilă pentru arhitect ?

**DEFINIȚIE.** Vom numi **ecuație de gradul al II-lea** orice ecuație de forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

cu  $a, b, c$  numere reale. Putem presupune de la început că  $a \neq 0$ , căci pentru  $a = 0$  obținem o ecuație liniară (de gradul I).

Să notăm  $P(X) = aX^2 + bX + c$  ; acesta este un polinom în  $X$  de gradul al II-lea ; de aici provine și numele ecuației. Soluțiile ecuației se mai numesc și **rădăcini** ale polinomului.

De exemplu, 7 este soluție a ecuației  $x^2 - 16x + 63 = 0$ , deoarece este adevărat că  $7^2 - 16 \cdot 7 + 63 = 0$ . Notînd  $P(X) = X^2 - 16X + 63$ , constatăm că  $P(7) = 0$ , deci 7 este rădăcină a polinomului  $P(X)$ . 8 este rădăcină ? Dar 9 ?

Pentru ce va  
Deoarece 4  
propoziția adevă  
nem propoziția a  
Deci  $m$  și  $n$

Obținem  $m = -1$

Dacă notăm  
polinomului  $P(X)$   
la sistemul de ecu

1) Formați ecu  
mul rînd este compl  
mulțimea

$a$	$b$	$c$
2	-9	7
4	0	1
5	17	0
1	-3	-3
-1	0	5
6	0	0
-1	4	0

3) Dintre

a)  $(x -$   
c)  $(2x -$

4) Este 5 o so  
nomului  $X^2 - 2X -$

5) a) Aflați

b) Pentru ce va

## EXERCİȚIU REZOLVAT

Pentru ce valori ale lui  $m$  și  $n$  ecuația  $x^2 + mx + n = 0$  admite soluțiile 4 și  $-3$ ?

Deoarece 4 este soluție a ecuației, înlocuind necunoscuta  $x$  cu 4 obținem propoziția adevărată  $4^2 + m \cdot 4 + n = 0$ . La fel, din faptul că  $-3$  este soluție, obținem propoziția adevărată :  $(-3)^2 + m \cdot (-3) + n = 0$ .

Deci  $m$  și  $n$  sînt soluții ale sistemului :

$$16 + 4m + n = 0$$

$$9 - 3m + n = 0.$$

Obținem  $m = -1$  și  $n = 12$ .

Dacă notăm  $P(X) = X^2 + mX + n$ , faptul că 4 și  $-3$  sînt rădăcini ale polinomului  $P(X)$  se exprimă prin condițiile  $P(4) = 0$  și  $P(-3) = 0$ , care conduc la sistemul de ecuații de mai sus.

## EXERCİȚII

1) Formați ecuațiile de gradul al II-lea care au coeficienții  $a, b, c$  dați în tabelul următor (primul rînd este completat ca model). Verificați, pentru fiecare dintre ecuații, dacă vreun element din mulțimea

a	b	c	Ecuația
2	-9	7	$2x^2 - 9x + 7 = 0$
4	0	1	
5	17	0	
1	-3	-3	
-1	0	5	
6	0	0	
-1	4	0	

$\left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$  este soluție.

2) Precizați coeficienții  $a, b, c$  pentru fiecare dintre ecuațiile :

- a)  $2x^2 - 20x + 19 = 0$  ;  
 b)  $x^2 - x + 1 = 0$  ; c)  $2x^2 + 15 = 0$  ;  
 d)  $x^2 = 0$  ; e)  $-x^2 + 4x = 0$  ; f)  $-9x^2 = 0$  ;  
 g)  $-x^2 + x + 7 + x - 5 = 0$  ; h)  $3x^2 + 5x + 5 = 0$  ; i)  $(m^2 + 1)x^2 + 2mx + 3(m + 2) = 0$ .

3) Dintre următoarele ecuații, care sînt echivalente cu ecuații de gradul al II-lea ?

- a)  $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 3)^2$  ; b)  $x(x + 2)(x + 3) = x(x + 1)(x + 4)$  ;  
 c)  $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x(x^2 + 2x + 15) = 0$  ; d)  $(\sqrt{2} + x + 1)^2 + (\sqrt{2} - x - 1)^2 = 0$ .

4) Este 5 o soluție a ecuației  $-x^2 - 4x + 5 = 0$  ? Dar  $-5$  ? Este  $-1 + \sqrt{2}$  rădăcină a trinomialului  $X^2 - 2X - 1$  ? Dar  $1 + \sqrt{2}$  ?

5) a) Aflați valoarea lui  $m$  știind că 1 este soluție a ecuației

$$5x^2 - mx + 7 - m = 0.$$

b) Pentru ce valoare a parametrului  $p$ , ecuația  $px^2 - 5x - 4p = 0$  are soluția 2 ?

## 2. REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL II-LEA. CAZURI SPECIALE

De exemplu, să rezolvăm ecuația :

$$x^2 - 6x = 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Constatăm imediat, prin înlocuire directă, că numărul 0 este soluție a ecuației.

Să presupunem că numărul real  $s$  este soluție a ecuației ; atunci, dacă înlocuim necunoscuta  $x$  cu  $s$ , obținem propoziția adevărată  $s^2 - 6s = 0$ , sau  $s^2 = 6s$ .

Distingem două cazuri :

— soluția  $s$  este 0 ;

—  $s \neq 0$  ; în acest caz, împărțind ambii membri cu  $s$ , obținem  $s = 6$ . Deoarece  $6^2 - 6 \cdot 6 = 0$ , ecuația are două soluții : 0 și 6.

Să considerăm polinomul  $P(X) = X^2 - 6X$ . Știm că rădăcinile sale sînt 0 și 6. Dacă-l descopunem în factori :  $P(X) = X(X - 6)$ , observăm că cei doi factori sînt de forma  $X - s$ , unde  $s$  este rădăcină a polinomului.

Alt exemplu : ecuația  $(x - 1)(x + 15) = 0 \quad (x \in \mathbf{R})$ .

Înlocuind necunoscuta  $x$  prin numărul  $s$ , presupunînd că acesta este soluție, obținem  $(s - 1)(s + 15) = 0$ . Dacă  $s \neq 1$ , împărțim ambii membri cu  $s - 1$  și obținem  $s + 15 = 0$ , adică  $s = -15$ . Ecuația are două soluții, 1 și -15 (verificați că sînt soluții !).

Polinomul  $P(X) = (X - 1)(X + 15)$  este deja descompus în factori. Observați legătura între factori și rădăcinile sale !

Pentru a rezolva ecuația  $2x^2 + 3x = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , se obișnuiește să se procedeze astfel :

— se descompune în factori :  $x(2x + 3) = 0$  ;

— fiecare factor ne dă o soluție ; din  $x = 0$  obținem soluția 0 ; din  $2x + 3 = 0$ ,

obținem soluția  $-\frac{3}{2}$ .

### EXERCIIII

1) Rezolvați ecuațiile (presupunem  $x \in \mathbf{R}$ ) :

a)  $x^2 = 4x$  ; b)  $x^2 = -3x$  ; c)  $4x^2 = x$  ; d)  $-2x^2 = -7x$ .

2) Rezolvați ecuațiile :

a)  $x^2 - 3x = 0$  ; b)  $x^2 + 2x = 0$  ; c)  $2x^2 - 6x = 0$  ; d)  $2x^2 + 6x = 0$  ; e)  $7x^2 - x = 0$  ; f)  $-5x^2 + 7x = 0$  ;  
g)  $-0,6x^2 - 3,6x = 0$ .

3) Rezolvați ecuațiile :

a)  $x(x + 8) = 0$  ; b)  $(x + 1)(x - 2) = 0$  ; c)  $(x + 2)(x - 3) = 0$  ; d)  $(2x - 5)(5x - 2) = 0$  ;  
e)  $(3x - 8)(2x - 13) = 0$ .

Am rezolvat ecuații de gradul al II-lea de forma  $ax^2 + bx = 0$  (deci în care lipsește termenul liber). Vom rezolva acum ecuații în care  $b = 0$ , deci de forma  $ax^2 + c = 0$ .

De exemplu, să

Ca de obicei, p  
necunoscuta  $x$  cu nu  
putem scrie astfel ( $s$

Distingem două

1)  $s = -9$  ;

2)  $s \neq -9$ ; în

mem  $s - 9 = 0$  deci

Atît -9 cit și 9

Să observăm că

$P(X) = (X + 9)(X -$   
soluția 9.

Alt exemplu : s

Polinomul  $P(X)$

$P(X) =$

Deci ecuația are

Să rezolvăm ac

Pentru orice n  
 $6s^2 + 11 \geq 11 >$   
propoziția  $6s^2 + 11$

1) Rezolvați ecuații

a)  $x^2 - 1 = 0$  ; b) 4

g)  $-x^2 - 8 = 0$  ; h)  $-x^2$

2) Rezolvați e

a)  $2x^2 - 3 = 0$  ; b)

f)  $2x^2 - (1 + \sqrt{2})^2 = 0$ .

Exemplele de r  
în cazurile  $b = 0$   
Rezolvarea ecuațiilor  
alte cazuri.

De exemplu, să

De exemplu, să rezolvăm ecuația

$$x^2 + 81 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ca de obicei, presupunem că numărul  $s$  este soluție a ecuației ; să înlocuim necunoscuta  $x$  cu numărul  $s$  ; obținem propoziția adevărată  $s^2 - 81 = 0$ , pe care o putem scrie astfel  $(s + 9)(s - 9) = 0$ .

Distingem două cazuri :

1)  $s = -9$  ;

2)  $s \neq -9$ ; în acest caz  $s + 9 \neq 0$ ; împărțind ambii membri cu  $s + 9$ , obținem  $s - 9 = 0$  deci  $s = 9$ .

Atât  $-9$  cât și  $9$  sînt soluții ale ecuației.

Să observăm că polinomul  $P(X) = X^2 - 81$  se descompune în factori astfel :  $P(X) = (X + 9)(X - 9)$  ; factorul  $X + 9$  ne dă soluția  $-9$ , iar factorul  $X - 9$  ne dă soluția  $9$ .

Alt exemplu : să aflăm soluțiile ecuației  $5x^2 - 3 = 0$ .

Polinomul  $P(X) = 5X^2 - 3$  se descompune în factori astfel :

$$P(X) = 5 \left( X^2 - \frac{3}{5} \right) = 5 \left( X + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \left( X - \sqrt{\frac{3}{5}} \right).$$

Deci ecuația are soluțiile  $-\sqrt{\frac{3}{5}}$  și  $\sqrt{\frac{3}{5}}$ .

Să rezolvăm acum ecuația :

$$6x^2 + 11 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Pentru orice număr real  $s$ , avem  $s^2 \geq 0$  ; deci  $6s^2 \geq 0$ , de unde rezultă că  $6s^2 + 11 \geq 11 > 0$ . Așadar, dacă înlocuim necunoscuta  $x$  prin numărul  $s$ , propoziția  $6s^2 + 11 = 0$  este falsă, oricare ar fi  $s$ . Ecuația dată nu are nici o soluție.

### EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile :

- a)  $x^2 - 1 = 0$  ; b)  $4x^2 - 1 = 0$  ; c)  $-x^2 + 9 = 0$  ; d)  $2x^2 - 8 = 0$  ; e)  $x^2 + 1 = 0$  ; f)  $4x^2 - 0,05 = 0$  ;  
g)  $-x^2 - 8 = 0$  ; h)  $-x^2 + 2 = 0$ .

2) Rezolvați ecuațiile :

- a)  $2x^2 - 3 = 0$  ; b)  $|2x^2 - 2| - 2 = 0$  ; c)  $4x^2 - 0,5 = 0$  ; d)  $144x^2 = 1$  ; e)  $49x^2 = (|5 + 1|)^2$  ;  
f)  $2x^2 - (1 + |2|)^2 = 0$ .

Exemplele de mai sus ne arată că ecuația de gradul al II-lea  $ax^2 + bx + c = 0$ , în cazurile  $b = 0$  sau  $c = 0$ , se rezolvă simplu, prin descompunere în factori. Rezolvarea ecuației prin descompunerea trinomului în factori este posibilă și în alte cazuri.

De exemplu, să rezolvăm ecuația

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$



Descompunem în factori polinomul  $P(X) = 4X^2 + 4X + 1$ , astfel :  $P(X) = (2X + 1)^2 = (2X + 1)(2X + 1)$ . Amândoi factorii ne dau aceeași rădăcină a polinomului, anume  $-\frac{1}{2}$ . Ecuația are deci o singură soluție ; dar, se obișnuiește să se spună că polinomul are rădăcină dublă.

*Alt exemplu.* Fie ecuația  $x^2 + 2x - 3 = 0$ . Vom descompune în factori trinomialul  $X^2 + 2X - 3$ , scoțind în evidență un pătrat perfect :  $X^2 + 2X - 3 = X^2 + 2X + 1 - 4 = (X + 1)^2 - 2^2 = (X + 1 + 2)(X + 1 - 2) = (X + 3)(X - 1)$ . Așadar ecuația are două soluții :  $-3$  și  $1$ .

Scoțind în evidență un pătrat perfect, ecuația  $x^2 - 2x + 40 = 0$  poate fi înlocuită cu ecuația echivalentă :

$$(x - 1)^2 + 39 = 0.$$

Observăm că ecuația nu are nici o soluție.

Ecuația  $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$  se rezolvă observând că trinomialul din membrul stâng poate fi descompus în factori astfel :

$$\begin{aligned} X^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})X + \sqrt{6} &= X^2 - X\sqrt{2} - X\sqrt{3} + \sqrt{6} = \\ &= X(X - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(X - \sqrt{2}) = (X - \sqrt{2})(X - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Soluțiile sînt deci  $\sqrt{2}$  și  $\sqrt{3}$ .

## EXERCIȚII

1) (oral) Explicați de ce următoarele ecuații nu au soluții :

a)  $x^2 = 1 - |2|$  ; b)  $x^2 + 6x + 9 = -1$  ; c)  $5(x + 1)^2 + 29 = 0$  ; d)  $(x - m)^2 = 4 - |17|$ .

2) Rezolvați ecuațiile ( $a, b$  și  $m$  sînt parametri reali) :

a)  $x^2 - 1 = 0$  ; b)  $x^2 + 1 = 0$  ; c)  $x^2 = 100$  ; d)  $9x^2 = 1$  ; e)  $4x^2 - 0,01 = 0$  ; f)  $144x^2 = -1$  ; g)  $x^2 = 4\pi^2$  ; h)  $0,0004x^2 = 625$  ; i)  $x^2 - (a + |2|)^2 = 0$  ; j)  $49x^2 = (|5 + 1|)^2$  ; k)  $13x^2 + (a - 9)^2 = 0$  ; l)  $5x^2 + a^2 + b^2 = 2ab$  ; m)  $2x^2 = 3m^2$ .

3) Aflați toate numerele reale care sînt egale cu pătratele lor.

**4)** Ionică a scris :

„Ecuația  $4x^2 | 2 - 2x | 6 = 0$  se rezolvă astfel : trecem termenul  $2x | 6$  în membrul drept, schimbîndu-i semnul :  $4x^2 | 2 = 2x | 6$  ; împărțim ambii membri ai ecuației prin  $2x | 2$  și obținem  $2x = | 3$  ; deci soluția ecuației este  $\frac{|3}{2}$ ”. În ce constă greșeala lui Ionică ?

5) Rezolvați ecuațiile ( $m$  este un parametru real) :

a)  $(x + 8)(x - 5) = 0$  ; b)  $(3x - 5)(x + 5,19) = 0$  ; c)  $4x(5x - 13) = 0$  ; d)  $-12x^2 = 0$  ; e)  $x^2 + 31x = 0$  ; f)  $2x^2 = 19x$  ; g)  $-x^2 = 59x$  ; h)  $- | 8x^2 + 2x = 0$  ; i)  $x(x - 1) + 13(x - 1) = 0$  ; j)  $x^2 + mx = 0$  ; k)  $(x + 1)^2 = x + 1$  ; l)  $(1 + m^2)x^2 = -x$ .

**6)** Rezolvați ecuațiile :

a)  $(x + 1)^2 - 25 = 0$  ; b)  $x^2 + 4x + 4 = 1$  ; c)  $x^2 + 4x + 4 = -1$  ; d)  $x^2 + 4x + 4 = 0$  ; e)  $x^2 + 10x + 16 = 0$  ; f)  $x^2 - 10x + 25 = 0$  ; g)  $x^2 + (|2 + |5)x + |10 = 0$  ; h)  $x^2 - (1 + \pi)x + \pi = 0$  ; i)  $|3x^2 + (1 + |3)x + 1 = 0$  ; j)  $(x - 7)^2 = 2$  ; k)  $x^2 + (m + n)x + mn = 0$  ; l)  $mnx^2 + (m + n)x + 1 = 0$  ( $m \neq 0, n \neq 0$ ).

## 3. REZ

Vom stab

II-lea are sau r

Să luăm c

Împărțim

obținem ecua

Să consi

$$(X + u)^2 = X$$

care să conțin

Să descompun

$$P(X)$$

$$= \left( X + \frac{4}{15} \right)^2$$

Deci e

Ecuația

7) Aproximați, cu eroare de cel mult 0,01, rădăcinile ecuațiilor : a)  $x^2 = 2$  ; b)  $x^2 = \pi$  ;  
 c)  $x^2 - 3,1 = 0$  ; d)  $4x^2 = 7$  ; e)  $3x^2 - 5 = 0$ .

8\*) a) Demonstrați că dacă  $a, b$  sînt două numere reale astfel încît  $ab = 0$ , atunci cel puțin unul dintre ele este 0.

b) Demonstrați că dacă  $a, b, c$  sînt trei numere reale astfel încît  $abc = 0$ , atunci cel puțin unul dintre ele este 0.

c) Rezolvați ecuațiile :

$$x(x+1)(x+2) = 0 ; (x-1)x^2 = (x-1)(6x-8) ; x^3 + (1+\sqrt{5})x^2 + \sqrt{5}x = 0.$$

9) O coală de hirtie pentru desen are aria de  $1 \text{ m}^2$  iar raportul dimensiunilor egal cu  $\sqrt{2}$ . Aflați dimensiunile, cu aproximație de 1 mm.

### 3. REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL II-LEA. FORMULA DE REZOLVARE

Vom stabili o metodă generală, care ne arată dacă o ecuație de gradul al II-lea are sau nu soluții, iar dacă are soluții cum le obținem.

Să luăm de exemplu ecuația :

$$15x^2 + 8x + 1 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Împărțind ambii membri prin 15 (astfel încît coeficientul lui  $x^2$  să devină 1), obținem ecuația echivalentă :

$$x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15} = 0.$$

Să considerăm trinomul  $P(X) = X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15}$ . Să ne reamintim formula  $(X+u)^2 = X^2 + 2uX + u^2$ . Vom încerca să scoatem în evidență un pătrat perfect, care să conțină primii doi termeni ai trinomului. Din  $2u = \frac{8}{15}$  obținem  $u = \frac{4}{15}$ .

Să descompunem în factori :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15} = X^2 + 2 \cdot \frac{4}{15}X + \left(\frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \frac{1}{15} = \\ &= \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \frac{1}{225} = \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \left(X + \frac{4}{15} + \frac{1}{15}\right)\left(X + \frac{4}{15} - \frac{1}{15}\right) = \\ &= \left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X + \frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

Deci ecuația are soluțiile  $-\frac{1}{3}$  și  $-\frac{1}{5}$ .

Ecuația  $15x^2 - 150x + 405 = 0$  este echivalentă cu :

$$x^2 - 10x + 27 = 0,$$

adică cu  $(x - 5)^2 + 2 = 0$ ; deci ecuația nu are soluții.

Să procedăm la fel și în cazul general. Ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0$$

este echivalentă cu ecuația  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ .

Să considerăm trinomul  $P(X) = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}$ . Din  $2u = \frac{b}{a}$  obținem  $u = \frac{b}{2a}$ .

Vom completa un pătrat perfect:

$$P(X) = X^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Putem descompune trinomul  $P(X)$  în factori de gradul I numai dacă numărul  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  este  $\geq 0$ . Semnul acestui număr este același cu semnul numărătorului  $b^2 - 4ac$ . De aceea, numărul  $b^2 - 4ac$  este numit **discriminantul\*** ecuației (sau al trinomului); el se notează de obicei cu litera grecească  $\Delta$  (se citește „delta”).

Distingem trei cazuri:

I.  $\Delta > 0$ . În acest caz vom putea descompune în factori:

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(X + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Deci ecuația  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$  are două soluții:

$$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{și} \quad -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Se obișnuiește să se noteze soluțiile ecuației prin  $x_1$  și  $x_2$ . Cele două soluții se scriu sub formă concentrată astfel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

II.  $\Delta = 0$ . În acest caz trinomul este deja descompus în factori:

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Trinomul are o rădăcină dublă, iar ecuația are o singură soluție, anume  $-\frac{b}{2a}$ .

III.  $\Delta < 0$ . În acest caz  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ , deci  $P(s) > 0$  pentru orice număr real  $s$ ; ecuația nu are nici o soluție.

\* a discrimina — a separa. Discriminantul separă cazurile.

Putem sistematiza  
schemă:

Cazul I:  $\Delta > 0$

Cazul II:  $\Delta = 0$

Cazul III:  $\Delta < 0$

(oral) Explicăm:

a) dacă ecuația are două soluții  
 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$   
b) dacă ecuația are o soluție  
 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Observații. 1) Formula lui Viète este aplicată și ecuațiilor de gradul II prin compunere în factori.  
2) Dacă  $b = 2a$  și  $c = -a^2$ , atunci  $\Delta = 0$  și ecuația are soluția dublă  $x = -1$ .

dacă în plus  $a = 1$ , atunci ecuația devine  $x^2 + 2x - 1 = 0$  și soluțiile sunt  $x_1 = -1 + \sqrt{2}$  și  $x_2 = -1 - \sqrt{2}$ .

Rezolvarea ecuațiilor de gradul II poate fi programată în mod sistematic.

Algoritmul de rezolvare:

Pasul 1. Citește coeficienții  $a, b, c$ .

Pasul 2. Calculează discriminantul  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Pasul 3. Dacă  $\Delta > 0$ , ecuația are două soluții distincte.

Dacă  $\Delta = 0$ , ecuația are o soluție dublă.

Pasul 4. Calculează soluțiile  $x_1, x_2$ .

soluțiile sunt  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  și  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Pasul 5. Calculează soluțiile  $x_1, x_2$ .

1) Să rezolvăm ecuația  $x^2 + 2x - 1 = 0$ .

Putem sistematiza rezolvarea ecuației de gradul al II-lea în următoarea schemă :

Cazul I :	$\Delta > 0$	Ecuția are două soluții distincte $x_1 \neq x_2$	} Soluțiile se calculează cu formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ sau $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Cazul II :	$\Delta = 0$	Ecuția are o singură soluție $x_1 = x_2$	
Cazul III :	$\Delta < 0$	Ecuția nu are nici o soluție	

### EXERCIȚIU

(oral) Explicați de ce:

- a) dacă ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$  nu are nici o soluție, atunci  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  ;  
 b) dacă ecuația are două soluții distincte, atunci  $\Delta > 0$ .

*Observații.* 1) Formula de rezolvare a ecuației de gradul al II-lea este generală, deci poate fi aplicată și ecuațiilor în care  $b = 0$  sau  $c = 0$  ; dar, în unele cazuri, este avantajos să lucrăm prin descompunere în factori, această metodă fiind uneori mai rapidă.

2) Dacă  $b = 2b'$ , să observăm că formula de rezolvare a ecuației devine

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} ;$$

dacă în plus  $a = 1$ , atunci formula de rezolvare este :  $x_{1,2} = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}$ .

Rezolvarea ecuației cu formula generală este o metodă algoritmică ; ea poate fi programată pentru calculatoarele electronice :

Algoritmul de calcul al soluțiilor este următorul :

*Pasul 1.* Citește coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  ;

*Pasul 2.* Calculează  $\Delta = b^2 - 4ac$  ;

*Pasul 3.* Dacă  $\Delta < 0$ , scrie „Ecuția nu are nici o soluție“, STOP.

Dacă  $\Delta \geq 0$ , continuă cu pasul 4 ;

*Pasul 4.* Calculează  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  . Scrie  $x_1$ . Dacă  $\Delta = 0$ , scrie „O singură soluție“, STOP. Dacă  $\Delta > 0$ , continuă cu pasul 5 ;

*Pasul 5.* Calculează  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  . Scrie  $x_2$ . STOP.

### EXEMPLE

1) Să rezolvăm ecuația :

$$x^2 - 107x + 1302 = 0.$$

Să recunoaștem coeficienții :  $a = 1$  ;  $b = -107$  ;  $c = 1302$ . Deci  $\Delta = (-107)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1302 = 11449 - 5208 = 6241$ .

Observăm că  $\Delta > 0$ , deci ecuația are două soluții. Aplicând formula de rezolvare, obținem :

$$x_{1,2} = \frac{-(-107) \pm \sqrt{6241}}{2 \cdot 1} = \frac{107 \pm 79}{2}$$

Deci  $x_1 = \frac{107 - 79}{2} = 14$  și  $x_2 = \frac{107 + 79}{2} = 93$ .

2) Să rezolvăm ecuația :

$$0,01x^2 + 4,2x + 441 = 0.$$

Observăm că  $\Delta = 4,2^2 - 4 \cdot 0,01 \cdot 441 = 17,64 - 17,64 = 0$  ; deci ecuația are

o singură soluție, anume  $-\frac{4,2}{2 \cdot 0,01} = -210$ .

3) Fie ecuația  $x^2 + \sqrt{79}x + 20 = 0$ . Să calculăm discriminantul :  $\Delta = (\sqrt{79})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 79 - 80 = -1$ . Deoarece  $\Delta < 0$ , ecuația nu are soluții.

### EXERCIIII REZOLVATE

1) a) Demonstrați că pentru orice  $m$  real, ecuația

$$mx^2 + (m^2 + 1)x + m = 0, x \in \mathbf{R},$$

are soluții.

b) Calculați soluțiile, presupunând  $m > 1$ .

c) Aflați valorile parametrului  $m$  pentru care ecuația are o singură soluție.

*Rezolvare.*

a) Calculăm discriminantul ecuației :

$$\Delta = (m^2 + 1)^2 - 4 \cdot m \cdot m = m^4 + 2m^2 + 1 - 4m^2 = (m^2 - 1)^2.$$

Constatăm că  $\Delta \geq 0$ , deci ecuația are soluții pentru orice valoare a parametrului  $m$ .

b) Să calculăm soluțiile :

$$x_{1,2} = \frac{-(m^2 + 1) \pm \sqrt{(m^2 - 1)^2}}{2m} = \frac{-m^2 - 1 \pm |m^2 - 1|}{2m}$$

Pentru  $m > 1$ , avem  $|m^2 - 1| = m^2 - 1$ . Soluțiile sînt :

$$x_1 = \frac{-m^2 - 1 - m^2 + 1}{2m} = -m ; x_2 = \frac{-m^2 - 1 + m^2 - 1}{2m} = -\frac{1}{m}$$

c) Ecuația are o singură soluție numai dacă discriminantul ei este 0. Din

$$(m^2 - 1)^2 = 0 \text{ obținem } m^2 = 1, \text{ adică } m = 1 \text{ sau } m = -1.$$

2) Se dă ecu

unde  $m$  este un  
ecuația :

a) nu are sol

b) are o sing

c) are două

*Rezolvare.* C

$$\Delta = 40$$

Discriminantul

Constatăm c

- dacă  $m \in (-\infty$

cu formulele obiș

- dacă  $m = \frac{1}{2}$

- dacă  $m \in (\frac{1}{2}$

3) Aproxim

*Rezolvare.*

Avem  $\sqrt{30}$   
și  $x_2 \approx 10,47$ .

1) Completați

Ecuatia
$x^2 + 5x - 6 = 0$
$3x^2 + 7x + 4 = 0$
$x^2 - 14x + 40 = 0$
$x^2 + x + 180 = 0$
$4x^2 + 4x + 1 = 0$
$3x^2 + 13x - 14 = 0$

2) Se dă ecuația :

$$mx^2 - 2(m-1)x + m = 0, x \in \mathbb{R},$$

unde  $m$  este un parametru real diferit de 0. Pentru ce valori ale parametrului  $m$ , ecuația :

- a) nu are soluții ;
- b) are o singură soluție ;
- c) are două soluții ?

*Rezolvare.* Calculăm discriminantul :

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 4m^2 = 4(m^2 - 2m + 1 - m^2) = 4(-2m + 1).$$

Discriminantul este  $< 0$  dacă și numai dacă  $-2m + 1 < 0$ , adică  $m > \frac{1}{2}$ .

Constatăm că :

- dacă  $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ , ecuația are două soluții distincte ; acestea pot fi calculate cu formulele obișnuite ;
- dacă  $m = \frac{1}{2}$ , ecuația are o singură soluție, anume  $-1$  ;
- dacă  $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ , ecuația nu are soluții.

3) Aproximați, cu eroare de cel mult 0,01, soluțiile ecuației :

$$x^2 - 10x - 5 = 0, x \in \mathbb{R}.$$

*Rezolvare.* Calculăm discriminantul :  $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 120$ . Deci

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{120}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{30}}{2} = 5 \pm \sqrt{30}.$$

Avem  $\sqrt{30} \approx 5,47$  (cu eroare de cel mult o sutime). Deci  $x_1 \approx -0,47$  și  $x_2 \approx 10,47$ .

### EXERCITII

1) Completați tabelul :

Ecuția	$a$	$b$	$c$	$\Delta$	Numărul soluțiilor
$x^2 + 5x - 6 = 0$					
$3x^2 + 7x + 4 = 0$					
$x^2 - 14x + 40 = 0$					
$x^2 + x + 180 = 0$					
$4x^2 + 4x + 1 = 0$					
$3x^2 + 13x - 14 = 0$					

2) Aflați rădăcinile polinoamelor :

a)  $X^2 - 14X + 24$  ; b)  $X^2 + 14X + 24$  ; c)  $15X^2 - 8X + 1$  ; d)  $2X^2 + 3X + 1$ .

3) Rezolvați ecuațiile :

a)  $5x^2 - 9x - 2 = 0$ ; b)  $3x^2 + 11x - 20 = 0$ ; c)  $1,5x^2 - 5,3x - 2,8 = 0$ ; d)  $0,11x^2 + 0,71x + 0,3 = 0$ ;  
e)  $x^2 - 11x - 81 = 0$ .

4) Rezolvați ecuațiile :

a)  $10x^2 + 20x - 30 = 0$  ; b)  $x^2 + 2x - 3 = 0$  ; c)  $0,1x^2 + 0,2x - 0,3 = 0$  ; d)  $0,01x^2 + 0,02x - 0,03 = 0$ . Ce observați ?

5) Stabiliți dacă ecuațiile următoare au sau nu soluții și, în caz afirmativ, rezolvați-le :

a)  $2x^2 - x - 1 = 0$  ; b)  $x^2 + 6x + 5 = 0$  ; c)  $-x^2 + 90x - 89 = 0$  ; d)  $x^2 + 5x + 7 = 0$  ;  
e)  $3x^2 - 4x + 1 = 0$  ; f)  $x^2 + x + 1 = 0$  ; g)  $x^2 - x + 1 = 0$  ; h)  $x^2 - x - 1 = 0$ .

6) Demonstrați că pentru orice valoare reală a parametrului  $m$ , ecuația  $2x^2 + mx - 13 = 0$  are soluții. Există valori ale lui  $m$  pentru care ecuația are o singură soluție ?

7) Pentru ce valori ale lui  $m$  ecuația  $4x^2 + mx + 529 = 0$  are o singură soluție ?

Pentru aceste valori, rezolvați ecuația.

8) Calculați cu aproximație de o sutime soluțiile ecuației :

a)  $x^2 - 10x - 5 = 0$  ; b)  $x^2 - 2x - 2 = 0$  ; c)  $x^2 - 2x - 17 = 0$ .

9) Aproximați, cu eroare de cel mult 0,001, soluțiile ecuațiilor :

a)  $x^2 - 14x - 1 = 0$  ; b)  $x^2 + 4\sqrt{5}x + 1 = 0$ .

10) Aflați valoarea lui  $m$  știind că 1 verifică ecuația  $mx^2 - 14x + 25 = 0$ . Aflați apoi cealaltă soluție.

11) Orice ecuație de forma  $ax^2 + bx + c = 0$  cu  $a \neq 0$  poate fi adusă la forma  $x^2 + px + q = 0$ , prin împărțire cu  $a$ . Scrieți algoritmul de rezolvare pentru ecuația  $x^2 + px + q = 0$ .

## 4. ECUAȚII ECHIVALENTE CU ECUAȚII DE GRADUL AL II-LEA

Exemplul 1. Fie ecuația

$$x(x - 1) = 12, x \in \mathbf{R}.$$

Să presupunem că numărul real  $s$  este soluție a acestei ecuații ; deci este adevărat că  $s(s - 1) = 12$ . Putem scrie  $s^2 - s = 12$ , sau  $s^2 - s - 12 = 0$ . Așadar  $s$  este soluție a ecuației de gradul al II-lea :

$$x^2 - x - 12 = 0, x \in \mathbf{R}.$$

Și reciproc, orice soluție a acestei ecuații de gradul al II-lea este soluție și a ecuației  $x(x - 1) = 12, x \in \mathbf{R}$ . Cele două ecuații sînt echivalente.

Observați cum am obținut ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 12 = 0$$

din ecuația inițială  $x(x - 1) = 12$ .

Exemplul 2. Ecuația

$$(x + 1)^2 = 3(x + 1), x \in \mathbf{R}$$

se poate rezolva în felul următor : observăm că  $-1$  este soluție ; dacă  $s$  este o altă soluție a ecuației, din  $(s + 1)^2 = 3(s + 1)$  și  $s \neq -1$  rezultă  $s + 1 = 3$ , adică  $s = 2$ . Într-adevăr, și numărul  $2$  este soluție a ecuației (verificați!). Deci ecuația are două soluții :  $-1$  și  $2$ .

Am fi putut obține soluțiile acestei ecuații și în alt mod, observând că ea este echivalentă cu ecuația  $x^2 + 2x + 1 = 3x + 3$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , sau cu ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 2 = 0, x \in \mathbf{R}$$

și rezolvând această ultimă ecuație.

*Exemplul 3.* Ecuația

$$-9 + (x + 1)^2 = 3(x - 2)^2, x \in \mathbf{R}$$

este echivalentă cu

$$-9 + x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 12x + 12, x \in \mathbf{R},$$

deci cu ecuația de gradul al II-lea :

$$-2x^2 + 14x - 20 = 0, x \in \mathbf{R}.$$

Rezolvați-o!

*Exemplul 4.* Fie ecuația

$$\frac{x^2 + 5}{3} = \frac{9x + 1}{5}, x \in \mathbf{R}.$$

Eliminând numitorii, o înlocuim cu :

$$5(x^2 + 5) = 3(9x + 1), x \in \mathbf{R},$$

adică cu

$$5x^2 + 25 = 27x + 3, x \in \mathbf{R}.$$

Este deci echivalentă cu ecuația de gradul al II-lea :

$$5x^2 - 27x + 22 = 0,$$

ale cărei soluții, obținute cu formulele obișnuite, sînt  $1$  și  $\frac{22}{5} = 4,4$ .

*Exemplul 5.* Fie ecuația

$$\frac{2x - 1}{x + 7} = \frac{3x + 4}{x - 1}.$$

Dacă înlocuim necunoscuta  $x$  prin  $-7$ , în membrul stîng numitorul este  $0$  ; la fel, dacă înlocuim necunoscuta  $x$  prin  $1$ , în membrul drept numitorul este  $0$ .

Din această cauză va trebui să presupunem că  $-7$  și  $1$  nu sînt printre valorile pe care le poate lua necunoscuta. Evident,  $-7$  și  $1$  nu pot fi soluții ale ecuației.



Cum rezolvăm această ecuație ? Presupunem că numărul  $s$  este soluție a ei ; atunci este adevărat că :

$$\frac{2s - 1}{s + 7} = \frac{3s + 4}{s - 1} .$$

Întrucît  $s + 7 \neq 0$  și  $s - 1 \neq 0$ , înmulțim ambii membri cu numărul  $(s + 7)(s - 1)$ , care este diferit de 0. Obținem (după simplificări) :

$$\begin{aligned} (s - 1)(2s - 1) &= (s + 7)(3s + 4), \\ 2s^2 - s - 2s + 1 &= 3s^2 + 4s + 21s + 28, \\ -s^2 - 28s - 27 &= 0. \end{aligned}$$

Așadar  $s$  este soluție a ecuației de gradul al II-lea :

$$-x^2 - 28x - 27 = 0 ;$$

rezolvînd-o, obținem  $s = -27$  sau  $s = -1$ .

Practic, pentru a rezolva ecuația  $\frac{2x - 1}{x + 7} = \frac{3x + 4}{x - 1}$  procedăm astfel :

— aducem la același numitor și eliminăm numitorii :

$$(x - 1)(2x - 1) = (x + 7)(3x + 4) ;$$

— trecem la ecuația de gradul al II-lea :

$$-x^2 - 28x - 27 = 0.$$

pe care o rezolvăm ;

— dintre soluțiile acestei ecuații de gradul al II-lea, eliminăm pe acelea care anulează vreunul dintre numitorii ecuației inițiale; celelalte sînt soluțiile ecuației inițiale.

*Exemplul 6.* Fie ecuația  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{x}{3}$ . Pentru a o rezolva procedăm ca în

exemplul 5 :

— eliminăm numitorii :

$$3(x^2 - 1) = (x - 1)x ;$$

— trecem la ecuația de gradul al II-lea :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= x^2 - x, \\ 2x^2 + x - 3 &= 0 ; \end{aligned}$$

— rezolvăm ecuația de gradul al II-lea ; ea are soluțiile 1 și  $-\frac{3}{2}$  ;

— întrucît 1 anulează numitorul membrului stîng în ecuația  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{x}{3}$ ,

această ecuație are numai o soluție, anume  $-\frac{3}{2}$  (verificați!).

*Exemplul*

adică cu ecuația

Ea are soluțiile

*Exemplul*

aducem mai în  
numitorii :

adică

sau

Rezolvăm

Să observăm  
înlocuirea necu-

o singură so-

*Exemplul 9*

este echivalentă

adică cu ecuația

Aceasta nu are

1) Rezolvați ecuațiile

a)  $x^2 + x = -1$  ; b)

2) Rezolvați ecuațiile

a)  $(x + 3)^2 = 25(x$

Exemplul 7. Ecuația  $\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2} = 2$  se înlocuiește cu :

$$3x^2 + 1 = 2(x^2 + 2),$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - 3 = 0.$$

Ea are soluțiile  $-\sqrt{3}$  și  $\sqrt{3}$  (verificați!).

Exemplul 8. Pentru a rezolva ecuația

$$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

aducem mai întâi ambii membri ai ecuației la același numitor, eliminând apoi numitorii :

$$(x+2)x + (x-2)5 = 8,$$

adică

$$x^2 + 2x + 5x - 10 = 8,$$

sau

$$x^2 + 7x - 18 = 0.$$

Rezolvăm această ecuație de gradul al II-lea ; ea are soluțiile 2 și -9.

Să observăm că numărul 2 nu poate fi soluție a ecuației inițiale, deoarece înlocuirea necunoscutei  $x$  cu 2 provoacă anularea unor numitori. Ecuația

$$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

are o singură soluție, anume -9 (verificați!).

Exemplul 9. Ecuația

$$(x+1)^3 = (x-1)^3$$

este echivalentă cu ecuația

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea :

$$6x^2 + 2 = 0.$$

Aceasta nu are nici o soluție.

## EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile :

a)  $x^3 + x = -1$  ; b)  $x^2 - 132 = x$  ; c)  $x^2 + 1 = 5x - 8$ .

2) Rezolvați ecuațiile :

a)  $(x+3)^2 = 25(x+3)$  ; b)  $2(x-2)^2 = 3(x-2)$  ; c)  $(2x-3)^2 = 4$  ; d)  $4(x-3)^2 = 25$ .

3) Rezolvați ecuațiile :

a)  $\frac{x^2 + 1}{2} = 5(x + 2)$  ; b)  $\frac{(x - 1)^2}{4} = x - 2$  ; c)  $\frac{x^2 + 1}{2} = 5(x - 2)$ .

4) Rezolvați ecuațiile :

a)  $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 0$  ; b)  $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 3$  ; c)  $(x + 1)^2 = 1 - 2(x + 3)$  ; d)  $x(x - 1) = (x + 1)(2 - x)$ .

5) Rezolvați ecuațiile :

a)  $\frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}$  ; b)  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$  ; c)  $\frac{2}{x^2 + 1} = \frac{3}{x}$  ; d)  $\frac{2x}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$ .

6) Rezolvați ecuațiile :

a)  $\frac{3x + 1}{x + 2} = \frac{x - 1}{x - 2}$  ; b)  $\frac{5x + 1}{x + 1} = \frac{x + 2}{x}$  ; c)  $\frac{x + 7}{3x + 1} = \frac{x}{x - 3}$ .

7) Rezolvați ecuațiile :

a)  $\frac{x^2 + 1}{2} - x = 2$  ; b)  $\frac{x^2 + 3}{6} - \frac{x + 4}{3} = 5$  ; c)  $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{5} = 1$ .

8) Rezolvați ecuațiile :

a)  $\frac{3x + 1}{x + 2} - \frac{x - 1}{x - 2} = 1$  ; b)  $\frac{4}{9x^2 - 1} - \frac{x}{1 - 3x} = \frac{4}{3x + 1}$  ; c)  $\frac{4}{x + 3} - \frac{5}{3 - x} = \frac{1}{x - 3} - 1$  ; d)  $\frac{2x + 1}{2x - 1} - \frac{3(2x - 1)}{2x + 1} - \frac{8x}{4x^2 - 1} = 0$ .

9) Justificați de ce ecuațiile următoare nu au soluții :

a)  $3(x - 9)^2 = 2 - \sqrt{5}$  ; b)  $\frac{1}{x^2 + 1} = -1$  ; c)  $2(x - 2)^2 + 3(x - 3)^2 = 0$ .

## 5. RELAȚII ÎNTRE RĂDĂCINILE ȘI COEFICIENȚII TRINOMULUI DE GRADUL AL II-LEA

Să considerăm trinomul de gradul al II-lea

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0.$$

Dacă discriminantul său  $\Delta = b^2 - 4ac$  este  $> 0$ , trinomul are două rădăcini ; acestea se calculează în funcție de coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  cu formulele :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Să presupunem acum că ne sînt cunoscute cele două rădăcini  $x_1$  și  $x_2$  ale unui trinom de gradul al II-lea. Putem oare afla coeficienții săi ?

Să calculăm suma și apoi produsul rădăcinilor :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

Putem scrie

Să considerăm  $x_2$ . Dar, dacă ne referim la coeficienții  $b$  și  $c$  și la formulele

poartă numele al II-lea (sau relația

Observație. Dacă  $\Delta = 0$ , atunci ea este echivalentă

1) Calculați

Rezolvare. Pentru a calcula soluțiile

2) Fie ecuația

a) Demonstrați că soluțiile

b) Calculați suma rădăcinilor

\* François Viète în special cu rezolvarea

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Putem scrie astfel :

$$b = -a(x_1 + x_2),$$

$$c = ax_1 x_2.$$

Să considerăm că mai multe trinome de gradul al II-lea au rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$ . Dar, dacă ne alegem valoarea lui  $a$  (de exemplu, dacă luăm  $a = 1$ ), atunci coeficienții  $b$  și  $c$  sînt *unic determinați* de rădăcini.

Formulele

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

poartă numele de **relațiile între rădăcinile și coeficienții** trinomului de gradul al II-lea (sau **relațiile lui Viète\***).

*Observație.* Dacă se cunosc suma  $s$  și produsul  $p$  ale rădăcinilor unei ecuații de gradul al II-lea, atunci ea este echivalentă cu ecuația :

$$x^2 - sx + p = 0.$$

### EXERCIIII REZOLVATE

1) Calculați suma și produsul soluțiilor ecuației :

$$3x^2 - 7x - 113 = 0.$$

*Rezolvare.* Ecuația are două soluții, întrucît discriminantul ei este  $> 0$ . Fără a calcula soluțiile, putem scrie :

$$x_1 + x_2 = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3}, \quad x_1 x_2 = \frac{-113}{3} = -\frac{113}{3}.$$

2) Fie ecuația :

$$2x^2 - mx - 3 = 0.$$

a) Demonstrați că pentru orice valoare a parametrului  $m$  ecuația are două soluții.

b) Calculați (în funcție de  $m$ ) :

— suma rădăcinilor trinomului  $2X^2 - mX - 3$  ;

\* François Viète (1540–1603), matematician francez, unul dintre creatorii algebrei, s-a ocupat în special cu rezolvarea ecuațiilor.

- produsul rădăcinilor ;
- suma inverselor rădăcinilor ;
- suma pătratelor rădăcinilor ;
- suma cuburilor rădăcinilor.

*Rezolvare.* a) Să recunoaștem că  $a = 2, b = -m, c = -3$ ; deci  $\Delta = m^2 + 24 > 0$  pentru orice  $m$ -real; deci ecuația are două soluții.

b) Aplicând formulele lui Viète, obținem

$$x_1 + x_2 = \frac{m}{2}, x_1 x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Apoi :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = -\frac{m}{3};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{m^2 + 12}{4};$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{m}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{m}{2} = \frac{m^3 + 18m}{8}.$$

3) Fie ecuațiile de gradul al II-lea :

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0,$$

$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0.$$

Demonstrați că ecuațiile au aceleași soluții dacă și numai dacă :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

*Rezolvare.* Presupunem că ecuațiile au aceleași soluții; fie acestea  $x_1$  și  $x_2$ . Relațiile lui Viète pentru prima ecuație sînt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a_1}, x_1 x_2 = \frac{c_1}{a_1},$$

iar pentru a doua ecuație sînt :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_2}{a_2}, x_1 x_2 = \frac{c_2}{a_2}.$$

Rezultă  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$  și  $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$ , de unde, folosind proprietățile proporțiilor,

deducem că :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

să notăm

$b_1 = b_2 r$  și  
prima se

4) Un

siunile sale

*Rezolv*

$L$  și  $l$  ale  $d$

II-lea ale  $c$

*Rezolv*

lui sînt :  $L$

1) Calcul

a)  $2X^2 -$

f)  $-9X^2 + 16X$

2) Form

a) 1 și 2

h)  $7 - \sqrt{3}$  și  $7$

3) Rezol  
coeficientul ne

a)  $x^2 -$

b)  $2x^2 +$

c)  $5x^2 -$

4) Aflați

5) Aflați  
trică a lor este

6) Aflați

a) perime

b) perime

c) perime

7) Pentru

sînt echivalente

Reciproc, presupunând că cele două ecuații au coeficienții proporționali, să notăm cu  $r$  valoarea comună a rapoartelor  $\frac{a_1}{a_2}$ ,  $\frac{b_1}{b_2}$  și  $\frac{c_1}{c_2}$ . Atunci  $a_1 = a_2 r$ ,

$b_1 = b_2 r$  și  $c_1 = c_2 r$ . Evident  $r \neq 0$ . Astfel ecuațiile sînt echivalente, deoarece prima se obține din a doua prin înmulțirea ambilor membri cu numărul  $r$ .

4) Un dreptunghi are aria de  $60 \text{ cm}^2$  iar perimetrul de  $38 \text{ cm}$ . Aflați dimensiunile sale.

*Rezolvare.* Semiperimetrul dreptunghiului este de  $19 \text{ cm}$ ; deci dimensiunile  $L$  și  $l$  ale dreptunghiului au suma  $19$  și produsul  $60$ . Formăm ecuația de gradul al II-lea ale cărei soluții sînt  $L$  și  $l$ :

$$x^2 - 19x + 60 = 0.$$

Rezolvînd ecuația, găsim  $x_1 = 4$  și  $x_2 = 15$ ; deci dimensiunile dreptunghiului sînt:  $L = 15 \text{ (cm)}$ ,  $l = 4 \text{ (cm)}$ .

### EXERCIȚII

1) Calculați suma, produsul și suma pătratelor rădăcinilor polinoamelor:

a)  $2X^2 - 4X + 1$ ; b)  $3X^2 - 8X + 5$ ; c)  $-X^2 - 6X - 1$ ; d)  $3X^2 - 36X + 5$ ; e)  $2X^2 - 16X + 19$ ; f)  $-9X^2 + 16X - 27$ .

2) Formați ecuații de gradul al II-lea ale căror soluții sînt:

a)  $1$  și  $2$ ; b)  $4$  și  $5$ ; c)  $-1$  și  $-3$ ; d)  $-4$  și  $5$ ; e)  $\frac{2}{5}$  și  $-\frac{1}{3}$ ; f)  $-4$  și  $4$ ; g)  $3,5$  și  $5,5$ ; h)  $7 - \sqrt{3}$  și  $7 + \sqrt{3}$ ; i)  $-3 - \sqrt{3}$  și  $-3 + \sqrt{3}$ ; j)  $2 + \sqrt{3}$  și  $2 - \sqrt{3}$ ; k)  $1 - \sqrt{3}$  și  $2\sqrt{3}$ .

3) Rezolvați ecuațiile de mai jos, cunoscînd cîte o soluție (scrisă în dreptul fiecăreia). Aflați și coeficientul necunoscut:

a)  $x^2 - mx + 36 = 0$ ,  $x_1 = 12$ ;

b)  $2x^2 + mx - 5 = 0$ ,  $x_1 = 5$ ;

c)  $5x^2 - 8x + m = 0$ ,  $x_2 = 0,6$ .

4) Aflați două numere, cunoscînd că au suma  $337$  iar produsul  $8086$ .

5) Aflați două numere pozitive, știind că media aritmetică a lor este  $133,5$ , iar media geometrică a lor este  $120$ .

6) Aflați dimensiunile unui dreptunghi, cunoscînd că are:

a) perimetrul de  $84 \text{ m}$ , aria de  $185 \text{ m}^2$ ;

b) perimetrul de  $108 \text{ m}$ , aria de  $729 \text{ m}^2$ ;

c) perimetrul de  $108 \text{ m}$ , aria de  $542 \text{ m}^2$ .

7) Pentru ce valori ale lui  $m$  și  $n$ , ecuațiile

$$x^2 + mx + 1 = 0,$$

$$2x^2 - nx + m = 0$$

sînt echivalente?

8) Fie ecuația  $x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{4} = 0$ . Calculați  $x_1^2 + x_2^2$  și  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ , fără a rezolva ecuația.

9\* Pot fi echivalente ecuațiile :

$$mx^2 + (m - 4)x + 4m = 0,$$

$$(3 + m)x^2 + 5(5 + 3m)x + 8 = 0?$$

Dacă da, rezolvați-le în acest caz.

## 6. DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI A TRINOMULUI DE GRADUL AL II-LEA

Să ne reamintim câteva exemple de descompuneri în factori ale unor trinome de gradul al II-lea :

$$X^2 + 2X = X(X + 2);$$

$$X^2 - 6 = (X + \sqrt{6})(X - \sqrt{6});$$

$$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2;$$

$$X^2 - 4X + 3 = (X - 2)^2 - 1 = (X - 1)(X - 3);$$

$$X^2 - 5X + 6 = X^2 - 2X - 3X + 6 = X(X - 2) - 3(X - 2) = (X - 2)(X - 3).$$

Metodele cunoscute se aplică mai greu în cazul în care coeficienții sînt numere „mari”, ca de exemplu în cazul trinomului :

$$41X^2 + 205X - 8364.$$

Formulele lui Viète ne permit să găsim o metodă generală de descompunere în factori a trinomului de gradul al II-lea.

Fie trinomul :

$$P(X) = aX^2 + bX + c, a \neq 0.$$

Distingem trei cazuri :

1) Discriminantul  $\Delta = b^2 - 4ac$  este  $< 0$ . În acest caz orice încercare de descompunere a trinomului în factori de gradul I nu conduce la nici un rezultat. Trinomul este *irreductibil*.

2)  $\Delta = 0$ . În acest caz trinomul se poate descompune astfel :

$$P(X) = a \left( X + \frac{b}{2a} \right)^2,$$

deci se poate scrie ca pătrat al unui binom de gradul I.

3)  $\Delta > 0$ . În acest caz, dacă  $x_1$  și  $x_2$  sînt rădăcinile trinomului, atunci folosind relațiile lui Viète obținem :

$$\begin{aligned} P(X) &= a \left( X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} \right) = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2) = \\ &= a(X - x_1)(X - x_2). \end{aligned}$$

Așadar trinomul se descompune ca produs de doi factori de gradul I.

De exemplu, să descompunem în factori trinomialul

$$41X^2 + 205X - 8364.$$

Discriminantul său este  $\Delta = 205^2 - 4 \cdot 41 \cdot (-8364) = 1\,413\,721$ . Deci trinomialul se descompune ca produs de doi factori de gradul I.

$$x_{1,2} = \frac{-205 \pm \sqrt{1\,413\,721}}{82} = \frac{-205 \pm 1\,189}{82},$$

$$\text{deci } x_1 = \frac{-205 - 1\,189}{82} = \frac{-1\,394}{82} = -17, \quad x_2 = \frac{-205 + 1\,189}{82} = 12.$$

Rezultă

$$41X^2 + 205X - 8364 = 41(X + 17)(X - 12) = (41X + 697)(X - 12).$$

### EXERCITII

1) Descompuneți în factori de gradul I :

- a)  $X^2 - 13X + 30$  ; b)  $X^2 + 36X + 323$  ; c)  $2X^2 - 5X - 12$  ; d)  $-X^2 + 5X - 4$  ; e)  $X^2 - 2\sqrt{2}X - 5$  ;  
f)  $X^2 - 4X - 5$  ; g)  $10X^2 - 43X + 12$  ; h)  $X^2 - 2X - 1$  ; i)  $2X^2 - 2\sqrt{2}X - 3$ .

2) Simplificați fracțiile :

a)  $\frac{X^2 + 10X - 39}{2X^2 - 21X + 45}$  ; b)  $\frac{X^2 + X - 12}{2X^2 - X - 15}$  ; c)  $\frac{6X^2 - 5X + 1}{6X^2 + X - 1}$  ; d)  $\frac{X^2 + X - 90}{8X^2 + 83X + 30}$  ; e)  $\frac{3X^2 - 7X + 2}{2X^2 + 5X - 18}$  ;

f)  $\frac{X^2 + 7X - 8}{2X^2 - 3X + 1}$  ; g)  $\frac{2X^2 - 5X - 3}{6X^2 - X - 2}$  .

**3\*** Demonstrați că pentru orice valoare nenulă a parametrului  $m$ , trinomialul  $P(X) = X^2 + 2X + m^2 + 1$  este ireductibil.

## 7. ECUAȚII CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL UNOR ECUAȚII DE GRADUL AL II-LEA

*Exemplul 1.* Să rezolvăm ecuația :

$$\frac{x^2 - 6x}{x - 5} = \frac{5}{5 - x}.$$

Nu putem înlocui necunoscuta  $x$  prin numărul 5. Fie  $s$  o soluție a ecuației ;

înmulțind ambii membri ai egalității  $\frac{s^2 - 6s}{s - 5} = \frac{5}{5 - s}$  cu  $s - 5$  (care este

diferit de 0), obținem  $s^2 - 6s = -5$ , sau  $s^2 - 6s + 5 = 0$ . Deci  $s$  este soluție a ecuației de gradul al II-lea :

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$



Soluțiile acestei ecuații, calculate cu formulele obișnuite, sînt 1 și 5 ; dar numai prima aparține mulțimii  $\mathbf{R} \setminus \{5\}$ . Deci ecuația  $\frac{x^2 - 6x}{x - 5} = \frac{5}{5 - x}$  are o singură soluție, anume numărul 1.

*Exemplul 2.* Să rezolvăm ecuația :

$$\sqrt{x} = 6 - x.$$

Să presupunem că numărul  $s$  este soluție a ecuației ; atunci  $\sqrt{s} = 6 - s$ . Pentru a putea extrage rădăcină pătrată, numărul  $s$  trebuie să fie evident  $\geq 0$ . Pe de altă parte,  $\sqrt{s}$  este un număr  $\geq 0$  ; deci  $6 - s \geq 0$ , adică  $s \leq 6$ . Așadar  $s$  va trebui să aparțină intervalului  $[0 ; 6]$ .

Să ridicăm la pătrat egalitatea  $\sqrt{s} = 6 - s$  ; obținem  $s = (6 - s)^2$ , sau  $s^2 - 13s + 36 = 0$ . Așadar numărul  $s$  este soluție a ecuației de gradul al II-lea

$$x^2 - 13x + 36 = 0.$$

Această ecuație de gradul II-lea are ca soluții numerele 4 și 9. Dintre acestea, doar 4 aparține intervalului  $[0 ; 6]$ . Putem constata și prin înlocuire directă că 9 nu verifică ecuația  $\sqrt{x} = 6 - x$ . Deci ecuația  $\sqrt{x} = 6 - x$  admite o singură soluție: 4

Ce legătură există între ecuația  $\sqrt{x} = 6 - x$  și ecuația  $x = (6 - x)^2$  ? A doua se obține din prima „ridicînd ambii membri la pătrat”. Cele două ecuații **nu sînt echivalente**. Mulțimea soluțiilor primei ecuații este inclusă în mulțimea soluțiilor celei de-a doua, dar nu coincide cu ea.

De ce se întîmplă așa ? Evident, dacă  $u = v$ , atunci  $u^2 = v^2$  ; dar reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, dacă  $u^2 = v^2$ , atunci  $(u + v)(u - v) = 0$ , de unde concluzia „ $u = v$  sau  $u = -v$ ”. Deci, pentru ca relația  $u^2 = v^2$  să implice  $u = v$ , este necesar ca  $u$  și  $v$  să aibă același semn.

*Exemplul 3.* Fie ecuația

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x} = 0.$$

Putem înlocui necunoscuta  $x$  cu numere  $s$  astfel încît  $s - 2 \geq 0$  (primul radical) și  $2 - s \geq 0$  (al doilea radical). Deci  $s \geq 2$  și  $s \leq 2$  adică  $s = 2$ . Necunoscuta  $x$  poate lua valori doar în mulțimea  $\{2\}$ . Observăm că 2 este soluție a ecuației.

*Exemplul 4.* Rezolvați ecuația

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x} = 3.$$

Ca și exemplul 3, necunoscuta  $x$  poate lua valori doar în mulțimea  $\{2\}$ . Înlocuind în ecuație necunoscuta  $x$  cu 2, obținem o propoziție falsă, deci ecuația nu are nici o soluție.

*Exemplul 5.* Să rezolvăm ecuația

$$\sqrt{x + 2} + \sqrt{11 - x} = 5.$$

Putem înlocui necunoscuta  $x$  cu numere  $s$  astfel încît  $s + 2 \geq 0$  și  $11 - s \geq 0$  ; deci necunoscuta  $x$  poate lua valori doar în intervalul  $[-2, 11]$ .

Fie  $s$  un număr din acest interval ; atunci numărul  $\sqrt{s+2} + \sqrt{11-s}$  este pozitiv (ca sumă a doi radicali) ; ecuația este deci echivalentă cu :

$$(\sqrt{x+2} + \sqrt{11-x})^2 = 25, \quad x \in [-2; 11]$$

adică cu :

$$x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(11-x)} + 11 - x = 25, \quad x \in [-2; 11]$$

sau

$$\sqrt{(x+2)(11-x)} = 6, \quad x \in [-2; 11].$$

Și această ecuație, atât membrul stîng, cît și cel drept sînt pozitivi ; deci ecuația este echivalentă cu :

$$(x+2)(11-x) = 36, \quad x \in [-2; 11]$$

sau cu :

$$-x^2 + 9x - 14 = 0, \quad x \in [-2; 11].$$

Ecuația de gradul al II-lea :

$$-x^2 + 9x - 14 = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

are două soluții : 2 și 7. Amîndouă aparțin intervalului  $[-2; 11]$ , deci sînt soluții ale ecuației  $\sqrt{x+2} + \sqrt{11-x} = 5$ .

*Exemplul 6.* Fie ecuația de gradul al IV-lea :

$$x^4 - 27x^2 + 50 = 0.$$

Prin substituția  $y = x^2$  obținem ecuația de gradul al II-lea (în necunoscuta  $y$ ) :

$$y^2 - 27y + 50 = 0,$$

ale cărei soluții sînt 2 și 25. Deci  $x^2 = 2$  sau  $x^2 = 25$ .

Ecuația  $x^2 = 2$  are soluțiile  $-\sqrt{2}$  și  $\sqrt{2}$ , iar ecuația  $x^2 = 25$  are soluțiile  $-5$  și  $5$ . Deci ecuația de gradul al IV-lea are patru soluții :  $-5, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$  și  $5$ .

*Exemplul 7.* Fie ecuația de gradul al IV-lea :

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Substituim (înlocuim) pe  $x^2$  cu  $y$  ; obținem ecuația de gradul al II-lea :

$$4y^2 + 3y - 1 = 0,$$

ale cărei soluții sînt  $y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{4}$ .

Ecuația  $x^2 = -1$  nu are soluții ; ecuația  $x^2 = \frac{1}{4}$  are soluțiile  $-\frac{1}{2}$  și  $\frac{1}{2}$ .

Așadar ecuația de gradul al IV-lea

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

are două soluții, numerele  $-\frac{1}{2}$  și  $\frac{1}{2}$  (verificați !)

Handwritten notes and calculations:

$$\frac{26}{18} + \frac{13}{9}$$

$$\frac{81}{72}$$

$$\frac{72^2}{4} = \frac{36^2}{4} = 18$$

Metoda aplicată în cele două exemple de mai sus se poate folosi pentru a rezolva orice ecuație de gradul al IV-lea de forma :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

cu  $a \neq 0$ . O astfel de ecuație se numește ecuație *bipătrată*.

*Exemplul 8.* Fie ecuația :

$$x^2 + x = \frac{4}{x^2 + x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Să înlocuim pe  $x^2 + x$  cu  $y$  ; obținem

$$y = \frac{4}{y},$$

$$y^2 = 4,$$

ecuație ce are două soluții :  $-2$  și  $2$ .

Ecuația  $x^2 + x = -2$  nu are soluții ; ecuația  $x^2 + x = 2$  are soluțiile  $-2$  și  $1$ .  
Așadar ecuația

$$x^2 + x = \frac{4}{x^2 + x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

are două soluții :  $-2$  și  $1$ .

## EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile :

a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$  ; b)  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$  ; c)  $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$  ; d)  $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1} - 1$  ;  
e)  $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = 1$  ; f)  $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = 2$ .

2) Rezolvați ecuațiile :

a)  $\sqrt{x} = x$  ; b)  $\sqrt{x} = x+1$  ; c)  $\sqrt{x} = -x$  ; d)  $\sqrt{x^2+1} = 2$  ; e)  $\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{x}$  ;  
f)  $\sqrt{x(x-5)} = 6$  ; g)  $\sqrt{x^2-5x} = x-3$  ; h)  $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 7$  ; i)  $\sqrt{3-x} + \sqrt{2-x} = 1$  ;  
j)  $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-2} = 1$  ; k)  $\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \frac{1}{3}$  ; l)  $\sqrt{x^2-2x+1} = 5$ .

3) Rezolvați ecuațiile :

a)  $x^4 - 21x^2 + 110 = 0$  ; b)  $x^4 + 12x^2 + 20 = 0$  ; c)  $x^4 - 12x^2 + 20 = 0$  ; d)  $x^4 - x^2 + 1 = 0$  ;  
e)  $x^4 - x^2 - 12 = 0$ .

## 8. PROBLEME

Multe probleme de geometrie, fizică, tehnică etc., conduc la ecuații de gradul al doilea.

Formu  
circular de  
tență) dev  
Să rezolvăr  
Proble  
gime a) un  
ABMN să



Rezolv  
apartine se  
Din f  
Însă c  
tul raportu

Obține

$$x_1 = -\frac{a}{\sqrt{5}}$$

intervalului

$$MC = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Proble

laturile AB  
NN' pe BC  
dreptunghi

Rezolv

Segme

poate folosi pentru a re-

= 2 are soluțiile -2 și 1.

d)  $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1} - 1$ ;

e)  $\sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{x}$ ;

i)  $\sqrt{3-x} + \sqrt{2-x} = 1$ ;

$\sqrt{1} = 5$ .

d)  $x^4 - x^2 + 1 = 0$ ;

conduc la ecuații de

Formule ca  $A = \pi r^2$  (aria cercului de rază  $r$ ),  $V = \pi r^2 h$  (volumul cilindrului circular de rază  $r$  și înălțime  $h$ ),  $P = I^2 R$  (puterea în funcție de intensitate și rezistență) devin ecuații de gradul al II-lea atunci când necunoscuta este  $r$  respectiv  $I$ . Să rezolvăm câteva probleme care conduc la ecuații de gradul al II-lea.

**Problema 1.** Fie  $ABC$  un triunghi. Determinați pe segmentul  $BC$  (de lungime  $a$ ) un punct  $M$  astfel încât ducând paralela  $MN$  la latura  $AB$ , aria trapezului  $ABMN$  să fie de 4 ori mai mare decât aria triunghiului  $MNC$  (vezi figura 1).

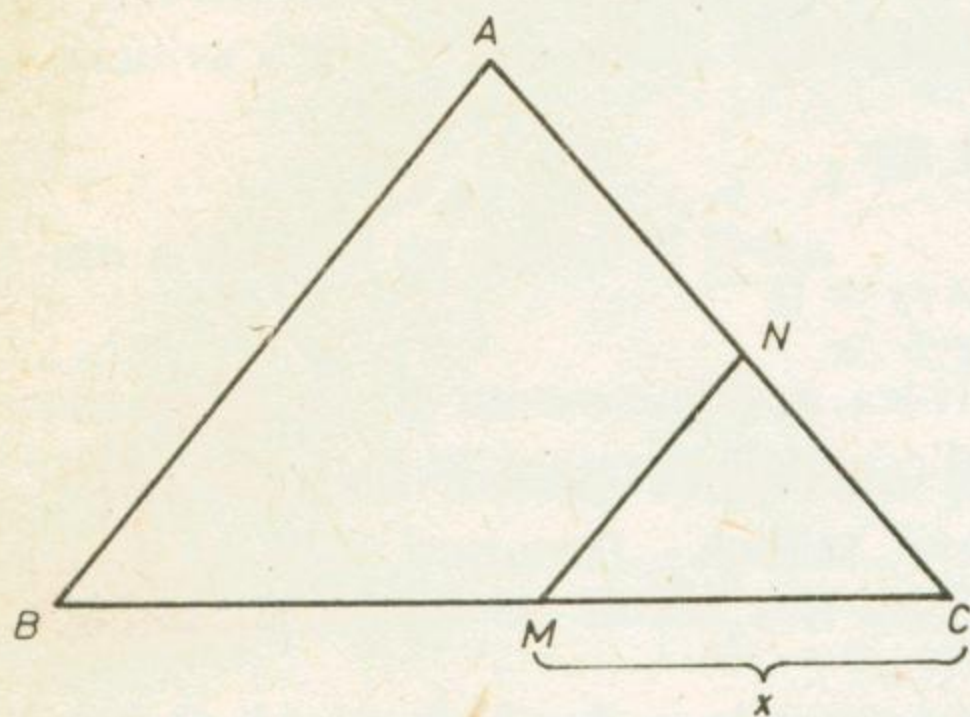


Fig. IV.1

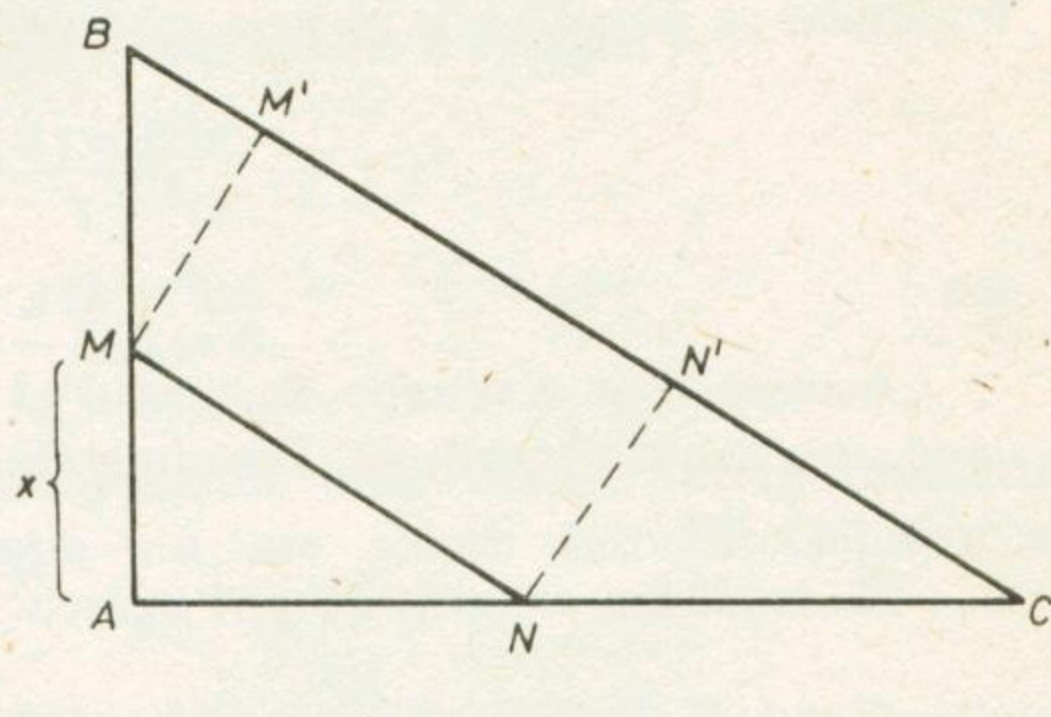


Fig. IV.2

**Rezolvare.** Să notăm cu  $x$  lungimea segmentului  $CM$ . Faptul că punctul  $M$  aparține segmentului  $BC$  impune condiția  $0 \leq x \leq a$ .

Din faptul că  $S_{ABMN} = 4 \cdot S_{MNC}$  rezultă că  $S_{ABC} = S_{ABMN} + S_{MNC} = 5 \cdot S_{MNC}$ .

Însă cele două triunghiuri sînt asemenea; deci raportul ariilor lor este pătratul raportului de asemănare :

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MNC}} = \left(\frac{BC}{MC}\right)^2$$

Obținem astfel ecuația :  $\left(\frac{a}{x}\right)^2 = 5$  ; rezolvînd-o, găsim că are două soluții :

$$x_1 = -\frac{a}{\sqrt{5}} \text{ și } x_2 = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5} .$$

Prima soluție nu corespunde (nu aparține intervalului  $[0; a]$ ). Poziția punctului  $M$  trebuie aleasă deci în așa fel încît

$$MC = \frac{a\sqrt{5}}{5} .$$

**Problema 2.** O paralelă la ipotenuza unui triunghi dreptunghic  $ABC$  taie laturile  $AB$ ,  $AC$  în punctele  $M$ , respectiv  $N$ . Construim perpendicularele  $MM'$ ,  $NN'$  pe  $BC$  (vezi figura 2). Determinați poziția punctului  $M$  astfel încît aria dreptunghiului  $MNN'M'$  să fie  $s$ .

**Rezolvare.** Fie  $x$  lungimea segmentului  $AM$  ; evident  $0 \leq x \leq c$ .

Segmentul  $MB$  are lungimea  $c - x$ . Din asemănarea triunghiurilor  $BMM'$

și ABC obținem  $\frac{c-x}{MM'} = \frac{a}{b}$ , adică lungimea segmentului  $MM'$  este  $\frac{b(c-x)}{a}$ .

Din asemănarea triunghiurilor  $AMN$  și  $ABC$  obținem  $\frac{x}{c} = \frac{MN}{a}$ , adică lungimea segmentului  $MN$  este  $\frac{ax}{c}$ .

Așadar aria dreptunghiului  $MNN'M'$  este  $\frac{b(c-x)}{a} \cdot \frac{ax}{c} = \frac{b(c-x)x}{c}$ .

Impunând ca această arie să fie  $s$ , obținem ecuația :

$$\frac{b(c-x)x}{c} = s,$$

sau :

$$bx^2 - bcx + cs = 0.$$

Aceasta este o ecuație de gradul al II-lea în necunoscuta  $x$ ; ea poate avea două, una sau nici o soluție. Discriminantul ecuației se scrie  $\Delta = (bc)^2 - 4b \cdot cs = (bc - 4s)bc$ .

Să analizăm cazurile ce pot apărea. Vom ține seamă de faptul că  $b, c > 0$ .

*Cazul 1.* Dacă  $s > \frac{bc}{4}$  (adică o jumătate din aria triunghiului  $ABC$ !), ecuația nu are soluții.

*Cazul 2.* Dacă  $s = \frac{bc}{4}$ , ecuația are o singură soluție :  $x = \frac{c}{2}$ . Ce poziție are punctul  $M$  în acest caz ?

*Cazul 1.* Dacă  $0 \leq s < \frac{bc}{4}$ , ecuația are două soluții :

$$x_1 = \frac{bc - \sqrt{bc(bc - 4s)}}{2b}, \quad x_2 = \frac{bc + \sqrt{bc(bc - 4s)}}{2b}.$$

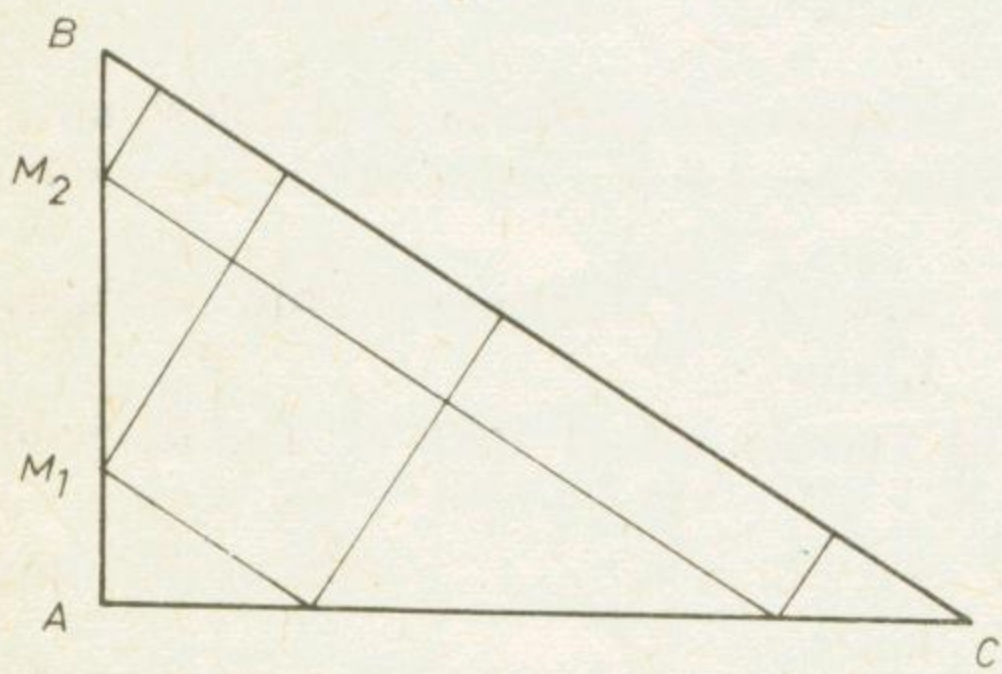


Fig. IV.3

Amândouă corespund unor soluții ale problemei : punctele  $M_1$  și  $M_2$  (vezi figura 3).

*Cazul 4.* Dacă  $s < 0$ , ecuația încă are două soluții  $x_1$  și  $x_2$ , dar ele nu corespund vreunei soluții a problemei. Problema nu are soluție (aria nu poate fi negativă !).

**Problema 3.** Aflați laturile unui triunghi dreptunghic, știind că sînt numere naturale consecutive.

*Rezolvare.* Fie  $x, x + 1, x + 2$  lungimile laturilor triunghiului, ipotenuza

... MM' este  $\frac{b(c-x)}{a}$ .

... inem  $\frac{x}{c} = \frac{MN}{a}$ , adică

$$\frac{ax}{c} = \frac{b(c-x)x}{c}$$

... scuta x ; ea poate avea  
...  $\Delta = (bc)^2 - 4b \cdot cs =$

... de faptul că  $b, c > 0$ .

... a triunghiului ABC !),

... :  $x = \frac{c}{2}$ . Ce poziție

... - 4s)

... respund unor soluții  
... punctele  $M_1$  și  $M_2$

... Dacă  $\Delta < 0$ , ecuația încă  
... și  $x_2$ , dar ele nu  
... unei soluții a problemei  
... nu are soluție (aria nu  
... vă !).

... c, știind că sînt numere  
... triunghiului, ipotenuza

avînd lungimea  $x + 2$ . Să aplicăm teorema lui Pitagora :  $(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2$ . Rezolvînd această ecuație, obținem  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ . Prima soluție a ecuației nu convine (nu este număr natural !). Problema are o singură soluție : triunghiul cu laturile de lungimi 3, 4 și 5.

*Problema 4.* Demonstrați că nu există două numere întregi consecutive al căror produs să fie 588.

*Rezolvare.* Să presupunem prin absurd că produsul numerelor întregi consecutive  $x$  și  $x + 1$  este 588. Deci numărul  $x$  este soluție a ecuației :

$$x(x + 1) = 588,$$

sau a ecuației de gradul al II-lea

$$x^2 + x - 588 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuații nu este pătratul unui număr întreg (numărul  $\sqrt{2353}$  este irațional). Așadar ecuația nu are soluții întregi. Obținem o contradicție.

*Problema 5.* Două autocamioane pleacă în același moment într-o cursă de 440 km ; primul, circulă cu o viteză mai mare cu 15 km/h decît viteza celui de-al doilea. Aflați vitezele medii cu care au circulat, știind că al doilea autocamion a sosit la trei ore după primul.

*Rezolvare.* Să notăm cu  $x$  și  $y$  vitezele celor două autocamioane. Relația  $x = y + 15$  este imediată. Durata călătoriei primului este de  $\frac{440}{x} = \frac{440}{y + 15}$  ore,

iar a celui de-al doilea de  $\frac{440}{y}$  ore. Obținem ecuația :

$$\frac{440}{y + 15} + 3 = \frac{440}{y}.$$

Rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea ecuației de gradul al II-lea :

$$y^2 + 15y - 2200 = 0,$$

ale cărei soluții sînt  $y_1 = -55$ ,  $y_2 = 40$ .

Prima soluție nu convine (viteza nu poate fi negativă !). Vitezele celor două autocamioane au fost de 40 și respectiv 55 km/h.

*Problema 6.* Un tablou are dimensiunile de 30 cm și 40 cm. Tabloul împreună cu rama are o suprafață de 2184 cm<sup>2</sup>. Aflați lățimea ramei.

*Rezolvare.* Fie  $x$  (cm) lățimea ramei ; atunci tabloul înrămat are forma unui dreptunghi cu lungimea de  $40 + 2x$  cm și lățimea de  $30 + 2x$  cm, adică avînd suprafața de  $(2x + 40)(2x + 30)$  cm<sup>2</sup>. Obținem lățimea  $x$  a ramei rezolvînd ecuația :

$$(2x + 40)(2x + 30) = 2184.$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 29} \\ \underline{21} \phantom{0} \\ 8 \phantom{0} \\ \underline{6} \phantom{0} \\ 2 \phantom{0} \\ \underline{3} \phantom{0} \\ 1 \phantom{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \overline{) 29} \\ \underline{21} \phantom{0} \\ 8 \phantom{0} \\ \underline{6} \phantom{0} \\ 2 \phantom{0} \\ \underline{3} \phantom{0} \\ 1 \phantom{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 \\ \underline{3} \\ 47 \\ \underline{45} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50-3=47 \\ \underline{3} \\ 50-3=47 \\ \underline{3} \\ 47 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \underline{3} \\ 47 \\ \underline{45} \\ 2 \end{array}$$

Acceptăm o singură soluție :  $x = 6$  cm.

*Problema 7.* Doi conductori electrici legați în serie au rezistența de 15 ohmi, iar legați în paralel au rezistența de 3 ohmi. Aflați rezistența fiecărui conductor.

*Rezolvare.* Se știe că după legarea în serie a doi rezistori ce au rezistențele  $x$  (ohmi), respectiv  $y$  (ohmi), ansamblul lor are rezistența  $x + y$  (ohmi); după legarea în paralel, ansamblul are rezistența  $\frac{xy}{x+y}$ , adică  $\frac{xy}{15}$  ohmi. Cunoșcând suma și produsul numerelor  $x$  și  $y$ , le putem afla rezolvând ecuația de gradul al II-lea

$$R^2 - 15R + 45 = 0.$$

Cele două rezistențe sînt de aproximativ 4,1 respectiv 10,9 ohmi.

*Problema 8.* O lege a fizicii afirmă că un corp aruncat pe verticală (în sus), cu viteza inițială  $v$  m/s, se va afla după  $t$  secunde de la aruncare la înălțimea

$$h(t) = vt - \frac{g}{2}t^2;$$
 în această formulă  $g$  este „acelerația gravitațională” determinată de atracția Pământului; valoarea ei este de aproximativ  $10 \text{ m/s}^2$ . Aflați după cît timp de la aruncare corpul se va afla la înălțimea de 100 m, dacă a fost aruncat cu viteza inițială de 45 m/s.

*Rezolvare.* Va trebui să rezolvăm ecuația :

$$100 = 45t - 5t^2$$

în necunoscuta  $t$ ; obținem soluțiile  $t_1 = 4$  și  $t_2 = 5$ . Deci corpul se va afla de două ori la înălțimea de 100 m : prima dată, în urcare, după 4 secunde de la aruncare ; a doua oară, în coborîre, după 5 secunde de la aruncare.

## PROBLEME

1) Dintr-un punct aflat la 50 m de centrul unui cerc se trazează tangentele la acest cerc. Aflați distanțele pînă la punctele de tangență, știind că raza cercului este de 30 m.

2) Dimensiunile unui dreptunghi de arie  $6320 \text{ cm}^2$  sînt exprimate prin două numere naturale consecutive. Aflați aceste dimensiuni.

3) Orice patrulater are 2 diagonale. Orice pentagon are 5 diagonale. Orice exagon are 9 diagonale. Puteți stabili cîte diagonale are un poligon cu  $n$  laturi ? Cîte laturi are un poligon ce are un număr de 170 de diagonale ?

4) Aflați numărul real  $a$ , știind că punctul  $A(a; a)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x - 12$ .

5) Într-un apartament, două camere au aceeași suprafață, anume de  $16 \text{ m}^2$ . Una dintre camere are lungimea cu 1 m mai mare, iar lățimea cu 0,8 m mai mică decît cealaltă. Aflați dimensiunile fiecărei camere.

6) Aflați rezistențele a doi rezistori, știind că legați în serie au rezistența totală de 20 ohmi, iar legați în paralel au rezistența de 4,8 ohmi.

7) Dintr-o bucată dreptunghiulară de tablă zincată, avînd suprafața de  $8000 \text{ cm}^2$  s-a tăiat o bucată de  $1600 \text{ cm}^2$ . Aflați dimensiunile bucății inițiale, știind că bucata rămasă are forma unui pătrat.

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII  
UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Rezolvați ecuațiile :

$$x^2 - 14x = 0 ; 4x^2 - 1 = 0 ; x^2 - 17x + 42 = 0 ; 9x^2 + 6x + 1 = 0.$$

2) Găsiți rădăcinile trinoamelor :

$$X^2 + 13X - 30 ; 2X^2 - 3X + 0,5.$$

3) Formați ecuațiile de gradul al II-lea ale căror soluții sînt :

$$5 \text{ și } -8 ; 7 \text{ și } -7 ; 3 \text{ și } 18 ; 4 \text{ și } 0.$$

LUCRAREA a II-a

1) Descompuneți în factori ireductibili trinoamele :

$$X^2 + 17X + 72 ; 2X^2 - 27X + 13.$$

2) Simplificați fracțiunile :

$$\frac{4X^2 - 1}{2X^2 - 3X + 1} ; \frac{4X^2 - 5X + 1}{5X^2 - 4X + 1}$$

3) Produsul a două numere întregi consecutive este 210. Aflați numerele.

4) Două numere au suma 13,7 iar produsul 46,8. Aflați numerele.



CAPITOLUL V

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

I. EXERCIȚII ȘI PROBLEME SUPLIMENTARE

- 1) Știm că  $\frac{1}{t} = -1,024$ . Care este inversul lui  $-t$ ?
- 2) Fie numărul  $u = \frac{2,2}{1,5}$ . Scrieți pe  $u^{-1}$ ,  $u^2$ ,  $u^{-2}$  sub formă de fracție.
- 3) Fie  $v = \frac{1,6}{3,5}$  și  $u = \frac{4,1}{-2,6}$ . Scrieți pe  $\frac{u}{v}$ , apoi pe  $\frac{v}{u}$  sub formă de fracție.
- 4) Aflați numărul întreg  $m$  care îndeplinește condiția :

a)  $2^{m-1} \leq \frac{2}{23} < 2^m$ ; b)  $3^m \leq \frac{3}{49} < 3^{m+1}$ ;

c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^m \leq \frac{2}{65} < \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$ .

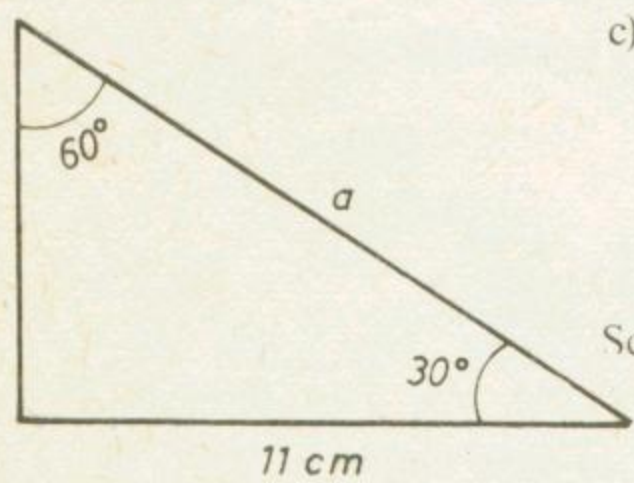


Fig. V.1

5) Calculați :  $\frac{5,23 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^{-2}} = \frac{4,46 \cdot 10^{-1}}{3,14 \cdot 10^3}$ ;  $18,5 \cdot 0,96$ .

Scrieți rezultatele obținute în formă standard.

- 6) Aflați lungimea  $a$  (vezi fig. 1).
- 7) Triunghiurile dreptunghice din figura 2 sînt asemenea. Aflați  $a$ ,  $b$  și  $c$ .

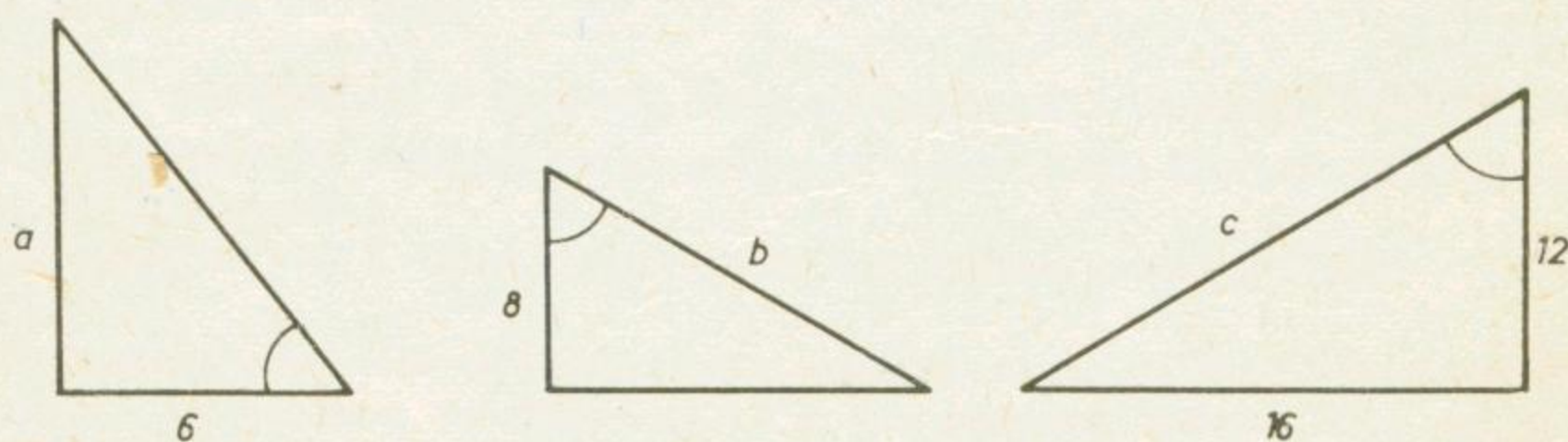


Fig. V.2

- 8) Estimați aria hașurată din figura 3, știind că :  $1,6 < r < 1,7$ .
- 9) Razele a două cercuri sînt de 5 cm, respectiv 3 cm. Aflați raza cercului a cărui arie este egală cu suma ariilor celor două cercuri.

11) Simplifi

12) Calcula

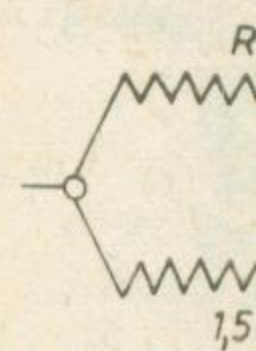
13) Știind c  
laturii octogonulu

14\*) Fie  $l_n$  l  
funcție de  $l_n$  (vezi

15) Planeta  
11,06 ori mai ma  
planetei Jupiter. Ș

16) Ce valo  
totală a circuitului

17) Ce valo  
a circuitului să fie



18) Rezolva

19) Determi

10) Comparați numerele  $4\sqrt{3}$  și  $5\sqrt{2}$ . Ce semn are diferența  $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$ ? Ce semn are diferența  $14 - 4\sqrt{11}$ ?

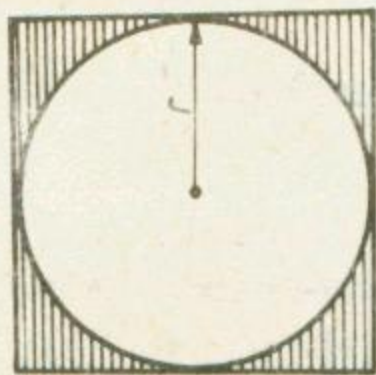


Fig. V.3

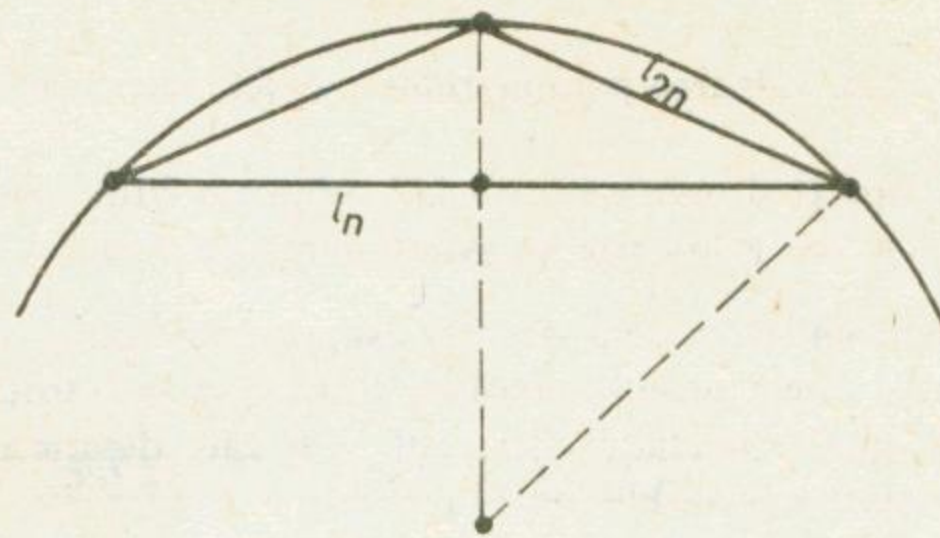


Fig. V.4

11) Simplificați :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

12) Calculați  $\sqrt[3]{64}$  și  $\sqrt[3]{1296}$ . Calculați apoi  $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$  și  $\sqrt[3]{\sqrt{1296}}$ . Ce observați?

13) Știind că pătratul înscris în cercul de rază 1 are laturile de lungime  $\sqrt{2}$ , aflați lungimea laturii octonului regulat înscris în cercul de rază 1.

14\*) Fie  $l_n$  lungimea laturii poligonului regulat cu  $n$  laturi înscris în cercul de rază 1. Aflați  $l_{2n}$  în funcție de  $l_n$  (vezi figura 4).

15) Planeta Jupiter este de 5,203 ori mai depărtată de Soare decât Pământul și are diametrul de 11,06 ori mai mare decât diametrul Pământului. Aflați distanța de la Soare la Jupiter, apoi volumul planetei Jupiter. Știm că raza medie a Pământului este de 6 300 km.

16) Ce valoare trebuie să aibă rezistorul  $R$  din circuitul desenat în figura 5 pentru ca rezistența totală a circuitului să fie de  $3k\Omega$ ? Cu ce ar putea fi înlocuit circuitul în acest caz?

17) Ce valoare trebuie să aibă rezistorul  $R$  din circuitul din figura 6 pentru ca rezistența totală a circuitului să fie de  $1k\Omega$ ?

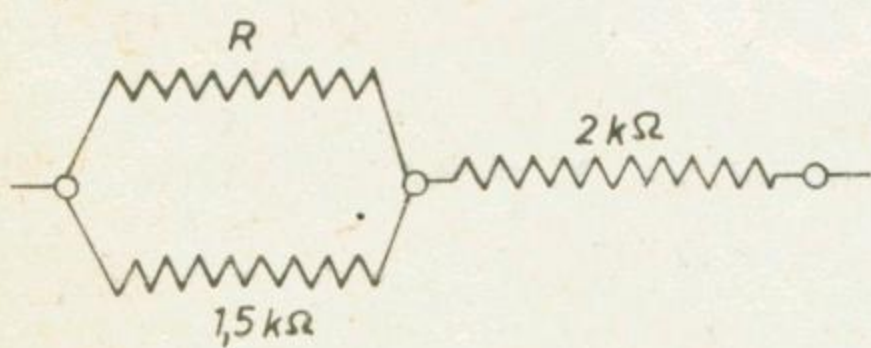


Fig. V.5

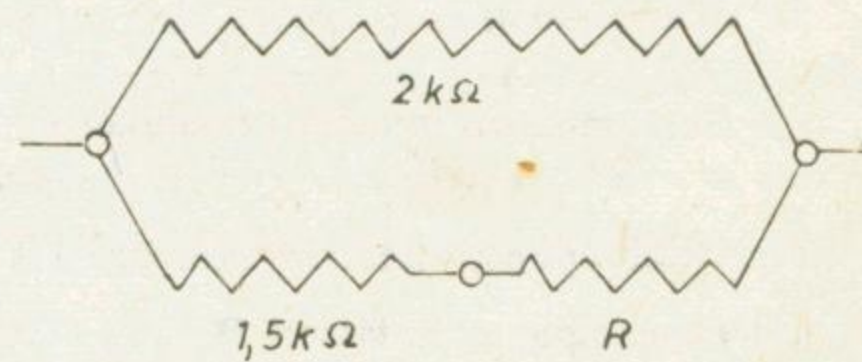


Fig. V.6

18) Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases} 6751x + 3249y = 26751 \\ 3249x + 6751y = 23249 \end{cases}$$

19) Determinați valoarea parametrului  $m$  astfel încât 1 să fie soluție a ecuației :

$$(2x + m)(2x - 5) - (2x + 1)^2 = 6.$$

20) Rezolvați ecuația :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+2} - \frac{1}{3x+3} = \frac{1}{6x+6} = 0.$$

21) Aflați valoarea parametrului  $a$  astfel încât ecuația  $(4-x)^2 - ax + \frac{12}{x} = 0$  să admită soluția 2.

22) Împărțind numărul  $a$  la 113, obținem cîtul  $c$  și restul 11. Împărțind numărul  $a$  la 108, cîtul este din nou  $c$ , dar restul este 41. Aflați numerele  $a$  și  $c$ .

23) Exercițiind o forță de  $f$  N asupra unui resort, el își mărește lungimea cu  $l(f)$  cm. Știind că alungirea este direct proporțională cu forța și că la o forță de 60 N corespunde o alungire de 24 mm, reprezentați grafic funcția  $l : [0; 80] \rightarrow \mathbf{R}$  care descrie dependența alungirii de forță. Ce forță provoacă o alungire a resortului de 14 mm ?

24) Două automobile pleacă în același moment unul spre celălalt din localitățile A și B situate la distanța de 440 km. Viteza automobilului care pleacă din A este de 60 km/h, iar a celui care pleacă din B de 50 km/h. Exprimați distanța dintre cele două automobile în funcție de timpul  $t$  scurs începînd cu momentul plecării ; luați  $t \in [0; T]$ , unde cu  $T$  notăm timpul necesar automobilului plecat din B pentru a ajunge la destinație.

25) Care număr trebuie adunat împreună cu 15, 21, și 18, astfel încît să le ridice media aritmetică cu 1,5 ?

26) Determinați valorile lui  $m$  și  $n$ , știind că polinoamele  $P(X, Y) = 5X^2Y + mXY^2 - XY^2 + 2XY$  și  $Q(X, Y) = -X^2Y + 3XY^2 + 2XY + nX^2Y$  au aceeași formă canonică.

27) Fie  $Q(X) = 4X^3 - 8X^2 - 9X + 18$ . Calculați  $Q(2)$ . Descompuneți în factori.

28) Fiind date polinoamele  $P(X) = X^3 - 2aX + a^2$  și  $Q(X) = X^2 - (3a+1)X + a^2$ , determinați valoarea lui  $a$  astfel încît  $P(2) = Q(2)$ .

29) Arătați că polinomul  $P_n(X) = X^n - a^n$  se divide cu  $X - a$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Puteți afla cîtul ?

30) Arătați că dacă  $P(1+x) = P(1-x)$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , atunci polinomul  $P(X) = X^2 + aX + 1$  este pătratul unui binom.

31) Determinați  $a, b, c$  știind că polinomul :

$$P(X) = 2X(aX + b) - 3X(bX + 2c) + c(X^2 + 1) + a(X - 1) + b$$
 are forma canonică  $3X^2 - 7X + 2$ .

32\*) Determinați  $a, b, c$  astfel încît polinomul  $P(X) = 12X^3 - 40X^2 + 27X - 5$  să poată fi scris sub forma  $P(X) = (3X - 1)(aX^2 + bX + c)$ .

33) Descompuneți în factori polinoamele :  $P(X) = 2X^2 - 4X + 2$ ,  $Q(X, Y) = XY + 2 - 2X - Y$ ,  $R(X, Y) = -XY^2 + X^2Y^2 + Y - XY$ , apoi polinomul  $S(X, Y) = P(X) - Q(X, Y) - R(X, Y)$ .

34) Descompuneți în factori polinomul  $X^3 - 6X^2Y + 12XY^2 - 8Y^3$ .

35) Descompuneți în factori  $P(X, Y) = X^2 + XY + 2Y + 4$ .

36) Descompuneți în factori ireductibili polinomul  $P(X) = (X^3 - 5X^2 + 4X)(X^2 + 7X + 12)$ .

37\*) Fie polinoamele  $P(X) = X^3 + 4X^2 - a$ ,  $Q(X) = X^2 - X - 2$ . Determinați valoarea lui  $a$  astfel încît cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $Q$  să fie un polinom de gradul I. Am putea cere ca acest cel mai mare divizor comun să fie de gradul II ?

38) Pentru ce valori ale lui  $s$ , trinomul  $X^2 + sX + 36$  este produsul binomelor a)  $X - 3$  și  $X - 12$ ; b)  $X + 4$  și  $X + 5$  și  $X - 5$  ?

39) Simplificați fracțiile raționale :

$$a) \frac{5X^2 - 4X - 1}{5X - 5}; \quad b) \frac{Y^2 - 2Y - 3}{Y^2 - 9}; \quad c) \frac{5Y + 10}{2Y^2 + 13Y + 18}; \quad d) \frac{5X^2 - 11X + 2}{X - 2}.$$

40) Simplificați

a)  $\frac{6XZ - 4YZ - 21X + 14Y}{3X - 2Y}$  ; b)  $\frac{X^2Y - XY + Y - X^2 + X - 1}{XY - X}$  ;

c)  $\frac{2X^2 + 16X - 18}{X^2 + 5X - 6}$  ; d)  $\frac{X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X - 12}{X^3 + 4X^2 + X - 6}$  .

41) Simplificați :

a)  $\frac{(X^2 - 1)(X^2 - 3) + 1}{(X^2 - 1)(X^2 - 4) + 2}$  ; b)  $\frac{(X^2 + X)(X^2 + X + 1) - 2}{(X^2 + X)(X^2 + X + 3) + 2}$  .

42) Efectuați :

a)  $\frac{1}{(X-2)^2} - \frac{1}{(X+2)^2}$  ; b)  $\frac{8X}{X^2 - 16} + \frac{4}{X-4}$  ; c)  $\frac{2X - Y}{X^2 + XY} + \frac{1}{X - Y} + \frac{1}{X}$  ;

d)  $\frac{X^2 + Y^2}{XY} - \frac{X^2}{XY - Y^2} - \frac{Y^2}{XY + X^2}$  ; e)  $\frac{X + Y + Z}{YZ} + \frac{-X + Y + Z}{XY} + \frac{-X + Y - Z}{XZ}$  .

43) Efectuați înmulțirile :

a)  $\frac{2X + 1}{X + 1} \cdot \frac{1 - X^2}{1 - 4X^2}$  ; b)  $\frac{16X^2 - 25}{(2X + 3)^2} \cdot \frac{6X + 9}{4X - 5}$  ; c)  $\frac{2(X^2 - Y^2)}{3X} \cdot \frac{6X^2}{4(X - Y)}$  .

44) Efectuați împărțirile :

a)  $\frac{X^2 - 9Y^2}{XY} : \frac{(X + 3Y)^2}{X^2}$  ; b)  $\frac{X^2 - Y^2}{X^2 + 2XY + Y^2} : \frac{X - Y}{X + Y}$  ; c)  $\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}\right) : \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)$  .

45) Scrieți ca fracție rațională, apoi simplificați :

a)  $\frac{(2X + 5)(X + 2)}{16X^2 - 9}$  ; b)  $\frac{X + 1}{X - 1} - 1$  ; c)  $\frac{1}{1 + \frac{X}{Y + Z}} + \frac{1}{1 + \frac{Y}{X + Z}} +$

$+$   $\frac{1}{1 + \frac{Z}{X + Y}}$  .

46) Dacă  $2X^2 + 3X - 5 = (X - a)(2X - b)$ , atunci : a)  $a = -1, b = -1$  ; b)  $a = 1, b = 5$  ; c)  $a = 1, b = -5$ . Cum este corect ?

47) Rezolvați ecuațiile :

a)  $x^2 - 0,4x - 0,12 = 0$  ; b)  $7x^2 + 25x - 12 = 0$  ; c)  $(3 - 2x)^2 - 36 = 0$  ; d)  $8x^2 - 6x + 1 = 0$  ; e)  $x^2 - x - 1 = 0$  .

48) Fie polinomul  $X^3 - 3X^2 + 2X$ . Puteți găsi un număr real  $a$  astfel încât valorile polinomului în  $a - 1$  și  $a$  să fie egale ?

49) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are ca soluții pe :

a)  $\frac{3}{4}$  și  $\frac{1}{4}$  ; b)  $\frac{1}{4}$  și  $-\frac{2}{3}$  ; c)  $\frac{2}{11}$  și  $-\frac{9}{11}$  ; d)  $4 - \sqrt{17}$  și  $4 + \sqrt{17}$  .

50) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are soluțiile :

a)  $a + b$  și  $a - b$  ; b)  $a + b$  și  $\frac{1}{a + b}$  ; c)  $\frac{a + b}{a}$  și  $\frac{a - b}{b}$  .

51) Fie ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$ , despre care știm că are soluțiile  $x_1$  și  $x_2$ . Formați ecuația de gradul al II-lea ce are ca soluții pe : a)  $-x_1$  și  $-x_2$  ; b)  $2x_1$  și  $2x_2$  ; c)  $x_1 + 2$  și  $x_2 + 2$  ; d)  $\frac{1}{x_1}$  și  $\frac{1}{x_2}$  .

52) În ecuația  $x^2 - mx + 36 = 0$ , determinați pe  $m$  astfel încât  $x_2 = x_1$ , apoi astfel încât  $x_2 = -x_1$  .

53) În ecuația  $x^2 - 8x + m = 0$ , determinați pe  $m$  astfel încât :

a)  $x_2 = 3x_1$  ; b)  $x_2 = -\frac{1}{x_1}$  ; c)  $3x_1 - 4x_2 = 3$ .

54) Arătați că ecuația  $\frac{4+x}{1+x} - \frac{1+x}{4+x} = m$  are cel puțin o rădăcină reală, oricare ar fi  $m \in \mathbb{R}$ .

55) Fie ecuația  $x^2 - 10x + m + 3 = 0$ . Care este cea mai mare valoare a lui  $m$  pentru care ecuația are soluții ? Rezolvați-o în acest caz.

56) Știm că graficul funcției  $f(x) = ax + b - a^2$  trece prin punctele  $A(1; 1)$  și  $B(3; 1)$ . Trece oare acest grafic și prin punctul  $C(4; 5)$  ?

57) Fie propozițiile :

a)  $(2x+3)^2 = 16$  ; b)  $(2x+3)^2 = 2x(2x+6) + 8$  ; c)  $(2x+3)^2 = 2x(2x+6) + 9$  ; d)  $2(x+1)(2x+4) = (2x+3)^2$ . Una este întotdeauna adevărată, alta este adevărată doar pentru două valori ale lui  $x$ . Indicați-le !

58) Numerele  $a, b$  și  $c$  sînt diferite între ele. Poate avea ecuația  $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = 0$  soluții reale ? Scrieți ecuația de gradul al II-lea echivalentă cu ea. Arătați apoi că  $(a+b+c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$  și că  $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$ .

59) Rezolvați ecuațiile :

a)  $(x+1)^2 = 10 + 2x$  ; b)  $(x+5)^2 = 3(x+2)^2 + 13$  ; c)  $(9+x)(7-x) + (9-x)(7+x) = 100$  ;

d)  $\frac{4x-3}{x-4} = x + 12$  ; e)  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{12}$ .

60) Rezolvați ecuațiile (în care  $m$  este un parametru real) :

a)  $x^2 - 3mx - 4m^2 = 0$  ; b)  $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$  ; c)  $x^2 - 4m^2 = 9 - 12m$  ; d)  $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-1}{x-m} + 2 = 0$  ;

61) Rezolvați ecuațiile:

a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  ; b)  $25x^4 - 20x^2 + 4 = 0$  ; c)  $x^4 - x^2 - 12 = 0$  ; d)  $6x + \sqrt{24x+40} = 70$  ;  
e)  $x + \sqrt{x} = 12$  ; f)  $\sqrt{x-4} = x-4$ .

62) Arătați că oricare ar fi  $m, n, p$  cu  $m \neq n$ , ecuația

$$(m-n)x^2 + 2(n-p)x + p-m = 0$$

are soluții. Ce se întâmplă dacă  $m = n$  ?

63) Fie ecuațiile

$$ax^2 + 3x + a^2 + 1 = 0 \text{ și } ax^2 + 2x + a^2 + 2 = 0.$$

Arătați că dacă ecuațiile au o soluție comună, atunci această soluție este 1. Rezolvați ecuațiile în acest caz, dacă este posibil.

64) La un turneu de șah, fiecare participant a jucat o partidă cu toți ceilalți. Știind că au avut loc 45 partide, aflați numărul participanților.

65) În arhivă filmele se păstrează în interiorul unor cutii metalice cu diametrul de 30 cm, înfășurându-se pe role avînd diametrul de 3 cm. Ce lungime poate avea o peliculă de film pantru a încăpea, înfășurată, într-o cutie ? Grosimea peliculei este de 0,1 mm.

66) Decupați, dintr-o bucată de tablă triunghiulară, o bucată dreptunghiulară de arie maximă.

1) Calculați :

2) Rezolvați :

3) Arătați că :

4) O tonă de ...  
240 dm<sup>3</sup>. Un autocar  
cu 4q mai puțin ...  
mare de materiale ...

5) Demonstrați :

6) Pentru confectionarea  
cămașă cu mîneacă ...  
să confecționeze cit  
material nefolosit ?

7) Cîte numere

tre acestea sînt divizibile

8) Găsiți toate  
mari decît 2 și mai mici

9) Dați exemple

b)  $|a+b| = |a| + |b|$

10\*) a) Numere  
numere pitagorice

b) Suma a 7 numere

c) Suma a x numere

11) În magazinul  
nichel. Din aceste de  
și cel mult 15% nichel  
aliaj ?

12) Un pieton  
6 minute. La ce oră  
pietonului, pentru a

13) Media aritmetică  
Aflați media aritmetică

14) O conductă  
treia în 30 de ore. A  
sînt deschise simultan

15) Un grup de  
zi, cu aceeași barcă,  
poi. Aflați care plimb

## 2. EXERCIIII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Calculați : a)  $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$ ; b)  $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \dots \cdot (-1)^{99} \cdot (-1)^{100}$

2) Rezolvați ecuația :

$$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 100) = 15050.$$

3) Arătați că numerele  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  și  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$  sînt mai mici decît 2.

4) O tonă de nisip umed ocupă un volum de  $0,2 \text{ m}^3$ , iar o tonă de pietriș ocupă un volum de  $240 \text{ dm}^3$ . Un autocamion este încărcat cu  $3 \text{ m}^3$  de nisip umed, iar alt autocamion cu pietriș, cîntărind cu  $4 \text{ q}$  mai puțin decît nisipul din primul autocamion. Care autocamion transportă un volum mai mare de materiale de construcție ?

5) Demonstrați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , numerele  $2^n \cdot 5^{n+1} + 1$  și  $2^{n+1} \cdot 5^n + 1$  nu sînt prime.

6) Pentru confecționarea unei cămăși cu mîneacă lungă se folosesc  $2 \text{ m}$  de pînză, iar pentru o cămășă cu mîneacă scurtă doar  $1,5 \text{ m}$  de pînză. Un croitor are o bucată de pînză de  $53 \text{ m}$  din care vrea să confecționeze cît mai multe cămăși. Cum trebuie folosită bucată de pînză, astfel încît să nu rămînă material nefolosit ? Dar dacă este permis să rămînă un rest de material nefolosit ?

7) Cîte numere naturale de 4 cifre au cifra miilor egală cu 6 iar cifra zecilor egală cu 3 ? Cîte dintre acestea sînt divizibile cu 2 ? Dar cu 9 ? Dar cu 4 ?

8) Găsiți toate numerele naturale de 4 cifre care sînt divizibile cu toate numerele naturale mai mari decît 2 și mai mici decît 21.

9) Dați exemple de perechi de numere reale  $a$  și  $b$  pentru care : a)  $|a + b| = |a| + |b|$ ; b)  $|a + b| = |a| - |b|$ ; c)  $|a - b| = |a| - |b|$ .

10\*) a) Numerele naturale  $x$ ,  $y$  și  $z$  sînt numite *pitagoreice* dacă  $x^2 + y^2 = z^2$ . Găsiți tripletele de numere pitagorice ce au una dintre componente numărul 4.

b) Suma a 7 numere naturale consecutive este 126. Care sînt numerele ?

c) Suma a  $x$  numere naturale consecutive este  $22x + 2$ ; care sînt numerele ?

11) În magazia unei uzine se află oțel de două tipuri : unul conține 5% nichel, iar celălalt, 25% nichel. Din aceste două tipuri de oțel trebuie să se obțină un aliaj care să conțină cel puțin 10% nichel și cel mult 15% nichel. Între ce valori trebuie să fie cuprins raportul cantităților de oțel ce intră în aliaj ?

12) Un pieton pleacă din localitatea A la ora 9 și 15 minute și ajunge în localitatea B la ora 10 și 6 minute. La ce oră trebuie să plece din A un biciclist a cărui viteză este de 3 ori mai mare decît viteza pietonului, pentru a ajunge în B înaintea acestuia ?

13) Media aritmetică a 80 de numere este 47,5. Două dintre numere sînt 101, respectiv 43. Aflați media aritmetică a celorlalte 78 numere.

14) O conductă poate umple rezervoarele unui petrolier în 15 ore, o alta în 20 de ore, iar o a treia în 30 de ore. Aflați în cît timp pot fi umplute rezervoarele petrolierului dacă toate conductele sînt deschise simultan.

15) Un grup de tineri face o plimbare cu o barcă cu motor, pe un lac, parcurgînd  $2a \text{ km}$ . A doua zi, cu aceeași barcă, grupul face o plimbare pe un rîu, parcurgînd  $a \text{ km}$ , apoi se întoarce imediat înapoi. Aflați care plimbare a durat mai mult timp.

16) Directorul unei întreprinderi află de existența a două inovații. Una determină o creștere a productivității muncii cu 10%, iar a doua cu 20%. Directorul apreciază că prin aplicarea simultană a celor două inovații productivitatea muncii va crește.

Cu cât va crește productivitatea muncii ?

17) Două cercuri exterioare unul altuia sînt situate în interiorul unui al treilea cerc, mai mare. Fiecare dintre aceste cercuri este tangent celorlalte două iar cele trei centre sînt pe o aceeași dreaptă. Aflați aria interioară cercului mare dar exterioară celor două cercuri mici. Se cunosc razele celor două cercuri mici.

18) Găsiți o funcție al cărei grafic să fie segmentul  $AB$ , unde  $A(2; -5)$  și  $B(5; 2)$ .

19) Demonstrați că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația  $\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0$  este isoscel.

20) Calculați :  $(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2$  ;  $(\sqrt{3} + 1)^4 + (\sqrt{3} - 1)^4$  ;  $(\sqrt{3} + 1)^8 + (\sqrt{3} - 1)^8$ .

21) Descompuneți în factori polinomul :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(X + Y)(X + Z)(Y + Z).$$

22) Efectuați :

$$\frac{(-1)^n}{X + Y - 1} + \frac{(-1)^{n+1}}{X - Y + 1}, n \in \mathbb{N}.$$

23) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  descrisă de  $f(x) = x^2$ . Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$ , avem :

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

24) Știm că  $5a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$ . Aflați raportul  $\frac{a}{b}$ .

25\*) Demonstrați că dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

26) Un poligon are 4850 de diagonale. Cîte laturi are poligonul ?

27) Rezolvați sistemele :

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,7 \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 0,5 \end{cases}; b) \begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -6 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -7 \end{cases}; c) \begin{cases} |x| + 3y = -1 \\ 2|x| + y = 3 \end{cases}.$$

28\*) Pe ecranul unui automat de examinare a cunoștințelor apar 5 întrebări, la care Ionică trebuie să răspundă prin „da” sau „nu”. Știm că : a) prima și ultima întrebare au răspunsurile contrare ; b) a doua și a patra au același răspuns ; c) sau prima, sau a doua întrebare are răspunsul „da” ; d) dacă răspunsul la a patra este „da”, atunci răspunsul la a cincea întrebare este „nu” ; e) la a treia întrebare răspunsul este „da”. Ce răspunsuri trebuie să dea Ionică pentru a obține nota 10 ?

### 3. PROBLEME DEOSEBITE ȘI CURIOSITĂȚI

1) Priviți :

$$\frac{1}{2} + \frac{38}{76} + 49 + 50 = 100$$

$$74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} = 100.$$

reale.

Puteți scrie numărul 100 folosind, la fel ca mai sus, doar o singură dată fiecare cifră, astfel încât în scriere să apară și radicali ?

2) Fie numerele naturale impare 1, 3, 5 și 7. Calculați suma lor. Calculați suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, apoi suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Ce observați ? Puteți spune care este suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, fără a efectua adunările ?

$$3) \text{ Priviți : } 1^2 = 1 ;$$

$$3^2 = 2 + 3 + 4 ;$$

$$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Puteți continua ? Completați  $19^2 = \dots$  Care este cel mai mic termen al sumei din membrul drept ? Dar cel mai mare ?

4) Arătați că :

$$-\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt{3} - 1 ; \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2}.$$

5) Este adevărat că  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  aproximează pe  $\pi$  cu eroare de cel mult 0,005 ? Dar cu eroare de cel mult 0,001 ?

6) Fie egalitatea  $a = b$ . Deci  $a^2 = ab$ , de unde

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Descompunem cei doi membri în factori :

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b,$$

de unde  $a + b = b$ , sau (ținând seamă că  $a = b$ )  $2b = b$ . Așadar  $2 = 1$ . Unde este greșeala ?

7) Verificați că  $4 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2}$  Completăm în ambii membri câte un pătrat perfect :

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Așadar :

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2,$$

de unde  $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$ , adică  $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Unde este greșeala ?

8) Care număr este mai mare :

a)  $2^{2^{2^2}}$ ,  $2^{2^{2^2}}$ ,  $2^{2^{2^2}}$ ,  $2^{2^{2^2}}$ ,  $2^{2^{2^2}}$ ,  $2^{2^{2^2}}$ ,  $2^{2^{2^2}}$  sau 2222 ;

b)  $9^{9^9}$ ,  $9^{9^9}$ ,  $9^{9^9}$  sau 999 ?

9) Priviți :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 ;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

Puteți scrie produsul  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$  ca sumă de pătrate ? Dar de patru pătrate ?



Rezolvați sistemele de ecuații :

16) Di

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ x^2 - 2x - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$

Rezolvați ecuația  $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$ .

11) Arătați că dacă  $x + y = 2$ , atunci  $x^2 + y^2 > 2$  și  $x^3 + y^3 > 2$ .

12) Ce formă are patrulaterul ale cărui vîrfuri sînt punctele de intersecție ale dreptelor :

$$x - y - 2 = 0, x - y + 2 = 0, x + y - 2 = 0, \text{ și } x + y + 2 = 0 ?$$

13) Descompuneți în factori :

$$2a^2 - ab + 4ac - b^2 - bc + 2c^2$$

14) (După „Aritmetica” lui Diotant — sec. III.) Aflați două numere, știind că suma lor și suma pătratelor lor sînt legate între ele. Să presupunem că suma lor este a zecea parte din suma pătratelor lor. Fie  $x$  numărul mai mic, iar cel mai mare fie  $2x$ ; atunci suma lor este  $3x$ , iar suma pătratelor lor este  $5x^2$ . Deci  $3x$  trebuie să fie a 10-a parte din  $5x^2$ . Care sînt numerele în acest caz ?

15) (Problemă veche chineză — înainte de sec. III.) La mijlocul fiecărei laturi a unui oraș de formă pătrată există cîte o poartă. La 20 bu (unitate de lungime) spre nord de poarta nordică se află un stîlp. Dacă de la poarta sudică ne deplasăm cu 14 bu spre sud, apoi spre apus cu 1775 bu, stîlpul devine vizibil. Ce lungime are zidul orașului ?

16) (După Bhaskara — matematician indian, sec. XII.) Niște maimuțe se distrează ; din tot cîrduț, o optime la pătrat se cațără prin copaci, iar 12 strigă toate-odată în vîrfurile colinei. Cîte maimuțe erau în cîrd ?

17) (După „Liber Abaci” a lui Leonardo Fibonacci, sec. XIII.) Un țaran a cumpărat 30 de păsări cu 30 de monede ; pentru 5 potirnicichi a plătit 3 monede, pentru un porumbel 2 monede, iar pentru fiecare pereche de vrăbii cîte o monedă. Cîte păsări de fiecare fel a cumpărat ?

18) (După „Culegerea de probleme” a lui Chuquet — anul 1484.) Un zidar s-a înțeles cu un țaran să-i ridice casa în 30 de zile ; în fiecare zi în care lucrează să cîștige 5 scuzi (monedă veche franceză) iar în fiecare zi în care nu lucrează să plătească țaranului 6 scuzi. La capătul celor 30 de zile casa e terminată ; zidarul a muncit și s-a odihnit în așa fel încît a cîștigat 18 scuzi. Aflați cîte zile a muncit și cîte s-a odihnit.

19) Iepurele alb spune că pisica minte. Pisica spune că Alice minte. Alice spune că iepurele alb și pisica mint. Cine minte și cine spune adevărul ? (După Lewis Carroll.)

20) Două rachete se îndreaptă una spre cealaltă, prima cu 9000 km/h, a doua cu 21000 km/h. Ele decolează din două puncte situate la o distanță de 1317 km unul de altul. Care este distanța dintre rachete, cu un minut înainte de ciocnire ? (După Martin Gardner.)

#### 4. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI

Textele problemelor au fost parțial modificate.

1) Se consideră ecuațiile  $x^2 - 4x + 3 = 0$  și  $x^2 - (a^2 + 1)x + 3a = 0$ , unde  $a$  este un număr real. Pentru ce valori ale lui  $a$  ecuațiile au o soluție comună ?

(Olimpiada 1973)

2) Se dă polinom

a) Determinați coe

b) Pentru  $a = 3$

valorile reale ale lui  $m$

3) Arătați că poli  
ecuația  $P(x) = 0$ .

4) Arătați că poli

5) Fie polinomul

a) Aflați cîtul și re

b) Care dintre un

$P(x) > 0$  ?

c) Pentru ce valori  
loare ?

6) Fie ecuația

$30^\circ$  sînt soluții ale ecua

7) Dacă  $x$  și  $y$

$x + y = k$ , atunci cea

mai mică valoare a lui

8) Arătați că da  
 $x^4 + y^4 = s^4 - 4s^2p + 2$

9) Se dă fracția

a) Arătați că  $F$

c) Pentru ce valori ale

10) Fie polinomul

a) Aflați restul îm

b) Simplificați

2) Se dă polinomul  $P(X) = aX^2 + bX + c$ , în care coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  sînt numere reale.

a) Determinați coeficienții astfel încît  $P(1) = P(2) = 0$  și  $P(-1) = 18$ .

b) Pentru  $a = 3$ ,  $b = -9$ ,  $c = 6$ , descompuneți polinomul în factori; determinați apoi

valorile reale ale lui  $m$  pentru care fracția  $F(X) = \frac{P(X)}{X^2 - 2X + m}$  este ireductibilă.

(Olimpiada 1974, jud. Iași)

3) Arătați că polinomul  $P(X) = X^3 + aX^2 - a^2X + 2a^3$  se divide cu  $X^2 - aX + a^2$ , apoi rezolvați ecuația  $P(x) = 0$ .

(Olimpiada 1974, mun. București)

4) Arătați că polinomul  $X^3 + aX^2 + bX + c$  se divide cu  $X^2 + aX + b$  numai dacă  $c = 0$ .

(Olimpiada 1974, mun. București)

5) Fie polinomul  $P(X) = 4X^4 + 4X^3 + X^2 + 1$ .

a) Aflați citul și restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $2X^2 + X$ .

b) Care dintre următoarele afirmații sînt adevărate, oricare ar fi  $x \in \mathbf{R} : P(x) < 0; P(x) = 0;$

$P(x) > 0$ ?

c) Pentru ce valori ale lui  $x \in \mathbf{R}$  valoarea  $P(x)$  este cea mai mică posibilă? Care este această valoare?

(Olimpiada 1975, mun. București)

6) Fie ecuația  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4}$ . Care dintre numerele  $\sin 2^\circ; \sqrt[3]{5}; 1 + \sqrt{2}; 4 \sin$

$30^\circ$  sînt soluții ale ecuației?

(Olimpiada 1975, mun. București)

7) Dacă  $x$  și  $y$  sînt două numere pozitive, arătați că  $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ . Arătați că dacă

$x + y = k$ , atunci cea mai mare valoare a produsului  $xy$  este  $\frac{k^2}{4}$ . În aceleași condiții, arătați că cea

mai mică valoare a lui  $x^2 + y^2$  este  $\frac{k^2}{2}$ .

(Olimpiada 1975)

8) Arătați că dacă  $x + y = s$  și  $xy = p$ , atunci  $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$ ,  $x^3 + y^3 = (s^2 - 3p)s$  și  $x^4 + y^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2$ .

(Olimpiada 1975, jud. Bistrița-Năsăud)

9) Se dă fracția

$$F(X) = \frac{4X^3 - 32}{X^3 + (X+2)^3}$$

a) Arătați că  $F(X) = 2 \frac{6}{X+1}$ . b) Pentru ce numere reale  $x$ , fracția este definită în  $x$ ?

c) Pentru ce valori ale lui  $x$ , numărul  $F(x)$  este întreg? d) Pentru ce valori ale lui  $x$  avem  $F(x) = 2$ ?

(Olimpiada 1975, jud. Bistrița-Năsăud)

10) Fie polinomul  $P(X) = X^2 - 2X - 8$ .

a) Aflați restul împărțirii polinomului prin  $X + 2$  și  $X - 4$  fără a efectua împărțirile.

b) Simplificați  $\frac{X^3 + 8}{X^2 - 2X - 8}$ .

(Olimpiada 1976, jud. Constanța)

11) Dacă polinomul  $X^4 + 4aX^3 + 6bX^2 + 4cX + d$  este divizibil cu  $X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$ , arătați că primul este un pătrat, iar al doilea cubul unui binom.

(Olimpiada 1976, mun. București)

12) Pentru ce valori ale lui  $a, b, c$  polinomul  $P(X) = 12X^3 - 40X^2 + 27X - 5$  poate fi scris descompus  $P(X) = (3X - 1)(aX^2 + bX + c)$ ? Aflați rădăcinile polinomului.

(Concurs treaptă 1976, mun. București)

13) Descompuneți în factori  $(X + Y + Z)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3$ .

(Concurs treaptă 1976, jud. Constanța)

14) Fie  $P(X) = aX^n + bX^m + cX^p$ ,  $Q(X) = bX^n + cX^m + aX^p$  și  $R(X) = cX^n + aX^m + bX^p$ , unde  $a + b + c \neq 0$  și  $abc \neq 0$ .

a) Arătați că polinoamele  $P(X), Q(X)$  și  $R(X)$  dau același rest la împărțirea cu  $X - 1$ .

b) Arătați că polinomul  $P(X) + Q(X) - 2R(X)$  se divide cu  $X - 1$ .

c) Arătați că polinomul  $P(X) + Q(X) + R(X)$  nu se divide cu  $X + 1$ .

(Olimpiada 1977, mun. București)

15) Rezolvați ecuațiile : a)  $-9x^2 + 16x - \frac{13}{3} = 0$ ; b)  $\frac{a-b}{x+1} - \frac{a+b}{x-1} = 0$  ( $x \neq \pm 1, b \neq 0$ ).

(Concurs treaptă 1977, jud. Dolj)

16) Rezolvați ecuația :

$$\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{6}{x+1} + \frac{4}{x-1} = 2.$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Arad)

17) a) Arătați că polinomul  $P(X) = X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8$  este divizibil cu polinoamele  $Q(X) = X - 2$  și  $R(X) = X + 2$ .

b) Folosind eventual rezultatul de la a), simplificați fracția :

$$F(X) = \frac{X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8}{X^4 - 16}$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Neamț)

18) Reprezentați grafic funcția  $f(x) = x^2$  definită pe  $[-2; 4]$  apoi aflați coordonatele punctelor de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata.

(Concurs treaptă 1977, jud. Vaslui)

19) Simplificați fracția

$$F(X) = \frac{8X^2 + 2X - 3}{4X^2 - X - 3}$$

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

20) Fie ecuația  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ . Determinați valoarea lui  $m$  astfel încât ecuația să admită o singură soluție.

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

21) Reprezentați grafic funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{pentru } x \in (-\infty; 1), \\ -2x + 1 & \text{pentru } x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. București)

22) Rezolvați sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} \frac{2x - 3y}{5} - \frac{2y - 3x}{11} = \frac{112}{55}, \\ (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48. \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. București)

23) Rezolvați sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} 2x < 4x - 6, \\ 4x + 3 < 3x + 1. \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, jud. Prahova)

24) Se dă ecuația :

$$\frac{x + a + 1}{x + a} = \frac{x + a - 1}{x - a} - \frac{a^2 + 1}{x^2 - a^2}.$$

a) Pentru ce valoare a lui  $a$  ecuația are soluția 4 ?

b) Pentru ce valoare a lui  $x$  ecuația în  $a$  are soluția 5 ?

(Concurs treaptă 1979, jud. Constanța)

25) Fie  $f$  și  $g$  două funcții liniare.

a) Determinați funcțiile, știind că :

$$2f(x + 1) + g(x - 1) = 2x + 14$$

$$\text{și } f(x + 1) - 2g(x - 1) = 6x - 18 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

b) Reprezentați grafic funcțiile  $f(x) = 2x$  și  $g(x) = -2x + 8$ , apoi aflați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

(Concurs treaptă 1979, jud. Arad)

26) Fie polinoamele  $P(X) = X^2 - 3X + 2$  și  $Q(X) = X^2 + 3X + 2$ . Arătați că  $P(Q(X))$  se divide cu  $X^2 + 3X + 1$ .

(Olimpiada 1977, jud. Dolj)

27) Se dă polinomul  $P(X) = X^4 + mX^3 - 7X^2 + nX + p$ . Determinați  $m, n, p$  astfel încât  $P(X)$  să se dividă cu  $X - 1, X - 2$  și  $X - 3$ , apoi rezolvați ecuația  $P(x) = 0$ .

(Olimpiada 1979, jud. Timiș)

28) Un triunghi isoscel are perimetrul de 160 m, iar baza este cu 20 m mai mică decât oricare dintre laturile egale. Aflați lungimile laturilor.

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

29) Determinați parametrul  $m$  astfel încât polinomul  $2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$  să dea restul 4 prin împărțirea la  $X + 2$ .

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

30) Numerele reale  $x, y, a$  și  $b$  verifică relațiile :  $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} = a, xy = b$ . Ce relație există între  $a$  și  $b$  ?

$$\frac{5}{1} - \frac{5}{3} = \frac{25}{3}$$

(Olimpiada 1979, mun. București)

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Pag. 3. 3) 16%. 4) 57 lei/kg. 6) 2,75; 1,64; -5,92; 0,7. 7) -26, 25; -41,958.

Pag. 4. 3) Suma diferă cu 1 de puterea  $2^6$ . 4) a) Suma diferă cu  $\left(\frac{1}{2}\right)^4$  de 2; b) Suma diferă cu  $\left(\frac{1}{2}\right)^5$  de 2. Puteți generaliza ?

Pag. 5. 4) Nu este adevărată dacă  $a < 1$  !

Pag. 6. a)  $3^{10}$ ; b)  $9^5$ ; c)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$ ; e)  $8^9$ ; f)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^9$ .

Pag. 7. 1) a)  $5^{12}$ ; b)  $(-5)^{12}$ ; c)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$ ; d)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{24}$ ; e)  $3^{24}$ . 2) 1,771561; b) 625; c) 0,2401; d) -91,125.

Pag. 8. 1) a) 576; b-c) 1000. 2) a)  $2^{10}$ ; b)  $3^{15}$ ; c)  $2^{12}$ . 4) a) 1215,50 lei (!); b) 1215,50625. 5) 248,8 cm. 7) a)  $-8a^3b^3$ ; b)  $-a^7$ ; f)  $a^{4n}$ . 9) Nu. Are volumul de  $\frac{27}{8} = 3,375$  ori mai mare. 10) 90,4 kg (!)

Pag. 10. b)  $\frac{9}{16}$ ; c) 1944.

Pag. 11. 5) a) Numărul  $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$  are proprietatea că  $\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = 1$ . Dar și numărul  $\frac{4}{5}$  are proprietatea că  $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$  (!)

a) 4; b) 9; c)  $2x$ ; d) 25.

Pag. 12. 1) a) -512; b) 1; c) 6,75. 2) Doar trei, dacă  $x \neq -1$  și  $x \neq 1$ . 3) a)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ ; b)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ ; c)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}$ .

Pag. 13. a)  $5 \cdot 10^{-1}$ ; b)  $3 \cdot 10^{-3}$ ; d)  $3 \cdot 7^{-1}$ ; e)  $14 \cdot 5^{-2}$ .

Pag. 14. 1) a) 0,47; b) 0,12; c) 0,169; d) 0,365; e) 0,12. 3) a)  $0,1 \cdot 10^{-2}$ ; b)  $0,54 \cdot 10^3$ . 4)  $0,318224 \cdot 10^8$ . 5) Aproximativ de 335000 ori. 6) 520 secunde.

Pag. 16.  
6) e)  $\{a\}$ ; f) [-

7) a) -3,

Pag. 17.  
 $a < b$  și  $b > 0$

Pag. 18.

(1, 3; 4, 2]. 6) I

Pag. 19.  
a, a, f, f, a.

Pag. 19. A  
 $\supset (0,09; 1,01)$

Pag. 22.

3) nu; nu; nu; c  
media aritmetică

3,245 îl aproximi

Pag. 24. A

Pag. 26.

orice număr re

o singură so

soluție. 7) Pent

Pag. 27. 2

Pag. 29.

f)  $\left(\frac{27}{14}; -\frac{19}{14}\right)$

3) a)  $\left(\frac{47}{22}; -\right)$

Pag. 31.

3) a) (3; 6); b)

Pag. 33.

c) (9; 9; 6).

**Pag. 16.** 2) a ; a ; a ; f ; f. 4) da, dacă presupunem că  $a \leq b$ . 5) d)  $[a ; a + 2]$  ; e)  $[a - 1 ; a + 1]$ .  
6) e)  $\{a\}$  ; f)  $[-4 ; 1]$  dacă  $a \geq 1$  ; în caz contrar  $[-a ; a]$ .

7) a) -3, -2, -1, 0, 1 și 2. 8)  $X = \{1; 3\}$  sau  $X = \{2; 3\}$  sau  $X = \{3\} = [3; 3]$ . 9)  $a = 5$  și  $b = 9$ .

**Pag. 17.** 1) a) fals; b), c), d) adevărate. 3) a) 1, 2, 3 și 4. 4) Din  $a < b$  și  $a > 0$  rezultă  $a^2 < ab$ . Din  $a < b$  și  $b > 0$  rezultă  $ab < b^2$ .

**Pag. 18.** 3) Doar d) este falsă. 4) a)  $[2; 4]$  ; b)  $\left(-\frac{1}{7} ; \frac{7}{5}\right)$  ; c)  $[-1; 13]$  ; d)  $(-1; 3]$  ; e)  $(1, 3; 4, 2]$ . 6) Intervalul semideschis  $[5; 9)$ .

**Pag. 19.** 3) În acest caz  $a < b$ . 4) Intersecția este  $[a; +\infty)$ , iar reuniunea este  $b; +\infty)$ . 6) a, a, a, a, f, f, a.

**Pag. 19.** 1) Nu, deoarece  $|x| \geq 0$ ; 2,13 și -2,13. 2) a)  $[-4; 4]$ ; b)  $(2; 4)$ . 3)  $(0; 2) \supset (0,9; 1,1) \supset (0,09; 1,01) \supset (0,009; 1,001) \ni 1$ .

**Pag. 22.** 1) 0,28571...; poate fi aproximat de exemplu prin 0,285 prin 0,286 sau prin 0,2851!  
3) nu; nu; nu; da. 4) a)  $x = 5,1$  sau  $x = 5,5$ . 5) De exemplu media aritmetică 3,145. 7) Comparați pe  $x$  cu media aritmetică 3,2355. Dacă  $x \leq 3,2355$ , atunci 3,226 aproximează pe  $x$ ; în caz contrar extremitatea 3,245 îl aproximează pe  $x$ . 8) Între 27 și 33 ml. 9) Prin  $\frac{138}{100}$  sau  $\frac{139}{100}$ .

**Pag. 24.** 1) da; nu. 3) Corect c !

**Pag. 26.** 1) a) 0,3; b) 7,2; c) 3,33...; d) -2,89... . 2)  $m = -10$ ; nu. 3) Ecuația are ca soluție orice număr real. 4) O singură soluție : 1,472. 5) e)  $\frac{2}{17}$ ; f) -2; g) 0; h)  $\frac{11}{15}$ . 6) d) Dacă  $m \neq 0$ , o singură soluție:  $-\frac{a}{m}$ ; dacă  $m = 0$  și  $a \neq 0$ , nici o soluție; dacă  $a = m = 0$ , orice număr real este soluție. 7) Pentru  $a = -1$ .

**Pag. 27.** 2) Sint concurente.

**Pag. 29.** 1) c)  $x = 0,5$ ;  $y = 0,2$ ; 2) d)  $x = -1$ ,  $y = 1$ ; e) Soluția este  $(5; -3)$ ;  
f)  $\left(\frac{27}{14}; -\frac{19}{14}\right)$ .

3) a)  $\left(\frac{47}{22}; -\frac{7}{22}\right)$ ; b)  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$ ; c)  $\left(\frac{5}{8}; -\frac{1}{20}\right)$ ; d)  $(4; 0,5)$ ; e)  $(60; 36)$ .

**Pag. 31.** 1) c)  $\left(\frac{60}{7}; \frac{22}{7}\right)$ ; e)  $x = \frac{609}{590}$ ,  $y = \frac{1117}{1770}$ . 2) a)  $(2,25; 3,2)$ ; b)  $(9; -3)$ ; c)  $\left(\frac{2}{8}; -1\right)$ .

3) a)  $(3; 6)$ ; b)  $\left(-\frac{5}{8}; -\frac{1}{2}\right)$ .

**Pag. 33.** 1) a)  $x = 5$ ,  $y = 11$ ,  $z = 17$ ; b)  $(18; 12; 10)$ ; c)  $(5; 3; 8)$ . 2) a)  $\left(\frac{108}{17}; \frac{126}{17}; \frac{252}{17}\right)$ ;  
c)  $(9; 9; 6)$ .

Pag. 36. 1) 20,5 m, 24,5 m, 27,5 m, 2) 17,5 cm, 22,5 cm. 3)  $BM$  și  $BP$  au lungimea  $\frac{a-b+c}{2}$ . 4) 253 kg, 14 kg. 5) 81, 16, 3; 6) 45, 15 respectiv 5 litri pe minut; în 33 min. 20 sec., 100 min., respectiv 300 min.

Pag. 38. 2) Nu. De exemplu,  $\sqrt{3^2+4^2} = 5 \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$

Pag. 38. 3) a)  $5\sqrt{30}$ ; b)  $4\sqrt{10}$ ; e)  $|a| \sqrt{21}$ ; f)  $a^2\sqrt{21}$ ; g)  $a^2b\sqrt{2b}$ , deoarece  $b \geq 0$ !; h)  $5a\sqrt{2a}$ , deoarece  $a \geq 0$ ! 5) a)  $30\sqrt{2} = \sqrt{1800}$ ; b)  $-\sqrt{5}$ . 6) a) 3; b)  $\frac{3}{5}$ ; c)  $\sqrt{ab}$ .

Pag. 40. 2) a)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ; b)  $\frac{7+\sqrt{21}}{7}$ ; c)  $\frac{12\sqrt{3}-8\sqrt{30}}{6}$ ; d)  $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ; e)  $\sqrt{2}-1$ ; f)  $2-\sqrt{3}$ ; g)  $2-\sqrt{3}$ ; h)  $\frac{28+7\sqrt{2}}{45}$ . 4) c) Se raționalizează mai întâi numitorul:  $4(\sqrt{2}+1)$ ; se folosește apoi tabelul. Rezultat 9,65.

Pag. 41. 2) j)  $5a\sqrt[3]{b^2}$ ; k)  $2ab^2\sqrt[3]{2a}$ ; l)  $(a-b)\sqrt[3]{(a+b)^2}$ ; m)  $\frac{a-b}{a+b}\sqrt[3]{a+b}$ . 3) c)  $\sqrt[3]{4}$ ; f)  $\sqrt[3]{a^4-a^3b-ab^3+b^4}$ . 4) a)  $28\sqrt[3]{3}$ ; c)  $-\sqrt[3]{3a}$ . 5) e)  $\sqrt[3]{4}$ ; f)  $\frac{10}{3}$ .

Pag. 42. 1) c)  $2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$ . 3) a) este pozitiv iar  $b$  este negativ dar au pătratele egale. Deci  $a=-b$ . 4) a) Soluția este  $x=\sqrt{2}$ ,  $y=1$ ; b) Soluția  $x=\sqrt[3]{2}$ ,  $y=-1$ .

Pag. 47. 8) Doar  $f$  și  $g$ .

Pag. 50. 1)  $a=-5$ . 3) Graficele sînt drepte paralele. 6) Graficele sînt semidrepte. 8) a)  $f(x)=-14x+24$ ; b)  $g(x)=2x+2$ ; c) Nu. 9) a)  $T=20+\frac{1}{30,5}a$ ,  $a$  fiind adîncimea în metri, iar  $T$  temperatura în  $^{\circ}\text{C}$ .

Pag. 53. 5)  $g(x)=2x^2-4x$ . 6)  $f(x)=x^2-4x+7$ . 8) Nu.

Pag. 56. 4) b) 44 ohmi.

Pag. 57. 3)  $X^4-X^3-X^2-2X+4$ .

Pag. 58. 1) a)  $-4X^2$ ; b)  $-\frac{3}{2}X^2$ ; c)  $5X^4$ .

Pag. 60. 1) a)  $X^2-2X+\frac{2}{3}$ ; b)  $-3X^3+\frac{5}{2}X^2-2X$ .

2) a) Cîtul  $X+2$ , restul  $-1$ ; b) cîtul  $3X+9$ , restul 47; c) Restul 0. 3) a) Cîtul  $X-1$ , restul 2; b) Cîtul  $X^2-X+1$ , restul 0. 5) Cîtul la prima împărțire este împărțitorul la cea de-a doua. 8) a)  $X^3-YX^2+Y^2X-Y^3$ ; b)  $5X+2Y$ ; c) Cîtul  $2X+3Y$ , restul  $4YX+2Y^2$ . 9) a)  $-6YX+13Y^2$ ; b)  $-6XY+2X^2$ .

Pag. 63. 1) a) Nu; b) da; c) da; d) nu; e) da; f) da. 3)  $m=44$ .

a. 3)  $BM$  și  $BP$  au lungimea

în 33 min. 20 sec., 100 min.,

$b\sqrt{2b}$ , deoarece  $b \geq 0$ !

3)  $b) \frac{3}{5}$ ; c)  $\sqrt{ab}$ .

$\frac{10}{3}$ ; d)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ; e)  $\sqrt{2} - 1$ ;

mai întâi numitorul:  $4(\sqrt{2} + 1)$ ;

m)  $\frac{a-b}{a+b} \sqrt{a+b}$ . 3) c)  $\sqrt[3]{4}$ ;

$\frac{10}{3}$ .

ativ dar au pătratele egale. Deci

-1.

6) Graficele sînt semidrepte.

$\frac{1}{5}a$ ,  $a$  fiind adîncimea în metri,

47; c) Restul 0. 3) a) Cîtul  $X - 1$ ,  
ste împărțitorul la cea de-a doua.

$4YX + 2Y^2$ . 9) a)  $-6YX + 13Y^2$ ;

**Pag. 64.** 1) e)  $(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-2X+1)(X^2+2X+1)$ ; f)  $(X-1) \cdot (X^2+X+1) \cdot (X^6+X^3+1)$ . 2) Reductibile sînt  $X^2-4$ ,  $X^2-2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ ,  $X^2-4X+4$ ,  $X^3+8 = (X+2)(X^2-2X+4)$ ,  $X^3+2 = (X+\sqrt[3]{2})(X^2-\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})$  și  $X^4+1 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$ . 4) Valorile  $P(a)$  și  $Q(a)$  sînt egale pentru orice  $a$ ; de fapt avem același polinom, scris în două moduri diferite.

**Pag. 65.** 1) a) rest  $-9$ ; b) rest  $3$ ; c) rest  $-9$ ; e) rest  $-14$ . 4)  $0,869$ . 5)  $m = -\frac{2}{3}$ ,  $n = -\frac{46}{3}$ ,  
restul  $-\frac{2}{3}$ .

**Pag. 65.** 3) a)  $-3$ ,  $-1$  și  $3$ ; b)  $-3$ ,  $-2$  și  $2$ ; c)  $-1$ ,  $1$  și  $3$ .

**Pag. 66.** 2) c)  $(3X-1)(3X+4)$ ; d)  $(6X+1)^3(6X+4)$ . 3) a)  $9X^4+30X^2+25$ ; b)  $9X^4-60X^2+100$ . 4) a)  $(X^3+0,5)^2$ ; b)  $(3X^2-2)^2$ . 5) a)  $(7X^3-4)(7X^3+4)$ ; b)  $(X-1)(5X+5)$ ; e)  $X^2(5X-4)(5X+4)$ . 6) b)  $X^2(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$ ; c)  $X(\sqrt{2}X-1)(\sqrt{2}X+1)$ .

**Pag. 67.** 1) a)  $(2X-3)(4X^2+6X+9)$ ; b)  $2X(X^2+12)$ ; c)  $X\left(\frac{1}{2}X-1\right) \cdot \left(\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{2}X+1\right)$   
2) c)  $(X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)$ . 3) a)  $(X-\sqrt[3]{2})(X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})$ ; c)  $(X-\sqrt[3]{4})(X^2+\sqrt[3]{4}X+2\sqrt[3]{2})$ .

**Pag. 68.** 1) a)  $(X-3)(X+2)$ ; b)  $(X+3)(X-2)$ ; f)  $(3X-1)(X-2)$ . 3) a)  $(X-1)(X-2)(X^2+3X-12)$ ; b)  $(X-1)(X+4)(X^2+3X+6)$ ; c)  $(X-1) \cdot (X+1)(X-2)^2$ ; d)  $(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ ; f)  $(X-1)(X+1)(X-2)(X^2+2X+4)$ .

**Pag. 69.** 1) a)  $(X-Y)(X^2+Y^2)$ ; b)  $(A+B)(A^2+B^2)$ ; c)  $(X+A)(X+B)$ ; d)  $(X+5)(Y+3)$ ; e)  $(XY-a^2)(X+Y+a)$ ; f)  $(X+a)(X^2+3a^2)$ . 2) a)  $(X-Y)(X+Y)(X^2+3Y^2)$ ; b)  $(X-Y)(X+Y)(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$ ; c)  $(3X-2Y)^2$ ; d)  $3(X-Y)(3X-Y)$ ; e)  $X^2(9Y-4X)(9Y+4X)$ ; f)  $(3X-4Y)(9X^2+12XY+16Y^2)$ . 3) a)  $(X+1)(Y+1)(X^2Y^2-X^2Y-XY^2+X^2+4XY+Y^2-X-Y+1)$ ; b)  $(X-Y)(X-Z)(2X+Y+Z)$ ; c)  $(X-a+b)(X+a-b)$ ; d)  $(a^2+b^2)(X^2+Y^2)$ ; e)  $(X-Y)(X^2+XY-Y^2)$ ; g) Completați pînă la un pătrat perfect:  $(X^3+3Y^2)^2-(2XY)^2$ .

**Pag. 71.** 2) a)  $X^2+X$ ; b)  $X+1$ ; c)  $2X+3$ ; d)  $X-2$ ; e)  $X-2$ ; f)  $X-4$ ; g)  $X+2$ ; h)  $X-2$ .  
4) a)  $X-Y$ ; b)  $(X+Y)^2$ . 5) a)  $X^2-X+1$  nu se divide nici cu  $X-1$ , nici cu  $X+1$ ; b)  $X^2+X+1$  nu se divide nici cu  $X+1$ , nici cu  $X+2$ .

**Pag. 72.** 2) a)  $X^2-4X+3$  sau  $2X^2-8X+6$ . b)  $X^2+3X+5$ ; c) Sînt prime între ele; g)  $X^3+X^2+X+1$ ; h)  $X-1$ .

**Pag. 74.** 2)  $(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$ . 3) a)  $X(X-4)^2$ ; b)  $X(X^3-8)$ ; c)  $X(X^2+1)$ ; d)  $(3X+2)(27X^3+8)$ ; e)  $X(X^3-1)$ . 5) b)  $X^8+X^6-X^2-1$ .

**Pag. 76.** 1) c)  $P(\sqrt{2})$  este aproximativ  $5,1$ . 2) a)  $-54$ . 4) a)  $-4X^2+X$ ; b)  $-X^2+1$ .

**Pag. 77.** 3)  $y = \frac{9}{7}$ ,  $y = 0$ .



Pag. 78. 2) a)  $\frac{9X}{4} = \frac{9}{4}X$ ; f)  $\frac{X^3 + 8}{X^2 + X}$  (nu se simplifică!). 4) a)  $X - 3$ ; b)  $\frac{X - Y - Z}{-X + Y - Z}$ ;  
c)  $\frac{18X(X - Y)}{X + Y}$ .

Pag. 80. 2) a) 1; b)  $-\frac{1}{2}$ ; c) -2; d) -5; e) 0.

Pag. 82. 2) a) 5; b)  $\frac{X^2 - X + 1}{X}$ ; c)  $\frac{2}{X - 1}$ .

Pag. 85. 2) c)  $\frac{X^2 + 1}{X^2 + X}$ ; f)  $\frac{2X}{X^2 - 1}$ . 4) a)  $\frac{6X}{X^2 - X}$ ; b)  $\frac{9X + 2}{X^2 - 4}$ . 5) b) și c)  $\frac{1}{1 - X}$ .

Pag. 86. 2) a) 0; b)  $\frac{1}{X - 2}$ . 4) a)  $\frac{2X}{X + Y}$ .

Pag. 90. 3) b)  $\frac{X^2 + XY}{\sqrt{2}Y}$ ; c)  $\frac{4Y}{X - 1}$ . 4) a)  $3X^2(X + Y)^2$ ; c)  $\frac{X^2}{(X + Y)(X^2 - Y^2)}$ .

7) a)  $X - 1$ ; b)  $\frac{X^2 - 2X + 4}{X^2 + 2X + 2}$ . 8) Transformați mai întâi în fracții raționale, apoi simplificați-le pe cât posibil!

Pag. 93. 3) Toate. 5) b) Nici o valoare.

Pag. 96. 2) b) și f) nu au soluții; k) Dacă  $a = 9$ , atunci are soluția 0; dacă  $a \neq 9$ , nu are soluții; l) nu are soluții; m) Dacă  $m = 0$ , atunci are soluția 0; dacă  $m \neq 0$ , ecuația are două soluții;  
5) h) 0 și  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 6) a) Soluții -26 și 24; c) nu are soluții; d) o singură soluție; -2;  
g) soluții  $-\sqrt{2}$  și  $-\sqrt{5}$ ; l) dacă  $m = n$ , o singură soluție! 8) Indicație: analizați posibilitățile  $a = 0$ ;  $a \neq 0$ . 9) Obținem ecuația  $\sqrt{2}f^2 = 1$ ; aproximați soluțiile ei!

Pag. 101. 2) a) 2 și 12; b) -2 și -12. 4) Ecuațiile au aceleași soluții; ce puteți deduce?  
6) Nu. 7)  $m = -92$  sau  $m = 92$ . 9) Folosiți tabelul de la sfârșitul manualului. 10)  $m = -9$ ; a doua soluție este 25.

Pag. 105. 6) c) nu are soluții. 8) a)  $3 - \sqrt{5}$  și  $3 + \sqrt{5}$ ; c)  $-4 - \sqrt{22}$  și  $-4 + \sqrt{22}$ ; d) o singură soluție: 2.

Pag. 109. 3) Folosiți relațiile lui Viète, după caz. b)  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $m = -9$ ; c)  $x_1 = 1$ ,  $m = 3$ .  
4) 311 și 26. 5) 192 și 75. 7) Pentru  $m = 2$  și  $n = -4$ . 8)  $3\sqrt[3]{4}$ ; -3. 9) Da, pentru  $m = -1$ .

Pag. 111. 2) a)  $\frac{X + 13}{2X - 15}$ ; b)  $\frac{X + 4}{2X + 5}$ ; e)  $\frac{3X - 1}{2X + 9}$ . 3). Discriminantul este negativ doar pentru  $m \neq 0$ . Pentru  $m = 0$  trinomialul este reductibil!

Pag. 114. 1) a) Soluții 2 și  $\frac{-3}{5}$ ; c) nu are soluții; e) nu are soluții. 2) b) Nu are soluții;  
i) o singură soluție: 2; k) 1; l) 6. 3) a) Patru soluții:  $\pm\sqrt{10}$ ,  $\pm\sqrt{11}$ ; b) nu are soluții.

Pag. 118. 1) 40 m. 2) 79 și 80 cm<sup>2</sup>. 3)  $\frac{n(n-3)}{2}$  diagonale; 20 laturi. 4)  $a = \pm 2\sqrt{3}$ .  
5) 4 m și 4 m; 5 m și 3,2 m. 6) 12 și 8 ohmi. 7) 80 cm și 100 cm.

c)  $m = 4$ . 5) Apr

tiv 12,8 cm. 7)

5,8 cm. 10) Ne

Aplicați teorema

 $= \sqrt{2-2\sqrt{1}}$ 

poate fi înlocuit

este (3; 2). 19)

25) 24. 26) m

 $X^{n-1} + aX^{n-2} + a$  $a = 4, b = -12,$ 36)  $X(X-1)(X$ Q. 38) a)  $s = -$ d)  $5X - 1. 4$ 

41) a) Este de

$$\frac{X^2 + X - 1}{X^2 + X + 1}$$

43) a)  $\frac{X - 1}{2X - 1}$

45) a)  $\frac{8-2}{32}$

$\frac{9}{2}$ ; d)  $\frac{1}{4}$  și

sau  $16x^2 - 16$ 

50) a)  $x^2 - 2ax$

$+ (c - 2b + 4a$

c)  $m = 15. 54$

$y^2 - my - 1$

57) c) și a).

59) a) Soluții

d) o singură so

62) Discrimina

63) Dacă  $x$  este

$= 0$ , adică  $x =$

nerea că ecuaț

Pag. 120. 1) Evident, 1,024; 2)  $u^{-1} = \frac{15}{22}$ ;  $u^2 = \frac{484}{225}$ . 3)  $\frac{u}{v} = \frac{-1435}{416}$ . 4) a)  $m = -3$ ; b)  $m = -3$ ;

c)  $m = 4$ . 5) Aproximativ  $0,34866 \cdot 10^6$  și  $0,142 \cdot 10^{-3}$ ;  $0,1776 \cdot 10^2$ . 6)  $a = \frac{22\sqrt{3}}{3}$ , adică aproxima-

tiv 12,8 cm. 7)  $a = 8$ ,  $b = \frac{40}{3}$ ,  $c = 20$ . 8) Între 2,2016 și 2,56054. 9)  $\sqrt{34}$  cm, adică aproximativ 5,8 cm. 10) Negativ; pozitiv. 11) 2. 12) 2 și aproximativ 3,3. 13)  $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ . 14) Indicație.

Aplicați teorema lui Pitagora celor două triunghiuri dreptunghice neasemenea din fig. 4;  $l_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - (l_n/2)^2}}$ . 15) Volumul este de aproximativ  $0,14 \cdot 10^{16}$  km<sup>3</sup>. 16)  $R = 3$  k $\Omega$ ; circuitul poate fi înlocuit prin rezistorul  $R$ . 17) 0,5 k $\Omega$ . 18) Adunăm, apoi scădem cele două ecuații. Soluția este (3; 2). 19)  $m = -7$ . 20) Soluții: orice număr real diferit de -1. 21)  $a = 5$ . 23) 35 N.

25) 24. 26)  $m = 4$ ,  $n = 6$ . 27)  $Q(X) = (X - 2)(2X - 3)(2X + 3)$ . 28)  $a = -3$ . 29) Cîtul este  $X^{n-1} + aX^{n-2} + a^2X^{n-3} + \dots + a^{n-2}X + a^{n-1}$ . 30)  $a = -2$ . 31)  $a = 7$ ,  $b = 5$ ,  $c = 4$ . 32) Trebuie ca  $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ ;

$a = 4$ ,  $b = -12$ ,  $c = 5$ . 33)  $R = Y(X - 1)(XY - 1)$ ;  $S = X(X - 1)(2 - Y^2)$ . 34)  $(X - 2Y)^3$ . 35)  $(X + Y - 2)(X + 2)$ .

36)  $X(X - 1)(X - 4)(X + 3)(X + 4)$ . 37)  $a = -3$  sau  $a = -24$ ; nu, deoarece în acest caz ar trebui să fie  $Q$ . 38) a)  $s = -15$ ; b)  $s = 13$ ; c) pentru nici o valoare. 39) a)  $X + \frac{1}{5}$ ; b)  $\frac{Y + 1}{Y + 3}$ ; c)  $\frac{5}{2Y + 9}$ ;

d)  $5X - 1$ . 40) a)  $2Z - 7$ ; b)  $\frac{X^2 - X + 1}{X}$ ; c)  $\frac{2X + 18}{X + 6}$ ; d)  $\frac{X^2 + X + 6}{X + 3}$ .

41) a) Este de preferat să notăm  $X^2 - 1 = Y$ ;  $\frac{X^2 - 2}{X^2 - 3}$ ; b) La fel, notăm  $X^2 + X = Y$ ;

$\frac{X^2 + X - 1}{X^2 + X + 1}$ . 42) a)  $\frac{8X}{(X^2 - 4)^2}$ ; b)  $\frac{12X + 16}{X^2 - 16}$ ; c)  $\frac{4}{X + 4}$ ; d) 1; e)  $\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{XYZ}$ .

43) a)  $\frac{X - 1}{2X - 1}$ ; b)  $\frac{12X + 15}{2X + 3}$ ; c)  $X^2 + XY$ . 44) a)  $\frac{X^2 - 3XY}{XY + 3Y^2}$ ; b) 1; c)  $\frac{Y + X}{Y - X}$ .

45) a)  $\frac{8 - 2X - 3X^2}{32X^2 - 18}$ ; b)  $\frac{1}{X}$ ; c) 2. 46) Corect c). 47) a) -0,2 și 0,6; b) -4 și  $\frac{3}{7}$ ; c)  $-\frac{3}{2}$  și

$\frac{9}{2}$ ; d)  $\frac{1}{4}$  și  $\frac{1}{2}$ ; e)  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  și  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . 48)  $a = 1$  sau  $a = 2$ . 49) a)  $x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$

sau  $16x^2 - 16x + 3 = 0$ ; b)  $x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{1}{6} = 0$ ; c)  $x^2 + \frac{7}{11}x - \frac{18}{121} = 0$ ; d)  $x^2 - 8x - 1 = 0$ .

50) a)  $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ . 51) a)  $ax^2 - bx + c = 0$ ; b)  $ax^2 + 2bx + 4c = 0$ ; c)  $ax^2 + (b - 4a)x + (c - 2b + 4a) = 0$ ; d)  $cx^2 + bx + a = 0$ . 52)  $m = -12$  sau  $m = 12$ ;  $m = 0$ . 53) a)  $m = 12$ ; b)  $m = -1$ ;

c)  $m = 15$ . 54) Notăm  $y = \frac{4 + x}{1 + x}$ , de unde  $x = \frac{4 - y}{y - 1}$ ; ecuația de gradul al II-lea

$y^2 - my - 1 = 0$  are discriminantul pozitiv, oricare ar fi  $m$  real. 55)  $m = 22$ ; soluția 5. 56) Nu.

57) c) și a). 58) Nu. Prima inegalitate se deduce din faptul că discriminantul este negativ.

59) a) Soluții -3 și 3; e) soluții 5 și -2. 60) a) Soluții  $-m$  și  $4m$ ; b) soluții  $-m - 1$  și  $-m + 1$ ;

d) o singură soluție:  $\frac{m + 1}{2}$ . 61) a) Soluții -2, -1, 1 și 2; d) o soluție: 9; e) o soluție: 3; f) 4 și 5.

62) Discriminantul se poate scrie  $\frac{1}{2}(m - n)^2 + \frac{1}{2}(n - p)^2 + \frac{1}{2}(p - m)^2$ , deci nu poate fi negativ.

63) Dacă  $x$  este soluția comună, atunci  $x$  este soluție a ecuației  $(ax^2 + 3x + a^2 + 1) - (ax^2 + 2x + a^2 + 2) = 0$ , adică  $x = 1$ . Dar 1 nu poate fi soluție a primei ecuații, orice valoare ar avea parametrul  $a$ . Presupunerea că ecuațiile au soluție comună este deci falsă. 64) Dacă  $p$  este numărul participanților, numărul

partidelor jucate este  $\frac{p(p-1)}{2}$ ; 10 participanți. 65) Lungimea celei de a n-a înfășurări este aproximativ  $(3 + 2n \cdot 0,1)\pi$ . Încap aproximativ 2700 înfășurări; filmul are lungimea de aproximativ 1398 m. 66) Tăiați bucata mai întâi paralel cu o bază. Determinați la ce distanță de bază!

**Pag. 125.** 1) a) 0; b) 1. 2) 100. 3) Numerele sînt pozitive. Comparăm pătratele lor cu  $2^2$ . 4) Al doilea este încărcat cu peste  $3,5 \text{ m}^3$  pietriș. 5) Indicație: arătați că numerele se divid cu 3! 6) 34 cu mîneacă scurtă și 1 cu mîneacă lungă; la fel, sau 35 cu mîneacă scurtă. 7) 100 numere; 50 numere; 12 numere; 20 numere. 8) Nu există astfel de numere naturale; ele ar trebui să fie divizibile cu  $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ . 9) a)  $a = b = 1$ ;  $a = 1, b = -1, c) a = b = 1$ . 10) a)  $x^2 + y^2 = 16$  e posibil doar dacă  $x = 0, y = 4$ . Rămîne  $x^2 + 16 = y^2$ , care se mai scrie  $16 = (y-x)(y+x)$ . Observați că apar doar posibilitățile  $y-x = 1, y-x = 2$  și  $y-x = 4$ ; b) 15, 16, ..., 21; c) Dacă  $a+1$  este primul număr, obținem că  $x(2a+x-43) = 4$ , de unde  $x = 1, x = 2$  sau  $x = 4$ . Cazul  $x = 1$  este banal. Cazul  $x = 2$  nu convine. Numerele sînt 21, 22, 23 și 24. 11) Între  $\frac{1}{3}$  și 1. 12) Cel tîrziu la ora 9 și 49 minute. 13) Aproximativ 47. 14) În 6 ore și 40 minute. 15) Plimbarea pe rîu. 16) Nu, ci doar cu 32%. 17)  $2\pi r_1 r_2$ . 18)  $f: [2; 5] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{29}{3}$ . 19) Relația se scrie  $\frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{abc} = 0!$  20) 8; 56; 3104. 21)  $(X+Y+Z)^3$ . 22)  $\frac{(-1)^{n+1}(2Y-2)}{X^2 - (Y-1)^2}$ . 24) Împărțiți cu  $b^2$ ;  $\frac{3}{5}$  sau 2. 25) Notăm cu  $x$  lungimea unei laturi; atunci aria va fi  $x\left(\frac{p}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{p}{2}x$ ; aria este maximă atunci cînd  $x = \frac{p}{4}$ . 26) Numărul de diagonale al unui poligon cu  $n$  laturi este  $\frac{n(n-3)}{2}$ ; 100 de laturi. 27) a) (2; 5); b) (16; 25); c) soluții (-2; -1) și (2; -1). 28) da, nu, da, nu, nu.

**Pag. 126.** 1)  $1 + 5 + 87 + \sqrt{9} + \sqrt{64}$ . 4) Ridicați ambii membri la puterea a treia. 5) Da; nu. 6) Nu este corect să simplificăm cu  $a-b$ ! 7) Extrăgînd radicalii, nu este corect să neglijăm modulul! 8)  $22^{22}$  și  $9^9$ . 9) Desfăcînd parantezele, este sumă de 16 pătrate! Cele 4 pătrate sînt  $(ax-by-cz-dt)^2, (ay+bx+ct-dz)^2, (az-bt+cx+dy)^2$  și  $(at+bz-cy+dx)^2$ . 10) Primul nu are soluție; al doilea și ecuația au soluția 2. 11) Deduceți că dacă  $x+y=2$ , atunci  $xy \leq 1$ . 12) Este un pătrat. 13)  $(2a+b+2c)(a-b+c)$ . 15) 250 bu. 16) Două soluții: 16 sau 48! 17) 10 porumbei și 20 vrăbii; găsiți și alte soluții! 19) Doar pisica nu minte. 20) 500 km.

**Pag. 128.** 1) Prima ecuație are ca soluții 1 sau 3. Pentru  $a = -1, 0, 2$  sau 3. 2) a)  $a = 3, c = -9, c = 6$ ; b) pentru  $m \neq 0$  și  $m \neq 1$ . 3) Cîtul este  $X+2a$ . Ecuația are o singură soluție,  $-2a$ . 4) Cîtul este  $X$ , restul  $c$ . 5) a) Cîtul este  $2X^2 + X$ , restul este 1; b) a treia; c) pentru  $x = 0$  sau  $x = -\frac{1}{2}$ ; valoarea minimă este 1. 6) Doar primele trei! 7) Formați o ecuație de gradul al II-lea avînd ca soluții pe  $x$  și pe  $y$ . Discriminantul ei este  $\geq 0$ ! 9) a) Simplificăm cu  $2X^2 + 4X + 8$ ; b) pentru  $x \neq -1$ ; c) pentru  $x = -7, -4, -3, -2, 0, 1, 2$  și 5; d) pentru nici o valoare a lui  $x$ ! 10) a) Resturile sînt 0; b)  $\frac{X^2 - 2X + 4}{X - 4}$ . 11) Anulați restul împărțirii. Rezultă  $a = b = c = d = 1$ , pătratul fiind  $(X^2 + 2X + 1)^2$ . 12)  $a = 4, b = -12, c = 5$ ; rădăcinile sînt  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  și  $\frac{5}{2}$ . 13)  $3(X+Y)(X+Z)(Y+Z)$ . 14) a) Restul este  $a+b+c$ ; b)  $(P+O-2R)(1) = P(1) + Q(1) - 2R(1) = 0$ ; c)  $P(-1) + Q(-1) + R(-1) = (a+b+c)[(-1)^m + (-1)^n + (-1)^p] \neq 0!$

15) a) Soluții  $\frac{1}{3}$  și  $\frac{13}{9}$ ; b) dacă  $a \neq 0$ , o soluție, anume  $-1 - \frac{a}{b}$ . 16) Soluții 0 și 10.

17) b)  $\frac{X^2 - X - 2}{X^2 + 4}$ . 18) Doar punctele (0; 0) și (1; 1). 19)  $\frac{2X - 1}{X - 1}$ . 20) Scriind că discrimi-

nantul ecuației este 0, obținem  $m^2 - 4m + 4 = 0$ , de unde  $m = 2$ . 22) Soluție (10; 6). 23) Nu are soluții.

24) a) Pentru  $a = 1$  sau  $a = -9$ ; b) pentru  $x = -3$ . 25) a)  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = -2x + 8$ ; b) punctul (2; 4). 26)  $P(Q(X)) = (X^2 + 3X + 2)^2 - 3(X^2 + 3X + 2) + 2$ ; citul este  $X^2 + 3X$ .

27)  $m = -3$ ,  $n = 27$ ,  $= -18$ ; rădăcinile polinomului sînt 1, 2, 3 și -3. 28) 60 m, 60 m și 40 m.

29)  $m = \frac{25}{8}$ . 30)  $a^2 = \frac{(b+1)^2}{b}$ .

ei de a  $n$ -a înfășurări este aproxi-  
lungimea de aproximativ 1398  
antă de bază !

parăm pătratele lor cu  $2^2$ . 4) Al  
numerele se divid cu 3 ! 6) 34  
scurtă. 7) 100 numere ; 50 nu-  
rale ; ele ar trebui să fie divizi-  
e)  $a = b = 1$ . 10) a)  $x^2 + y^2 = 16$  e  
rie  $16 = (y - x)(y + x)$ . Obser-  
b) 15, 16, ..., 21 ; c) Dacă  $a + 1$   
,  $x = 2$  sau  $x = 4$ . Cazul  $x = 1$   
, 22, 23 și 24. 11) Între

În 6 ore și 40 minute. 15) Plim-  
,  $f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{29}{3}$ . 19) Relația

$(Y + Z)^3$ . 22)  $\frac{(-1)^{n+1}(2Y - 2)}{X^2 - (Y - 1)^2}$ .

; atunci aria va fi  $x\left(\frac{p}{2} - x\right) =$

diagonale al unui poligon cu  $n$

ții (-2 ; -1) și (2 ; -1). 28) da,

terea a treia. 5) Da ; nu. 6) Nu  
să neglijăm modulul ! 8)  $22^{22}$  și  
 $(ax - by - cz - dt)^2$ ,  $(ay + bx +$   
re soluție ; al doilea și ecuația au  
t. 13)  $(2a + b + 2c)(a - b + c)$ .  
siți și alte soluții ! 19) Doar pi-

0, 2 sau 3. 2) a)  $a = 3$ ,  $c = -9$ ,  
ură soluție,  $-2a$ . 4) Citul este  $X$ .

au  $x = -\frac{1}{2}$  ; valoarea minimă

soluții pe  $x$  și pe  $y$ . Discriminantul  
 $x = -7, -4, -3, -2, 0, 1, 2$  și 5;

11) Anulați restul împărțirii.

-12,  $c = 5$ ; rădăcinile sînt  $\frac{1}{3}$ .

b)  $(P + O - 2R)(1) = P(1) +$

$(-1)^m + (-1)^n + (-1)^p \neq 0$  !

TABELUL RĂDĂCINILOR PĂTRATE ȘI CUBICE  
ALE NUMERELOR NATURALE MAI MICI DECÎT 100

$n$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1,0000	1,0000	51	7,1414	3,7084
2	1,4142	1,2599	52	7,2111	3,7325
3	1,7321	1,4422	53	7,2801	3,7563
4	2,0000	1,5874	54	7,3485	3,7798
5	2,2361	1,7100	55	7,4162	3,8030
6	2,4495	1,8171	56	7,4833	3,8259
7	2,6458	1,9129	57	7,5498	3,8485
8	2,8284	2,0000	58	7,6158	3,8709
9	3,0000	2,0801	59	7,6811	3,8930
10	3,1623	2,1544	60	7,7460	3,9149
11	3,3166	2,2240	61	7,8102	3,9365
12	3,4641	2,2894	62	7,8740	3,9579
13	3,6056	2,3513	63	7,9373	3,9791
14	3,7417	2,4101	64	8,0000	4,0000
15	3,8730	2,4662	65	8,0623	4,0207
16	4,0000	2,5198	66	8,1240	4,0412
17	4,1231	2,5713	67	8,1854	4,0615
18	4,2426	2,6207	68	8,2462	4,0817
19	4,3589	2,6684	69	8,3066	4,1016
20	4,4721	2,7144	70	8,3666	4,1213
21	4,5826	2,7589	71	8,4261	4,1408
22	4,6904	2,8020	72	8,4853	4,1602
23	4,7958	2,8439	73	8,5440	4,1793
24	4,8990	2,8845	74	8,6023	4,1983
25	5,0000	2,9240	75	8,6603	4,2172
26	5,0990	2,9625	76	8,7178	4,2358
27	5,1962	3,0000	77	8,7750	4,2543
28	5,2915	3,0366	78	8,8318	4,2727
29	5,3852	3,0723	79	8,8882	4,2908
30	5,4772	3,1072	80	8,9443	4,3089

$n$
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

CUBICE  
DECÏT 100

$\bar{n}$	$\sqrt[3]{n}$
414	3,7084
111	3,7325
801	3,7563
485	3,7798
162	3,8030
833	3,8259
498	3,8485
158	3,8709
811	3,8930
460	3,9149
102	3,9365
740	3,9579
173	3,9791
900	4,0000
523	4,0207
140	4,0412
54	4,0615
62	4,0817
66	4,1016
66	4,1213
61	4,1408
53	4,1602
40	4,1793
23	4,1983
03	4,2172
78	4,2358
50	4,2543
8	4,2727
2	4,2908
3	4,3089

$n$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
31	5,5678	3,1414	81	9,0000	4,3267
32	5,6569	3,1748	82	9,0554	4,3445
33	5,7446	3,2075	83	9,1104	4,3621
34	5,8310	3,2396	84	9,1652	4,3795
35	5,9161	3,2711	85	9,2195	4,3968
36	6,0000	3,3019	86	9,2736	4,4140
37	6,0828	3,3322	87	9,3274	4,4310
38	6,1644	3,3620	88	9,3808	4,4480
39	6,2450	3,3912	89	9,4340	4,4647
40	6,3246	3,4200	90	9,4868	4,4814
41	6,4031	3,4482	91	9,5394	4,4979
42	6,4807	3,4760	92	9,5917	4,5144
43	6,5574	3,5034	93	9,6437	4,5307
44	6,6332	3,5303	94	9,6954	4,5468
45	6,7082	3,5569	95	9,7468	4,5629
46	6,7823	3,5830	96	9,7980	4,5789
47	6,8557	3,6088	97	9,8489	4,5947
48	6,9282	3,6342	98	9,8995	4,6104
49	7,0000	3,6593	99	9,9499	4,6261
50	7,0711	3,6840	100	10,0000	4,6416

## CUPRINS

### Cap. I Numere

1. Exerciții și probleme recapitulative .....	3
2. Ridicarea la putere .....	4
3. Proprietățile ridicării la putere .....	5
4. Puteri cu exponent (întreg) negativ .....	9
5. Aplicații .....	13
6. Intervale .....	14
7. Aproximări și aproximații .....	20
8. Ecuații și sisteme de ecuații .....	23
9. Probleme .....	34
10. Rădăcina pătrată și cubică .....	36

### Cap. II Funcții

1. Noțiunea de funcție .....	44
2. Funcții liniare .....	48
3. Funcții pătratice .....	51
4. Alte funcții .....	55

### Cap. III Polinoame și fracții raționale

1. Polinoame. Operații cu polinoame .....	57
2. Împărțirea polinoamelor .....	58
3. Divizibilitatea polinoamelor. Polinoame ireductibile .....	61
4. Împărțirea prin binomul $X-a$ .....	63
5. Descompunerea polinoamelor în factori. Formule speciale .....	66
6. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două polinoame .....	69
7. Funcții polinomiale și ecuații polinomiale. Teorema lui Bézout .....	74
8. Frații raționale. Amplificarea și simplificarea .....	77
9. Valorile unei fracții raționale. Frații raționale .....	79
10. Operații cu fracții raționale .....	80

### Cap. IV Ecuații de gradul al doilea

1. Prezentare .....	92
2. Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea. Cazuri speciale .....	94
3. Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea. Formula de rezolvare .....	97
4. Ecuații echivalente cu ecuații de gradul al II-lea .....	102
5. Relații între rădăcinile și coeficienții trinomului de gradul al II-lea .....	106
6. Descompunerea în factori a trinomului de gradul al II-lea .....	110
7. Ecuații care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații de gradul al II-lea .....	111
8. Probleme .....	114

### Cap. V Exerciții și probleme

1. Exerciții și probleme suplimentare .....	120
2. Exerciții și probleme recapitulative .....	125
3. Probleme deosebite. Curiozități .....	126
4. Olimpiade și concursuri .....	128

Indicații și răspunsuri .....	132
-------------------------------	-----

Nr. colilor de tipar: 9  
Bun de tipar: 20.I.1986



Com. nr. 50489/32045  
Combinatul poligrafic  
„CASA ȘCINTEII”  
București — R.S.R.



Lei 11

11