Lei 9,20

ISBN 973-30-0044-2

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI, 1989

Matematică ◆ VI ◆

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI

$$-\frac{5}{3}+\frac{2}{6}=-\frac{4}{3}$$

$$(2a^2bc)^3=8a^6b^3c^3$$

VI

Matematică

Manual pentru clasa a VI-a

Aritmetică • Algebră

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. univ. CONSTANTIN P. POPOVICI   Prof. ION C. LIGOR   Prof. VALENTINA ALEXIANU

Matematică

Aritmetică • Algebră

Manual pentru clasa a VI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI, 1989

Manualul a fost elaborat în 1979 și revizuit în 1981. Ediția actuală este în concordanță cu programa școlară aprobată de M.E.Î. cu nr. 39197/1983.

Conținutul manualului a fost analizat și avizat de Comisia de matematică a M.E.Î.

La îmbunătățirea manualului s-a ținut seamă și de observațiile profesorilor: Aldea Paulina, Bîrleanu Petre, Cărbunaru Constantin, Chișiu Lucia, Chinan Viorel, Cristescu Gheorghe, Cula Constantin, Diac Florin, Ghiciu Nicolae, Ghiorghioi Ioan, Grama Emanoil, Ionescu Mariana, Negreanu Pantelimon, Pascaru Ion, Podeanu Iolanda, Tiotioi Ioan, Toader Georgeta.

ISBN 973—30—0044—2

Redactor: prof. Cătălin-Petru Nicolescu
Tehnoredactor: Elena Oprișeanu
Coperta: Radu Gheorghian

Capitolul I

RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASA A V-A

În cele ce urmează, vom recapitula cîteva chestiuni studiate în clasa a V-a.

1. DIVIZIBILITATE

Fie numerele naturale 15 și 3. Există numărul natural 5 astfel încît înmulțindu-l cu 3 să obținem pe 15. Spunem că 3 *divide pe* 15. În cazul numerelor naturale 18 și 2, există numărul natural 9 astfel încît înmulțindu-l cu 2 să obținem pe 18. Spunem că numărul natural 2 *divide pe* 18. Se mai spune că 18 *se divide cu* 2. De asemenea, se spune că 18 *este divizibil cu* 2. Numărul natural 2 este un *divizor* al lui 18. Numărul natural 18 este un *multiplu* al lui 2.

Fie numerele naturale 15 și 4. Nu există nici un număr natural astfel încît înmulțindu-l cu 4 să obținem pe 15. Spunem că 4 nu divide pe 15.

Definiție. *Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b dacă există un număr natural c astfel încît $a = b \cdot c$.*

$b \mid a$ se citește „b divide pe a"; $b \nmid a$ se citește „b nu divide pe a".

Exemple: $3 \mid 15$, $2 \mid 18$, $4 \nmid 15$.

Numărul natural 5 se divide numai cu 1 și cu 5. Numărul natural 7 se divide numai cu 1 și cu 7. Numerele naturale 5 și 7 se numesc *numere prime*.

Definiție. *Se numește număr prim orice număr natural, diferit de* 1, *care are ca divizori numai pe* 1 *și pe el însuși.*

Numărul natural 1 nu este număr prim.

Cel mai mare divizor comun (prescurtat c.m.m.d.c.) al lui 15 și 18 este 3. Vom scrie aceasta astfel

$$(15, 18) = 3.$$

Se știe că dacă scriem $15 = 3 \cdot 5$ și $18 = 2 \cdot 3^2$, unde 2, 3, 5 sînt numere prime, atunci c.m.m.d.c. al lui 15 și 18 este *produsul factorilor primi comuni lui* 15 *și* 18, *fiecare factor prim fiind luat o singură dată, la puterea cea mai mică cu care figurează în* 15 *și* 18.

În cazul numerelor naturale 6 și 35 avem $6 = 2 \cdot 3$, $35 = 5 \cdot 7$. Numerele naturale 6 și 35 nu au factori primi comuni. Singurul lor divizor comun este 1. Cel mai mare divizor comun al lui 6 și 35 este 1. Vom scrie aceasta astfel $(6, 35) = 1$.

Deci, în cazul numerelor naturale care n-au factori primi comuni, cum este cazul numerelor naturale 6 și 35, cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Definiție. *Două numere naturale se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.*

În manualul de matematică pentru clasa a V-a au fost date, fără demonstrație, următoarele **teoreme:**

1. *Dacă un număr natural este divizibil cu două numere naturale prime între ele, atunci el este divizibil cu produsul acestora.*

Exemplu. 12 este divizibil cu 2 și cu 3. Dar 12 este divizibil și cu 6 care este $2 \cdot 3$.

2. **Teorema împărțirii întregi** *sau* **teorema împărțirii cu rest:** *Oricare ar fi numerele naturale a și b, unde $b \neq 0$, există două numere naturale q și r, numite respectiv cît și rest, astfel încît*

$$a = bq + r, \ r < b.$$

Numerele q și r, determinate de aceste condiții, sînt unice.

Dacă $r = 0$, atunci a se divide cu b, $b \neq 0$.

Dacă $r \neq 0$, atunci a nu se divide cu b, $b \neq 0$.

Exemplu. $181 = 25 \cdot 7 + 6$, $6 < 25$. Deoarece $6 \neq 0$, rezultă că 25 nu divide pe 181.

Cel mai mic multiplu comun (prescurtat c.m.m.m.c.) al lui 15 și 18 este cel mai mic număr natural, diferit de zero, care este multiplu comun al lui 15 și 18, adică este 90. Vom scrie aceasta astfel

$$[15, 18] = 90.$$

Se știe că dacă scriem $15 = 3 \cdot 5$ și $18 = 2 \cdot 3^2$ unde 2, 3, 5 sînt numere prime, atunci c.m.m.m.c. al lui 15 și 18 *este produsul factorilor primi comuni și necomuni lui 15 și 18, fiecare factor prim fiind luat o singură dată, la puterea cea mai mare cu care figurează în 15 sau 18.*

Numerele naturale 1 și 1 nu au nici factori primi comuni, nici factori primi necomuni. Cel mai mic multiplu comun al lui 1 și 1 este cel mai mic număr natural, diferit de zero, care este multiplu comun al lui 1 și 1, adică este 1. Vom scrie aceasta astfel $[1, 1] = 1$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se efectueze:

a) $24 + 0$; b) $12\,132 + 12 + 1\,213 + 1$; c) $20\,020 + 4\,060$; d) $18\,946 + 9\,887$; e) $19\,910 + 8\,090$.

2) Efectuați:

a) $19\,500 - 2\,400$; b) $13\,441 - 419$; c) $14\,500 - 11\,201$; d) $12\,200 - 998$; e) $4\,410 - 897$; f) $89\,000 - 7\,360$; g) $120\,570 - 2\,490$; h) $72\,000 - 19\,900$; i) $42\,000 - 3\,999$; j) $450\,000 - 19\,090$; k) $21\,000 - 1\,909$.

3) Să se efectueze:

a) $171 \cdot 10$; b) $80 \cdot 100$; c) $24 \cdot 1\,000$; d) $20 \cdot 100$; e) $4\,800 \cdot 5$; f) $724 \cdot 0$; g) $24 \cdot 36$; h) $402 \cdot 205$; i) $1\,001 \cdot 1\,001$; j) $205 \cdot 10\,800$; k) $4 \cdot 175 \cdot 150$.

4) Efectuați:

a) $140\,035 : 5$; b) $480 : 10$; c) $24\,000 : 100$; d) $820\,125 : 15$; e) $55\,912 : 241$; f) $1\,690 : 13$; g) $144\,000 : 120$; h) $836\,400 : 205$; i) $2\,020\,032 : 2\,004$.

5) Efectuați împărțirea numărului 202 la 13 aflînd cîtul și restul. Faceți proba.

6) Să se efectueze:

a) $2^2 - 4$; b) $3^3 : 27$; c) $204^2 - 41\,616$; d) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$; e) $5^{40} : 5^{38}$; f) $7^4 : 7^3$; g) $(2^4)^5$; h) $(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^2$.

7) Care sînt divizorii numărului 6? Dar ai numărului 18?

8) Numărul 5 136 este divizibil cu 2? Dar cu 5?

9) Numărul 47 271 este divizibil cu 2? Dar cu 10?

10) Numărul 4 570 este divizibil cu 2? Dar cu 5? Dar cu 10?

11) Numărul 1 485 este divizibil cu 5? Dar cu 3?

12) Numărul 9 470 este divizibil cu 5? Dar cu 3?

13) Numărul 45 621 este divizibil cu 3? Dar cu 2?

14) Numărul 133 333 este divizibil cu 3? Dar cu 2?

15) Să se completeze tabelul următor. Primul rînd este completat ca model.

Numărul	Numărul este divizibil cu 2?	Numărul este divizibil cu 5?	Numărul este divizibil cu 10?	Numărul este divizibil cu 9?	Numărul este divizibil cu 3?	Numărul este divizibil cu 4?	Numărul este divizibil cu 25?	Numărul este divizibil cu 18?	Numărul este divizibil cu 27?	Numărul este prim?
240	Da	Da	Da	Nu	Da	Da	Nu	Nu	Nu	Nu
37										
162										
169										
13 500										
1 715										
720										
191										

16) a) Să se afle toate numerele de forma $\overline{4a3a}$ divizibile cu 2.
b) Să se afle toate numerele de forma $\overline{14aa}$ divizibile cu 5.
c) Să se afle toate numerele de forma $\overline{120a}$ divizibile cu 3.
d) Să se afle toate numerele de forma $\overline{3240a}$ divizibile cu 9.
e) Să se afle toate numerele de forma $\overline{512a}$ divizibile cu 4.
f) Să se afle toate numerele de forma $\overline{4xy}$ divizibile cu 18.
g) Să se afle toate numerele de forma $\overline{x1yyy}$ divizibile cu 36.

17) Care este cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al numerelor 4; 8; 10?

18) Care este cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al numerelor: 2; 3; 4? Dar al numerelor: 4; 6; 10? Dar al numerelor: 4; 5; 9?

19) Să se afle c.m.m.d.c. al numerelor:
a) 40; 32; 72. b) 11; 20; 400.

20) Să se afle c.m.m.m.c. al numerelor:
a) 40; 32; 72. b) 240; 360; 4 800. c) 210; 350; 560. d) 130; 1 690; 2 600.

21) Să se efectueze:
a) $2+2\cdot 3$; b) $3+3\cdot(5-1)$; c) $2\cdot[2+2\cdot(2+2\cdot 2)]$;
d) $10\cdot\{1+2\cdot[3+5:(4-3]\}$; e) $2^{70}:(2\cdot 2^{3}\cdot 2^{63})$; f) $(3^2)^{20}:3^{39}$;
g) $2\cdot 802\cdot 109+204\,510:102+10^3+180^2:3\,240$;
h) $99\,999\cdot 1\,889-99\,999\cdot 1\,888$.

22) Să se determine cîtul și restul împărțirii numărului 416 180 la numărul 2 040. Faceți și verificarea (proba).

2. OPERAȚII CU NUMERE RAȚIONALE ȘI CU FRACȚII ZECIMALE

Cu numere raționale se fac următoarele operații:

Adunarea. Fie numerele raționale $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{7}$. Suma acestor numere raționale este numărul rațional notat cu $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ și care se obține astfel: Se aduc fracțiile $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{7}$ la numitor comun. Pentru aceasta se calculează c.m.m.m.c. al numitorilor 3 și 7, anume $[3, 7]=21$. Apoi fracția $\frac{2}{3}$ se amplifică cu cîtul între 21 și 3, iar fracția $\frac{5}{7}$ se amplifică cu cîtul între 21 și 7. Se obțin fracțiile $\frac{14}{21}$ și $\frac{15}{21}$ echivalente respectiv cu fracțiile $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{7}$. Avem $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{14+15}{21}$, deci

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{29}{21}.$$

Scăderea. Fie numerele raționale $\frac{7}{9}$ și $\frac{3}{4}$. Numărul rațional $\frac{7}{9}$ este mai mare decît numărul rațional $\frac{3}{4}$, deoarece $7\cdot 4>9\cdot 3$. Diferența între numărul rațional $\frac{7}{9}$ și numărul rațional $\frac{3}{4}$ este numărul rațional notat cu $\frac{7}{9}-\frac{3}{4}$ și care se obține astfel. Se aduc fracțiile $\frac{7}{9}$ și $\frac{3}{4}$ la numitor comun. Pentru aceasta se calculează c.m.m.m.c. al numitorilor 9 și 4, anume $[9, 4]=36$. Apoi fracția $\frac{7}{9}$ se amplifică cu cîtul între 36 și 9, iar fracția $\frac{3}{4}$ se amplifică cu cîtul între 36 și 4. Se obțin fracțiile $\frac{28}{36}$ și $\frac{27}{36}$ echivalente respectiv cu fracțiile $\frac{7}{9}$ și $\frac{3}{4}$. Avem $\frac{28}{36}-\frac{27}{36}=\frac{28-27}{36}$, deci:

$$\frac{7}{9}-\frac{3}{4}=\frac{1}{36}.$$

Înmulțirea. Fie numerele raționale $\frac{6}{11}$ și $\frac{7}{5}$. Produsul acestor numere raționale este numărul rațional notat cu $\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{5}$ și care se obține astfel: $\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{5}=\frac{6\cdot 7}{11\cdot 5}$. Deci:

$$\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{5}=\frac{42}{55}.$$

Se spune că $\frac{42}{55}$ este $\frac{6}{11}$ din $\frac{7}{5}$.

Fie numerele raționale $\frac{5}{8}$ și 3. Produsul acestor numere raționale este numărul rațional notat cu $\frac{5}{8}\cdot 3$ și care se obține astfel $\frac{5}{8}\cdot 3=\frac{5\cdot 3}{8}$. Deci:

$$\frac{5}{8}\cdot 3=\frac{15}{8}.$$

Se spune că $\frac{15}{8}$ este $\frac{5}{8}$ din 3.

Împărțirea. Fie numerele raționale $\frac{5}{8}$ și $\frac{2}{3}$. Cîtul între aceste numere raționale este numărul rațional notat cu $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}$ și care se obține

înmulțindu-l pe $\frac{5}{8}$ cu inversul lui $\frac{2}{3}$ care este numărul rațional $\frac{3}{2}$.
Deci $\frac{8}{5}:\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}$. Avem:

$$\frac{5}{8}:\frac{2}{3}=\frac{15}{16}.$$

Se spune că $\frac{15}{16}$ este numărul ce se obține atunci cînd se cunoaște că $\frac{2}{3}$ din el este $\frac{5}{8}$.

Numerele raționale de forma $\frac{17}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{12\,357}{1\,000}$ se scriu sub forma 1,7; 0,03; 12,357 numite *fracții zecimale finite*. Pentru scurtarea exprimării, se spune *fracții zecimale* în loc de fracții zecimale finite. Fracția zecimală 1,7 se citește „un întreg și 7 zecimi". Fracția zecimală 0,03 se citește „0 întregi și 3 sutimi". Fracția zecimală 12,357 se citește „12 întregi, 3 zecimi, 5 sutimi și 7 miimi".

Cu fracții zecimale se fac următoarele operații:

Adunarea. Fie fracțiile zecimale 45,07 și 120,452. Aceste două fracții zecimale se adună ca două numere naturale, după ce am făcut ca virgulele din cele două fracții zecimale să se corespundă. Deci:

$$\begin{array}{r} 45{,}07 + \\ 120{,}452 \\ \hline 165{,}522 \end{array}$$

Un număr natural îl adunăm cu o fracție zecimală considerînd că virgula se află după ultima cifră a scrierii în baza zece a numărului natural considerat.

Exemplu

$$\begin{array}{r} 16{,}05 + \\ 502 \\ \hline 518{,}05 \end{array}$$

Și în celelalte operații care se fac cu fracțiile zecimale, numerele naturale se consideră a fi fracții zecimale ca în cazul adunării fracțiilor zecimale.

Scăderea. Fie fracțiile zecimale 603,45 și 28,07. O fracție zecimală se scade dintr-o fracție zecimală așa cum se scade un număr natural dintr-un număr natural, după ce am făcut ca virgulele din cele două fracții zecimale să se corespundă. Deci:

$$\begin{array}{r} 603{,}45 - \\ 28{,}07 \\ \hline 575{,}38 \end{array}$$

Înmulțirea. Fie fracțiile zecimale 17,3 și 41,2. Două fracții zecimale se înmulțesc ca două numere naturale, rezultatul avînd atîtea cifre după virgulă cîte cifre după virgulă au împreună cele două fracții zecimale. Deci:

$$\begin{array}{r} 17{,}3 \times \\ 41{,}2 \\ \hline 346 \\ 173 \\ 692 \\ \hline 712{,}76 \end{array}$$

Împărțirea. Fie fracțiile zecimale 17,13 și 1,5. Cîtul împărțirii fracției zecimale 17,13 prin fracția zecimală 1,5 se obține astfel:

$$\begin{array}{r|l} 171{,}3 & 15 \\ \cline{2-2} 15 & 11{,}42 \\ \cline{1-1} -21 & \\ 15 & \\ \cline{1-1} -63 & \\ 60 & \\ \cline{1-1} -30 & \\ 30 & \\ \cline{1-1} == & \end{array}$$

În ambele fracții zecimale 17,13 și 1,5 virgula a fost mutată la dreapta peste o cifră, pentru a transforma fracția zecimală 1,5 în numărul natural 15. Apoi calculele se fac ca la numere naturale, punîndu-se virgula la rezultat îndată ce trebuie să utilizăm și cifre de după virgulă în 171,3.

Cîtul împărțirii fracției zecimale 17,13 prin fracția zecimală 1,5 este fracția zecimală 11,42 care este o fracție zecimală finită.

Fie fracțiile zecimale 0,266 și 1,65. Avem:

$$\begin{array}{r|l} 26{,}6 & 165 \\ \cline{2-2} 16\,5 & 0{,}16121 \\ \cline{1-1} 10\,10 & \\ 9\,90 & \\ \cline{1-1} --200 & \\ 165 & \\ \cline{1-1} -350 & \\ 330 & \\ \cline{1-1} -200 & \\ 165 & \\ \cline{1-1} -35 & \end{array}$$

Cîtul împărțirii fracției zecimale 0,266 prin fracția zecimală 1,65 nu este o fracție zecimală finită, ci este o *fracție zecimală periodică* 0,16(12) cu perioada 12.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1) Să se simplifice fracțiile:

a) $\frac{4}{6}$; b) $\frac{12}{36}$; c) $\frac{240}{1\,200}$; d) $\frac{840}{630}$.

2) Să se efectueze:

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$; c) $\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}$; d) $\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{300}$;

e) $\frac{1}{48}+\frac{5}{72}+\frac{7}{180}+\frac{1}{3000}$.

3) Să se efectueze:

a) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$; b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$; c) $3\frac{1}{4}-1\frac{1}{3}$; d) $\frac{11}{450}-\frac{1}{750}$;

e) $89\,993\frac{185}{8\,888}-89\,990\frac{187}{4\,444}$.

4) Să se efectueze:

a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}$; b) $8\cdot\frac{3}{4}$; c) $2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}$; d) $3\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{35}{21}$; e) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; f) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$;

g) $27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$; h) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 8$; i) $94\,771^3\cdot\left(\frac{1}{94\,771}\right)^2$; j) $6+6\cdot\frac{1}{3}$.

5) Să se efectueze:

a) $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{5}:2$; c) $4:\frac{1}{2}$; d) $12:1\frac{1}{3}$; e) $\frac{7}{10}:\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{10}\right)$.

6) Să se efectueze:

a) $15\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}:3\right)$; b) $\frac{1}{2}\left(1+3:\frac{2}{\frac{2}{3}}\right)$; c) $48\cdot\left[\frac{1}{24}+\frac{13}{80}:\left(1-\frac{1}{40}\right)\right]$;

d) $\frac{3}{16}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{36}+\frac{1}{40}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{120}\right)\right]$; e) $\dfrac{2\frac{1}{180}-\frac{71}{90}}{\frac{438}{4\,270}\cdot\left(\frac{5}{48}+\frac{7}{120}+\frac{1}{144}\right)}$.

7) Efectuați:

a) 4,25 + 0,0425 + 4 250 + 21,007 + 1,2;
b) 1 246 + 12,46 + 400,004 + 21,2.

8) Efectuați:

a) 8 946,405 — 1 976,105; b) 2 010,5 — 899,5; c) 4 100,546 — 299,54; d) 4 200,1 — 299,946; e) 31 000 — 19,891; f) 21 000,7 — 20 999,89; g) 490,28 — 490; h) 9 856,702 — 1 236,702.

9) Efectuați:

a) 2,45 · 10; b) 0,2 · 100; c) 0,04 · 1 000; d) 2,4 · 5,8; e) 20,07 · 0,5; f) 243,05 · 2; g) 40,8 · 20,5; h) 20,04 · 1 005; i) 2,4 · 200; j) 40,8 · 1 200; k) 1 200 · 0,0001; l) 2,4 · 200 000,2.

10) Efectuați:

a) 0,36 : 3; b) 24,5 : 10; c) 240 : 100; d) 480 : 1 000; e) 0,2 : 100; f) 32,4 : 18; g) 3 047,5 : 125; h) 4,7 : 0,2; i) 2,25 : 0,15; j) 29,643 : 0,123; k) 803,604 : 20,05; l) 186,43 : 10,5; m) 1 : 0,5; n) 5 : 0,01; o) 0,2 : 0,001; p) 72,5 : 5; r) 324 810 : 80,2; s) 41 261,8 : 2,06; t) 201 001,2 : 1,003; u) 6,1 : 0,001; v) 2,7 : 0,0002; z) 16 746,3 : 8,09.

11) Să se efectueze următoarele împărțiri cu două zecimale exacte:

a) 0,5 : 13; b) 12,56 : 0,03; c) 0,23 : 3; d) 6 161,7 : 274.

12) Să se efectueze următoarea împărțire cu două zecimale exacte:

1 412,354 : 0,23.

13) Să se efectueze:

a) 0,99 + 100,5 · 10,02; b) 10 090,14 : 1,007 — 100,2.

14) Să se efectueze:

a) 2,2 + 22,02 + 222,002; b) 10 · 2,8 + 100 · 0,2456 + 100 · 4,8 + + 1 000 · 0,2; c) 4 900 : 10 + 0,5 : 100 + 280 : 1 000 + 4 : 200;
d) (33,02 — 0,02) : 0,1; e) (33,033 — 3,03) : 0,001;
f) (0,19 — 0,089) · (0,2 + 20 180,4 : 1,005);
g) 100 · 1,1 + (0,5 + 0,5) : 0,1;
h) 1 000 · 416,16 : 0,204 + 2 · (20,4 · 40,6 + 0,111);
i) 1 000 · 1 120,1 — 0,1 · (0,2 + 20 130,2 : 2,005);
j) 0,01 + 100 · 0,02 + 0,1 · (2,4 — 0,4) : 0,01;
k) 0,0001 · 10 · 0,005 + 10 · (245 — 2,45) + 4 255,05.

15) Să se efectueze:

a) $\left(0{,}5+\frac{1}{3}:2\right)\cdot 0{,}25$; b) $\frac{30}{107}\cdot\left(0{,}2+1{,}25+\frac{1}{3}\right)$;

c) $8+0{,}08:\left(0{,}002+\frac{1}{300}\right)$; d) $\frac{7}{27}:\left[2+\frac{1}{3}-1{,}(5)\right]$;

e) $[0{,}(3)+2{,}(45)+0{,}1(26)]:\left(\frac{1}{3}+2\frac{5}{11}+\frac{25}{198}\right)$.

16) Să se efectueze:

a) $0{,}205\cdot 10^2+0{,}002\cdot 10^3$;
b) $10^4\cdot 0{,}2^3+10^7\cdot 0{,}01^3+10^5\cdot 0{,}15^2$;

c) $\dfrac{3+4{,}5\cdot\left(9\,820\frac{1}{3}-9\,813\frac{5}{6}\right)}{\frac{63}{3{,}71}\cdot\left(\frac{1}{84}+\frac{1}{750}+\frac{3}{1\,400}+\frac{2}{875}\right)}:\dfrac{0{,}5^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

17) Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $9 \cdot 10^7 < 10^8$; b) $2\,020\,000 = 10^4 \cdot 202$; c) $10^7 < 9{,}999 \cdot 10^6$; d) $\frac{9}{10^8} > \frac{1}{10^7}$.

18) Se consideră mulțimile:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{6, 7\}$; $D = \{6, 8, 9\}$.

I. Să se afle valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $1 \in A$; b) $2 \in C$; c) $6 \in C$; d) $A \subseteq A$; e) $A \supseteq B$; f) $C \subset D$; g) $A = B$.

II. Să se afle:

a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $A \cap B$; d) $C \cap D$; e) $B \cap C$; f) $C - D$; g) $D - C$.

19) Se consideră mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathrm{N},\ x < 5\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathrm{N}^*,\ x \leq 5\}$.

Să se reprezinte fiecare dintre aceste mulțimi enumerînd elementele sale.

20) Să se rezolve ecuațiile:

a) $x + 21 = 50$; b) $x - 14 = 56$; c) $54 - x = 20$; d) $2x = 60$; e) $\frac{2}{3}x = 20$; f) $4 = \frac{1}{3}x$; g) $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; h) $\frac{100}{x} \cdot 40 = 20$; i) $\frac{x}{100} : 3 = 4$.

21) Știind că a este număr rațional nenegativ și că n este număr natural, să se efectueze:

a) $a + 4a$; b) $3a - 2a$; c) $2a + a + 5a + 1$; d) $2^n \cdot 2^{2n}$; e) $3^{2n} : 3^n$; f) $2^{n+1} : 2^n$.

Capitolul II

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

1. RAPORT

Fie numerele naturale 6 și 3. Vrem să știm de cîte ori este mai mare numărul 6 decît numărul 3. Pentru aceasta facem împărțirea lui 6 la 3. Constatăm că numărul 6 este de două ori mai mare decît numărul 3. Spunem că $\frac{6}{3}$ este *raportul* dintre numărul 6 și numărul 3. Numerele 6 și 3 se numesc *termenii raportului*.

Putem scrie $\frac{6}{3} = 2$. Numărul 2 se numește *valoarea raportului* $\frac{6}{3}$.

Un alt exemplu: raportul dintre numărul 3 și numărul 5 este $\frac{3}{5}$.

Termenii raportului pot fi numere raționale ca în exemplul următor.

Raportul dintre numărul $\frac{3}{5}$ și numărul $\frac{1}{2}$ este $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}$. Avem $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{5}$. Deci $\frac{6}{5}$ este valoarea raportului dintre numerele $\frac{3}{5}$ și $\frac{1}{2}$. Avem $\frac{6}{5} = 1{,}2$.

În general, raportul dintre numărul a și numărul b, diferit de zero, se notează cu $\frac{a}{b}$. Se mai spune că $\frac{a}{b}$ este raportul dintre numerele a și b sau că $\frac{a}{b}$ este raportul dintre a și b.

Nu o dată se înlocuiește în diferite exprimări *raportul numerelor* cu valoarea acestuia. Se spune, de exemplu: Raportul dintre numărul 6 și numărul 3 este 2.

Observație. Un raport are o valoare numai dacă termenul de sub linia de fracție este diferit de zero.

Dacă a, b, c, d sînt numere raţionale, iar $b \neq 0$, $d \neq 0$, atunci

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (1) \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (3) \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad (4)$$

în ultimul caz avînd şi $c \neq 0$.

Se observă că cele patru operaţii cu cîturi de numere raţionale sînt formal identice cu cele patru operaţii cu numere raţionale.

Simbolul de înmulţire se omite ori de cîte ori este posibil, ca în cazul produselor ce intervin în scrierile de mai înainte.

Egalităţile de mai înainte se stabilesc după cum urmează:

Notăm $r = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$, unde r şi q sînt numere raţionale.

Conform definiţiei cîtului între numere raţionale avem $a = br$, $c = dq$. De aici obţinem $ad = (bd)r$, $bc = (bd)q$ şi deci $ad + bc = bd(r + q)$, $ad - bc = bd(r - q)$. Din $b \neq 0$, $d \neq 0$ rezultă $bd \neq 0$. Aşadar, conform definiţiei cîtului între două numere raţionale, deducem $r + q = \frac{ad + bc}{bd}$, $r - q = \frac{ad - bc}{bd}$. Am obţinut deci

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Din $a = br$, $c = dq$ mai rezultă $ac = bd(rq)$. Deci se obţine, conform definiţiei cîtului între două numere raţionale, avînd în vedere şi că $bd \neq 0$, $rq = \frac{ac}{bd}$.

Aşadar $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Din $a = br$, $c = dq$ obţinem şi $(ad)q = (bc)r$. Dacă şi $c \neq 0$, avînd în vedere că $b \neq 0$, avem $bc \neq 0$. Conform definiţiei cîtului între două numere raţionale, obţinem $r = \frac{(ad)q}{bc}$. Folosind regula, demonstrată mai înainte, de înmulţire a cîturilor de numere raţionale, avem $\frac{(ad)q}{bc} = \frac{(ad)q}{(bc) \cdot 1} = \frac{ad}{bc} \cdot \frac{q}{1} = \frac{ad}{bc} q$. Deci $\frac{ad}{bc} q = r$.

Atunci, rezultă $\frac{r}{q} = \frac{ad}{bc}$ conform definiţiei cîtului între două numere raţionale, avînd în vedere şi că $q \neq 0$ (ceea ce rezultă din $q = \frac{c}{d}$, $c \neq 0$).

Deci $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Operaţiile cu cîturi de numere raţionale fiind operaţii cu valori de rapoarte, le vom numi *operaţii cu rapoarte*.

Considerăm $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Dacă $d = c$ şi ţinînd seama de faptul că $d \neq 0$, rezultă $\frac{c}{d} = 1$. Egalitatea precedentă devine $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$.

Deci $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, dacă $c \neq 0$.

Să verificăm faptul că avem $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, pentru:

$$a = \frac{3}{4},$$

$$b = \frac{2}{3},$$

$$c = 2,$$

$$d = \frac{1}{2}.$$

Scriem: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} + \frac{2}{0{,}5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6.$

Avem, de asemenea,

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{6}{3}}{\frac{1}{3}} = 6.$$

Am verificat că pentru $a = \frac{4}{3}$; $b = \frac{2}{3}$; $c = 2$; $d = \frac{1}{2}$, avem egalitatea $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

RAPORTUL MĂSURILOR A DOUĂ MĂRIMI MĂSURATE CU ACEEAŞI UNITATE DE MĂSURĂ

Să considerăm două segmente, unul avînd lungimea de 2 m, iar al doilea de 5 m. Vom spune că

$$\frac{2}{5}$$

este raportul lungimilor celor două segmente, măsurate cu aceeaşi unitate de măsură care este metrul. Pentru a pune în evidenţă şi unitatea de măsură, care în cazul de faţă este metrul, raportul de mai sus îl vom scrie și sub forma $\frac{2m}{5m}$ și, de aceea, vom admite să scriem

$$\frac{2m}{5m} = \frac{2}{5}.$$

O egalitate de felul acesta va fi exprimată astfel:

Raportul măsurilor a două mărimi măsurate cu aceeași unitate de măsură este raportul numerelor prin care se exprimă cele două măsuri.

Cu ajutorul raportului măsurilor a două mărimi măsurate cu aceeași unitate de măsură, se stabilește de cîte ori o măsură, care se află la numitorul raportului, se cuprinde într-o măsură aflată la numărătorul raportului, în cazul în care valoarea raportului este mai mare decît 1.

Exemplul 1. Într-un vas se află 3 l de apă, iar în alt vas se află 2 l de apă. De cîte ori este mai mare volumul de apă din primul vas decît volumul de apă din al doilea vas?

Făcînd raportul $\frac{3}{2}$ admitem că $\frac{3\,l}{2\,l} = \frac{3}{2}$. Deci volumul de apă din primul vas este de 1,5 ori mai mare decît volumul de apă din al doilea vas.

Exemplul 2. Un pom este înalt de 2 m, iar un altul este înalt de 4 m. De cîte ori este înălțimea primului pom mai mică decît înălțimea celui de al doilea?

Făcînd raportul $\frac{4m}{2m}$, constatăm că $\frac{4m}{2m} = \frac{2}{1}$. Deci primul pom este de două ori mai mic decît al doilea.

Putem trage următoarea concluzie:

Făcînd raportul $\frac{2m}{4m}$, constatăm că $\frac{2m}{4m} = \frac{1}{2}$. Vom spune că înălțimea pomului înalt de 2 m este fracția $\frac{1}{2}$ din înălțimea pomului înalt de 4 m.

Raportul măsurilor a două mărimi, măsurate cu aceeași unitate de măsură, din care prima este mai mare decît a doua, ne arată de cîte ori prima măsură este mai mare decît a doua sau de cîte ori a doua măsură este mai mică decît prima.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1) Lungimea unui dreptunghi este de 6 m și lățimea de 2 m. Să se afle:

a) Cu cîți centimetri este mai mare lungimea decît lățimea?
b) Care este raportul dintre lungime și lățime?

c) De cîte ori este mai mare lungimea decît lățimea?
d) Care este raportul dintre lățime și lungime?
e) De cîte ori este mai mică lățimea decît lungimea?

(Faceți și un desen.)

2) Lungimea unei bucăți de sîrmă este de 4 cm, iar lungimea alteia este de 6 dm. Să se afle raportul dintre lungimea primei bucăți și lungimea celei de a doua.

3) Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{2}{5}$. Să se afle:

a) Raportul perimetrelor.
b) Raportul ariilor.

4) Raportul dintre lungimea muchiei unui cub A și lungimea muchiei unui cub B este egal cu 0,5. Să se afle raportul dintre volumul cubului A și volumul cubului B. (Volumul cubului este $V = l^3$, unde l este lungimea muchiei cubului.)

5) Știind că $\frac{a}{b} = 3$ și că $\frac{b}{c} = 4$, să se calculeze $\frac{a}{c}$.

6) Se știe că raportul dintre a și b este egal cu 3, iar raportul dintre a și c este egal cu 6. Să se calculeze raportul dintre c și b.

7) Lungimea unui dreptunghi este de trei ori mai mare decît lățimea sa.

a) Care este raportul dintre lățime și lungime?
b) Ce fracție din lungime reprezintă lățimea?

8) Lățimea unui dreptunghi este $\frac{2}{5}$ din lungime.

Să se afle:

a) Raportul dintre lățime și lungime.
b) Raportul dintre lungime și lățime.

2. PROPORȚIE. PROPRIETATEA FUNDAMENTALĂ A PROPORȚIEI

Fiind date două segmente, unul avînd lungimea de 10 cm și altul avînd lungimea de 6 cm, raportul între lungimea primului segment și lungimea celui de-al doilea segment este:

$$\frac{10}{6}$$

Dacă lungimea fiecăruia din cele două segmente este măsurată cu o unitate de măsură egală cu 2 cm atunci lungimea primului segment este egală cu $5 \cdot 2$ cm, iar a celui de-al doilea este egală cu

$3 \cdot 2$ cm și deci raportul între lungimea primului segment și lungimea celui de-al doilea segment este

$$\frac{5}{3}.$$

Cele două rapoarte sînt egale pentru că exprimă același lucru, anume raportul între lungimile celor două segmente date. Egalitatea celor două rapoarte se scrie:

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

O astfel de egalitate o vom numi *proporție*.

Definiție. *Proporția este o egalitate de două rapoarte.*

Din proprietățile rapoartelor, stabilite cu ocazia studierii operațiilor cu cîturi de numere raționale, operații pe care le-am numit operații cu rapoarte, am văzut că:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

în care valorile expresiilor b și c sînt diferite de zero.

În primul caz, se spune că raportul $\frac{ac}{bc}$ a fost obținut din raportul $\frac{a}{b}$ prin *amplificare* cu c.

În cazul al doilea, se spune că raportul $\frac{a}{b}$ a fost obținut din raportul $\frac{ac}{bc}$ prin *simplificare* cu c.

Dar

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

sînt proporții.

Deci:

Prin amplificarea sau simplificarea unui raport și punerea semnului de egalitate între raportul dat și rapoartele astfel obținute se obțin proporții.

Exemplu. În loc de $\frac{5}{10}$ putem scrie $\frac{1}{2}$. Deci

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

este o proporție.

Termenii celor două rapoarte care constituie o proporție se numesc termenii proporției.

Orice proporție are patru termeni.

Exemple.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}; \quad \frac{6}{7} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{21}{4}}; \quad \frac{1 + \frac{5}{9}}{2} = \frac{3}{2 + \frac{13}{7}}$$

sînt proporții.

Contraexemplu.

$$\frac{10}{5} = 2$$

nu este o proporție. Scriindu-l pe 2 sub forma $\frac{2}{1}$ obținem o proporție

$$\frac{10}{5} = \frac{2}{1}.$$

Vom spune că numărătorul primului raport dintr-o proporție este primul termen al proporției, iar numitorul acestui raport este al doilea termen al proporției.

De asemenea, vom spune că numărătorul celui de-al doilea raport al unei proporții este al treilea termen al proporției, iar numitorul aceluiași raport este al patrulea termen al proporției.

Primul termen și al patrulea termen ai unei proporții se numesc *extremi*, iar al doilea termen și al treilea termen ai unei proporții se numesc *mezi*.

Exemplu. În proporția

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8},$$

3 și 8 sînt extremi, iar 4 și 6 mezi.

În proporția

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8},$$

avem

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$$

În general, obținem *proprietatea fundamentală a proporției*:

În orice proporție, produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

Demonstrația acestei proprietăți este următoarea. Fie o proporție, oricare ar fi aceasta:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Să notăm cu r valorile rapoartelor $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$. Avem $\frac{a}{b} = r$, $\frac{c}{d} = r$.

Din definiția cîtului obținem $a = br$, $c = dr$. Deci $ad = brd$, $bc = bdr$ Avînd $brd = bdr$ avem și

$$ad = bc.$$

Fiind date două rapoarte $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, se stabilește că aceste rapoarte formează o proporție, verificînd că $ad = bc$, deoarece este adevărată proprietatea:

Fiind date două rapoarte $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, aceste rapoarte formează o proporție dacă $ad = bc$.

În adevăr, dacă $ad = bc$, avînd $d \neq 0$, și ținînd seama de definiția împărțirii, deducem $a = \frac{bc}{d}$. Dar $\frac{bc}{d} = b \cdot \frac{c}{d}$. Așadar $a = b \cdot \frac{c}{d}$. Cum $b \neq 0$, ținînd seama de definiția împărțirii, rezultă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemplu. Să se cerceteze dacă numerele 2, 4, 5 și 10 pot fi termenii unei proporții.

. Calculînd toate produsele în care factorii sînt două din numerele 2, 4, 5 sau 10, unul din factori fiind 2, și comparînd fiecare produs cu produsul celorlalte două numere, obținem: $2 \cdot 4 \neq 5 \cdot 10$, deoarece $8 \neq 50$; $2 \cdot 5 \neq 4 \cdot 10$, pentru că $10 \neq 40$; $2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$. Din ultima egalitate rezultă că numerele date pot fi termenii unei proporții.

EXERCIȚII

1) Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Știind că $ad = 10$, să se calculeze $10\ bc$.

2) Se știe că $\frac{1}{a} = \frac{b}{3}$. Să se calculeze $a \cdot b$.

3) Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$. Știind că $a = 6$, să se calculeze $b \cdot c$.

4) Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Să se calculeze $5 + \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

5) Știind că $\frac{1}{a} = \frac{b}{c}$ și că $a \cdot b = 24$, să se calculeze c.

6) Se știe că $\frac{0{,}2}{a} = \frac{b}{0{,}24}$. Să se calculeze $1\,000\ ab$.

7) Știind că $4 \cdot x = 5y$, să se afle $\frac{x}{y}$.

8) Dîndu-se $0{,}6 \cdot x = 0{,}02 \cdot y$, să se afle $\frac{y}{x}$.

9) Se știe că $\frac{6}{7} \cdot x = \frac{4}{5} \cdot y$. Să se calculeze $\frac{x}{y}$.

10) Se știe că dacă înmulțim numărul a cu 4 obținem același rezultat ca atunci cînd înmulțim numărul b cu 0,6. Să se calculeze $\frac{a}{b}$.

11) Știind că $\frac{3}{4}$ din numărul a este egal cu $\frac{6}{7}$ din numărul b, să se afle raportul dintre a și b.

3. AFLAREA UNUI TERMEN NECUNOSCUT AL UNEI PROPORȚII

Proprietatea fundamentală a proporției ne arată că pentru proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avem $ad = bc$.

Am mai arătat că rapoartele $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ formează o proporție dacă $ad = bc$. Adică dacă $ad = bc$ și $b \neq 0$, $d \neq 0$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Datorită egalității

$$ad = bc$$

putem determina orice termen al unei proporții cunoscînd oricare din ceilalți termeni ai aceleiași proporții. Aceasta o facem în baza definiției împărțirii lui bc prin d, dacă $d \neq 0$, obținînd

$$a = \frac{bc}{d}$$

sau în baza definiției împărțirii lui bc prin a, dacă $a \neq 0$, găsind

$$d = \frac{bc}{a}.$$

Dacă împărțim pe ad la b, în cazul cînd $b \neq 0$, obținem:

$$c = \frac{ad}{b},$$

iar dacă împărțim pe ad la c, în cazul cînd $c \neq 0$, rezultă,

$$b = \frac{ad}{c}.$$

Cazurile în care determinăm pe a prin $a = \frac{bc}{d}$ sau determinăm pe d prin $d = \frac{bc}{a}$ pot fi exprimate astfel:

$$\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}.$$

Exemplu. Fie proporţia $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$. Cît este x?

Avem $x = \frac{4 \cdot 6}{8} = 3$.

Cazurile în care determinăm pe c prin $\frac{ad}{b}$ sau determinăm pe b prin $b = \frac{ad}{c}$ pot fi exprimate astfel:

$$\text{un mez} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}.$$

Exemplu. Fie proporţia $\frac{5}{y} = \frac{10}{4}$. Cît este y?

Avem $y = \frac{5 \cdot 4}{10} = 2$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1) Se ştie că $\frac{a}{24} = \frac{15}{b}$. Să se arate că $ab = 360$.

2) Ştiind că $4 \cdot a = 0{,}3 \cdot b$, să se afle $\frac{a}{b}$.

3) Se ştie că $\frac{1}{2} \cdot a = 3 \cdot b$. Să se calculeze $\frac{a}{b}$.

4) Cu numerele 2; 3; 4; 6 puteţi forma o proporţie? Dar cu numerele 2, 5, 4, 9?

Să se afle x din:

5) $\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$; **6)** $\frac{4}{x} = \frac{1}{5}$; **7)** $\frac{3}{5} = \frac{x}{2}$; **8)** $\frac{2}{3} = \frac{6}{x}$; **9)** $\frac{x}{10} = 3$;

10) $\frac{x}{4} = 5$; **11)** $\frac{10}{x} = 5$; **12)** $\frac{4}{x} = 3$; **13)** $\frac{5}{x} = 1$; **14)** $4 = \frac{x}{5}$;

15) $6 = \frac{x}{10}$; **16)** $2 = \frac{8}{x}$; **17)** $5 = \frac{10}{x}$; **18)** $4 = \frac{3}{x}$; **19)** $\frac{1}{x} = 17$;

20) $2 = \frac{4}{x}$; **21)** $8 = \frac{2}{x}$; **22)** $4 = \frac{1}{x}$; **23)** $\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}}$;

24) $\frac{x}{0{,}2} = \frac{0{,}3}{0{,}01}$; **25)** $\frac{x}{0{,}4} = \frac{0{,}3}{0{,}24}$; **26)** $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{x} = \frac{1}{6}$;

27) $\frac{0{,}25 + \frac{1}{3}}{7} = \frac{x}{12}$; **28)** $\frac{2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}}{3} = \frac{x}{2}$; **29)** $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2}{3} = \frac{x}{4}$;

30) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{x}$; **31)** $\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : 3}{2x}$; **32)** $\frac{\frac{1}{5}}{0{,}37} = \frac{x}{3 \cdot \left(2\frac{2}{3} + 3{,}5\right)}$.

33) $\frac{x}{\frac{6}{5}} = \frac{\left(2{,}5 - 1\frac{2}{3}\right)^2}{1 : 4{,}8}$.

34) Să se afle x din:

a) $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$; b) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$.

35) Să se afle y din:

a) $\frac{a}{b} = \frac{y}{d}$; b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{y}$.

36) Să se afle S din:

$$v = \frac{S}{t}.$$

37) Să se afle t din:

$$v = \frac{S}{t}.$$

38) Să se afle U din: $I = \frac{U}{R}$.

39) Să se afle R din: $I = \frac{U}{R}$.

40) Să se afle F din: $p = \frac{F}{S}$.

41) Să se afle S din: $p = \frac{F}{S}$.

42) Raportul dintre preţul unui creion şi preţul unui caiet este egal cu $\frac{1}{3}$.

a) Preţul creionului este mai mare sau mai mic decît preţul caietului? De cîte ori?

b) Dacă preţul creionului este de 2 lei, să se afle cît costă caietul.

43) Raportul dintre preţul unei cărţi şi preţul unui stilou este $\frac{2}{15}$. Dacă stiloul costă 90 lei, să se afle cît costă cartea.

44) Raportul a două numere naturale este $\frac{2}{3}$, iar cel mai mic dintre ele este 12. Să se afle celălalt număr.

45) Raportul a două numere naturale este $\frac{4}{15}$, iar cel mai mare dintre ele 140. Să se afle celălalt număr.

4. PROPORȚII DERIVATE

PROPORȚII DERIVATE CU ACEIAȘI TERMENI

Fiind dați patru termeni a, b, c, d ai unei proporții $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, astfel încît $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, obținem tot proporții prin următoarele procedee:

Se schimbă mezii între ei. Din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se obține proporția $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Se schimbă extremii între ei. Din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se obține proporția $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Se inversează rapoartele. Din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se obține proporția $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Cele trei proporții obținute din prima se numesc *proporții derivate.*

Proporțiile care se mai pot obține cu cei patru termeni a, b, c, d ai proporției $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se capătă numai cu cele trei procedee, avînd ca punct de plecare proporția dată.

Exemplu. Din proporția 1) $\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$ rezultă numai următoarele proporții care au ca termeni termenii proporției date.

2) $\frac{8}{16} = \frac{5}{10}$ prin schimbarea mezilor între ei în proporția 1;

3) $\frac{10}{5} = \frac{16}{8}$ prin schimbarea extremilor între ei în proporția 1;

4) $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ prin inversarea rapoartelor proporției 1;

5) $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ prin schimbarea mezilor între ei în proporția 3;

6) $\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$ prin schimbarea mezilor între ei în proporția 4;

7) $\frac{16}{8} = \frac{10}{5}$ prin schimbarea extremilor între ei în proporția 4;

8) $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ prin schimbarea mezilor între ei în proporția 7.

Să considerăm proporția:

$\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$. Putem scrie: $\frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{6}{3}$ adică $\frac{20}{10} = \frac{6}{3}$. Am obținut o proporție derivată din prima.

Se poate arăta că din proporția

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se pot obține următoarele proporții derivate:

(1) $\frac{af}{bf} = \frac{c}{d}$; (2) $\frac{a}{b} = \frac{cf}{df}$; (3) $\frac{af}{b} = \frac{cf}{d}$; (4) $\frac{a}{bf} = \frac{c}{df}$,

unde $f \neq 0$, atunci cînd f se găsește la numitorul cel puțin al unui raport. Se pot obține, de asemenea, următoarele proporții derivate:

(5) $\frac{a:f}{b:f} = \frac{c}{d}$; (6) $\frac{a}{b} = \frac{c:f}{d:f}$; (7) $\frac{a:f}{b} = \frac{c:f}{d}$; (8) $\frac{a}{b:f} = \frac{e}{d:f}$

unde $f \neq 0$.

Să deducem de exemplu proporția derivată

(1) $\frac{af}{bf} = \frac{c}{d}$.

Am văzut că dacă avem proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci avem și egalitatea $ad = bc$, iar dacă avem egalitatea $ad = bc$ în care $b \neq 0$, $d \neq 0$, atunci avem proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Să înmulțim ambii membri ai egalității $ad = bc$ cu f, $f \neq 0$. Avem $(ad) \cdot f = (bc) \cdot f$ ceea ce se poate scrie și astfel $(a \cdot f) \cdot d = (b \cdot f) \cdot c$. Avem deci proporția $\frac{af}{bf} = \frac{c}{d}$. Deci din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ am obținut proporția $\frac{af}{bf} = \frac{c}{d}$. Proporția $\frac{af}{bf} = \frac{c}{d}$ este o proporție derivată din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Într-un mod asemănător se poate proceda și în cazul proporțiilor (2), (3), (4), (5), (6), (7) și (8).

Reținem, deci, următoarele: *într-o proporție, înmulțind sau împărțind ambii termeni ai unui raport sau ambii numărători sau ambii numitori cu o expresie a cărei valoare este diferită de zero,* se obține tot o proporție.

Alte proporții derivate din proporția

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se obțin în modul următor. Se notează cu r valoarea comună a rapoartelor $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$. Deci $\frac{a}{b} = r$, $\frac{c}{d} = r$. Ținînd seama de definiția cîtului, obținem $a = br$, $c = dr$, iar prin adunare membru cu membru a acestor două egalități avem $a + c = (b + d)r$. Dacă $b + d \neq 0$, atunci $\frac{a+c}{b+d} = r$. Deci din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ și $b + d \neq 0$ rezultă

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Scăzînd membru cu membru egalitățile $a = br$, $c = dr$, obținem $a - c = (b - d)r$. Dacă $b - d \neq 0$, atunci $\frac{a-c}{b-d} = r$.

Deci din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ și $b - d \neq 0$ obținem:

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Exemplu. Fie proporția $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Ținînd seama de faptul că $12 + 3 \neq 0$, $12 - 3 \neq 0$ și $\frac{8}{12} = \frac{8+2}{12+3}$, $\frac{8}{12} = \frac{8-2}{12-3}$ se obține $\frac{8}{12} = \frac{10}{15}$ și $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$.

Reținem, deci, următoarele:

Fiind dată proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *din ea se deduc următoarele proporții derivate*

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d},$$

dacă numitorii rapoartelor proporțiilor sînt diferiți de zero.

Mai avem următoarea proprietate:

Fiind dată proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *din ea se deduc următoarele proporții derivate*

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}, \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}, \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d},$$

dacă numitorii rapoartelor proporțiilor sînt diferiți de zero.

Dacă $c = 0$, atunci $a = 0$ și proporțiile de mai înainte sînt adevărate.

Dacă $c \neq 0$ deducem, mai întîi, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, din care obținem $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$, $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d}$, $\frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$, $\frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$. De unde obținem

respectiv, $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$, $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, dacă numitorii rapoartelor acestor proporții sînt diferiți de zero. Din $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$, $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d}$, deducem și $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$, de unde rezultă $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$, dacă numitorii rapoartelor acestor proporții sînt diferiți de zero.

Exemplu. Fiind dată proporția $\frac{18}{6} = \frac{9}{3}$ avem și proporțiile $\frac{18}{18+6} = \frac{9}{9+3}$, $\frac{18}{18-6} = \frac{9}{9-3}$, $\frac{18+6}{6} = \frac{9+3}{3}$, $\frac{18-6}{6} = \frac{9-3}{3}$, $\frac{18+9}{6+3} = \frac{18-9}{6-3}$, $\frac{18+6}{18-6} = \frac{9+3}{9-3}$, $\frac{18-6}{18+6} = \frac{9-3}{9+3}$. Aceste proporții fiind respectiv $\frac{18}{24} = \frac{9}{12}$, $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$, $\frac{24}{6} = \frac{12}{3}$, $\frac{12}{6} = \frac{6}{3}$, $\frac{27}{9} = \frac{9}{3}$, $\frac{24}{12} = \frac{12}{6}$, $\frac{12}{24} = \frac{6}{12}$. Avem proporții, deoarece rapoartele din membrul întîi al acestor proporții se obțin prin amplificarea cu 2 a rapoartelor din membrul al doilea al acestor proporții, cu excepția proporției $\frac{27}{9} = \frac{9}{3}$, unde raportul din membrul întîi se obține prin amplificarea cu 3 a raportului din membrul al doilea.

Probleme rezolvate

1) Suma a două numere este egală cu 48, iar raportul lor este $\frac{3}{5}$. Să se afle numerele.

Rezolvare. Fie x și y cele două numere. Avem:

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Știm că $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$. Aplicăm cîteva din cunoștințele pe care le avem în legătură cu „proporțiile derivate".

Scriem $\frac{x+y}{y} = \frac{3+5}{5}$. Dar $x + y = 48$.

Deci $\frac{48}{y} = \frac{8}{5}$, de unde $y = \frac{48 \cdot 5}{8} = 30$.

Aflăm pe x:

$x = 48 - y = 48 - 30 = 18$.

Putem afla pe x și din: $\frac{x}{30} = \frac{3}{5}$.

Avem: $x = \frac{3 \cdot 30}{5} = 18$.

Verificare

$$\begin{cases} 18+30=48 \\ \dfrac{18}{30}=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Putem proceda și altfel: Știm că $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$. Putem scrie $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=k.$

De aici deducem $x=3k$ și $y=5k$.

Avem: $x+y=3k+5k$, Dar $x+y=48$.

Deci $3k+5k=48$, $8k=48$, $k=6$.

Avem în continuare:

$x=3k$; $x=3\cdot 6=18$; $y=5k$; $y=5\cdot 6=30$.

2) Se știe că $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$. Să se calculeze $\frac{2x+5y}{5y}$.

Prima metodă:

Înmulțim și pe $\frac{x}{y}$ și pe $\frac{3}{4}$ cu $\frac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{x}{y}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\frac{2x}{5y}=\frac{3}{10}.$$

Aplicînd unele cunoștințe relative la proporții derivate, putem scrie:

$$\frac{2x+5y}{5y}=\frac{3+10}{10}=\frac{13}{10}.$$

A doua metodă:

Procedînd ca la problema 1) avem:

$$x=3k,$$

$$y=4k,$$

$$\frac{2x+5y}{5y}=\frac{2\cdot 3k+5\cdot 4k}{5\cdot 4k}=\frac{26k}{20k}=\frac{13}{10}.$$

A treia metodă:

Din $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ obținem $x=\frac{3y}{4}$.

Înlocuim în $\frac{2x+5y}{5y}$ pe x cu $\frac{3y}{4}$ și obținem:

$$\frac{2x+5y}{5y}=\frac{2\cdot\frac{3y}{4}+5y}{5y}=\frac{\frac{3y}{2}+5y}{5y}=\frac{13y}{10y}=\frac{13}{10}.$$

1) Suma a două numere este 100, iar raportul lor $\frac{2}{3}$. Să se afle numerele.

2) Se știe că $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$. Să se calculeze:

a) $\frac{x+y}{y}$; b) $\frac{x}{x+y}$; c) $\frac{y-x}{y}$; d) $\frac{x}{y-x}$; e) $\frac{2x}{3y}$; f) $\frac{2x+3y}{3y}$;

g) $\frac{3x+5y}{5y}$.

3) Să se afle x din:

a) $\frac{x+2}{x}=\frac{5}{4}$; b) $\frac{x}{x+1}=\frac{3}{4}$.

4) Un elev a depus la C.E.C în două luni de zile suma de 280 lei. Raportul dintre suma depusă în prima lună și suma depusă în a doua lună este egal cu $\frac{2}{5}$. Ce sumă a depus elevul în fiecare lună?

5) Lățimea unui dreptunghi este $\frac{3}{5}$ din lungimea sa.

a) Să se afle raportul dintre lungime și lățime.

b) Să se afle raportul dintre perimetru și lățime.

6) Se consideră triunghiul ABC (figura 1); $D\in(AB)$, $E\in(AC)$. Să se arate că dacă avem $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, atunci avem și

(1) $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$; (2) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$;

(3) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$; (4) $\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$;

(5) $\frac{AE}{AD}=\frac{EC}{DB}$; (6) $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$.

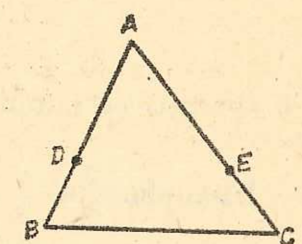


Fig. II.1

5. ȘIR DE RAPOARTE EGALE

Raportul $\frac{a}{b}$ este egal cu raportul $\frac{af}{bf}$ dacă f este diferit de zero. Deci avem proporția $\frac{a}{b}=\frac{af}{bf}$. Dacă raportul $\frac{af}{bf}$ îl amplificăm cu

g, $g \neq 0$, obținem proporția $\frac{af}{bf} = \frac{afg}{bfg}$. Scriind cele două proporții astfel

$$\frac{a}{b} = \frac{af}{bf} = \frac{afg}{bfg},$$

spunem că avem un șir de rapoarte egale.

Exemplu. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ este un șir de rapoarte egale.

Un alt șir de rapoarte egale este următorul

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d},$$

dacă numitorii sînt diferiți de zero. Avem și

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f},$$

deoarece dacă r este valoarea comună a rapoartelor $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ avem $a = br$, $c = dr$, $e = fr$, deci $a + c + e = (b + d + f)r$ și deci $\frac{a+c+e}{b+d+f} = r$ cu condiția ca $b + d + f \neq 0$.

Ținînd seama de faptul că $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$, $\frac{c}{d} = \frac{nc}{nd}$, $\frac{e}{f} = \frac{pe}{pf}$ și de

$$\frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd} = \frac{pe}{pf} = \frac{ma+nc+pe}{mb+nd+pf},$$

rezultă

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{ma+nc+pe}{mb+nd+pf},$$

cu condiția ca numitorii să fie diferiți de zero, iar $m \neq 0$, $n \neq 0$ și $p \neq 0$.

Exemplu. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8}{2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 12}$, ultimul raport fiind egal cu $\frac{16}{24}$.

Asemănător, avem

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ma+nc}{mb+nd},$$

cu condiția ca numitorii să fie diferiți de zero, iar $m \neq 0$, $n \neq 0$. Avem un astfel de șir de rapoarte egale, oricare ar fi numărul lor.

În concluzie, *un șir de rapoarte egale este un șir de rapoarte cu semnul egal între fiecare pereche de rapoarte învecinate astfel încît orice pereche de rapoarte din șir să formeze o proporție.*

EXERCIȚII

1) Știind că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{1}{4}$, să se afle $\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

2) Fie $\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g} = \frac{d}{h} = 10$. Să se calculeze $4 + \frac{a+b+c+d}{e+f+g+h}$.

3[d]) Dacă $\frac{z}{c} = 4$ și $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, să se calculeze

a) $\frac{x+y+z}{a+b+c}$;

b) $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$;

c) $\frac{2x+3y+4z}{2a+3b+4c}$.

4[d]) Se știe că $\frac{a}{b} = 3$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ și că $a + c + e = 30$. Să se calculeze $b + d + f$.

5[d]) Știind că $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{5} = \frac{5c}{4}$ și că $a + b + c = 1$, să se afle a, b și c.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

1) Numărul 3 240 este divizibil cu 2? Dar cu 5? Dar cu 10? Dar cu 3?

2) Să se efectueze:

a) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$; b) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{12}$; c) $3{,}2 + 32 + 121{,}002$;

d) $28\,000 - 899{,}24$; e) $415{,}24 - 129{,}9$; f) $2{,}4 \cdot 25$;

g) $1{,}44 : 1{,}2$; h) $7{,}5 : 0{,}25$; i) $0{,}1^2 + 10^2$;

j) $\frac{1}{2} : 0{,}5 - \frac{1}{6}$.

3) Să se afle x din:

a) $\frac{x}{4} = \frac{10}{5}$; b) $\frac{x}{4} = 3$; c) $\frac{10}{x} = 3$; d) $4 = \frac{x}{7}$; e) $5 = \frac{3}{x}$.

4) Raportul dintre lățimea și lungimea unui dreptunghi este $\frac{2}{7}$, iar lățimea este egală cu 6 cm. Să se afle lungimea.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri

1) Care sînt numerele naturale ale căror pătrate divid pe 720?

2) Să se calculeze: $5^{102} : (5^{100} + 5^{100} + 5^{100} + 5^{100} + 5^{100})$.

3) Produsul a patru numere naturale consecutive poate fi egal cu 93 024? Dacă răspunsul este afirmativ, găsiți numerele.

Problemele și exercițiile notate cu *d* au un grad de dificultate mai mare.

4) Fie $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 99 \cdot 100 + 800$. Care este restul împărțirii lui a la 792?

5) Lățimea unui dreptunghi este egală cu $\frac{5}{28}$ din perimetrul său.
a) Să se afle raportul dintre semiperimetru și lățime.
b) Să se afle raportul dintre lățime și lungime.
c) Dacă lungimea acestui dreptunghi este cu 16 m mai mare decît lățimea, să se afle aria sa.

6) Se știe că:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{4}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad c \cdot f = d \cdot e, \quad 2a + 3c + 4e = 33.$$

Să se calculeze $2b + 3d + 4f$.

7) Să se afle x din:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{0,(3) + 0,(27) + 1,(23)}{4,5 : 0,09 + 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \cdot 2\,607.$$

PROPORȚIONALITATE DIRECTĂ. PROPORȚIONALITATE INVERSĂ

6. PROPORȚIONALITATE DIRECTĂ

Fie următorul șir de rapoarte egale

$$\frac{125}{50} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

Rapoartele din acest șir de rapoarte egale au o valoare comună, pe care o putem exprima prin $\frac{5}{2}$ sau 2,5. Spunem că s-a stabilit o *proporționalitate directă* între mulțimile $\{5, 25, 125\}$ și $\{2, 10, 50\}$ prin scrierea șirului de rapoarte egale de mai sus.

În general:

Între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate directă, dacă se poate forma un șir de rapoarte egale, diferite de zero, astfel încît mulțimea numărătorilor rapoartelor să fie una din mulțimi, iar mulțimea numitorilor rapoartelor să fie cealaltă mulțime.

Notînd cu r valoarea comună a rapoartelor dintr-un șir de rapoarte egale, diferite de zero, și cu $\frac{a}{b}$ oricare din rapoartele din acest șir de rapoarte egale, obținem $\frac{a}{b} = r$ sau $a = br$ și $b \neq 0$. Deci:

Prin înmulțirea elementelor unei mulțimi finite de numere, diferite de zero, cu un număr dat, diferit de zero, se obține o mulțime astfel încît între cele două mulțimi să existe o proporționalitate directă.

Exemplu. Fie mulțimea $\{1, 2, 3\}$ în care fiecare număr exprimă un număr de sticle de lapte. Deoarece o sticlă de lapte costă 3,50 lei, atunci în mulțimea $\{3,50, 7, 10,50\}$ fiecare număr exprimă costul unui număr de sticle de lapte. Între cele două mulțimi există o proporționalitate directă, deoarece

$$\frac{3,50}{1} = \frac{7}{2} = \frac{10,30}{3}$$

este un șir de rapoarte egale, valoarea comună a acestor rapoarte fiind 3,50, ceea ce în lei exprimă costul unei sticle de lapte.

7. PROPORȚIONALITATE INVERSĂ

Fie următorul șir de produse egale

$$8 \cdot 25 = 4 \cdot 50 = 2 \cdot 100.$$

Produsele din acest șir de produse egale au o valoare comună, pe care o putem exprima prin 200. Spunem că s-a stabilit o *proporționalitate inversă* între mulțimile $\{2, 4, 8\}$ și $\{25, 50, 100\}$ prin scrierea șirului de produse egale de mai sus.

În general:

Între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate inversă, dacă se poate forma un șir de produse egale, diferite de zero, astfel încît mulțimea primilor factori ai produselor să fie una din mulțimi, iar mulțimea celorlalți factori ai produselor să fie cealaltă mulțime.

Notînd cu r valoarea comună a produselor dintr-un șir de produse egale, diferite de zero, și cu ab oricare din produsele din acest șir de produse egale, obținem $ab = r$ sau $a = \frac{r}{b}$, deoarece $b \neq 0$. Deci:

Prin împărțirea unui număr dat, diferit de zero, cu elementele unei mulțimi finite de numere, diferite de zero, se obține o mulțime astfel încît între cele două mulțimi să existe o proporționalitate inversă.

Exemplu. Fie mulțimea $\{10, 14, 20\}$ în care fiecare număr exprimă lățimea în metri a unui dreptunghi a cărui arie este de 2 800 m^2. Atunci în mulțimea $\{280, 200, 140\}$ fiecare număr exprimă lungimea în metri a dreptunghiului considerat. Între cele două mulțimi există o proporționalitate inversă, deoarece

$$10 \cdot 280 = 14 \cdot 200 = 20 \cdot 140$$

este un șir de produse egale, valoarea comună a acestor produse fiind 2 800, ceea ce în m^2 exprimă aria unui dreptunghi.

Vom considera probleme în care intervin două mulţimi de cîte două numere între care există o proporţionalitate directă sau o proporţionalitate inversă, iar unul din numerele unei mulţimi este necunoscut.

Procedeul care se foloseşte pentru determinarea numărului necunoscut dintr-o mulţime de două numere din două mulţimi de cîte două numere între care există o proporţionalitate directă sau o proporţionalitate inversă se numeşte regula de trei simplă.

Exemplul 1. 15 m de stofă costă 1 230 lei. Cît costă 27 m din aceeaşi stofă?

Formăm, mai întîi, mulţimea $\{15, 27\}$ în care numerele exprimă metri de stofă. Formăm, apoi, mulţimea $\{1\,230, x\}$ în care numerele exprimă sumele în lei pentru 15 m de stofă, respectiv 27 m din aceeaşi stofă. Între aceste două mulţimi există o proporţionalitate directă, deoarece rapoartele $\frac{1\,230}{15}$, $\frac{x}{27}$ sînt egale, valoarea lor comună fiind costul în lei a unui metru din stofa considerată. Deci

$$\frac{1\,230}{15} = \frac{x}{27}.$$

Rezultă $x = \frac{1\,230}{15} \cdot 27 = 82 \cdot 27 = 2\,214$. Deci 27 m din stofa considerată costă 2 214 lei.

Se spune că rezolvarea problemei de mai înainte, prin scrierea proporţiei $\frac{1\,230}{15} = \frac{x}{27}$, s-a făcut prin *metoda proporţiei.*

În loc de a scrie proporţia indicată, se face următoarea schemă

$$\begin{array}{ll} 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\,230 \\ 27 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

care se citeşte astfel: Dacă 15 m stofă costă 1 230 lei atunci 27 m din aceeaşi stofă cît costă?

Din schema considerată se poate scrie şi proporţia $\frac{15}{27} = \frac{1\,230}{x}$, care este o proporţie derivată din proporţia $\frac{1\,230}{15} = \frac{x}{27}$ şi se ajunge la acelaşi rezultat.

Problema enunţată poate fi rezolvată şi prin următorul raţionament. Dacă 15 m stofă costă 1 230 lei, atunci 1 m din aceeaşi stofă costă $\frac{1\,230}{15}$ lei. Rezultă că 27 m din aceeaşi stofă costă

$\frac{1\,230}{15} \cdot 27$ lei. Acest raţionament, care este *metoda reducerii la unitate*, se aşază sub forma următoarei scheme

$$\begin{array}{ll} 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\,230 \\ 27 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \\ \hline 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\,230 \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1\,230}{15} \\ 27 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1\,230}{15} \cdot 27 \end{array}$$

deci $x = \frac{1\,230}{15} \cdot 27 = 2\,214$.

Exemplul 2. Un elev are 10 monezi a 3 lei. Cîte monezi a 5 lei poate căpăta în schimbul sumei pe care o are?

Formăm, mai întîi, mulţimea $\{3, 5\}$ în care numerele exprimă valorile monezilor. Formăm, apoi, mulţimea $\{10, x\}$ în care numerele exprimă numărul monezilor de 3 lei, respectiv al monezilor de 5 lei. Între aceste două mulţimi există o proporţionalitate inversă, deoarece produsele $3 \cdot 10$, $5x$ sînt egale, valoarea lor comună fiind aceeaşi sumă de lei. Deci

$$3 \cdot 10 = 5x.$$

Rezultă $x = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6$. Deci 6 monezi a 5 lei fac tot atîta cît 10 monezi a 3 lei.

Se spune că rezolvarea problemei de mai înainte, prin scrierea egalităţii $3 \cdot 10 = 5x$, care poate fi considerată că provine din proporţia $\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$, s-a făcut prin *metoda proporţiei.*

În loc de a scrie proporţia considerată, se face următoarea schemă

$$\begin{array}{ll} 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 10 \\ 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

care se citeşte astfel: Dacă o sumă de lei este formată din 10 monezi a 3 lei, atunci din cîte monezi a 5 lei este formată aceeaşi sumă?

Din schema de mai înainte se scrie proporţia $\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$ care conduce la egalitatea $3 \cdot 10 = 5x$ şi care exprimă că între mulţimile $\{3, 5\}$ şi $\{10, x\}$ există o proporţionalitate inversă.

Problema enunţată poate fi rezolvată şi prin următorul raţionament. Dacă o sumă de lei este formată din 10 monezi a 3 lei, atunci aceeaşi sumă este formată din $3 \cdot 10$ monezi a 1 leu. Rezultă că aceeaşi sumă este formată din $\frac{3 \cdot 10}{5}$ monezi a 5 lei. Acest raţionament, care este *metoda reducerii la unitate*, se așază sub forma următoarei scheme

$$\begin{array}{l} 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10 \\ 5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \\ \hline 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10 \\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3\cdot 10 \\ 5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{3\cdot 10}{5} \end{array}$$

deci $x = \dfrac{3\cdot 10}{5} = 6.$

PROBLEME

1) 50 de creioane costă 100 lei. Cît costă 7 creioane de același fel?
2) 4 kg de mere costă 32 lei. Cît costă 7 kg de mere de același fel?
3) 5 kg de zahăr costă 70 lei. Cît costă 8 kg de zahăr?
4) O roată face 100 de rotații în două minute. Cîte rotații face roata în 4 minute?
5) Pentru a realiza 50 caiete s-au consumat 4 kg hîrtie. Cîtă hîrtie se va consuma pentru a realiza 70 caiete de același fel?
6) Din 6 kg cafea verde se obțin 5 kg cafea prăjită. Din cîte kilograme de cafea verde se obțin 60 kg cafea prăjită?
7) Din 50 kg grîu se obțin 40 kg făină. Din cîte kilograme de grîu se obțin 30 kg de făină?
8[d]) Două mobile în mișcare rectilinie uniformă parcurg aceeași distanță. Raportul vitezelor este 0,4. Să se calculeze raportul intervalelor de timp în care este parcursă această distanță.
9) 4 muncitori termină o lucrare în 6 ore. În cîte ore termină lucrarea 8 muncitori?
10) 6 muncitori termină o lucrare în 8 ore. În cîte ore termină lucrarea 3 muncitori?
11) Un mobil se mișcă uniform rectiliniu cu viteza de 40 km/h și parcurge o anumită distanță în 2 h. În cît timp va parcurge acest mobil aceeași distanță, dacă viteza sa va fi de 60 km/h?
12) 4 robinete pot umple un rezervor în 6 ore. În cît timp pot umple același rezervor 2 robinete? (Se presupune că toate robinetele au același debit.)
13) 3 robinete pot umple un bazin în 4 ore. În cît timp vor putea să umple același bazin 6 robinete? (Robinetele au același debit.)
14) Trei tractoare pot ara o suprafață agricolă în 200 ore. În cît timp vor putea ara aceeași suprafață 14 tractoare?

15) Pentru a vopsi un cub s-a folosit 1 kg vopsea. Cîte kilograme de vopsea vor fi necesare pentru a vopsi un cub cu muchia de două ori mai mare decît a primului?
16) Un bazin de forma unui cub se umple cu apă, cu ajutorul unei pompe, în 45 minute. În cît timp se va umple, cu ajutorul aceleiași pompe, un bazin de forma unui cub care are muchia de două ori mai mare decît a primului?
17) Din 12 kg de semințe de bumbac s-au obținut 2,7 kg de ulei. Din cîte kilograme de semințe se pot obține 8,1 kg de ulei?
18) O bucată de metal cu volumul de 2 cm³ are masa de 5,2 g. Ce volum are o bucată, din același metal, cu masa de 26 g?

9. REGULA DE TREI COMPUSĂ

Vom considera, acum, probleme în care intervin mai multe mulțimi de cîte două numere, între unele din ele existînd o proporționalitate directă, iar între altele o proporționalitate inversă.

Exemplu. O echipă de 12 muncitori agricoli, lucrînd cîte 8 ore pe zi, ară un ogor în 5 zile. În cîte zile va ara același ogor o echipă de 15 muncitori agricoli, lucrînd cîte 4 ore pe zi?

Enunțul problemei îl scriem sub forma următoarei scheme

$$\begin{array}{l} 12\ldots\ldots 8\ldots\ldots 5 \\ 15\ldots\ldots 4\ldots\ldots x \end{array}$$

Notînd cu y numărul de zile în care echipa de 15 muncitori agricoli ară același ogor lucrînd cîte 8 ore pe zi, atunci avem următoarea schemă

$$\begin{array}{l} 12\ldots\ldots 8\ldots\ldots 5 \\ 15\ldots\ldots 8\ldots\ldots y \end{array}$$

Acum între mulțimile $\{12, 15\}$ și $\{5, y\}$ există o proporționalitate inversă, deoarece $12 \cdot 5$ și $15y$ exprimă ogorul arat, dacă unitatea de măsură este partea de ogor arată de un muncitor agricol într-o zi. Deci avem o problemă care se rezolvă prin regula de trei simplă. Cu metoda proporției obținem $\frac{12}{15} = \frac{y}{5}$ sau $12 \cdot 5 = 15y$, de unde $y = \frac{12\cdot 5}{15} = 4.$

Știind că o echipă de 15 muncitori agricoli ară un ogor în 4 zile dacă lucrează cîte 8 ore pe zi, putem afla în cîte zile aceeași echipă de muncitori agricoli ară același ogor dacă lucrează cîte 4 ore pe zi, făcînd următoarea schemă

$$\begin{array}{l} 15\ldots\ldots 8\ldots\ldots 4 \\ 15\ldots\ldots 4\ldots\ldots x \end{array}$$

Între mulțimile $\{8, 4\}$ și $\{4, x\}$ există o proporționalitate inversă, deoarece $8 \cdot 4$ și $4x$ exprimă ogorul arat, dacă unitatea de măsură este partea de ogor arată de întreaga echipă de 15 muncitori agricoli într-o oră. Deci avem o problemă care se rezolvă prin regula de trei simplă. Cu metoda proporției obținem $\frac{8}{4} = \frac{x}{4}$, de unde $x = \frac{8 \cdot 4}{4} = 8$.

Deoarece rezolvarea problemei de mai înainte s-a făcut prin aplicarea de mai multe ori a regulii de trei simplă, se spune că rezolvarea problemei de mai înainte s-a făcut prin aplicarea regulii de trei compusă.

Aceeași problemă se poate rezolva prin *metoda reducerii la unitate* făcînd următorul raționament: Dacă 12 muncitori agricoli, lucrînd cîte 8 ore pe zi, ară un ogor în 5 zile, atunci 1 muncitor agricol, lucrînd cîte 8 ore pe zi, ară același ogor în $5 \cdot 12$ zile. Rezultă că 1 muncitor agricol, lucrînd cîte o oră pe zi, ară același ogor în $5 \cdot 12 \cdot 8$ zile. Rezultă, în continuare, că 1 muncitor agricol, lucrînd cîte 4 ore pe zi, ară același ogor în $\frac{5 \cdot 12 \cdot 8}{4}$ zile. Deci o echipă de 15 muncitori agricoli, lucrînd cîte 4 ore pe zi, ară același ogor în $\frac{5 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot 15}$ zile, adică în 8 zile. Acest raționament se așază sub forma următoarei scheme

12	8	5
15	4	x

12	8	5
1	8	$5 \cdot 12$
1	1	$5 \cdot 12 \cdot 8$
1	4	$\frac{5 \cdot 12 \cdot 8}{4}$
15	4	$\frac{5 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot 15}$

deci $x = \frac{5 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot 15} = 8$. Deci 15 muncitori agricoli, lucrînd cîte 4 ore pe zi, ară în 8 zile un ogor pe care-l ară în 5 zile o echipă de 12 muncitori agricoli care lucrează cîte 8 ore pe zi.

PROBLEME

1) 4 muncitori pot termina o lucrare în 2 zile, lucrînd la acea lucrare cîte 4 ore pe zi. În cîte zile vor termina acea lucrare 2 muncitori care vor lucra 8 ore pe zi?
2) Pentru a strînge 600 l apă, 4 robinete trebuie să curgă 2 ore. Dar pentru a strînge 1 200 l apă, 6 robinete cît timp trebuie să curgă? (Presupunem că robinetele au același debit.)

3) Pentru a ara o suprafață agricolă de 400 ha, 2 tractoare lucrează 10 zile. Dar pentru a ara 800 ha, în 20 zile, cîte tractoare sînt necesare?
4) Din 10 kg bumbac s-a țesut o bucată de pînză lungă de 40 m și lată de 1 m. Cîți metri de pînză se pot țese din 20 kg de bumbac dacă pînza trebuie să aibă 0,5 m lățime?
5) Pentru a realiza 240 metri pînză, 20 țesătoare au lucrat 4 zile. În cîte zile 5 țesătoare vor realiza 120 metri pînză?
6) Pentru a transporta 4,5 t marfă, pe distanța de 20 km s-au plătit 80 lei. Dar pentru a transporta 9 t marfă pe distanța de 40 km cît se va plăti?
7) 10 camioane pot transporta o cantitate de 1 500 tone de marfă în 4 zile făcînd cîte 8 transporturi pe zi. În cîte zile cele 10 camioane vor transporta 15 000 t de marfă făcînd în fiecare zi cîte 10 transporturi?
8) O echipă formată din 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sînt trimiși în altă parte să lucreze. În cît timp vor termina lucrarea muncitorii care au rămas?

10. ÎMPĂRȚIREA UNUI NUMĂR ÎN PĂRȚI DIRECT PROPORȚIONALE CU MAI MULTE NUMERE

Fiind date trei numere pozitive a, b, c, diferite două cîte două, și un număr N pozitiv, se cere să se găsească trei numere pozitive x, y, z astfel încît $N = x + y + z$, iar între mulțimile $\{x, y, z\}$ și $\{a, b, c\}$ să existe o proporționalitate directă. Avem deci șirul de rapoarte egale

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Dar atunci avem și șirul de rapoarte egale

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c},$$

ceea ce ne dă $\frac{x}{a} = \frac{N}{a+b+c}$, $\frac{y}{b} = \frac{N}{a+b+c}$, $\frac{z}{c} = \frac{N}{a+b+c}$,

de unde $x = \frac{aN}{a+b+c}$, $y = \frac{bN}{a+b+c}$, $z = \frac{cN}{a+b+c}$.

În acest mod se face împărțirea unui număr în părți direct proporționale cu mai multe numere.

Exemplu. O cantitate de 3 300 kg zahăr trebuie să fie repartizată la trei cantine în părți direct proporționale cu numărul abonaților fiecărei cantine. Cîte kilograme de zahăr va primi fiecare cantină, dacă prima cantină are 350 abonați, a doua 250, iar a treia 500?

Să notăm cu x, y, z cantitățile de zahăr ce vor reveni fiecărei cantine. Avem $x+y+z=3\,300$ și $\frac{x}{350}=\frac{y}{250}=\frac{z}{500}=\frac{x+y+z}{350+250+500}=$ $=\frac{3\,300}{1\,100}=3$. Deci $x=350\cdot 3=1\,050$, $y=250\cdot 3=750$, $z=$ $=500\cdot 3=1\,500$.

Mai putem proceda și astfel scriem:

$$\frac{x}{350}=\frac{y}{250}=\frac{z}{500}=k.$$

Obținem în continuare:

$x=350\cdot k$
$y=250\cdot k$
$z=500\cdot k$
$x+y+z=350\cdot k+250\cdot k+500\cdot k=1\,100\ k$
$1\,100k=3\,300$
$k=3.$

Deci $x=350\cdot 3=1\,050$
$y=250\cdot 3=\ \ 750$
$z=500\cdot 3=1\,500.$

Dacă primele două cantine au același număr de abonați, de exemplu 300, iar a treia 500, atunci cantitatea de 3 300 kg zahăr o repartizăm direct proporțional cu 600, care este numărul total al abonaților din primele două cantine, și 500. Notînd cu x, x, z cantitățile de zahăr ce vor reveni fiecărei cantine, avem $2x+z=3\,300$ și $\frac{2x}{600}=\frac{z}{500}=$ $=\frac{2x+z}{600+500}=\frac{3\,300}{1\,100}=3$. Deci $x=\frac{600}{2}\cdot 3=900$, $z=500\cdot 3=$ $=1\,500$.

La fel se pune problema oricîte ar fi numerele în raport cu care un număr se împarte în părți direct proporționale.

11. ÎMPĂRȚIREA UNUI NUMĂR ÎN PĂRȚI INVERS PROPORȚIONALE CU MAI MULTE NUMERE

Fiind date trei numere pozitive a, b, c, diferite două cîte două, și un număr N pozitiv, se cere să se găsească trei numere pozitive x, y, z astfel încît $N=x+y+z$, iar între mulțimile $\{x, y, z\}$ și $\{a, b, c\}$ să existe o proporționalitate inversă. Avem deci șirul de produse egale

$$xa=yb=zc$$

sau șirul de rapoarte egale

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}.$$

Problema se reduce, deci, la împărțirea numărului N în părți direct proporționale cu inversele numerelor a, b, c.

Exemplu. O pungă ce conține 142 bomboane trebuie să fie împărțită la trei copii, în părți invers proporționale cu vîrsta fiecăruia. Primul copil are 3 ani, al doilea 5 ani și al treilea 7 ani.

Să notăm cu x, y și z părțile ce revin fiecărui copil.

Avem

$$\frac{x}{\frac{1}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{5}}=\frac{z}{\frac{1}{7}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}=\frac{142}{\frac{71}{105}}=\frac{142\cdot 105}{71}=210.$$

Deci

$$x=\frac{1}{3}\cdot 210=70,\quad y=\frac{1}{5}\cdot 210=42,\quad z=\frac{1}{7}\cdot 210=30.$$

La fel se pune problema oricîte ar fi numerele în raport cu care un număr se împarte în părți invers proporționale cu aceste numere.

PROBLEME

1) Suma a trei numere este 180. Ele sînt direct proporționale cu numerele 2; 3; 4. Să se afle numerele.
2) Suma a patru numere este 22. Știind că ele sînt direct proporționale cu numerele 0,4; 0,5; 0,6; 0,7, să se afle numerele.
3) Suma a trei numere este 1. Știind că ele sînt direct proporționale cu 0,1; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$, să se afle numerele.
4) Patru numere naturale sînt direct proporționale cu numerele 3; 5; 7; 8. Știind că cel mai mare dintre ele este 120, să se afle numerele.
5) Media aritmetică a trei numere este egală cu 16. Să se afle numerele știind că ele sînt direct proporționale cu numerele 4; 5; 7.
6) Suma a patru numere este egală cu 300. Ele sînt direct proporționale cu numerele 2; 3; 4; 6. Să se afle numerele.
7) Trei numere naturale sînt direct proporționale cu numerele 2; 4; 7. Să se afle numerele știind că diferența dintre cel mai mare și cel mai mic este egală cu 60.
8) Suma a trei numere este 130. Știind că ele sînt invers proporționale cu numerele 2; 3; 4, să se afle numerele.
9) Suma a patru numere este 5. Știind că ele sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 0,4; 0,2, să se afle numerele.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

a) 5 kg de mere costă 40 lei. Cît costă 10 kg de mere de aceeași calitate?

b) 8 muncitori pot executa o lucrare în 6 h. În cît timp pot executa aceeași lucrare 4 muncitori?

c) Trei numere sînt direct proporționale cu numerele: 2; 3; 4. Suma lor este 90. Să se afle numerele.

12. APLICAȚII PRACTICE: SCARA UNUI PLAN. DETERMINAREA DISTANȚEI DINTRE DOUĂ PUNCTE GEOGRAFICE CU AJUTORUL HĂRȚII

SCARA UNUI PLAN

Figura 2 reprezintă planul unei camere de locuit, plan care are scara $\frac{1}{100}$. Aceasta înseamnă că am convenit ca 1 cm din desen să corespundă la 100 cm din realitate.

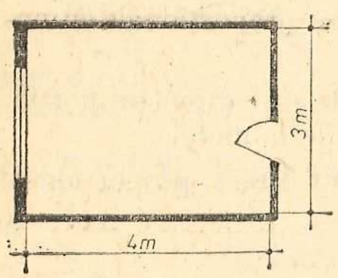


Fig. II.2

Nu era nevoie să luăm neapărat centimetrul ca unitate de măsură. Se poate lua pentru lungime orice unitate de măsură. În exemplul nostru, important este că la 100 unități de lungime de pe teren corespunde o unitate de lungime pe plan. Se alege acea unitate de măsură care se folosește în practică. Lungimea unei camere se măsoară, de obicei, în metri. În exemplul nostru, la 1 cm din desen corespunde 1 m în realitate. Făcînd măsurători pe desen rezultă că această cameră are lungimea de 4 m și lățimea de 3 m.

DETERMINAREA DISTANȚEI DINTRE DOUĂ PUNCTE GEOGRAFICE CU AJUTORUL HĂRȚII

Avem o hartă cu scara $\frac{1}{5\,000\,000}$. Aceasta înseamnă că o unitate de lungime pe hartă corespunde la 5 000 000 unități de același fel din teren. Să presupunem că între două puncte din teren este o distanță de 100 km. Ce distanță va corespunde pe hartă?

Putem scrie:

$$\frac{1}{5\,000\,000} = \frac{x}{100}, \text{ de unde } x = 0{,}00002 \text{ (km)}.$$

Rezultă că la 100 km din teren corespund 2 cm sau 20 mm pe hartă.

Să rezolvăm următoarea problemă:

Distanța între două puncte de pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\,000\,000}$ este de 8 mm. Care este distanța dintre punctele corespunzătoare din teren?

Rezolvare:

Putem scrie: $\frac{1}{2\,000\,000} = \frac{8}{y}$, de unde $y = 16\,000\,000$ (mm).

Rezultă că la distanța de 8 mm între două puncte de pe hartă corespunde o distanță de 16 km între cele două puncte corespunzătoare din teren.

PROBLEME

1) O distanță de 60 m se reprezintă pe un plan printr-un segment de 6 cm. Să se afle scara acestui plan.

2) Distanța între două orașe este reprezentată pe o hartă cu scara 1:500 000 printr-un segment de 8 cm. Să se afle distanța dintre orașe (în km).

3) Pe un plan întocmit la scara 1:4000 un lot de pămînt este reprezentat printr-un pătrat cu aria de 16 cm². Să se afle aria lotului de pămînt.

PROBLEME SUPLIMENTARE

1) Pentru fabricarea unui număr de piese s-au consumat 46 kg de metal. Pentru a se fabrica un număr de două ori mai mare de piese de același tip ajung 86 kg de metal? Dar 92?

2) Pentru vopsirea unei bucăți de tablă de forma dreptunghiulară cu lungimea de 2 dm, s-au consumat 50 g de vopsea. Cîtă vopsea se va consuma pentru vopsirea unei alte bucăți cu aceeași lățime cu prima și cu lungimea de 4 dm?

3) Din două orașe A și B pornesc unul spre celălalt două automobile. Viteza celui ce pleacă din A este de 2 ori mai mare decît viteza celuilalt. Știind că distanța dintre orașe este de 180 km, să se afle la ce distanță de A se întîlnesc automobilele.

4) Baza unui triunghi este de 6 m și baza altui triunghi este de 4 m. Știind că ariile celor două triunghiuri sînt egale, să se afle raportul dintre înălțimea primului triunghi și înălțimea celui de-al doilea triunghi.

5*) Distanța dintre două localități A și B este de 120 km. Din fiecare localitate pleacă în același timp unul către altul două automobile. Cel care pleacă din A parcurge în trei ore o distanță pe care celălalt o parcurge în două ore. La ce distanță de A se întîlnesc automobilele?

6) 6 muncitori pot să termine o lucrare în 12 zile. După 4 zile de lucru echipa de muncitori se mărește cu 2. În cît timp se va executa toată lucrarea?

7) 8 tractoare ară $\frac{1}{2}$ dintr-un lot în 14 zile. După aceea se alătură celor 8 tractoare alte 6 tractoare și este arat tot lotul. Cu cît este mai mic intervalul de timp în care a fost terminată lucrarea în aceste condiții față de situația în care s-ar fi lucrat numai cu 8 tractoare? Dar dacă în loc de 6 tractoare s-ar fi alăturat numai 4 tractoare?

8[d]) Un muncitor face într-un anumit interval de timp 20 piese, iar un altul face în același interval de timp 10 piese. În cît timp poate să facă al doilea muncitor tot atîtea piese cîte face primul muncitor în 40 ore?

9) 4 muncitori execută un număr par de piese în 10 zile. În cîte zile execută 2 muncitori $\frac{1}{2}$ din numărul de piese?

10) 4 muncitori execută un număr par de piese în 12 zile.
a) În cîte zile execută 2 muncitori un număr de piese de două ori mai mic?
b) În cîte zile execută 8 muncitori un număr de piese de 2 ori mai mare?
c) În cîte zile execută 2 muncitori un număr de piese de două ori mai mare?

Capitolul III

PROCENTE

S-a convenit să se folosească pentru $\frac{1}{100}$ notația 1%. Citim „1 la sută“ sau „un procent“*. Analog, s-a convenit că:

3% înseamnă $\frac{3}{100}$ și se citește „3 la sută“ sau „3 procente“.

7% înseamnă $\frac{7}{100}$.

p% înseamnă $\frac{p}{100}$ ($p \in \mathbf{Q}_+$ și $p \geq 0$).

Analog:

10% înseamnă $\frac{10}{100}$. Avem $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$;

25% înseamnă $\frac{25}{100}$. Avem $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$;

40% înseamnă $\frac{40}{100}$. Avem $\frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0{,}4$;

50% înseamnă $\frac{50}{100}$. Avem $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$;

75% înseamnă $\frac{75}{100}$. Avem $\frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$;

100% înseamnă $\frac{100}{100}$. Avem $\frac{100}{100} = 1$;

7,2% înseamnă $\frac{7{,}2}{100}$. Avem $\frac{7{,}2}{100} = 0{,}072$.

În figura 1, *a* este reprezentat un dreptunghi format din 200 de pătrățele (cu laturi de aceeași lungime). Urmăriți cu atenție figura 1, *a*. S-au hașurat 150 de pătrățele. Raportul dintre numărul pătrăței-

* procent (în limba latină *centus* înseamnă sută iar *procentum* înseamnă pentru sută)

lelor hașurate și numărul tuturor pătrățelelor este $\frac{150}{200}$. Dar $\frac{150}{200} = \frac{75}{100}$. Deci dacă din 200 de pătrățele au fost hașurate 150, atunci din fiecare grup de 100 de pătrățele au fost hașurate 75, după cum se vede pe figura 1, *b*. Spunem că am hașurat $\frac{75}{100}$ adică 75% din cele 200 de pătrățele. Însă $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Priviți figura 1, *a*. A spune că am hașurat 75% din numărul pătrățelelor este același lucru cu a spune că am hașurat $\frac{3}{4}$ din numărul pătrățelelor.

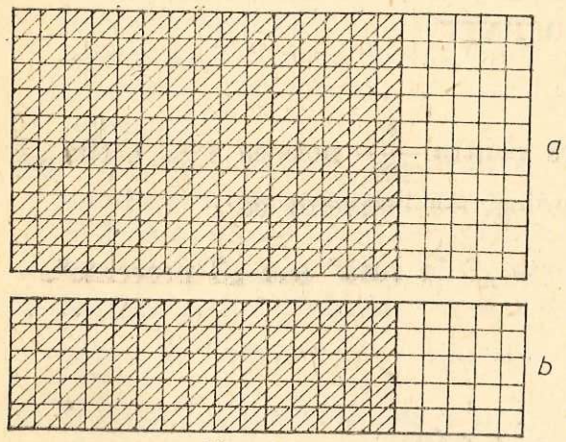


Fig. III. 1

Cînd spunem „sfecla de zahăr conține 15% zahăr", înțelegem că în 100 kg de sfeclă se găsesc 15 kg zahăr. În 200 kg sfeclă se găsesc deci 30 kg zahăr.

În figurile 2, *a*,*b*, sînt date cîteva reprezentări privind procentele.

În figura 2, *a* este reprezentată printr-o diagramă circulară repartizarea terenului agricol într-o cooperativă agricolă de producție. 12,5% din teren este cultivat cu orz, 12,5% cu legume, 25% cu porumb și 50% cu grîu.

Să considerăm 96 g apă în care am dizolvat 4 g sare. Am obținut 100 g soluție de sare în apă. Avem

$$\frac{\text{cantitatea de sare}}{\text{cantitatea de soluție}} = \frac{4\ g}{100\ g} = \frac{4}{100}.$$

Spunem: Concentrația acestei soluții de sare în apă este de 4%.

Ce înseamnă acest lucru?

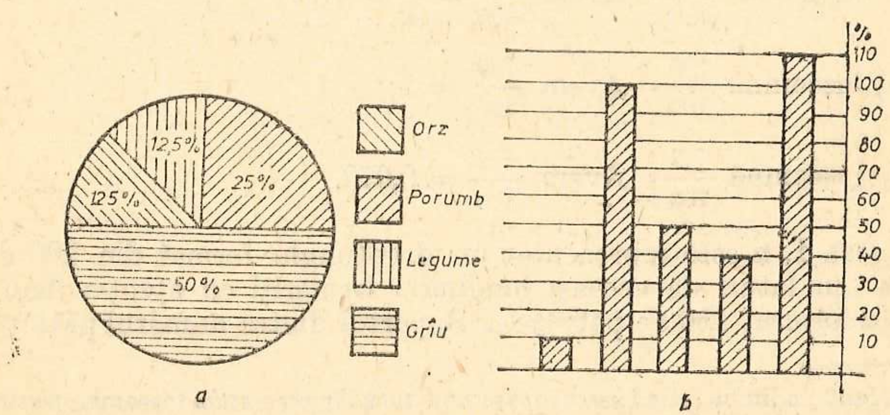


Fig. III.2

Înseamnă că la 100 g soluție avem 4 g sare. Mai putem spune că 4%, adică $\frac{4}{100}$ din 100 g de soluție, este sare $\left(\frac{4}{100}\right.$ din 100 g se află astfel: $\left.\frac{4}{100}\cdot 100\ g = 4\ g\right)$.

Cîtă sare vom avea în 1 250 g de soluție?

Vom calcula 4% din 1 250 g, adică $\frac{4}{100}$ din 1 250 g.

Avem $\frac{4}{100}\cdot 1\,250\ g = 50\ g$.

1% dintr-o cantitate înseamnă $\frac{1}{100}$ din acea cantitate. În general p % dintr-o cantitate înseamnă $\frac{p}{100}$ din acea cantitate.

Un raport de forma $\frac{p}{100}$ ($p \in \mathbf{Q}_+$ și $p \geqslant 0$) se numește *raport procentual*.

Am văzut că p % înseamnă $\frac{p}{100}$.

Să transformăm pe $\frac{9}{200}$ într-un raport procentual.

Avem: $\frac{9}{200} = \frac{4,5}{100}$. Deci $\frac{9}{200}$ înseamnă 4,5%.

Să transformăm pe $\frac{3}{8}$ într-un raport procentual.

Avem: $\frac{3}{8} = \frac{p}{100}$, de unde $p = \frac{3\cdot 100}{8} = 37,5$.

Deci $\frac{3}{8}$ înseamnă 37,5%.

Procentele și calculele cu procente au o foarte mare însemnătate practică ceea ce se va vedea și din cele ce urmează:

1. AFLAREA A p% DINTR-UN NUMĂR DAT

Ne-am ocupat deja puțin de această chestiune mai înainte.

Vom mai lua un exemplu.

Problemă. Un muncitor produce într-o lună 900 piese de același fel. În prima săptămînă realizează 26% din numărul de piese. Cîte piese a realizat în prima săptămînă?

Rezolvare. I. Trebuie să aflăm 26% din 900 piese adică $\frac{26}{100}$ din 900 piese.

Avem: $\frac{26}{100}\cdot 900$ piese = 234 piese.

II. Problema se mai poate rezolva și în modul următor:
Producția realizată într-o lună este de 900 piese.

$\frac{1}{100}$ din producția realizată într-o lună este de 100 ori mai mică decît 900 piese, adică este egală cu $\frac{900}{100}$ piese.

$\frac{26}{100}$ din producția realizată într-o lună este de 26 ori mai mare decît $\frac{1}{100}$ din producția realizată într-o lună și este deci egală cu $26 \cdot \frac{900}{100}$ piese, adică $\frac{26 \cdot 900}{100}$ piese, adică 234 piese.

Putem scrie mai pe scurt astfel:

$$\frac{100}{100} \cdot 900 \text{ piese} = 900 \text{ piese};$$

$$\frac{1}{100} \cdot 900 \text{ piese} = \frac{900}{100} \text{ piese};$$

$$\frac{26}{100} \cdot 900 \text{ piese} = \frac{26 \cdot 900}{100} \text{ piese}.$$

III. Problema se mai poate rezolva folosind regula de trei simplă.
Din 100 piese s-au realizat în prima săptămînă 26 piese.
Din 900 piese, cîte piese se vor realiza în prima săptămînă?
Scriem acest lucru mai pe scurt astfel:

100 piese................26 piese
900 piese................ x piese

Calculăm: $x = \frac{26 \cdot 900}{100} = 234$ (piese).

În general, dacă avem un număr a și vrem să calculăm $p\%$ din el, procedăm astfel:

$$x = \frac{p}{100} \cdot a \text{ sau } x = \frac{p \cdot a}{100}.$$

PROBLEME

1) Să se calculeze 20% din suma de 120 lei.
2) Din 30 de elevi ai unei clase, 60% sînt băieți. Cîte fete sînt în clasă?

CREȘTERI ȘI SCĂDERI CU ATÎT LA SUTĂ

Problemă. Într-o cooperativă agricolă de producție trebuie să fie arate, conform planului, într-un anumit interval de timp, 1200 ha. Dacă planul a fost depășit cu 10%, cîte hectare au fost arate?

Rezolvare. Au fost arate:

$$1\,200 \text{ ha} + \frac{10}{100} \cdot 1\,200 \text{ ha} = 1\,200 \text{ ha} + 120 \text{ ha} = 1\,320 \text{ ha}.$$

Altfel: Putem scrie $\frac{100}{100} + \frac{10}{100} = \frac{110}{100}$. Calculăm $\frac{110}{100}$ din 1200 ha.

Avem:

$$\frac{110}{100} \cdot 1\,200 \text{ ha} = 1\,320 \text{ ha}.$$

Am rezolvat mai sus o problemă în care a intervenit „o creștere cu atît la sută".

Analog, se rezolvă o problemă, în care intervine „o scădere cu atît la sută".

Să reținem: În loc de a spune „planul a fost depășit cu 10%" se mai spune „planul a fost îndeplinit cu 110%".

Cîteva observații

1. Avem de exemplu: $\frac{9}{100} \cdot 500 = 45$.

În general, dacă $\frac{p}{100} < 1$, atunci $\frac{p}{100}$ dintr-un număr dat este un număr mai mic decît numărul dat.

2. De asemenea, avem:

$$\frac{100}{100} \cdot 500 = 500.$$

În general, dacă $\frac{p}{100} = 1$, atunci $\frac{p}{100}$ dintr-un număr dat este un număr egal cu numărul dat.

3. De asemenea, avem:

$$\frac{110}{100} \cdot 500 = 550.$$

120% din x înseamnă $\frac{120}{100} x = \left(\frac{100}{100} + \frac{20}{100}\right) x = \frac{100}{100} x + \frac{20}{100} x = x + \frac{20}{100} x.$

În general, dacă $\frac{p}{100} > 1$ atunci $\frac{p}{100}$ dintr-un număr dat este un număr mai mare decît numărul dat.

2. AFLAREA UNUI NUMĂR CÎND CUNOAŞTEM $p\%$ DIN EL

Problemă. 20% din producţia realizată într-o oră de o secţie a unei fabrici este de 400 piese de acelaşi fel. Cîte piese a produs această secţie într-o oră?

Rezolvare. Notăm cu x numărul de piese realizate, în secţie, în timp de o oră.

Scriem:

$$\frac{20}{100}\cdot x = 400, \text{ de unde } x = \frac{400\cdot 100}{20} = 2\,000 \text{ (piese).}$$

Problema se mai poate rezolva şi în modul următor:

Dacă $\frac{20}{100}$ din producţia secţiei este de 400 piese atunci $\frac{1}{100}$ din producţia secţiei este de 20 de ori mai mică, adică este de $\frac{400}{20}$ piese $= 20$ piese.

Dacă $\frac{1}{100}$ din producţia secţiei este de $\frac{400}{20}$ piese atunci $\frac{100}{100}$ din producţia secţiei este de 100 de ori mai mare, adică este $100\cdot\frac{400}{20}$ piese $= 2\,000$ piese.

Acest lucru se poate scrie mai pe scurt astfel:

$$\frac{20}{100}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 400 \text{ piese}$$

$$\frac{1}{100}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{400}{20} \text{ piese}$$

$$\frac{100}{100}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 100\cdot\frac{400}{20} \text{ piese} = \frac{100\cdot 400}{20} \text{ piese} = 2\,000 \text{ piese.}$$

Mai putem scrie şi astfel:

$$\frac{20}{100}\ \ldots\ldots\ldots\ 400 \text{ piese}$$

$$\frac{100}{100}\ \ldots\ldots\ldots\ x$$

$$x = \left(\frac{100}{100}\cdot 400\right) : \frac{20}{100} = 400\cdot\frac{100}{20} = 2\,000 \text{ (piese).}$$

În general, dacă cunoaştem că $p\%$ dintr-un număr necunoscut este egal cu b, adică dacă ştim că $\frac{p}{100}\cdot x = b$, putem afla

$$x = \frac{100\cdot b}{p}.$$

PROBLEME

1) 200 lei reprezintă 25% dintr-o sumă de bani. Să se afle această sumă.

2) Într-o tabără pionerească, după ce pleacă 40% din numărul copiilor, mai rămîn 120 de copii. Cîţi copii erau la început în tabără?

3. AFLAREA RAPORTULUI PROCENTUAL

Problemă

Două grupe de elevi se întrec în muncă în cadrul atelierului şcolar, executînd obiecte de acelaşi fel. Din 1 740 de obiecte executate de prima grupă, 1 653 sînt de calitate superioară. Din 2 425 de obiecte executate de a doua grupă, 2 328 sînt de calitate superioară. Cît la sută din numărul obiectelor realizate de fiecare grupă sînt de calitate superioară?

Rezolvare.

Grupa I	*Grupa II*
Scriem raportul: $\frac{1\,653 \text{ obiecte}}{1\,740 \text{ obiecte}}$	Scriem raportul: $\frac{2\,328 \text{ obiecte}}{2\,425 \text{ obiecte}}$
Citim: „din 1 740 obiecte executate, 1 653 sînt de calitate superioară".	Citim: „din 2 425 obiecte executate, 2 328 sînt de calitate superioară".

Pentru ca să putem face mai uşor comparaţia, vom transforma fiecare din rapoartele de mai sus într-un *raport procentual.*

Grupa I	*Grupa II*
$\frac{1\,653}{1\,740} = \frac{x}{100}$, de unde $x = 95.$	$\frac{2\,328}{2\,425} = \frac{x}{100}$, de unde $x = 96.$

Din 100 obiecte executate de prima grupă, 95 sînt de calitate superioară (95%). Din 100 obiecte executate de a doua grupă, 96 sînt de calitate superioară (96%). În această privinţă grupa a doua a lucrat mai bine.

Problema se mai poate rezolva şi în felul următor:

Grupa I	*Grupa II*
Din 1 740 obiecte, 1 653 sînt de calitate superioară. Din 100 obiecte cîte sînt de calitate superioară?	Din 2 425 obiecte, 2 328 sînt de calitate superioară. Din 100 obiecte, cîte sînt de calitate superioară?

Grupa I

Pe scurt, scriem astfel:
1 740 obiecte....1 653 obiecte de calitate superioară
100 obiecte....x obiecte de calitate superioară.

$$x = \frac{100 \cdot 1\,653}{1\,740} = 95$$

Concluzie:

95% din numărul obiectelor sînt de calitate superioară.

Grupa II

Pe scurt, scriem astfel:
2 425 obiecte....2 328 obiecte de calitate superioară
100 obiecte....x obiecte de calitate superioară.

$$x = \frac{100 \cdot 2\,328}{2\,425} = 96.$$

Concluzie:

96% din numărul obiectelor sînt de calitate superioară.

Problema se mai poate rezolva și în felul următor:

Grupa I

Ne punem întrebarea:
Cît la sută din numărul obiectelor sînt de calitate superioară?
Scriem:

$$\frac{x}{100} \cdot 1\,740 = 1\,653$$

de unde $x = 95$.
Adică: 95% din numărul obiectelor sînt de calitate superioară.

Grupa II

Ne punem întrebarea:
Cît la sută din numărul obiectelor sînt de calitate superioară?
Scriem:

$$\frac{x}{100} \cdot 2\,425 = 2\,328$$

de unde $x = 96$.
Adică: 96% din numărul obiectelor sînt de calitate superioară.

În general, dacă vrem să aflăm cît la sută dintr-un număr este numărul b, scriem:

$$\frac{x}{100} \cdot a = b, \text{ de unde } x = \frac{100 \cdot b}{a}.$$

În rezolvarea fiecăreia din următoarele probleme:

a) Aflarea a p % dintr-un număr dat.

b) Aflarea unui număr cînd cunoaștem p % din el.

c) Aflarea raportului procentual,

putem face apel la formula $b = \frac{p}{100} \cdot a.$

Într-adevăr:

a) Dacă cunoaștem pe a și p, putem să-l aflăm pe b:

$$b = \frac{p}{100} \cdot a.$$

b) Dacă cunoaștem pe p și b, putem să-l aflăm pe a:

$$a = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

c) Dacă cunoaștem pe a și b, îl putem afla pe p:

$$p = \frac{b \cdot 100}{a}.$$

PROBLEME

1) Cît la sută din 12 kg reprezintă 6 kg?
2) Din 400 de semințe au încolțit 320. Cît la sută din numărul semințelor au încolțit?

PROCENTE DIN PROCENTE

Problemă. Cineva cheltuiește, într-o zi, 40% dintr-o sumă de bani. A doua zi cheltuiește 10% din cît a cheltuit în prima zi. Cît la sută din sumă a cheltuit a doua zi?

Rezolvare

Notăm cu x suma de bani. În prima zi a cheltuit $\frac{40}{100} \cdot x$.

A doua zi a cheltuit $\frac{10}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot x = \frac{10 \cdot 40}{100 \cdot 100} \cdot x = \frac{4}{100} \cdot x$.

Deci a doua zi a cheltuit 4% din suma de bani.

ALTE RAPOARTE FOLOSITE ÎN PRACTICĂ

Dacă scriem 5‰ (citit 5 la mie), aceasta înseamnă $\frac{5}{1\,000}$. De asemenea, 7‰ înseamnă $\frac{7}{1\,000}$. Prin 7‰ dintr-o cantitate de marfă se înțelege $\frac{7}{1\,000}$ din acea cantitate. De **exemplu:** 7‰ din 2 000 kg marfă înseamnă $\frac{7}{1\,000}$ din 2 000 kg marfă, adică 14 kg marfă.

Cînd spunem că o soluție are 6‰ sare înseamnă că în 1 000 kg de soluție sînt 6 kg sare.

Calculele se fac la fel ca la procente.

TITLUL UNUI ALIAJ

Să presupunem că într-un aliaj intră un metal prețios (aur, argint sau platină). Prin *titlul aliajului* înțelegem raportul dintre masa metalului prețios conținut de aliaj și masa aliajului.

Titlul aliajului $= \dfrac{\text{Masa metalului prețios}}{\text{Masa aliajului}}$. Scriem pe scurt $T = \dfrac{m}{M}$.

De aici deducem $m = T \cdot M$, iar $M = \dfrac{m}{T}$.

Să luăm următorul **exemplu.**

Un aliaj conține 812 g aur și 1 188 g cupru (aramă).

Masa metalului prețios este $m = 812$ g.

Masa aliajului este $M = 812 \text{ g} + 1\,188 \text{ g} = 2\,000$ g.

Titlul aliajului este $T = \dfrac{m}{M} = \dfrac{812 \text{ g}}{2\,000 \text{ g}} = \dfrac{406 \text{ g}}{1\,000 \text{ g}} = 0{,}406$.

Aceasta înseamnă că în 1 000 g aliaj sînt 406 g aur.

Probleme rezolvate

1) Titlul unui aliaj de aur cu aramă este 0,825. Știind că aliajul are masa de 400 g, să se afle masa metalului prețios.
Rezolvare. Știm că $m = T \cdot M$.
Deci $m = 0{,}825 \cdot 400 \text{ g} = 330$ g.

2) Un aliaj de aur și cupru cîntărește 20 g și are titlul 0,700. Cît aur curat trebuie să adăugăm pentru a obține un aliaj cu titlul 0,800?
Rezolvare. Trebuie să adăugăm x grame de aur curat. Obținem ecuația: $0{,}700 \cdot 20 + x = 0{,}800(x + 20)$. Obținem $x = 10$.
Deci trebuie adăugate 10 grame aur curat.

Problemă

Se consideră două aliaje de aur și cupru. Unul are titlul 0,800 și altul are titlul 0,400. Ce cantități din fiecare aliaj trebuie amestecate pentru a obține 1 kg aliaj cu titlul 0,600?

Dobînda.

C.E.C. plătește pentru anumite librete de economii 2,5 lei pe an pentru 100 lei depuși. Se mai spune că C.E.C. plătește dobînda de 2,5% pentru depuneri efectuate pentru acest tip de librete.

În acest caz dacă un elev depune la C.E.C. suma de 200 lei, el va primi la retragerea sumei, după un an, 205 lei. Dobînda este în acest caz de 5 lei.

Problemă rezolvată

C.E.C. dă dobîndă de 2,5%. Un elev depune suma de 250 lei. Ce dobîndă trebuie să primească elevul după un an?

Rezolvare. Calculăm 2,5% din 250 lei. Avem: $\dfrac{2{,}5}{100} \cdot 250 = 6{,}25$ (lei).

PROBLEME

1) Dintr-un grup de elevi, 30% sînt fete. Cît la sută din numărul elevilor sînt băieți?

2) Într-o uzină lucrează 1 200 muncitori. 70% din ei sînt tineri sub 25 ani. Cîți muncitori tineri cu vîrsta mai mică de 25 ani lucrează în uzină?

3) Pentru realizarea unei piese se consumau 40 kg de metal. Folosind metode înaintate în muncă s-a realizat o economie de 20% din cantitatea de metal ce era necesară realizării unei piese. Cîte kilograme de metal se economisesc astfel la 100 de piese de acest fel?

4) Să se calculeze 18% din 36 și 36% din 18. Să se compare rezultatele. Să se calculeze p% din a și a% din p. Să se compare rezultatele.

5) În trei zile s-au parcurs 240 km. În prima zi s-a parcurs 50% din drum, în a doua zi 20% din rest, iar în a treia zi restul. Cîți kilometri au fost parcurși în ziua a treia?

6) Un muncitor trebuia să facă după plan, într-o lună de zile, 240 piese de același fel. Planul a fost depășit cu 20%. Cîte piese a făcut muncitorul?

7) În clasă sînt 21 fete, ceea ce reprezintă 70% din toți elevii clasei. Cîți elevi sînt în clasă?

8) 40% din producția de grîu a unei cooperative agricole de producție este de 12 vagoane. Care este producția de grîu a cooperativei de producție?

9) Valoarea unei mașini după cinci ani de funcționare este egală cu 60% din valoarea pe care o avea cînd era nouă. Știind că mașina uzată costă 12 000 lei, să se calculeze cît a costat mașina nouă.

10) 2,5% dintr-o cantitate de cereale este de 5 t. Să se afle cantitatea de cereale în kg.

11) 2% din producția țării noastre de benzină pe anul 1987 a fost de 133 840 tone. Care a fost producția de benzină a țării noastre pe anul 1987?

12) Pentru a se obține din grîu făină, se pierde 20% din cantitatea de grîu. Din cît grîu putem obține 200 kg de făină?

13) La o primă sortare a legumelor, pierderile au fost de 6%. La a doua sortare pierderile au fost de 2% din cantitatea de legume rezultată din prima sortare. După a doua sortare au rămas 92,12 t legume. Cîte tone de legume au fost înainte de prima sortare?

14) Dintr-o cantitate de bumbac se obțin 24% fibre. Cît bumbac trebuie să se consume pentru a se obține 120 kg fibre?

15) Un elev a făcut în atelierul școlar într-o zi 4 piese de același fel, ceea ce reprezintă 10% din numărul de piese pe care trebuia să le facă. Cîte piese trebuia să facă?

16) Să se calculeze cantitatea de cafea neprăjită din care se obţin 700 g de cafea prăjită, ştiind că această cantitate de cafea prăjită reprezintă 70% din cantitatea de cafea neprăjită.

17) Cîtă materie primă este necesară pentru a obţine 4 t produse dacă 4% din materia primă se pierde la prelucrare?

18) În ce cantitate de apă trebuie dizolvate 400 g sare pentru a se obţine o soluţie cu o concentraţie de 4%?

19) Din 1 500 muncitori ai unei uzine, 450 sînt femei. Cît la sută reprezintă numărul femeilor din numărul muncitorilor?

20) Din 32 elevi ai unei clase, 8 elevi participă la cercul de matematică. Cît la sută din numărul elevilor participă la cercul de matematică?

21) Din 35 tone de minereu s-au obţinut 7 tone cupru. Cît la sută din minereu reprezintă cuprul?

22) Cantitatea de cărbune extras în 1965 în ţara noastră a fost de 12 095 mii tone, iar în anul 1987 de 55 699 mii tone. Cît la sută din cantitatea de cărbune extras în 1987 reprezintă cantitatea de cărbune extras în 1965?

23) Într-o soluţie de sare în apă care cîntăreşte 400 g sînt 20 g sare. Să se calculeze concentraţia soluţiei.

24) Un strungar a realizat într-o zi 60 piese, norma fiind de 50 piese. Cu cîte procente a depăşit norma?

25) Un tractorist a avut de arat, conform planului, 18 ha şi a arat 21,6 ha. Cu cîte procente a depăşit planul?

26) O cooperativă agricolă de producţie are 400 ha pămînt arabil. Pe 300 ha a cultivat grîu, pe 50 ha porumb şi pe restul orz. Cît la sută din întreaga suprafaţă arabilă reprezintă:

a) suprafaţa cultivată cu grîu?

b) suprafaţa cultivată cu porumb?

c) suprafaţa cultivată cu orz?

27) Betonul se prepară din: o parte ciment, 2 părţi nisip şi 6 părţi prundiş. Exprimaţi în procente părţile componente ale betonului.

28) Un teren are aria de 400 ha şi altul are aria de 200 m². Cît la sută din aria primului teren reprezintă aria celui de-al doilea?

29) Cu cît la sută se va mări lungimea unei sîrme, dacă luăm: a) Dublul lungimii ei? b) Întreitul lungimii ei?

30) O secţie a unei întreprinderi trebuia să producă, conform planului, într-un interval de timp, 2 400 piese. Secţia a realizat, în acest interval de timp, 2 880 piese de acelaşi fel. Cu cît la sută şi-a depăşit planul secţia?

31) Într-o uzină se execută 12 000 piese de acelaşi fel în trei etape. În prima etapă se execută 20% din numărul de piese, în a doua etapă 60% din numărul de piese realizate în prima etapă, iar în a treia etapă restul.

a) Cît la sută din producţie a fost realizată în etapa a doua?
b) Cît la sută din producţie a fost realizată în etapa a treia?
c) Cîte piese au fost executate în etapa a treia?

32) a) Cu cît la sută se măreşte aria unui pătrat dacă mărim latura pătratului cu 10% din aceasta?
b) Cu cît la sută se măreşte aria unui dreptunghi, dacă mărim lungimea cu 30% din ea şi lăţimea sa cu 20% din ea?

33) Mai mulţi elevi şi-au luat angajamentul să sădească 400 de puieţi. Ei au depăşit angajamentul cu 25%. Cîţi puieţi au sădit?

34) Se ştie că 40% dintr-un număr a este egal cu 20% din alt număr b. Să se afle raportul dintre a şi b.

35) Datorită folosirii unor îngrăşăminte, recolta de grîu a crescut cu 30%. Cîte tone de grîu s-au strîns după 800 ha, dacă pînă la folosirea îngrăşămintelor se recoltau 1 600 kg grîu la hectar?

36) Se ştie că 21% dintr-o cantitate de lapte este smîntînă, iar 23% dintr-o cantitate de smîntînă este unt. Să se afle din cîte kilograme de lapte se pot obţine 96,6 kg unt.

37) La o maşină nouă un muncitor face o piesă în 30 minute în loc de 45 minute, cît dura realizarea unei piese cu ajutorul unei maşini mai vechi. Cu cît la sută este mai mare numărul de piese pe care le face muncitorul într-un anumit interval de timp, la maşina nouă, faţă de numărul de piese pe care le făcea muncitorul, în acelaşi interval de timp la maşina veche?

38) C.E.C. plăteşte dobîndă de 2,5% pentru anumite librete. Să se afle ce sumă a depus la C.E.C. o persoană ştiind că după un an a primit o dobîndă de 50 lei.

39) Un strungar trebuie să facă după plan, într-o lună, 500 piese. El a făcut 575 piese. Cu cît la sută a îndeplinit planul? Cu cît la sută a depăşit planul?

40) Într-un depozit era o anumită cantitate de marfă. În prima săptămînă s-a vîndut 40% din cantitatea de marfă. În a doua săptămînă 50% din rest. Cît la sută din toată marfa din depozit s-a vîndut în a doua săptămînă?

41) Un automobil trebuia să parcurgă o anumită distanţă în 9 h. El a parcurs-o în 7 h 30 min. Cu cîte procente s-a micşorat durata? Cu cîte procente s-a mărit viteza automobilului?

42) Într-un depozit erau 1 200 tone marfă. În prima săptămînă s-au vîndut 40% din cantitatea de marfă, în a doua săptămînă 50% din rest şi în a treia săptămînă restul.

a) Cît la sută din toată marfa s-a vîndut în a doua săptămînă?
b) Dar în a treia săptămînă?
c) Cîte kilograme de marfă s-au vîndut în fiecare săptămînă?

43) Într-o bibliotecă sînt 8 000 cărți. Din ele 80% sînt în limba română. 30% din cărțile în limbi străine sînt în limba engleză. Cît la sută din cele 8 000 cărți sînt în limba engleză? Cîte cărți sînt în limba engleză?

44) În tabelul alăturat este ilustrată producția de oțel a țării noastre în anii 1938, 1965, 1987, în mii tone.

Anul	1938	1965	1987
Producția	284	3 426	13 885

a) Care a fost producția de oțel, în tone, a țării noastre în anul 1987?
b) De cîte ori este mai mare producția anului 1987 față de cea a anului 1938? Dar față de cea a anului 1965?
c) Cît la sută din producția anului 1987 este producția anului 1938?
d) Cu cît la sută este mai mare producția anului 1987 față de cea a anului 1965?

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

a) Într-o fabrică în care lucrează 1 200 muncitori, 60% sînt muncitori tineri. Cîți muncitori tineri lucrează în fabrică?
b) 75% din elevii unei școli, adică 600 elevi, participă la o manifestare sportivă. Cîți elevi are școala?
c) Cît la sută din 120 m reprezintă 24 m?

Capitolul IV

NUMERE INTREGI

1. NUMERE ÎNTREGI. MULȚIMEA DE NUMERE ÎNTREGI Z. REPREZENTAREA PE O DREAPTĂ

În manualul de matematică pentru clasa a V-a, numerele întregi au fost introduse în felul următor. S-a considerat o dreaptă (d), figura 1, pe care a fost fixat un punct O, numit *originea* coordonatelor. Pe aceeași dreaptă a mai fost fixat un punct I, diferit de punctul O. Pe dreapta (d) sensul de la punctul O la punctul I a fost numit *sensul pozitiv* al dreptei (d), iar sensul opus a fost numit *sensul negativ* al

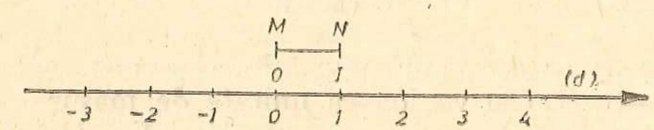


Fig. IV.1

dreptei (d). Începînd de la punctul O, cu un segment dat MN, numit *unitate de măsură*, am măsurat, atît în sensul pozitiv al dreptei (d), cît și în sensul negativ al aceleiași drepte, segmente ale căror lungimi sînt egale cu lungimea segmentului MN, cu de două ori lungimea segmentului MN ș.a.m.d. În dreptul originii O am pus numărul natural 0. Am pus 3 în dreptul extremității, diferite de O, a segmentului măsurat începînd de la punctul O, în sensul pozitiv al dreptei (d), a cărui lungime este de trei ori lungimea segmentului MN. Am pus -2 în dreptul extremității, diferite de O, a segmentului măsurat începînd de la punctul O, în sensul negativ al dreptei (d), a cărui lungime este de două ori lungimea segmentului MN.

Fiecărui număr natural a, diferit de 0, i-am asociat, deci, pe dreapta (d), un număr notat cu $-a$, prin punerea simbolului — (minus) în fața numărului natural a. Numărul $-a$ a fost pus în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat, începînd de la punctul O, în sensul negativ al dreptei (d), care segment satisface următoarele. Este de aceeași lungime cu segmentul măsurat, începînd tot de la punctul O, dar în sensul pozitiv al dreptei (d), astfel încît în dreptul extremității sale, diferite de punctul O, să fi fost pus numărul natural a.

Numerele notate cu $-a$, unde a este un număr natural diferit de zero, au fost numite *numere întregi negative*. Numerele naturale, diferite de zero, au fost numite *numere întregi pozitive*. Numărul natural 0 a fost numit și el număr întreg, fără a fi însă nici pozitiv și nici negativ. Mulțimea numerelor întregi este deci următoarea mulțime

$$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\},$$

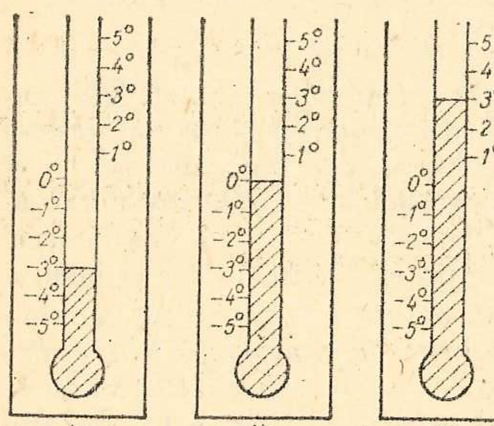
care a fost notată cu **Z**. Am pus în evidență și faptul că orice număr natural este un număr întreg adică $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, unde **N** este mulțimea numerelor naturale $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. Uneori numerele întregi pozitive se scriu cu semnul $+$ în față, ca, de exemplu, $+2$ în loc de 2.

Cu ajutorul numerelor întregi vom găsi soluții în mulțimea numerelor întregi ale unor ecuații, cum este ecuația $x + 7 = 2$, care nu au soluții în mulțimea numerelor naturale. Aceasta va fi posibil după definirea operațiilor cu numere întregi.

EXERCIȚII

1) Reprezentați pe o dreaptă punctele corespunzătoare numerelor: -5; 5; -3; 3. (Se va lua ca unitate de măsură centimetrul).

2) (Vezi fig. IV. 2). Termometrul din figura 2, ne indică temperatura de -3°C. Ce temperatură indică termometrul din figura 2, b? Dar cel din figura 2, c?



1a 1b 1c

Fig. IV.2

RELAȚIA DE EGALITATE ÎNTRE NUMERELE ÎNTREGI

Vom scrie

$$-3 = -3,$$

pentru a exprima că numărul întreg -3 este egal cu numărul întreg -3.

În general:

Două numere întregi a și b sînt egale dacă sînt numere naturale egale sau dacă sînt notate cu $-m$ și $-n$, unde m și n sînt numere naturale egale, diferite de zero.

Egalitatea între numerele întregi a și b se scrie

$$a = b$$

și se citește „*a este egal cu b*". Numărul întreg a se numește *primul membru* sau *membrul întîi* al egalității, iar numărul natural b se numește *membrul al doilea* al egalității.

Vom scrie

$$-4 \neq 7$$

pentru a exprima că numărul întreg -4 nu este egal cu numărul întreg 7 sau, altfel spus, că numărul întreg -4 este *diferit* de numărul întreg 7.

Dacă două numere întregi a și b nu sînt egale, se scrie

$$a \neq b$$

și se citește „*a nu este egal cu b*" sau „*a este diferit de b*".

Egalitatea între numere întregi este o *relație* între numere întregi și are următoarele proprietăți:

1) *Oricare ar fi numărul întreg a, avem*

$$a = a.$$

Aceasta este proprietatea de *reflexivitate a egalității* între numerele întregi, prin care se exprimă faptul că în ambii membri ai unei egalități poate figura același număr întreg.

2) *Oricare ar fi numerele întregi a și b, dacă $a = b$ atunci $b = a$.*

Aceasta este proprietatea de *simetrie a egalității* între numere întregi.

3) *Oricare ar fi numerele întregi a, b și c, dacă $a = b$ și $b = c$ atunci $a = c$.*

Aceasta este proprietatea de *tranzitivitate a egalității* între numere întregi.

Deoarece relația de egalitate între numere întregi are proprietățile de *reflexivitate*, *simetrie* și *tranzitivitate*, se spune că relația de egalitate între numere întregi este o *relație de echivalență*.

2. VALOAREA ABSOLUTĂ A UNUI NUMĂR ÎNTREG (MODUL)

Orice număr întreg negativ este notat prin $-a$, unde a este un număr natural diferit de zero. Acest număr a, diferit de zero, îl vom numi *valoarea absolută* sau *modulul* numărului întreg negativ $-a$.

Valoarea absolută a oricărui număr natural a, care poate fi un număr întreg pozitiv sau 0 (zero), este numărul natural a.

Valoarea absolută sau *modulul* unui număr întreg a îl vom nota prin $|a|$.

Exemple:

$$|-2| = 2, \quad |3| = 3, \quad |0| = 0.$$

Valoarea absolută sau *modulul* unui număr întreg negativ a îl vom nota și prin $-a$.

Exemplu. Fie $a = -5$. Atunci $-(-5) = 5$, deoarece $|-5| = 5$.

Definiția *valorii absolute* sau a *modulului* unui număr întreg poate fi dată, deci, sub forma

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a \text{ este un număr întreg pozitiv sau zero;} \\ -a, \text{ dacă } a \text{ este un număr întreg negativ.} \end{cases}$$

Valoarea absolută $|a|$ a unui număr întreg a are următoarele *proprietăți:*

1) $|a| \geqslant 0$.

Exemple. $|3| = 3$, deci $|3| \geqslant 0$; $|-2| = 2$, deci $|-2| \geqslant 0$.

2) $|-a| = |a|$.

Exemple. $|-5| = |-5|$, deoarece $|-5| = 5$, $|5| = 5$; $|-(-8)| = |-8|$, deoarece $|-(-8)| = 8$ și avem $|-(-8)| = 8, |-8| = 8$.

EXERCIȚII

1) Să se efectueze: a) $|-4| + |-2|$;
b) $|5| + |-4| + |0| + |-245|$.

2) Să se completeze tabelul alăturat. Primul rînd este completat ca model.

a	$\|a\|$
-5	5
0	
7	
-8	
-200	
200	
48	
-49	

3) În cele ce urmează, înlocuiți semnul ? cu unul din semnele $>$; $=$; $<$, astfel încît să se obțină propoziții adevărate:

a) $|9|$? 0; b) $|-9|$? 0; c) $|0|$? 0;
d) 0 ? $|-5|$; e) $|8|$? $|-8|$; f) $|5|$? 5;
g) $|-7|$? $|-3|$; h) $|7|$? $|3|$; i) $|-9|$? $|-7|$

4) Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziții:

a) $|3| = |-3|$; b) $|-2| > |-3|$;
c) $|-7| < |-7|$; d) $|4| > |-3|$.

3. ADUNAREA NUMERELOR ÎNTREGI

Fiind date două numere întregi, de exemplu 2 și -3, vom înțelege prin *suma* numerelor întregi 2 și -3, care se numesc *termenii* sumei, un număr întreg, notat cu $2 + (-3)$, pe care-l obținem în modul arătat în figura 3. În această figură, numerele 2 și -3 sînt puse în evidență, pe axa numerelor, prin săgeți, care pornesc din dreptul numărului 0 și au vîrfurile în dreptul numărului 2, respectiv al numărului -3. O săgeată de același fel cu săgeata care indică numărul -3,

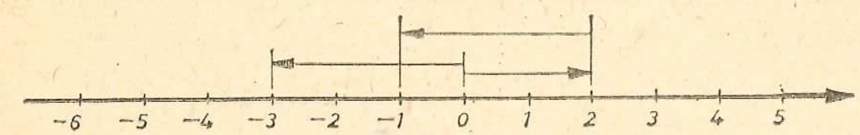


Fig. IV.3

așezată începînd din vîrful săgeții care indică numărul 2, are vîrful în dreptul numărului întreg -1. Spunem că numărul întreg -1 s-a obținut prin *adunarea* numerelor întregi 2 și -3, sau că $2 + (-3)$, ceea ce se citește „doi plus minus trei“, este -1 și scriem aceasta astfel:

$$2 + (-3) = -1.$$

În figura 4 este arătat cum se obține suma numerelor întregi -3 și 2, care se va scrie sub forma $(-3) + 2$ sau, mai simplu, sub forma $-3 + 2$. Din figura 4 rezultă că $-3 + 2 = -1$. De data aceasta, o săgeată de același fel cu săgeata care indică numărul 2, așezată

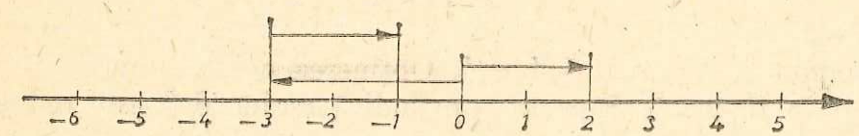


Fig. IV.4

începînd din vîrful săgeții care indică numărul -3, are vîrful în dreptul numărului -1.

Suma a două numere întregi a și b se notează cu $a + b$. Pentru a arăta că numărul întreg c este suma numerelor întregi a și b, se scrie

$$a + b = c.$$

Vom proceda ca mai înainte la aflarea sumei a două numere întregi a și b, oricare ar fi aceste numere întregi.

Pentru a nu ne referi de fiecare dată la cîte o figură de felul celor de mai înainte, atunci cînd se pune problema adunării a două numere întregi a și b, vom formula cîte o *definiție* pentru obținerea sumei numerelor întregi a și b, în fiecare caz care se poate prezenta.

Cazul 1. Numerele întregi a și b sînt numere naturale.

Suma a două numere întregi a și b, care sînt numere naturale, este numărul întreg c, care este suma numerelor naturale a și b.

Exemplul 1. Avem $2 + 3 = 5$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 5. O săgeată, de același fel cu săgeata care indică numărul 3, așezată începînd din vîrful săgeții care indică numărul 2, are vîrful în dreptul numărului 5, care este, deci, suma numerelor 2 și 3.

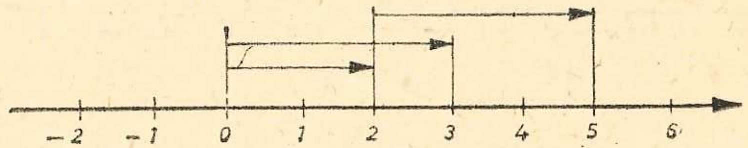


Fig. IV.5

Exemplul 2. Avem $4 + 0 = 4$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 6. Săgeata care indică numărul 0 este redusă la un punct. De aceea, acest punct, așezat în vîrful săgeții care indică numărul 4, indică suma numerelor întregi 4 și 0.

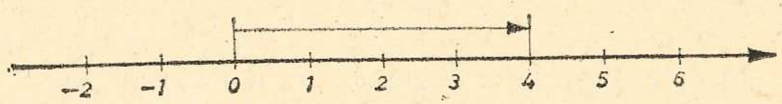


Fig. IV.6

Exemplul 3. Avem $0 + 4 = 4$. Obținerea acestei sume este ilustrată tot în figura 5. Săgeata care indică numărul 0 este redusă la un punct. De aceea, săgeata care indică numărul 4, așezată începînd din punctul care indică numărul 0, are vîrful în punctul 4, care este deci suma numerelor întregi 0 și 4.

Cazul 2. Numerele întregi a și b sînt numere întregi negative.

Suma a două numere întregi negative a și b este numărul întreg $c = -d$, *unde* $d = |a| + |b|$.

Exemplu. Avem $-2 + (-3) = -5$. Într-adevăr, $|2| = 2$, $|-3| = 3$ și $2 + 3 = 5$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 7.

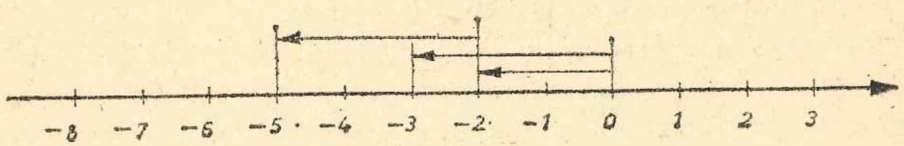


Fig. IV.7

Cazul 3. Unul din numerele întregi a și b este *număr natural*, iar celălalt este număr *întreg negativ*.

Suma a două numere întregi a și b, din care unul este număr natural, iar celălalt este număr întreg negativ este numărul întreg c care se obține astfel:

Dacă $|a| = |b|$, *atunci* $c = 0$. *Dacă* $|a| \neq |b|$, *fie d diferența dintre modulul mai mare și modulul mai mic. Avem* $c = d$ *dacă numărul cu modulul mai mare este număr natural. Avem* $c = -d$ *dacă numărul cu modulul mai mare este număr întreg negativ.*

Exemplul 1. Fie $-5 + 3$. Avem $|-5| = 5$ și $|3| = 3$. Numărul natural 5 este mai mare decît numărul natural 3. Deoarece $5 - 3$ este 2, iar -5 este număr întreg negativ, avem $-5 + 3 = -2$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 8.

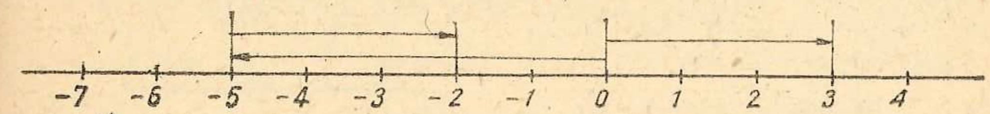


Fig. IV.8

Exemplul 2. Fie $-5 + 5$. Avem $|-5| = 5$, $|5| = 5$ și $|-5| = |5|$. Deci $-5 + 5 = 0$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 9.

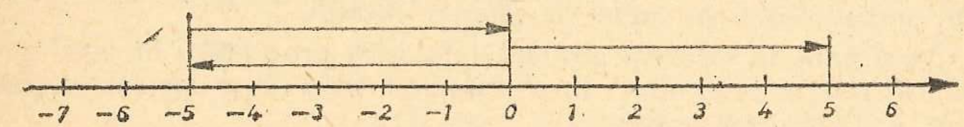


Fig. IV.9

Exemplul 3. Fie $-5 + 8$. Avem $|-5| = 5$, $|8| = 8$ și $|-5| < |8|$. Deoarece $8 - 5$ este 3, iar 8 este număr natura, avem $-5 + 8 = 3$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 10.

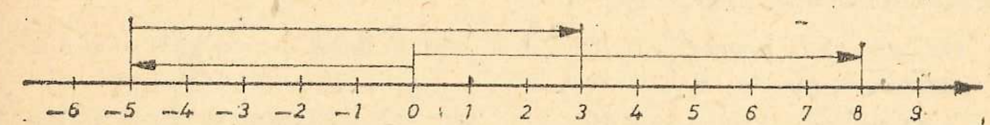


Fig. IV.10

Exemplul 4. Fie $3 + (-5)$. Avem $|3| = 3$, $|-5| = 5$ și $|3| < |-5|$. Deoarece $5 - 3$ este 2, iar -5 este număr întreg negativ, avem $3 + (-5) = -2$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 11.

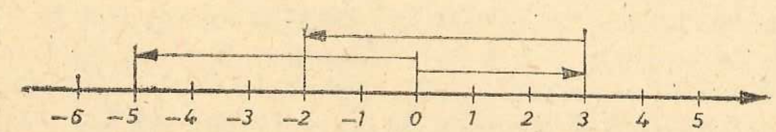


Fig. IV.11

Exemplul 5. Fie $5 + (-5)$. Avem $|5| = 5$, $|-5| = 5$ și $|5| = |-5|$. Deci $5 + (-5) = 0$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 12.

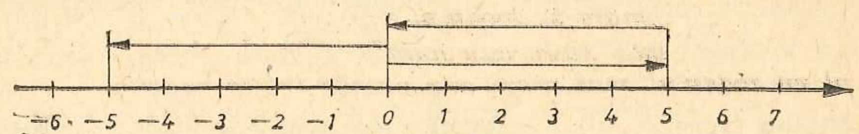


Fig. IV.12

Exemplul 6. Fie $8 + (-5)$. Avem $|8| = 8$, $|-5| = 5$ și $|8| > |-5|$. Deoarece $8 - 5$ este 3, iar 8 este număr natural, avem $8 + (-5) = 3$. Obținerea acestei sume este ilustrată în figura 13.

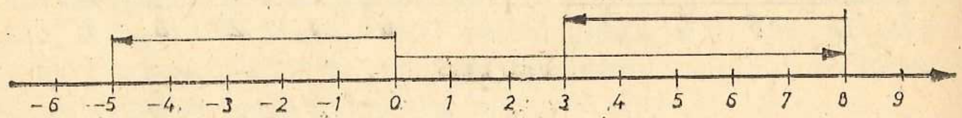


Fig. IV.13

În loc de aflarea sau obținerea unei sume de numere întregi vom mai spune *efectuarea* sumei de numere întregi.

Vom pune în evidență următoarele două proprietăți în care intervin atît relația de egalitate între numere întregi cît și operația de adunare a numerelor întregi:

Oricare ar fi numerele întregi a, b și c, dacă $a = b$ *atunci* $a + c = b + c$.

Altfel spus, dacă adunăm același număr întreg cu numerele întregi, care sînt cei doi membri ai unei egalități între numere întregi, obținem numere întregi egale.

Oricare ar fi numerele întregi a, b, c și d, dacă $a = b$ *și* $c = d$ *atunci* $a + c = b + d$.

Altfel spus, prin adunarea membru cu membru a două egalități între numere întregi obținem o egalitate între numere întregi.

EXERCIȚII

1) Să se efectueze:

a) $4 + 3$; b) $1 + 5$; c) $6 + 0$; d) $17 + 0$; e) $0 + 9$; f) $0 + 2$;
g) $-2 + (-6)$; h) $-4 + (-7)$; i) $-6 + 2$; j) $-7 + 1$;
k) $-7 + 7$; l) $-14 + 14$; m) $-6 + 8$; n) $-5 + 7$; o) $4 + (-6)$;
p) $5 + (-7)$; r) $7 + (-7)$; s) $15 + (-15)$; t) $7 + (-5)$;
u) $10 + (-4)$; v) $-9 + 0$; w) $-16 + 0$; x) $0 + (-15)$; y) $0 + (-9)$.

2) Să se efectueze:

a) $24 + 76$; b) $-14 + (-8)$; c) $21 + 0$; d) $-24 + 0$;
e) $0 + (-36)$; f) $-80 + 20$; g) $-100 + 100$; h) $-16 + 32$;
i) $24 + (-31)$; j) $19 + (-19)$; k) $27 + (-13)$;
l) $245 + (-621)$; m) $1000 + (-101)$.

3) Să se efectueze:

a) $14 + 16$; b) $-14 + (-12)$; c) $14 + (-3)$;
d) $2 + (-18)$; e) $-13 + (-13)$; f) $13 + (-13)$;
g) $-18 + 9$; h) $-16 + 16$; i) $-21 + 34$.

4) Să presupunem că într-un an la data de 1 decembrie orele 7 s-a înregistrat temperatura de −1°C. La data de 6 decembrie orele 7 temperatura era cu 2°C mai mare decît temperatura înregistrată pe data de 1 decembrie orele 7.

Ce temperatură s-a înregistrat pe data de 6 decembrie orele 7?

4. COMUTATIVITATE, ASOCIATIVITATE, ELEMENT NEUTRU

Fie două numere întregi -5 și 7. Avem $-5 + 7 = 2$. Avem și $7 + (-5) = 2$.

Deci

$$-5 + 7 = 7 + (-5).$$

O astfel de proprietate este adevărată oricare ar fi *perechea de numere întregi* considerate. Această proprietate a adunării numerelor întregi se numește *comutativitatea adunării* numerelor întregi și se enunță:

Oricare ar fi numerele întregi a și b avem

$$a + b = b + a.$$

Pentru a pune în evidență o altă proprietate a adunării numerelor întregi, observăm următoarele. Orice număr întreg obținut ca sumă a două numere întregi poate fi folosit ca termen al unei sume de două numere întregi.

Exemplu. Putem aduna pe $-7 + 2$ cu -5. Scriem în acest caz

$$(-7 + 2) + (-5)$$

și avem $(-7 + 2) + (-5) = -5 + (-5) = -10$, deci $(-7 + 2) + (-5) = -10$. Observăm, între altele, că la determinarea numărului întreg exprimat prin suma $(-7 + 2) + (-5)$ am folosit tranzitivitatea egalității între numere întregi, deoarece scrierea
$(-7 + 2) + (-5) = -5 + (-5) = -10$ este o prescurtare a scrierii
$(-7 + 2) + (-5) = -5 + (-5)$, $-5 + (-5) = -10$.

În mod analog, putem scrie o sumă de forma

$$-7 + [2 + (-5)],$$

care este un număr întreg, ce se obține astfel

$$-7 + [2 + (-5)] = -7 + (-3) = -10.$$

Deci $(-7 + 2) + (-5) = -10$ și $-7 + [2 + (-5)] = -10$. Utilizînd simetria egalității între numere întregi, din $-7 + [2 + (-5)] = -10$ obținem $-10 = -7 + [2 + (-5)]$. Apoi din $(-7 + 2) + (-5) = -10$ și $-10 = -7 + [2 + (-5)]$, cu ajutorul tranzitivității egalității între numere întregi, obținem

$$(-7 + 2) + (-5) = -7 + [2 + (-5)].$$

O astfel de proprietate este adevărată și pentru alte trei numere întregi, oricare ar fi ele. Această proprietate a adunării numerelor întregi se numește *asociativitatea adunării* numerelor întregi și se enunță:

Oricare ar fi numerele întregi a, b și c avem

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Din această cauză, vom conveni ca prin $a + b + c$ să înțelegem ori $(a + b) + c$ ori $a + (b + c)$. Deci în loc de $(-7 + 2) + (-5)$ vom scrie $-7 + 2 + (-5)$ și, de asemenea, în loc de $-7 + [2 + (-5)]$ vom scrie tot $-7 + 2 + (-5)$.

Observăm că:

$5 + 0 = 5$, $0 + 5 = 5$, $0 + 0 = 0$, $-3 + 0 = -3$, $0 + (-3) = -3$.

Această proprietate exprimă faptul că numărul întreg 0 este *element neutru* pentru adunarea numerelor întregi, și se enunță:

Oricare ar fi numărul întreg a avem

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

Să se efectueze:

1) $2 + 3$; **2)** $-9 + (-5)$; **3)** $-4 + 2$; **4)** $5 + (-7)$, **5)** $-4 + 8$; **6)** $9 + (-1)$; **7)** $4 + (-4)$; **8)** $-5 + 5$; **9)** $6 + 0$; **10)** $0 + 6$; **11)** $0 + 0$; **12)** $-7 + 0$; **13)** $0 + (-7)$.

5. OPUSUL UNUI NUMĂR ÎNTREG. OPUSUL UNEI SUME

Să considerăm axa numerelor, figura 14 și să ne fixăm atenția asupra numerelor întregi 4 și -4. Aceste numere sînt egal depărtate de originea coordonatelor. Se spune că punctele cărora le corespund

numerele întregi 4 respectiv -4 sînt *simetrice* față de originea coordonatelor. De asemenea, se spune că -4 este *opusul* lui 4, iar 4 este *opusul* lui -4.

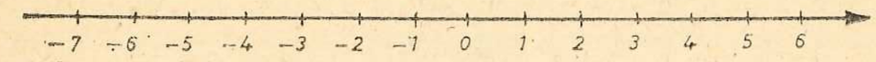


Fig. IV.14

Definiție.

Opusul unui număr întreg pozitiv a este numărul întreg negativ $-a$.
Opusul unui număr întreg negativ $-a$ este numărul întreg pozitiv a.
Numărul întreg 0 are ca opus numărul întreg 0.

Observație. Opusul unui număr întreg a, se notează prin $-a$.

Deci dacă $a = 4$, atunci $-a = -4$. Dacă $a = -4$, atunci $-a = 4$. Dacă $a = 0$, atunci $-a = 0$. În cazul în care $a = -4$, egalitatea $-a = 4$ se mai scrie $-(-4) = 4$. Deci $-(-4)$ este opusul numărului întreg -4. Tot astfel, dacă $a = 0$, atunci $-a = 0$ se mai scrie $-0 = 0$. Deci -0 este opusul numărului întreg 0.

Se constată că

$$4 + (-4) = 0, \qquad -4 + 4 = 0.$$

În general:

Suma dintre un număr întreg și opusul său este egală cu 0, adică

$$a + (-a) = 0.$$

Să determinăm, acum, opusul sumei $3 + (-5)$ cu ajutorul opușilor termenilor 3 și -5 ai acestei sume. Să notăm

$$a = 3 + (-5).$$

Știm că

$$a + (-a) = 0,$$

deci, adunînd, mai întîi, pe $-a$ la ambii membri ai egalității $a = 3 + (-5)$ obținem $0 = 3 + (-5) + (-a)$ sau, datorită simetriei relației de egalitate între numere întregi, $3 + (-5) + (-a) = 0$. Adunînd, apoi, pe -3, opusul lui 3, la ambii membri ai egalității $3 + (-5) + (-a) = 0$ obținem $-3 + 3 + (-5) + (-a) = -3$ sau $(-5) + (-a) = -3$, deoarece $-3 + 3 = 0$. Adunînd, în sfîrșit, pe 5, sau $-(-5)$, opusul lui -5, la ambii membri ai egalității $(-5) + (-a) = -3$, obținem $5 + (-5) + (-a) = 5 + (-3)$ sau $-a = [-(-5)] + (-3)$, deoarece $5 + (-5) = 0$.

Am ajuns la concluzia că opusul sumei $3 + (-5)$ este suma $(-3) + [-(-5)]$, deoarece $[-(-5)] + (-3) = (-3) + [-(-5)]$; datorită comutativității adunării numerelor întregi.

În general:

Dacă $a = b + c$, atunci $-a = -b + (-c)$.

Adică, *opusul unei sume este suma opușilor termenilor sumei.*

EXERCIȚII

Să se adune: a) 5 cu opusul său; b) -4 cu opusul său.

6. SCĂDEREA

În egalitatea

$$-5 + 3 = -2,$$

prin care se definește suma numerelor întregi -5 și 3, putem pune în evidență oricare din termeni în felul următor:

$$-2 - (-5) = 3; \quad -2 - 3 = -5.$$

Spunem că 3 este *diferența* între -2 și -5 obținută prin scăderea lui -5 din -2. Pe -2 îl numim *descăzut*, iar pe -5 *scăzător*. Analog, -5 este diferența între *descăzutul* -2 și *scăzătorul* 3.

În general:

Dacă a și b sînt două numere întregi, diferența între a și b, notată prin $a - b$, este acel număr întreg c pentru care $a = b + c$.

Se scrie

$$c = a - b$$

și se citește „c este egal cu a minus b".

Utilizînd noțiunea de opus al unui număr întreg, vom arăta cum se obține diferența dintre două numere întregi.

Avînd egalitatea

$$-5 + 3 = -2$$

să adunăm în ambii membri ai acestei egalități numărul întreg -3, opusul lui 3. Avem

$$(-5 + 3) + (-3) = -2 + (-3),$$

sau, avînd în vedere că $(-5 + 3) + (-3) = -5 + [3 + (-3)] = -5 + 0 = -5$, avem

$$-5 = -2 + (-3).$$

Dar $-2 - 3 = -5$, conform definiției scăderii unui număr întreg dintr-un număr întreg, avînd $-5 + 3 = -2$ Deci

$$-2 - 3 = -2 + (-3).$$

Analog,

$$-2 - (-5) = -2 + 5.$$

În general:

Oricare ar fi numerele întregi a și b, avem

$$a - b = a + (-b).$$

Adică, diferența $a - b$ între două numere întregi a și b este egală cu suma $a + (-b)$ dintre numărul întreg a și opusul $-b$ al numărului întreg b.

Vom spune că *efectuăm* diferența $a - b$ atunci cînd determinăm numărul întreg care este diferența între numerele întregi a și b.

Exemplu. Să se efectueze diferența $2 - 3$. Avem

$$2 - 3 = 2 + (-3) = -1,$$

deoarece numărul natural 3, care este valoarea absolută a numărului întreg negativ -3, este mai mare decît numărul natural 2, iar $3 - 2 = 1$.

Trebuie reținut că, *operația* de scădere între două numere *întregi* se poate efectua oricare ar fi aceste numere întregi.

Avem

$$7 - 0 = 7, \quad -5 - 0 = -5.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: diferența între orice număr întreg și 0 este acel număr întreg, adică

Oricare ar fi numărul întreg a avem:

$$a - 0 = a.$$

Avem

$$0 - 2 = -2, \quad 0 - (-3) = 3.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: diferența între 0 și orice număr întreg este opusul acelui număr întreg, adică

Oricare ar fi numărul întreg a avem

$$0 - a = -a.$$

Vom pune în evidență următoarele două proprietăți în care intervin relația de egalitate între numere întregi și operația de scădere între numere întregi:

Oricare ar fi numerele întregi a, b și c, dacă $a = b$ atunci $a - c = b - c$.

Altfel spus, dacă scădem același număr întreg din numerele întregi, care sînt cei doi membri ai unei egalități, între numere întregi obținem numere întregi egale.

Oricare ar fi numerele întregi a, b, c și d, dacă $a = b$ și $c = d$ atunci *$a - c = b - d$.*

Altfel spus, prin scăderea membru cu membru a două egalități între numere întregi obținem o egalitate între numere întregi.

1) Să se efectueze:

a) $7-2$; b) $6-3$; c) $-5-(-4)$; d) $-7-(-3)$; e) $-6-(-9)$; f) $-7-(-10)$; g) $-2-6$; h) $-4-5$; i) $-10-(-10)$; j) $-11-(-11)$; k) $7-(-9)$; l) $8-(-10)$; m) $-10-3$; n) $-7-4$; o) $4-8$; p) $9-11$; r) $8-8$; s) $11-11$; ș) $-10-(-10)$; t) $-17-(-17)$; ț) $7-0$; u) $0-8$; v) $0-(-15)$.

2) Să se efectueze:

a) $15-2$; b) $-14-(-6)$; c) $-20-(-28)$; d) $-17-18$; e) $-18-(-18)$; f) $16-(-18)$; g) $-18-3$; h) $21-26$; i) $8-8$.

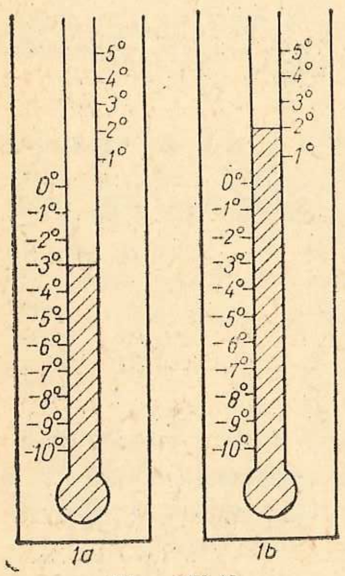


Fig. IV.15

3) a) $-24-(-24)$; b) $37-(-24)$ c) $-48-(-36)$; d) $-64-(-102)$; e) $0-(-75)$; f) $425-1504$.

4) După cum se vede în fig. IV.15 termometrul din figura 1*a* indică temperatura de $-3°C$, iar termometrul din figura 1*b* indică temperatura de $2°C$. Temperatura indicată de termometrul reprezentat în figura 1*a* este mai mare sau mai mică decît temperatura indicată de termometrul reprezentat în figura 1*b*? Cu cîte grade?

5) La un moment dat se înregistrează temperatura de $-3°C$. După un interval de timp se înregistrează temperatura de $+4°C$. Temperatura a crescut sau a scăzut? Cu cîte grade?

6) Să se completeze următorul tabel. Primul rînd este completat ca model.

a	$-a$	$\|a\|$	$1+a$	$1-a$
2	-2	2	3	-1
3				
0				
-4				
-305				

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

Să se efectueze:

1) $5-2$; 2) $2-5$; 3) $5-(-4)$; 4) $2-(-6)$; 5) $-2-(-4)$; 6) $-4-(-3)$; 7) $5-5$; 8) $-5-(-5)$; 9) $5-(-5)$; 10) $6-0$; 11) $-7-0$; 12) $0-7$.

Pentru simplificarea scrierii, în loc de $(-3)+2$ se scrie $-3+2$. Analog, în loc de $(-2)-3$ se scrie $-2-3$. Suma $-5+(-3)$ poate fi scrisă ca diferență: $-5-3$. Datorită proprietății de asociativitate a adunării numerelor întregi, în loc de $[3+(-5)]+(-2)$ sau în loc de $3+[(-5)+(-2)]$ se scrie $3+(-5)+(-2)$. Analog, în loc de $(3-5)+(-2)$ sau în loc de $3+[-5+(-2)]$ se scrie $3-5+(-2)$.

În exemplele de mai înainte, între parantezele puse în evidență, pe care, apoi, le-am suprimat, se află o expresie formată dintr-un termen sau din termeni despărțiți prin simbolurile + sau −, iar în fața parantezei de deschidere se află simbolul + sau în fața parantezei de deschidere nu se află nici un simbol.

În acest caz, *desfacerea parantezelor* constă în următoarele:

Se suprimă paranteza de deschidere și paranteza de închidere ce-i corespunde, expresia aflată între aceste paranteze rămînînd neschimbată. În cazul în care în fața parantezei de deschidere se află simbolul +, acesta se suprimă dacă primul simbol al primului termen al expresiei aflate între paranteze este simbolul −. Altfel, acest simbol + se păstrează.

Exemplul 1. Prin desfacerea parantezelor drepte, expresia $[8+(-6)]+(-2)$ devine $8+(-6)+(-2)$. În fața parantezei drepte de deschidere nu se află simbolul +.

Exemplul 2. Prin desfacerea parantezelor drepte, expresia $8+[-6+(-2)]$ devine $8-6+(-2)$. Am suprimat simbolul + din fața parantezei drepte de deschidere, deoarece primul simbol al termenului -6, care este primul termen al expresiei aflate între parantezele drepte, este simbolul −.

Exemplul 3. Prin desfacerea parantezelor rotunde, expresia $3+(5-2)$ devine $3+5-2$. Am păstrat simbolul + din fața parantezei rotunde de deschidere, deoarece primul simbol al termenului 5, care este primul termen al expresiei aflate între parantezele rotunde, nu este simbolul −.

Să considerăm, acum, cazul suprimării unei perechi de paranteze între care se află o expresie formată din termeni despărțiți prin simbolurile + sau −, iar în fața parantezei de deschidere se află simbolul −.

În loc de $-(-9)$ scriem 9. În loc de $4-(6+3)$ scriem $4-6-3$, iar în loc de $-(8-3)$ scriem $-8+3$. Am ținut seama de modul în care se exprimă opusul unui număr întreg, opusul sumei a două numere întregi și opusul diferenței a două numere întregi.

În exemplele de mai înainte, între parantezele puse în evidență, pe care, apoi, le-am suprimat, se află o expresie formată dintr-un termen sau din termeni despărțiți prin simbolurile + sau −, iar în fața parantezei de deschidere se află simbolul −.

În acest caz, *desfacerea parantezelor* constă în următoarele:

Se suprimă paranteza de deschidere și paranteza de închidere ce-i corespunde, iar în expresia aflată între aceste paranteze fiecare simbol +, *ce desparte doi termeni, se înlocuiește cu simbolul* —, *iar fiecare simbol* —, *ce desparte doi termeni, se înlocuiește cu simbolul* +. *Simbolul* — *din fața parantezei de deschidere se suprimă dacă primul simbol al primului termen al expresiei aflate între paranteze este simbolul* —, *suprimîndu-se și acest simbol* —. *În locul lor se scrie simbolul* +, *în cazul în care simbolul* + *are rol de simbol de adunare. Altfel, simbolul* — *din fața parantezei de deschidere se păstrează.*

Exemplul 1. Prin desfacerea parantezelor drepte, expresia $-2-[-5+(-3)]$ devine $-2+5-(-3)$. Primul simbol al termenului -5, care este primul termen al expresiei aflate între parantezele drepte, fiind simbolul —, se suprimă acest simbol — împreună cu simbolul — din fața parantezei drepte de deschidere și în locul lor se pune simbolul +, care are rol de simbol de adunare.

Exemplul 2. Prin desfacerea parantezelor rotunde, expresia $-(-5-3)$ devine $5+3$. Primul simbol al termenului -5, care este primul termen al expresiei aflate între parantezele rotunde, fiind simbolul —, se suprimă acest simbol — împreună cu simbolul — din fața parantezei rotunde de deschidere. Cele două simboluri — suprimate nu se înlocuiesc cu simbolul +, pentru că acest simbol + n-ar avea rol de simbol de adunare.

Exemplul 3. Prin desfacerea parantezelor rotunde, expresia $-2-(3-5)$ devine $-2-3+5$. Am păstrat simbolul — din fața parantezei rotunde deoarece primul simbol al termenului 3, care este primul termen al expresiei aflate între paranteze rotunde, nu este simbolul —.

EXERCIȚII

1) Să se desfacă toate parantezele. Să se efectueze calculele:

a) $4+(-2)+(-4)$; b) $5+(-4)+(-6)+9$; c) $7+(-6)+(-1)+8+(-8)$; d) $-8-(-6)-(-2)$; e) $-5+(-7)-(-4)-(-4)$; f) $3+(-2)+(-4+3)$; g) $-4+(-2+3)-(-5+7-9+1)$; h) $-50+14+(-7)$; i) $40-(65-84)$; j) $-7+(-21)+(-15+13)-(-19+2-15)$; k) $-94-17+42+(-70+81-1)$; l) $77-204+(245-475)-(41-242-156)$.

2) Să se desfacă toate parantezele. Să se efectueze calculele:

a) $17+(-2)-(-4)$; b) $16-(-4)-8-(-9)-24$; c) $7-(2-4)$; d) $-6-[2+(-8)-1]$; e) $5-\{2-[1-(-2)]\}-6$; f) $-400-[-245+(195-6100)]$.

7. RELAȚIILE: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ ÎNTRE NUMERE ÎNTREGI

Fie o pereche de numere întregi, de exemplu, -2 și 3. Deoarece

$$3=-2+5,$$

iar 5 este un număr întreg pozitiv, se spune că „3 este mai mare decît -2“ și se scrie aceasta astfel

$$3>-2.$$

În loc de $3>-2$ se mai scrie $-2<3$, ceea ce se citește „-2 este mai mic decît 3“.

În general:

Un număr întreg a este mai mare decît un număr întreg b, ceea ce se scrie

$$a>b,$$

dacă există un număr întreg pozitiv c astfel încît

$$a=b+c.$$

Vom scrie și $b<a$ și vom citi aceasta „b este mai mic decît a“ dacă $a>b$. Simbolurile $>$, $<$ se numesc *simboluri de inegalitate strictă*.

Pe axa numerelor, din două numere întregi, cel mai mare se află la dreapta celui mai mic. Înțelegem, prin aceasta, că trecerea, pe axa numerelor, de la numărul mai mic la numărul mai mare se face parcurgînd axa numerelor în sens pozitiv. De exemplu, 5 este mai mare decît -2 și se constată pe figura 16 că 5 este la dreapta lui -2. Analog, putem spune că, pe axa numerelor, din două numere întregi, cel mai mic se află la stînga celui mai mare. Înțelegem prin aceasta, că trecerea, pe axa numerelor de la numărul mai mare la numărul mai mic se face parcurgînd axa numerelor în sens negativ. De exemplu, -2 este mai mic decît 5 și se constată pe figura 16 că -2 este la stînga lui 5.

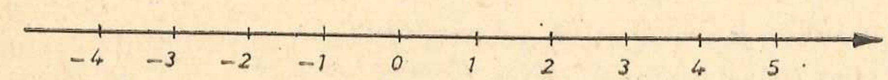


Fig. IV.16

Avem $-2<1$, $-1<1$, $0<1$, dar $1=1$. Dacă notăm cu a oricare din numerele întregi $-2, -1, 0, 1$, avem $a<1$ sau $a=1$. În loc de a scrie „$a<1$ sau $a=1$“ vom scrie $a\leq 1$, ceea ce se citește „*a este mai mic sau egal cu* 1“.

În general, fiind date două numere întregi a și b pentru a indica faptul că a < b sau a = b scriem

$$a \leq b,$$

ceea ce se citește „a este mai mic sau egal cu b“ sau „a este cel mult egal cu b“. Inegalitatea $a \leq b$ se numește *inegalitate nestrictă* între a și b.

Analog, fiind date două numere întregi a și b pentru a indica faptul că a > b sau a = b scriem

$$a \geq b,$$

ceea ce se citește „a este mai mare sau egal cu b“ sau „a este cel puțin egal cu b“. Inegalitatea $a \geq b$ se numește tot *inegalitate nestrictă* între a și b.

O proprietate a valorii absolute a unui număr întreg, exprimată cu ajutorul inegalității nestricte între numere întregi, este următoarea:

$|a| \geq a$.

Exemple. $|13| = 13$, deci $|13| \geq 13$; $|-21| = 21$, deci $|-21| > -21$, prin urmare $|-21| \geq -21$.

Aplicație.

Avem

$$5 = 0 + 5, \quad 1 = 0 + 1, \quad 11 = 0 + 11.$$

Deoarece 5, 1, 11 sînt numere întregi pozitive, avem

$$5 > 0, \; 1 > 0, \; 11 > 0.$$

Am obținut următoarea proprietate:

Oricare ar fi numărul întreg pozitiv a avem

$$a > 0.$$

Avem

$$0 = (-8) + 8, \; 0 = (-2) + 2; \; 0 = (-19) + 19.$$

Deoarece 8, 2, 19 sînt numere întregi pozitive, avem

$$0 > -8, \; 0 > -2, \; 0 > -19.$$

Am obținut următoarea proprietate:

Oricare ar fi numărul întreg negativ a avem

$$a < 0.$$

Definiția *valorii absolute* sau a *modulului* unui număr întreg poate fi dată, deci, sub forma:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0; \\ -a, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

EXERCIȚII

1) Reprezentați pe o dreaptă numerele: -4; 0; 4; -2; 1. (Folosiți ca unitate de măsură 1 cm.)
2) Se consideră 6 numere întregi consecutive. Cel mai mare dintre ele este 3. Care sînt celelalte numere?
3) Se consideră 7 numere întregi consecutive. Numai 4 dintre ele sînt mai mici decît zero. Care sînt numerele?
4) Înlocuiți în cele ce urmează semnul ? cu unul din semnele: $>$; $=$; $<$ astfel încît să obțineți propoziții adevărate:
   a) 4 ? 0; b) -4 ? 0; c) -4 ? 4; d) -2 ? 1; e) 0 ? -200; f) -200 ? -201; g) 21 ? $-2\,121$; h) $|10|$? 0; i) $|-11|$? 0; j) $|0|$? 0; k) $|9|$? 9; l) $|-9|$? -9; m) $|5|$? $|-5|$.
5) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ avem:
   $|2| + |0| - |-2| + |-a| - |a| = 0.$
6) Să se efectueze:
   a) $\{-1; 2\} \cap \{x \mid x \in \mathbf{Z}, |x| \geq 0\}$;
   b) $\{-3; 4\} \cap \{x \mid x \in \mathbf{Z}, |x| < 0\}$.
7) Să se reprezinte fiecare dintre următoarele mulțimi, enumerînd elementele sale:
   a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \; |x| < 4\}$;
   b) $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \; x < 4, \; |x| = x\}$;
   c) $C = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \; x > -5, \; |x| = -x\}$;
   d) $D = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \; |x| > 2, \; -5 < x < 5\}$.

8. ÎNMULȚIREA

Fiind date două numere întregi, de exemplu, 4 și 3, vom înțelege prin *produsul* numerelor întregi 4 și 3, care se numesc *factorii* produsului, un număr întreg, notat cu 4×3 sau $4 \cdot 3$. Acesta se obține ținînd seama că numerele întregi 4 și 3 sînt numere naturale și efectuînd produsul lor, așa cum a fost definit el în manualul de matematică pentru clasa a V-a. Deci

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Spunem că numărul întreg 12 s-a obținut prin *înmulțirea* numerelor întregi 4 și 3 sau că $4 \cdot 3$, ceea ce se citește „patru ori trei“, este 12 și scriem aceasta astfel

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Numerele întregi fiind pozitive sau negative sau egale cu zero, vom da cîte o *definiție* pentru obținerea produsului numerelor întregi a și b în fiecare caz ce se poate prezenta.

Cazul 1. Numerele întregi a și b sînt numere naturale.

Produsul a două numere întregi a și b, care sînt numere naturale, este numărul întreg c, care este produsul numerelor naturale a și b.

Exemple.

$$4 \cdot 3 = 12, \qquad 4 \cdot 0 = 0, \qquad 4 \cdot 1 = 4.$$

Cazul 2. Numerele întregi a și b sînt numere întregi negative.

Produsul a două numere întregi negative a și b este numărul întreg pozitiv $c = |a| \cdot |b|$.

Exemplu.

$$(-4) \cdot (-3) = 12,$$

deoarece $|-4| = 4$, $|-3| = 3$ și $4 \cdot 3 = 12$.

Cazul 3. Unul din numerele întregi a și b este număr natural, iar celălalt este număr întreg negativ.

Produsul a două numere întregi a și b din care unul este număr natural, iar celălalt este număr întreg negativ este numărul întreg c care se obține astfel:

Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $c = 0$. În caz contrar $c = -|a| \cdot |b|$.

Exemplul 1. Avem

$$4 \cdot (-3) = -12,$$

deoarece $|-3| = 3$ și $4 \cdot 3 = 12$.

Exemplul 2. Avem

$$|-4| \cdot 3 = -12,$$

deoarece $|-4| = 4$ și $4 \cdot 3 = 12$.

Exemplul 3. Avem

$$0 \cdot (-3) = 0,$$

deoarece primul factor este zero.

Exemplul 4. Avem

$$(-4) \cdot 0 = 0,$$

deoarece al doilea factor este zero.

Trebuie reținut că:

Oricare ar fi numărul întreg a avem

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Se observă că:

$(-2) \cdot (-1) = 2$, $(-1) \cdot (-2) = 2$, $4 \cdot (-1) = -4$, $(-1) \cdot 4 = -4$.

Rezultă proprietatea care arată că, produsul oricărui număr întreg cu -1 este *opusul* acelui număr întreg, adică:

Oricare ar fi numărul întreg a avem

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a.$$

În loc de aflarea sau obținerea unui produs de numere întregi vom mai spune *efectuarea* produsului de numere întregi.

Vom pune în evidență următoarele două proprietăți în care intervin relația de egalitate între numere întregi și operația de înmulțire a numerelor întregi.

Oricare ar fi numerele întregi a, b și c, dacă $a = b$ *atunci* $a \cdot c = b \cdot c$.

Altfel spus, dacă numerele întregi, care sînt cei doi membri ai unei egalități între numere întregi, le înmulțim cu același număr întreg, obținem numere întregi egale.

Oricare ar fi numerele întregi a, b, c și d, dacă $a = b$ *și* $c = d$ atunci $a \cdot c = b \cdot d$.

Altfel spus, prin înmulțirea membru cu membru a două egalități între numere întregi, obținem o egalitate între numere întregi.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

1) $4 \cdot 5$; **2)** $(-4) \cdot (-5)$; **3)** $-3 \cdot (-2)$; **4)** $2 \cdot (-3)$; **5)** $0 \cdot 9$; **6)** $(-8) \cdot 0$; **7)** $0 \cdot (-5)$; **8)** $8 \cdot 1$; **9)** $1 \cdot 9$; **10)** $(-8) \cdot 1$; **11)** $1 \cdot (-7)$; **12)** $6 \cdot (-1)$; **13)** $(-1) \cdot 6$; **14)** $(-9) \cdot (-1)$; **15)** $(-1) \cdot 0$; **16)** $(-24) \cdot (-32)$.

9. COMUTATIVITATE, ASOCIATIVITATE, DISTRIBUTIVITATEA ÎNMULȚIRII FAȚĂ DE ADUNARE ȘI SCĂDERE. ELEMENT NEUTRU

Fie două numere întregi -5 și 7. Avem $(-5) \cdot 7 = -35$, deoarece $|-5| = 5$ și $5 \cdot 7 = 35$. Avem și $7 \cdot (-5) = -35$, deoarece $|-5| = 5$ și $7 \cdot 5 = 35$. Deci

$$(-5) \cdot 7 = 7 \cdot (-5).$$

O astfel de proprietate este adevărată oricare ar fi *perechea de numere întregi* considerate. Această proprietate a înmulțirii numerelor întregi se numește *comutativitatea înmulțirii* numerelor întregi și se enunță:

Oricare ar fi numerele întregi a și b avem

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Pentru a pune în evidență o altă proprietate a înmulțirii numerelor întregi observăm următoarele. Orice număr întreg obținut ca produs a două numere întregi poate fi utilizat ca factor al unui produs de două numere întregi.

Exemplu. Putem înmulți $(-7)\cdot 2$ cu -5. Scriem în acest caz

$$[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)$$

și avem $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)=(-14)\cdot(-5)=70$, deci $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)=70$. Observăm, între altele, că la determinarea numărului întreg exprimat de produsul $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)$ am folosit tranzitivitatea egalității între numere întregi, deoarece scrierea $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)=(-14)\cdot(-5)=70$ este o prescurtare a scrierii $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)=(-14)\cdot(-5)$, $(-14)\cdot(-5)=70$.

În mod analog, putem scrie un produs de forma

$$(-7)\cdot[2\cdot(-5)],$$

care este un număr întreg, ce se obține astfel

$$(-7)\cdot[2\cdot(-5)]=(-7)\cdot(-10)=70.$$

Deci $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)=70$ și $(-7)\cdot[2\cdot(-5)]=70$. Utilizînd simetria egalității între numere întregi, din $(-7)\cdot[2\cdot(-5)]=70$ obținem $70=(-7)\cdot[2\cdot(-5)]$. Apoi, din $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)=70$ și $70=(-7)\cdot[2\cdot(-5)]$, cu ajutorul tranzitivității egalității între numere întregi, obținem

$$[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)=(-7)\cdot[2\cdot(-5)].$$

O astfel de proprietate este adevărată și pentru alte trei numere întregi, oricare ar fi ele. Această proprietate a înmulțirii numerelor întregi se numește *asociativitatea înmulțirii* numerelor întregi și se enunță:

Oricare ar fi numerele întregi, a, b, c avem

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Din această cauză, vom conveni ca prin $a\cdot b\cdot c$ să înțelegem ori $(a\cdot b)\cdot c$ ori $a\cdot(b\cdot c)$. Deci în loc de $[(-7)\cdot 2]\cdot(-5)$ vom scrie $(-7)\cdot 2\cdot(-5)$ și, de asemenea, în loc de $(-7)\cdot[2\cdot(-5)]$ vom scrie tot $(-7)\cdot 2\cdot(-5)$.

Pentru trei numere întregi -2; 7; -11 avem

$$(-2)\cdot[7+(-11)]=(-2)\cdot(-4)=8,$$
$$(-2)\cdot 7+(-2)\cdot(-11)=-14+22=8.$$

Deducem că

$$(-2)\cdot[7+(-11)]=(-2)\cdot 7+(-2)\cdot(-11).$$

O astfel de proprietate este adevărată și pentru alte trei numere întregi, oricare ar fi ele. Această proprietate, în care intervin atît operația de adunare a numerelor întregi cît și cea de înmulțire a numerelor întregi, se numește *distributivitatea înmulțirii față de adunare* și se enunță:

Oricare ar fi numerele întregi a, b și c avem

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Este adevărată și proprietatea care se numește *distributivitatea înmulțirii față de scădere*, care se enunță:

Oricare ar fi numerele întregi a, b și c avem

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

Într-adevăr, a, b, c fiind numere întregi, datorită distributivității înmulțirii față de adunare avem

$$a\cdot[(b-c)+c]=a\cdot(b-c)+a\cdot c.$$

Dar $(b-c)+c=[b+(-c)]+c=b+[(-c)+c]=b+0=b$. Deci

$$a\cdot b=a\cdot(b-c)+a\cdot c,$$

ceea ce, conform definiției scăderii a două numere întregi, se scrie

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

Exemplu.

$$(-2)\cdot[7-(-11)]=(-2)\cdot 18=-36,$$
$$(-2)\cdot 7-(-2)\cdot(-11)=-14-22=-36,$$

deci

$$(-2)\cdot[7-(-11)]=(-2)\cdot 7-(-2)\cdot(-11).$$

Observăm că:

$$5\cdot 1=5,\quad 1\cdot 5=5,\quad (-3)\cdot 1=(-3),\quad 1\cdot(-3)=(-3).$$

Această proprietate exprimă faptul că numărul întreg 1 este *element neutru* la înmulțirea numerelor întregi și se enunță:

Oricare ar fi numărul întreg a avem

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

EXERCIȚII

Efectuați:

a) $6\cdot(-27)\cdot 7$; b) $(-4)\cdot 8\cdot 0$; c) $34\cdot(-10)\cdot 1$; d) $(-11)\cdot 1\cdot 0$
e) $(-4)\cdot(-32)\cdot(-10)$; f) $(-8)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-1)$;
g) $(-10)\cdot[2-(2+4)]$; h) $(-10)\cdot\{1+2\cdot[1-(-2)\cdot(-3)]\}$;
i) $(-100)\cdot\{[1+102\cdot(1-106)]\cdot 2+1\}$.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

Efectuați:

1) $2\cdot 5$; **2)** $(-2)\cdot(-5)$; **3)** $2\cdot(-3)$; **4)** $(-4)\cdot 3$; **5)** $0\cdot 7$; **6)** $(-7)\cdot 0$; **7)** $0\cdot(-8)$; **8)** $5-1$; **9)** $1\cdot 9$; **10)** $1\cdot(-5)$; **11)** $-7\cdot 1$; **12)** $9\cdot(-1)$; **13)** $(-8)\cdot(-1)$; **14)** $(-1)\cdot 6$; **15)** $1\cdot(-1)$; **16)** $0\cdot(-1)$; **17)** $7\cdot(-5)\cdot(-2)\cdot 0\cdot(-7)$; **18)** $2+3\cdot(-4)$.

10. ÎMPĂRȚIREA

În egalitatea

$$(-2)\cdot 7 = -14,$$

prin care se definește produsul numerelor întregi -2 și 7, putem pune în evidență oricare din factori astfel

$$(-14) : 7 = -2; \qquad (-14) : (-2) = 7.$$

Spunem că -2 este *cîtul* între -14 și 7 obținut prin împărțirea lui -14 la 7. Pe -14 îl numim *deîmpărțit*, iar pe 7 *împărțitor*. Analog, 7 este *cîtul* împărțirii *deîmpărțitului* -14 la *împărțitorul* -2. În cazul în care se găsește un număr întreg, dar numai unul singur, care să fie cîtul împărțirii între două numere întregi, spunem că, împărțirea se poate efectua între cele două numere întregi.

Nu putem împărți un număr întreg cu 0. În adevăr, ca să aibă sens $(-2) : 0$ trebuie să existe un număr întreg a astfel încît

$$a\cdot 0 = -2,$$

ceea ce nu se poate, deoarece $a\cdot 0 = 0$. Nu are sens nici $0 : 0$, deoarece sînt mai multe numere întregi, de exemplu, 3, -11, astfel încît $3\cdot 0 = 0$, $(-11)\cdot 0 = 0$.

În general:

Dacă a și b sînt două numere întregi astfel încît $b \neq 0$, cîtul între a și b, notat prin $a : b$, este acel număr întreg c, în cazul în care el există, pentru care $a = b\cdot c$.

Se scrie

$$c = a : b$$

și se citește „c este egal cu a împărțit la b".

Vom spune că *efectuăm* cîtul $a : b$ atunci cînd determinăm numărul întreg care este cîtul între numerele întregi a și b.

Avem

$$3 : 1 = 3, \quad (-8) : 1 = -8.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între orice număr întreg și 1 este acel număr întreg, adică

Oricare ar fi numărul întreg a avem

$$a : 1 = a.$$

Avem

$$2 : (-1) = -2, \quad (-5) : (-1) = 5.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între orice număr întreg și (-1) este opusul acelui număr întreg, adică

Oricare ar fi numărul întreg a avem

$$a : (-1) = -a.$$

Avem

$$0 : (-2) = 0.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între 0 și orice număr întreg, diferit de zero, este 0, adică,

Oricare ar fi numărul întreg a, diferit de zero, avem

$$0 : a = 0.$$

Vom pune în evidență următoarele proprietăți în care intervin relația de egalitate între numere întregi și operația de împărțire între numere întregi.

Oricare ar fi numerele întregi a, b și c astfel încît $a = b$, $c \neq 0$ și împărțirile se pot efectua între a și c pe de o parte și între b și c pe de altă parte, atunci $a : c = b : c$.

Altfel spus, prin împărțirea cu un număr întreg a ambilor membri ai unei egalități între numere întregi, atunci cînd împărțirile se pot efectua, obținem o egalitate între numere întregi.

Oricare ar fi numerele întregi a, b, c și d astfel încît $a = b$, $c = d$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ și împărțirile se pot efectua între a și c pe de o parte și între b și d pe de altă parte, atunci $a : c = b : d$.

Altfel spus, prin împărțirea membru cu membru a două egalități între numere întregi, atunci cînd împărțirile se pot efectua, obținem o egalitate între numere întregi.

EXERCIȚII

1) Efectuați:

a) $6 : 3$; b) $(-10) : (-2)$; c) $6 : (-2)$; d) $(-10) : 2$; e) $0 : 5$; f) $24 : (-12)$; g) $(-36) : (-18)$; h) $2\,880 : (-24)$; i) $0 : (-9)$.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază.

Efectuați:

1) $4 : 2$; **2)** $(-9) : (-3)$; **3)** $(-6) : 2$; **4)** $10 : (-2)$; **5)** $6 : 1$; **6)** $(-7) : 1$; **7)** $8 : (-1)$; **8)** $(-8) : (-1)$; **9)** $0 : 8$; **10)** $0 : (-9)$; **11)** $4 + 4 : (-2)$.

EXERCIȚII REZOLVATE

1) Efectuați:

$$4 + 6 : (-3)$$

Rezolvare.

$$4 + 6 : (-3) = 4 + (-2) = 2.$$

2) Efectuați:

$$10\cdot[-7+3\cdot(2+9:3)]$$

Rezolvare.

$$10\cdot[-7+3\cdot(2+9:3)]=10\cdot(-7+3\cdot 5)=10\cdot 8=80.$$

3) Efectuați:

$$2\cdot\{-9+2\cdot[-4+4\cdot(-2+10:2)]+4\}.$$

Rezolvare.

$$2\cdot\{-9+2\cdot[-4+4\cdot(-2+10:2)]+4\}=2\cdot[-9+2\cdot(-4+4\cdot 3)+4]=2\cdot(-9+2\cdot 8+4)=2\cdot 11=22.$$

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $48:3$; b) $(-60):(-6)$; c) $80:(-4)$; d) $(-60):10$;
e) $(-9\,400):(-100)$; f) $(-2\,400):(-10)$;
g) $(-10)\cdot[4+4\cdot(10+10:5)]$;
h) $10\cdot\{-4+5[-2+2\cdot(4+4:2)]\}$.

11. FACTOR COMUN

În membrul al doilea al egalității

$$(-2)\cdot[7+(-11)]=(-2)\cdot 7+(-2)\cdot(-11),$$

-2 apare atît în produsul $(-2)\cdot 7$, cît și în produsul $(-2)\cdot(-11)$. Spunem că -2 este *factor comun* în produsele $(-2)\cdot 7$ și $(-2)\cdot(-11)$. În membrul întîi al egalității

$$(-2)\cdot[7+(-11)]=(-2)\cdot 7+(-2)\cdot(-11),$$

-2 apare o singură dată înmulțit cu suma celorlalți factori ai produselor $(-2)\cdot 7$ și $(-2)\cdot(-11)$. Se spune că -2 este *scos în factor comun*. La scoaterea în factor comun, egalitatea de mai sus o scriem astfel

$$(-2)\cdot 7+(-2)\cdot(-11)=(-2)\cdot[7+(-11)].$$

EXERCIȚII

1) Să se efectueze calculele folosind scoaterea în factor comun:
a) $77\,777\cdot 196+77\,777\cdot(-96)$;
b) $954\cdot 1\,097+954\cdot(-97)$;
c) $99\,999\cdot(-24)+99\,999\cdot 96+99\,999\cdot(-72)$.

2) Știind că $ab+ac=8$ și că $b+c=-4$ să se calculeze a.

12. DIVIZORII UNUI NUMĂR ÎNTREG

Fie numerele întregi -21 și 7. Există numărul întreg -3 astfel încît înmulțindu-l cu 7 să obținem pe -21. Spunem că, numărul întreg 7 *divide* numărul întreg -21 și scriem $7\mid -21$. În cazul numerelor întregi 15 și -5, există numărul întreg -3 astfel încît înmulțindu-l cu -5 să obținem 15. Spunem că numărul întreg -5 divide numărul întreg 15 și scriem $-5\mid 15$. De asemenea, se spune că, 15 *este divizibil* cu -5. Se mai spune că, 15 *se divide* cu -5.

Numărul întreg -5 se numește *divizor* al numărului întreg 15. Numărul întreg 15 se numește *multiplu* al numărului întreg -5.

Definiție. *Un număr întreg a este divizibil cu un număr întreg b dacă există un număr întreg c astfel încît $a=b\cdot c$.*

Se scrie $b\mid a$ și se mai citește „b divide pe a“ sau „a se divide cu b“.

Numărul întreg -7 nu este divizibil cu numărul întreg -2, pentru că nu există nici un număr întreg astfel încît înmulțindu-l cu -2 să obținem -7. Scriem $-2\nmid -7$ și citim „-2 nu divide pe -7“.

Divizorii lui 6 sînt: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Divizorii lui -5 sînt $1, -1, 5, -5$. Divizorii lui 7 sînt $1, -1, 7, -7$.

Dacă a este număr natural, numărul $2a$ este un multiplu de a. De asemenea, el este un multiplu de 2. Mai spunem că numărul $2a$ este divizibil cu 2 sau numărul $2a$ este divizibil cu a.

Dacă a și b sînt numere întregi spunem, de asemenea, că numărul $2a+2b$ este divizibil cu 2. Într-adevăr, putem scrie $2a+2b=2(a+b)$, iar $2(a+b)$ este un număr divizibil cu 2.

Un număr întreg par este de forma $2k$ unde $k\in\mathbf{Z}$, iar un număr întreg impar este de forma $2k+1$ sau $2k-1$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Orice număr întreg este de una din formele:

$$3k,\ 3k+1,\ \ 3k+2\ (k\in\mathbf{Z}).$$

k	$3k-1$	$3k$	$3k+1$
-2	-7	-6	-5
-1	-4	-3	-2
0	-1	0	1
1	2	3	4

Mai putem spune că orice număr întreg este de una din formele: $3k-1$, $3k$, $3k+1$, unde $k\in\mathbf{Z}$.

Urmărind tabelul alăturat, vedem cum s-au obținut numerele întregi mai mari decît -8 și mai mici decît 5.

Numerele $-7, -4, -1, 2$ sînt de forma $3k-1$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Numerele $-6, -3, 0, 3$ sînt de forma $3k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Numerele $-5, -2, 1, 4$ sînt de forma $3k+1$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Orice număr întreg este de una din formele $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$. Mai putem spune că orice număr întreg este de una din formele

$$4k-1, 4k, 4k+1, 4k+2.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Care sînt numerele naturale de forma $3k+1$ $(k \in N)$ mai mici decît 20?

Rezolvare. Facem un tabel. Înlocuim pe rînd în $3k+1$ pe k cu 0, 1, ş.a.m.d.

k	0	1	2	3	4	5	6
$3k+1$	1	4	7	10	13	16	19

Deci numerele de forma $3k+1$ $(k \in N)$ mai mici decît 20 sînt: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19.

2. Să se arate că numerele de forma $\overline{abba}$, scrise în baza 10, se divid cu 11.

Rezolvare. Putem scrie:

$$\overline{abba} = 1\,000a + 100b + 10b + a = \\ = 1\,001a + 110b = 11(91a + 10b).$$

Deci numerele de forma $\overline{abba}$ scrise în baza 10 se divid cu 11.

3. Să se arate că numerele de forma $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$, unde $n \in N$, sînt numere divizibile cu 7.

Rezolvare. $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n = 2^n(2^2 + 2 + 1) = 2^n \cdot 7$. Numerele de această formă sînt deci divizibile cu 7.

EXERCIŢII

1) Care sînt divizorii numărului -8? Dar ai numărului 8?

2) Care este cel mai mic număr întreg de patru cifre divizibil cu 5? (Numărul este scris în baza 10.)

3) Care este cel mai mare număr natural de forma $\overline{abba}$ $(a \neq b)$?

4) Care este cel mai mic număr întreg de trei cifre divizibil cu 18?

5) Să se arate că orice număr de forma $4n+2$, unde $n \in N$, este divizibil cu 2.

6) Să se arate că produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

7) Să se afle valoarea de adevăr a propoziţiei: „Pentru orice număr natural n numărul $n^2 + 3n + 1$ este prim".

8*) Demonstraţi că nu există pătrate perfecte de forma $5n+3$ cu $n \in N$ (D. Pompeiu).*

13. PUTEREA CU EXPONENT NUMĂR NATURAL A UNUI NUMĂR ÎNTREG

Fie numărul întreg -2. Înmulţindu-l pe -2 cu el însuşi obţinem $(-2)\cdot(-2)$. În loc de $(-2)\cdot(-2)$ vom scrie $(-2)^2$. Vom spune că $(-2)^2$ este *pătratul lui* -2 sau *puterea a doua* a lui -2. Vom mai spune că $(-2)^2$ se obţine prin *ridicarea lui* -2 *la puterea a doua*. Înmulţindu-l pe $(-2)^2$ cu -2 obţinem $(-2)^2\cdot(-2)$, ceea ce se mai poate scrie $[(-2)\cdot(-2)]\cdot(-2)$ sau $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$. Acest produs îl vom nota cu $(-2)^3$ şi-l vom numi *cubul* lui -2 sau *puterea a treia* a lui -2. Vom spune că $(-2)^3$ se obţine prin *ridicarea lui* -2 *la puterea a treia*.

Vom spune că $(-2)^0$ este 1 şi că $(-2)^1$ este -2.

Fiind dată o putere a lui -2, obţinem o altă putere a lui -2 făcînd produsul între acea putere a lui -2 şi -2.

Exemplu. $(-2)^5 = (-2)^4\cdot(-2)$. Tot astfel $(-2)^4 = (-2)^3\cdot(-2)$. Deci $(-2)^5 = [(-2)^3\cdot(-2)]\cdot(-2)$ sau $(-2)^5 = (-2)^3\cdot(-2)\cdot(-2)$. Am văzut că $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$. Deci

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{5 \text{ factori}}.$$

Fie numărul întreg 3. Puterea a doua a lui 3 este $3^2 = 3\cdot 3$. Puterea a treia a lui 3 este $3^3 = 3^2\cdot 3 = (3\cdot 3)\cdot 3 = 3\cdot 3\cdot 3$. Puterea a patra a lui 3 este $3^4 = 3^3\cdot 3 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$. Vom spune că 3^0 este 1 şi că 3^1 este 3.

În cazul numărului întreg 0, nu se defineşte 0^0, dar $0^1 = 0$, $0^2 = 0\cdot 0 = 0$ ş.a.m.d.

În general:

Dacă a este un număr întreg şi n un număr natural astfel încît $n \neq 0$ şi $n \neq 1$, atunci

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ factori}}.$$

Apoi $a^1 = a$, iar dacă $a \neq 0$, atunci $a^0 = 1$.

Numărul întreg a se numeşte *bază*, iar numărul natural n se numeşte *exponent*. a^n se citeşte „puterea a n-a a lui a". Astfel a^4 este puterea a patra a lui a.

* Dimitrie Pompeiu (1873—1954) — matematician român.

14. ÎNMULȚIREA DE PUTERI CU ACEEAȘI BAZĂ

Avem

$$(-3)^3 \cdot (-3)^2 = \underbrace{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}_{3\ \text{factori}} \cdot \underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{2\ \text{factori}} =$$

$$= \underbrace{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}_{5\ \text{factori}} = (-3)^5 = (-3)^{3+2}.$$

În general:

Dacă a este un număr întreg, iar m și n sînt numere naturale, atunci

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Deci

Produsul puterilor cu aceeași bază este o putere a aceleiași baze iar exponentul este suma exponenților factorilor.

15. PUTEREA UNEI PUTERI

Avem

$$[(-3)^2]^3 = (-3)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^2 = (-3)^{2+2} \cdot (-3)^2 =$$
$$= (-3)^{2+2+2} = (-3)^{2\cdot 3}.$$

În general:

Dacă a este un număr întreg, iar m și n sînt numere naturale, atunci

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}.$$

Deci

Puterea unui număr întreg se ridică la o putere păstrînd baza puterii acelui număr întreg și luînd ca exponent produsul exponenților.

16. PUTEREA UNUI PRODUS

Putem scrie

$$[(-2)\cdot 3]^2 = [(-2)\cdot 3]\cdot[(-2)\cdot 3] = [(-2)\cdot(-2)]\cdot(3\cdot 3) =$$
$$= (-2)^2 \cdot 3^2.$$

Asemănător,

$$[2^3\cdot(-3)\cdot 5]^2 = [2^3\cdot(-3)\cdot 5]\cdot[2^3\cdot(-3)\cdot 5] =$$
$$= (2^3\cdot 2^3)\cdot[(-3)\cdot(-3)]\cdot(5\cdot 5) = 2^{3\cdot 2}\cdot(-3)^2\cdot 5^2 = 2^6\cdot(-3)^2\cdot 5^2.$$

În general:

Un produs de numere întregi se ridică la o putere ridicînd fiecare factor la acea putere și înmulțind puterile obținute.

17. ÎMPĂRȚIREA DE PUTERI CU ACEEAȘI BAZĂ

Să efectuăm împărțirea $(-2)^5 : (-2)^2$. A împărți pe $(-2)^5$ la $(-2)^2$ înseamnă a găsi un număr întreg astfel încît dacă-l înmulțim cu $(-2)^2$ să obținem $(-2)^5$. Acest număr întreg este $(-2)^3$, deoarece $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^5$. Dar

$$(-2)^3 = (-2)^{5-2},$$

deci

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2}.$$

În general:

Dacă a este un număr întreg diferit de 0, iar m și n sînt numere naturale astfel încît $m \geq n$, atunci $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Deci

Cîtul puterilor cu aceeași bază, diferită de 0 (exponentul deîmpărțitului fiind cel puțin egal cu exponentul împărțitorului), este o putere a aceleiași baze, iar exponentul este diferența între exponentul deîmpărțitului și exponentul împărțitorului.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $2^2 + 5$; b) $2^3 - 3$; c) $(-2)^2 - 7$; d) $(-2)^3 + 8$; e) $2^2 \cdot 2^3 - 30$; f) $3^7 : 3^5 + 1$; g) $(2^2)^{10} : 2^{18}$; h) $2^3 \cdot 2^{100} + (-2)^{103}$; i) $2^{1001} : 2^{999}$; j) $(-2)^{2001} : (-2)^{1998}$; k) $[(-2)^4]^{10} - [(-2)^2]^{20}$; l) $(2^{20} \cdot 3^{50})^{20} - (2^{40} \cdot 3^{100})^{10}$; m) $1 : 2^0$; n) $5 \cdot 4^0$; o) $5^0 + 0^5$.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

I. Să se efectueze:

1) $3^2 + 1$; **2)** $2^3 - 7$; **3)** $(-3)^2 - 7$; **4)** $(-2)^3 + 5$; **5)** $10^3 - 999$; **6)** $(-12)^2 : 144$; **7)** $2 \cdot 2^4 \cdot 2^{50} + (-2)^{55}$; **8)** $(-2)\cdot(-2)^{20}\cdot(-2)^{30} + 2^{51}$; **9)** $2^{25} : 2^{23}$; **10)** $(-3)^{25} : (-3)^{23}$; **11)** $(2^3)^{21} : (+2)^{63}$; **12)** $(3^3)^2 : (-3)^6$; **13)** $0^4 + 1^{30}$; **14)** $0^7 \cdot 1^{35}$; **15)** $0^5 + (-1)^{30} + (-1)^{99}$.

II. Să se efectueze:

1) $4 + (-6 + 2)$; **2)** $-5 - (-4 + 3)$; **3)** $-6 + (-8 + 4) - (-9 + 2 - 5)$; **4)** $5 - [2 - (-4 + 1)]$; **5)** $6 + 7 \cdot (-2)$; **6)** $10 \cdot [5 + 4 : (-2)]$; **7)** $10 \cdot \{2^2 + 2 \cdot [4 - (-4 + 2 \cdot 3)] + 5\}$; **8)** $11 \cdot [-45 + 23 \cdot (-451 + 240 : 10) + (-15)^3]$.

1) Să se calculeze:

a) $1 + 3$; b) $2 + 4$; c) $-2 + (-3)$; d) $-5 + (-7)$; e) $5 + (-7)$; f) $-5 + 7$; g) $-8 + 9$; h) $6 - 6$; i) $-7 + 7$; j) $-6 - 6$; k) $-7 - 7$; l) $-6 - (-4)$; m) $-5 - (-2)$; n) $-7 - (-4)$; o) $-8 - (-20)$; p) $-9 - (-23)$; r) $2 + 0$; s) $0 - 2$; t) $5 + 0$; u) $0 + 5$; v) $0 - 4$; w) $4 - 0$; x) $-1 + 7$; y) $1 - 8$.

2) Să se calculeze:

a) $-4 + (-6) - (-2)$; b) $7 + (-2) - (-3) + 7$;
c) $9 + (-1) - (-7) + (-15)$; d) $8 - (-8) + (-16)$;
e) $6 - (-6) + (-7) + (-8)$;
f) $8 - 2 + (-5) - (-4) + (-6) - (-6) + (-10) - (-1)$;
g) $7 - (-6 + 2) + (-8 - 9 + 9) - (-8 + 2)$;
h) $2 + (-5 + 12) - (-7 + 1 - 10 + 25)$.

3) Să se completeze tabelul

a	b	$-a$	$-b$	$a + b$	$-a - b$	$a - b$	$b - a$
2	−3						
4	−2						
−5	2						
−1	4						
0	−2						
−3	0						
−5	5						
6	−6						
0	0						
1	1						
−1	1						
1	−1						

4) Să se scrie următoarele numere în ordine crescătoare:

a) -5; 2; 0; -7; -1; 6; b) -10; 1; -9; 5; -3; 4; 0; c) -8; 9; -4; 1; -5; 4; 0; -7.

5) Să se reprezinte fiecare din următoarele mulțimi scriind elementele sale între acolade:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ -1 \leq x < 4\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ -3 \leq x < 0\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ -3 \leq x \leq 3\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ -2 \leq x < 1\}$.

6) Să se efectueze:

a) $2 \cdot 3$; b) $4 \cdot 10$; c) $(-2) \cdot (-3)$; d) $(-4) \cdot (-5)$; e) $(-3) \cdot (-2)$; f) $7 \cdot (-2)$; g) $8 \cdot (-3)$; h) $(-4) \cdot 2$; i) $(-7) \cdot 2$; j) $4 \cdot 0$; k) $(-4) \cdot 0$; l) $(-5) \cdot 0$; m) $(-3) \cdot (-1)$; n) $(-3) \cdot 1$; o) $(-3) \cdot (-7) \cdot (-10) \cdot (-20)$; p) $(-4) \cdot (-3) \cdot (-7)$; r) $2 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 4 \cdot (-10)$; s) $(-2 + 4 - 3) \cdot (7 - 5 + 8 - 2 - 7)$.

7) Să se completeze tabelul:

a	b	c	ab	ac	bc	abc	$a + 2$	$2b + c$
2	3	10						
−2	−3	−10						
2	−4	0						
−4	3	0						
1	−1	−1						
−1	0	−1						

8) Să se efectueze:

a) $10 : 2$; b) $4 : 2$; c) $(-4) : (-2)$; d) $(-8) : (-4)$; e) $8 : (-2)$; f) $6 : (-3)$; g) $(-8) : 2$; h) $(-9) : 3$; i) $(-7) : (-1)$; j) $(-8) : 1$; k) $0 : (-5)$; l) $0 : 4$; m) $24 : [6 - (4 + 4 \cdot 2)]$.

9) Să se calculeze:

a) $|-4| + |5| + |0|$; b) $|-4| \cdot |-4|$;
c) $|-7| - |8| + |-1|$; d) $|-92| - 4 \cdot |-5|$;
e) $5 \cdot |-8| : (-2 \cdot 10)$.

10) Să se efectueze:

a) 2^2; b) 3^2; c) 2^3; d) 3^3;
e) $(-2)^2$; f) $(-3)^2$;
g) $(-2)^3$; h) $(-3)^3$;
i) 10^2; j) $(-10)^2$;
k) 10^3; l) $(-10)^3$; m) 10^4;
n) $(-10)^4$; o) 10^5;
p) $(-10)^5$; r) $2^2 \cdot (-2)^3$;
s) $2^{245} : (-2)^{243} + 2^0$;
t) $(-2)^{55} \cdot 2^{200} + 2^{255}$;
u) $[(-2)^3]^{101} : (-2)^{301}$;
v) $(-1)^{457} + (-1)^{458} + (-1)^{459}$;
x) $(-1)^k + (-1)^{k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$;
y) $(-205)^{101} : 205^{99}$;
z) $0^{24} : 1^{36} - (-8)^2 + (-25)^2$.

11) Să se completeze tabelul:

a	b	$a : b$	a^2	$a^2 + b^2$
14	2			
16	4			
−18	−9			
−20	−10			
20	−10			
40	−4			
−15	3			
−60	−30			
0	5			
0	−3			
−5	−5			
−7	7			
7	−1			
−8	1			

12) Să se efectueze:

a) $245 - (-2\,470)$; b) $7\,999 - (-9\,856)$; c) $29\,910 - (-9\,090)$; d) $-9\,881 + (-9\,903)$; e) $-19\,903 + (-2\,596)$; f) $9\,999 - 87\,534$; g) $8\,360 - 89\,000$; h) $-2\,590 - (-120\,680)$; i) $17\,806 + (-1\,106)$; j) $79 \cdot (-10)$; k) $70 \cdot (-100)$; l) $(-7\,594) \cdot (-2)$; m) $(-2\,400) \cdot (-3)$; n) $(-13\,025) \cdot (-8)$; o) $24\,752 \cdot (-8) \cdot 0$; p) $(-799) \cdot (-186)$; r) $(-408) \cdot (-20) \cdot (-205)$; s) $(-1\,008) \cdot (-2\,005)$; t) $(-138) \cdot 300$; u) $(-217) \cdot 1\,200$; v) $(-20) \cdot (-1\,300)$; x) $(-1\,001) \cdot (-1\,001)$.

13) Să se efectueze:

a) $(-28) \cdot (-4) \cdot (-25) \cdot (-100)$; b) $(-248) \cdot (-24) \cdot (-360)$; c) $0 : (-1\,000)$; d) $(-1\,000) : (-1)$; e) $(-2\,000) : 1$; f) $(-40) : (-10)$; g) $(-36\,000) : (-100)$; h) $(-78\,596) : 2$; i $(-420\,009) : (-3)$; j) $(-41\,616) : 204$; k) $(-1\,007\,010) : (-1\,005)$; l) $(-3\,240\,000) : (-180)$; m) $(-824\,000) : 200$; n) $(-10) \cdot (2 + 2 \cdot 3)$; o) $(6 + 6 : 3) \cdot (-100)$; p) $(-4) : 2 + (-6) \cdot (-3) \cdot (-10)$;
r) $[-200 - (-1\,800)] : (-10)^2$;
s) $[(-2)^3 - 10 \cdot (-5)^2 + 2 \cdot (-10 + 10 : 2)] \cdot (-100)$;
t) $(-2)^3 + 10 \cdot [(-1)^{1000} + (-1)^{99} + 2 \cdot (-2 + 2 \cdot 3)]$;
u) $(-2)^{101} : 2^{99} - 10 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-4)^5 : 4^4 - 2]\}$.

14) Să se afle valorile de adevăr ale următoarelor propoziții:

a) $(-2)^{45} < (-3)^{45}$; b) $(-2)^{245} > (-2)^{100}$;
c) $-216 \cdot (-2)^{60} \cdot (-3)^{18} \cdot 2^{12} = 72 \cdot 2^{72} \cdot (-3)^{19}$.

15) Se consideră mulțimile:

$A = \{-2; -3; 0; 1\}$; $B = \{-2; 0\}$; $C = \{-4; -5; 5\}$.

Să se efectueze:

a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $A \cap B$; d) $A \cap C$; e) $A - C$.

16) Se consideră următoarea mulțime de numere: $\{-1, 0, 1\}$. Să se afle toate submulțimile acestei mulțimi astfel încît fiecare din aceste submulțimi să aibă cel puțin două elemente și suma numerelor din fiecare submulțime să fie mai mică decît 1.

17) Să se efectueze:

a) $(2 + 2 \cdot 3) \cdot [2 \cdot 2^2 \cdot 2^{46} + (-2)^{49} + (-3)^{148} : (-3)^{48} + (3^5)^{21} - 4^2]$.

b) $(-107)^2 \cdot \{2\,105 + 21\,420 : [-9 - (8\,790 + 102 \cdot 105) : (-100)]\}$.

18) Să se adune cel mai mare număr natural de patru cifre cu cel mai mic număr întreg de cinci cifre. (Numerele sînt scrise în baza 10.)

19) Care este cel mai mic număr întreg de cinci cifre scris în baza 10 și care îndeplinește următoarele două condiții:

a) Nu este mai mic decît $-66\,615$;
b) Nu are cifre care să se repete?

20[d]) Numerele a, b, c, d, e, f, g, h sînt numere întregi diferite de zero. Se consideră, de asemenea, numerele x, y, z astfel încît: $x = ab^2c^4d^3e^5f^3gh^3$, $y = bc^7de^6f^2gh^3$; $z = a^3b^3cd^3ef^3g^2$.
Pot fi x, y, z în același timp negative?

21) Să se arate că pentru orice număr natural k avem:

$$(-1)^{k+1} + (-1)^{k+2} + (-1)^{k+3} + (-1)^{k+4} = 0.$$

22) În cele ce urmează a, b, c, d, x, y sînt numere întregi. Puneți în locul semnului de întrebare (?) unul din semnele „<", „=", „>" astfel încît să obțineți propoziții adevărate:

a) Dacă $a < 0$, atunci $2a$? $3a$;
b) Dacă $a = 0$, atunci $2a$? $3a$;
c) Dacă $a > 0$, atunci $2a$? $3a$;
d) Dacă $b < 0$, atunci $-2b$? $-3b$;
e) Dacă $b = 0$, atunci $-2b$? $-3b$;
f) Dacă $b > 0$, atunci $-2b$? $-3b$;
g) Dacă $c < 0$, atunci $-2c$? c;
h) Dacă $c = 0$, atunci $-2c$? c;
i) Dacă $c > 0$, atunci $-2c$? c;
j) Dacă $d < 0$, atunci $2d^2$? $-3d^2$;
k) Dacă $d = 0$, atunci $2d^2$? $-3d^2$;
l) Dacă $d > 0$, atunci $2d^2$? $-3d^2$;
m) Dacă $x < 0$, atunci x^{27} ? x^{26};
n) Dacă $x = 0$, atunci x^{27} ? x^{26};
o) Dacă $x > 0$, atunci x^{27} ? x^{26};
p) Dacă $y < 0$, atunci y^2 ? y^3;
r) Dacă $y = 0$, atunci y^2 ? y^3;
s) Dacă $0 < y < 1$, atunci y^2 ? y^3;
t) Dacă $y = 1$, atunci y^2 ? y^3;
u) Dacă $y > 1$, atunci y^2 ? y^3.

23[d]) Care număr este mai mare:

a) 2^{45} sau 2^{47}? b) 8^{57} sau 9^{57}? c) $(2^3)^8$ sau $(3^2)^8$? d) $8 \cdot 10^{20}$ sau 10^{21}? e) $(-2)^{43}$ sau $(-2)^{45}$? f) 202^{303} sau 303^{202}? g) 3^{34} sau 2^{51}? h) 2^{601} sau 3^{401}? i) 3^{303} sau 2^{404}?

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri

1) Numărul 9^{41} este pătrat perfect?

2) Să se calculeze:

a) $-200 - 199 - 198 - \ldots - 1 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 200 + 201 + 202$;

b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + 14 \ldots + 301 + 302$.

3) Să se calculeze:

a) $(-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot \ldots \cdot (-1)^{1000} \cdot (-1)^{1001}$;
b) $(100 - 1^2)(100 - 2^2)(100 - 3^2) \ldots (100 - 25^2)$.

4) Care număr este mai mare:

99^{20} sau $9\,999^{10}$?

5) Se consideră:

$a = 54^x + 54^{x+1} + 54^{2x}$, unde $x \in \mathbf{N}$.

Care este ultima cifră a numărului a?

6) Suma mai multor numere întregi consecutive este egală cu -25. Numărul termenilor mai mari decît zero este cu 1 mai mic decît numărul termenilor mai mici decît zero. Cîți termeni are suma?

7) Se consideră mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \quad x < 200, \ |x| = x\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \quad x > -215, \ |x| = -x\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \quad |x| < 145\}$;
$D = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \quad 100 < |x| < 200\}$;
$E = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \quad x^2 < 1\,985^2\}$.

Cîte elemente are fiecare dintre aceste mulțimi?

8) Să se calculeze: $(2^{123} + |2^{123} - 3^{82}|) : 3^{81}$.

9) Notăm cu P produsul a cinci numere întregi consecutive și cu S suma lor.

a) Dacă $P = 0$, cîte valori distincte poate lua S? Care este cea mai mică și care este cea mai mare dintre aceste valori?
b) Dacă $S = 0$, cîte valori distincte poate lua P?

10) Fie A o mulțime formată din 30 de numere întregi consecutive și B o mulțime formată din trei numere întregi consecutive. Cel mai mic număr din mulțimea B este cu 3 mai mare decît cel mai mare număr din mulțimea A.
Numai 22 dintre elementele mulțimii $A \cup B$ sînt negative. Care este cel mai mic număr din mulțimea $A \cup B$? Dar cel mai mare?

11) Să se arate că numerele de forma $\frac{a(a+1)}{2}$, cu $a \in \mathbf{N}^*$, sînt numere naturale.

Notă. Pentru aprofundarea cunoștințelor rezolvați și exercițiile și problemele de la 1 la 8 pagina 185.

Capitolul V

NUMERE RAȚIONALE

1. NUMĂR RAȚIONAL NEGATIV. MULȚIMEA DE NUMERE RAȚIONALE Q. REPREZENTAREA PE AXĂ

În manualul de matematică pentru clasa a V-a, numerele raționale nenegative au fost introduse asemănător modului în care au fost introduse numerele întregi. Anume, s-a considerat o dreaptă (d), figura V.1, pe care a fost fixat un punct O, numit *originea* coordonatelor. Pe aceeași dreaptă a mai fost fixat un punct I, diferit de punctul O. Pe dreapta (d), sensul de la punctul O la punctul I a fost numit *sensul pozitiv* al dreptei (d), iar sensul opus a fost numit *sensul negativ* al dreptei (d). Un segment dat MN, numit *unitate de măsură*, l-am împărțit în trei părți de aceeași lungime obținînd un segment MP, care este o treime din segmentul MN. Începînd de la punctul O, am măsurat, în sensul pozitiv al dreptei (d), un segment a cărui lungime este egală cu de 5 ori lungimea segmentului MP și am pus numărul rațional $\frac{5}{3}$ în extremitatea diferită de punctul O, a segmen-

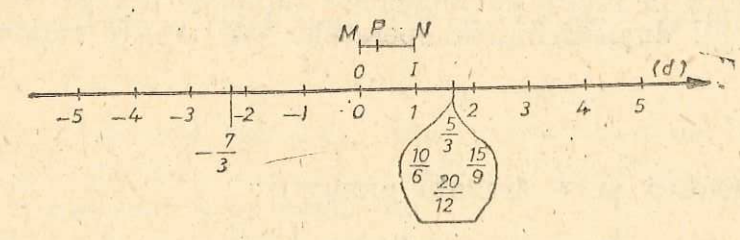


Fig. V.1

tului măsurat. În dreptul extremității, diferite de punctul O, a aceluiași segment, putem pune același număr rațional, dar notat cu $\frac{10}{6}$, dacă împărțim segmentul MN în 6 părți de aceeași lungime și măsurăm, începînd de la punctul O, în sensul pozitiv al dreptei (d), un segment a cărui lungime este de 10 ori lungimea unei șesimi din lungimea segmentului MN.

Numerele raționale așezate pe dreapta (d), în sensul pozitiv, le-am numit *numere raționale pozitive*.

Începînd de la punctul O, am măsurat, și în sensul negativ al dreptei (d), un segment a cărui lungime este de 7 ori lungimea segmentului MP, care este o treime din segmentul MN, și am pus $-\frac{7}{3}$ în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat.

Fiecărui număr rațional pozitiv r, i-am asociat, deci, pe dreapta (d), un număr notat cu $-r$, prin punerea simbolului $-$ (minus) în fața numărului rațional pozitiv r. Numărul $-r$ a fost pus în dreptul extremității, diferite de punctul O, a segmentului măsurat, începînd de la punctul O, în sensul negativ al dreptei (d), care segment satisface următoarele: este de aceeași lungime cu segmentul măsurat, începînd de la punctul O, dar în sensul pozitiv al dreptei (d), astfel încît în dreptul extremității sale, diferite de punctul O, să fi fost pus numărul rațional pozitiv r.

Numerele notate cu $-r$, unde r este un număr rațional pozitiv, au fost numite *numere raționale negative*. Numărul 0 este și el număr rațional, fără a fi însă nici pozitiv și nici negativ. Orice număr rațional pozitiv sau zero este numit *număr rațional nenegativ*.

Mulțimea numerelor raționale a fost notată cu **Q**. Am pus în evidență și faptul că orice număr întreg este un număr rațional, adică $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$, unde $\mathbf{Z}$ este mulțimea numerelor întregi $\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. Uneori, numerele raționale pozitive se scriu cu semnul $+$ în față, ca de exemplu $+\frac{3}{4}$ în loc de $\frac{3}{4}$.

Cu ajutorul numerelor raționale vom găsi soluții în mulțimea numerelor raționale ale unor ecuații, cum este ecuația $x + \frac{8}{3} = 1$, care nu au soluții în mulțimea numerelor raționale nenegative. Aceasta va fi posibil după definirea operațiilor cu numere raționale.

Exercițiu.

Reprezentați pe o dreaptă numerele:

$$-\frac{1}{2}; \ -\frac{1}{4}; \ -\frac{3}{4}; \ 0; \ \frac{1}{2}; \ \frac{1}{4}; \ \frac{3}{4}; \ \frac{3}{2}.$$

Luați ca unitate de măsură decimetrul.

RELAȚIA DE EGALITATE ÎNTRE NUMERE RAȚIONALE

Vom scrie

$$-\frac{7}{3} = -\frac{14}{6}$$

pentru a exprima că numărul rațional $-\frac{7}{3}$ este egal cu numărul rațional $-\frac{14}{6}$. Numerele raționale $-\frac{7}{3}$ și $-\frac{14}{6}$ sînt egale, deoarece sînt egale numerele raționale $\frac{7}{3}$ și $\frac{14}{6}$, avînd în vedere că $7 \cdot 6 = 3 \cdot 14$.

În general:

Două numere raționale a și b, notate respectiv cu $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sau cu $-\frac{m}{n}$ și $-\frac{p}{q}$, sînt egale dacă fracțiile $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sînt echivalente, adică dacă $mq = np$.

Egalitatea între numerele raționale a și b se scrie

$$a = b$$

și se citește „*a este egal cu b*". Numărul rațional a se numește *primul membru* sau *membrul întîi* al egalității, iar numărul rațional b se numește *membrul al doilea* al egalității.

Vom scrie

$$-\frac{7}{3} \neq \frac{8}{9}$$

pentru a exprima că numărul rațional $-\frac{7}{3}$ nu este egal cu numărul rațional $\frac{8}{9}$ sau, altfel spus, că numărul rațional $-\frac{7}{3}$ este diferit de numărul rațional $\frac{8}{9}$.

Dacă două numere raționale a și b nu sînt egale, se scrie

$$a \neq b$$

și se citește „a nu este egal cu b" sau „a este diferit de b".

Egalitatea între numere raționale este o *relație* între numere raționale și are următoarele proprietăți:

1) *Oricare ar fi numărul rațional a, avem*

$$a = a.$$

Aceasta este proprietatea de *reflexivitate a egalității* între numere raționale, prin care se exprimă faptul că în ambii membri ai unei egalități poate figura același număr rațional.

2) *Oricare ar fi numerele raționale a și b, dacă a = b atunci b = a.*

Această este proprietatea de *simetrie a egalității* între numere raționale.

3) *Oricare ar fi numerele raționale a, b și c, dacă $a = b$ și $b = c$ atunci $a = c$.*

Aceasta este proprietatea de *tranzitivitate a egalității* între numere raționale.

Deoarece relația de egalitate între numere raționale are proprietățile de *reflexivitate*, *simetrie* și *tranzitivitate*, se spune că relația de egalitate între numere raționale este o *relație de echivalență*.

2. INCLUZIUNILE $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

Mulțimea numerelor naturale, notată cu $\mathbf{N}$, este următoarea mulțime

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\},$$

iar mulțimea numerelor întregi negative este mulțimea

$$\{..., -3, -2, -1\}.$$

Făcînd reuniunea mulțimii numerelor întregi negative cu mulțimea numerelor naturale se obține mulțimea numerelor întregi, notată cu $\mathbf{Z}$, care este deci următoarea mulțime

$$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Orice număr natural este deci număr întreg, ceea ce se exprimă prin

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}.$$

Fig. V.2

Dar nici un număr întreg negativ nu este număr natural, deoarece pe axa numerelor, figura 2, numerele naturale, diferite de zero, sînt așezate la dreapta numărului natural 0, iar numerele întregi negative sînt așezate la stînga numărului natural 0. Aceasta înseamnă că mulțimea numerelor naturale este o submulțime strictă a mulțimii numerelor întregi, ceea ce se exprimă prin

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}.$$

Cînd spunem că un număr natural, diferit de zero, se află, pe axa numerelor, la dreapta numărului natural 0, înțelegem prin aceasta că, pentru a ajunge de la 0 la un număr natural, diferit de 0, parcurgem axa numerelor în sens pozitiv. Cînd spunem că un număr întreg negativ se află, pe axa numerelor, la stînga numărului natural 0,

înțelegem prin aceasta că, pentru a ajunge de la 0 la un număr întreg negativ, parcurgem axa numerelor în sens negativ.

Orice număr rațional pozitiv sau egal cu 0 este exprimat prin $\frac{a}{b}$ unde a și b sînt numere naturale, iar b este diferit de zero. Punînd semnul — (minus) în fața fiecărui număr rațional pozitiv, am obținut mulțimea numerelor raționale negative. Făcînd reuniunea mulțimii numerelor raționale negative cu mulțimea numerelor raționale pozitive sau egale cu zero se obține mulțimea numerelor raționale, care se notează prin $\mathbf{Q}$.

În loc de $\frac{a}{1}$ am convenit să scriem a. În acest sens, spunem că orice număr natural este un număr rațional pozitiv sau egal cu zero. În mod analog, în loc de $-\frac{a}{1}$, care este un număr rațional negativ, unde a este un număr natural, diferit de zero, am convenit să scriem $-a$. În acest sens, spunem că orice număr întreg negativ este un număr rațional negativ.

Orice număr întreg este deci număr rațional, ceea ce se exprimă prin

$$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}.$$

Dar există numere raționale pozitive care nu sînt numere naturale. Un astfel de număr rațional pozitiv este, de exemplu, $\frac{7}{3}$. În adevăr, numărul rațional $\frac{7}{3}$ poate fi considerat ca fiind cîtul între numerele naturale 7 și 3. Dacă numărul rațional $\frac{7}{3}$ este un număr natural a, atunci și cîtul între numerele naturale 7 și 3 este a. Deci putem scrie $\frac{7}{3} = a$ sau $7 = 3 \cdot a$. Dacă $a < 2$ atunci $3 \cdot a < 6$, iar dacă $a = 3$ atunci $3 \cdot a = 9$ și, în sfîrșit, dacă $a > 3$ atunci $3 \cdot a > 9$. Deci propoziția cu o variabilă $7 = 3 \cdot a$ este falsă pentru orice $a \in \mathbf{N}$. Rezultă că nu există nici un număr natural care să fie egal cu $\frac{7}{3}$. De asemenea, nu există nici un număr întreg negativ care să fie egal cu $\frac{7}{3}$, deoarece $\frac{7}{3}$ este pozitiv. Aceasta înseamnă că mulțimea numerelor întregi este o submulțime strictă a mulțimii numerelor raționale, ceea ce se exprimă prin

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}.$$

În loc de $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, se scrie

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}.$$

Exercițiu

Să se completeze următorul tabel. Primul rînd este completat ca model.

Numărul	Aparține acest număr mulțimii N?	Aparține acest număr mulțimii $\mathbb{N}^*$?	Aparține acest număr mulțimii Z?	Aparține acest număr mulțimii Q?
-2	Nu	Nu	Da	Da
2				
0				
$\frac{3}{5}$				
$-\frac{1}{2}$				
$0{,}5$				
$-0{,}75$				
$1{,}25$				
$\frac{7}{3}$				

3. VALOAREA ABSOLUTĂ A UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Orice număr rațional negativ este notat prin $-a$, unde a este un număr rațional pozitiv. Acest număr rațional pozitiv a îl vom numi *valoarea absolută* sau *modulul* numărului rațional negativ $-a$.

Valoarea absolută a oricărui număr rațional a pozitiv sau egal cu zero este numărul rațional a.

Valoarea absolută sau *modulul* unui număr rațional a îl vom nota prin $|a|$.

Exemple.

$$\left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}, \left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}, \ |0| = 0.$$

Valoarea absolută sau *modulul* unui număr rațional negativ a îl vom nota și prin $-a$.

Exemplu. Fie $a = -\frac{8}{5}$. Atunci $-\left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{8}{5}$, deoarece $\left|-\frac{8}{5}\right| = \frac{8}{5}$.

Definiția *valorii absolute* sau a *modulului* unui număr rațional poate fi dată, deci, sub forma

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a \text{ este un număr rațional pozitiv sau egal cu zero;} \\ -a, \text{ dacă } a \text{ este un număr rațional negativ.} \end{cases}$$

EXERCIȚII

1) Să se efectueze:

a) $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| + |0| + |-3|$;

b) $\left|-\frac{3}{4}\right| + \left|-\frac{1}{6}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|$.

2) Se consideră numerele raționale a și b. Știind că $a < b < 0$, să se compare: $|a|$ cu $|b|$.

4. ADUNAREA NUMERELOR RAȚIONALE. COMUTATIVITATE. ASOCIATIVITATE. ELEMENT NEUTRU

Suma a două numere raționale o vom defini în mod asemănător modului în care am definit suma a două numere întregi. De altfel și așezarea pe axa numerelor a numerelor raționale s-a făcut în mod asemănător așezării, pe aceeași axă, a numerelor întregi. Pe de altă parte, rezultatul adunării numerelor întregi, considerate drept numere raționale, vrem să nu fie diferit de rezultatul adunării lor ca numere întregi. Așa am procedat și cînd am definit suma a două numere întregi, rezultatul adunării a două numere naturale, considerate ca numere întregi, nefiind diferit de rezultatul adunării lor ca numere naturale.

Deci, fiind date două numere raționale, de exemplu 2 și $-\frac{7}{3}$, vom înțelege prin *suma* numerelor raționale 2 și $-\frac{7}{3}$, care se numesc *termenii sumei*, un număr rațional, notat cu $2 + \left(-\frac{7}{3}\right)$, pe care-l obținem în modul arătat în figura 3. În această figură, nume-

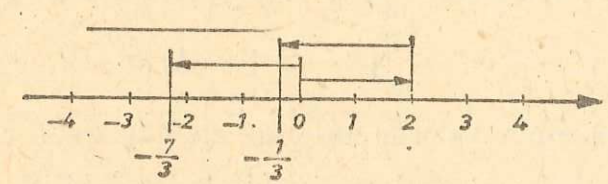


Fig. V.3

rele 2 și $-\frac{7}{3}$ sînt puse în evidență, pe axa numerelor, prin săgeți care pornesc din dreptul numărului 0 și au vîrfurile în dreptul numărului 2 respectiv al numărului $-\frac{7}{3}$. O săgeată de același fel cu săgeata care indică numărul $-\frac{7}{3}$, așezată începînd din vîrful săgeții care indică numărul 2, are vîrful în dreptul numărului rațional $-\frac{1}{3}$. Spunem că numărul rațional $-\frac{1}{3}$ s-a obținut prin *adunarea* numerelor raționale 2 și $-\frac{7}{3}$ sau că $2+\left(-\frac{7}{3}\right)$, ceea ce se citește „doi plus minus șapte pe trei“, este $-\frac{1}{3}$ și scriem aceasta astfel

$$2+\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

Pentru a nu ne referi de fiecare dată la cîte o figură de felul celei de mai înainte, atunci cînd se pune problema adunării a două numere raționale a și b, vom formula cîte o *definiție* pentru obținerea sumei numerelor raționale a și b în fiecare caz ce se poate prezenta.

Cazul 1. Numerele raționale a și b sînt nenegative.

Suma a două numere raționale a și b, care sînt nenegative, este numărul rațional c care se obține așa cum am arătat în manualul de matematică pentru clasa a V-a.

Exemple.

$$\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=\frac{8}{3}; \quad \frac{3}{2}+\frac{5}{3}=\frac{19}{6}; \quad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

$$2+1=3, \quad 0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}; \quad \frac{5}{4}+0=\frac{5}{4}.$$

Cazul 2. Numerele raționale a și b sînt negative.

Suma a două numere raționale negative a și b este numărul rațional $c=-d$, unde $d=|a|+|b|$.

Exemple.

$$-\frac{1}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{8}{3}; \quad -\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{19}{6};$$

$$-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}; \quad -2+(-1)=-3.$$

În primul exemplu, valorile absolute ale numerelor raționale $-\frac{1}{3}$ și $-\frac{7}{3}$ sînt numerele raționale pozitive $\frac{1}{3}$ și $\frac{7}{3}$. Suma acestor nu-

mere raționale pozitive este $\frac{8}{3}$, după cum se vede din primul exemplu de la cazul 1 de adunare a numerelor raționale. Numărul rațional negativ $-\frac{8}{3}$ este suma numerelor raționale negative $-\frac{1}{3}$ și $-\frac{7}{3}$. Explicarea celorlalte exemple se face în mod asemănător primului exemplu.

Cazul 3. Unul din numerele raționale a și b este număr rațional pozitiv sau egal cu zero, iar celălalt este număr rațional negativ.

Suma a două numere raționale a și b, din care unul este număr rațional pozitiv sau egal cu zero, iar celălalt este număr rațional negativ, este numărul rațional c care se obține astfel:

Dacă $|a|=|b|$, atunci $c=0$. Dacă $|a|\neq|b|$, fie d diferența între modulul mai mare și modulul mai mic. Avem $c=d$ dacă numărul cu modulul mai mare este număr rațional pozitiv. Avem $c=-d$ dacă numărul cu modulul mai mare este număr rațional negativ.

Exemple. 1) Avem

$$\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=0,$$

deoarece $\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$, $\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$ și $\left|\frac{1}{3}\right|=\left|-\frac{1}{3}\right|$.

2) Avem

$$\frac{8}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3};$$

deoarece $\left|\frac{8}{3}\right|=\frac{8}{3}$, $\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$ și $\frac{8}{3}>\frac{1}{3}$, avînd $3\cdot 8>3\cdot 1$, iar $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$, și pentru că $\frac{8}{3}$ este un număr rațional pozitiv.

3) Avem

$$-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{6};$$

deoarece $\left|-\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}$, $\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$ și $\frac{5}{3}>\frac{3}{2}$, avînd $5\cdot 2>3\cdot 3$, iar $\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$ și pentru că $-\frac{5}{3}$ este un număr rațional negativ.

4) Analog,

$$-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=\frac{7}{3}, \quad \frac{1}{3}+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{7}{3}, \quad 0+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{8}{3},$$

În loc de aflarea sau obținerea unei sume de numere raționale vom mai spune *efectuarea* sumei de numere raționale.

Exemplele de proprietăți ale operației de adunare a numerelor întregi le putem considera și ca exemple de proprietăți ale operației de adunare a numerelor raționale, numerele întregi fiind și numere raționale. Ne putem referi la aceste exemple, deoarece operația de adunare cu numere întregi se face la fel ca și atunci cînd o considerăm că o facem cu numere raționale.

Comutativitatea adunării numerelor raționale se enunță:

Oricare ar fi numerele raționale a și b avem

$$a + b = b + a.$$

Asociativitatea adunării numerelor raționale se enunță:

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c avem

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Din această cauză, vom conveni ca prin $a + b + c$ să înțelegem ori $(a + b) + c$ ori $a + (b + c)$. Astfel în loc de $\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$ vom scrie $-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$ și, de asemenea, în loc de $-\frac{1}{3}+\left[\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ vom scrie tot $-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Observăm că:

$$\frac{7}{3}+0=\frac{7}{3};\quad 0+\frac{7}{3}=\frac{7}{3};\quad 0+0=0,\quad -\frac{5}{4}+0=-\frac{5}{4};\quad 0+\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{4}.$$

Această proprietate exprimă faptul că numărul rațional 0 este *element neutru* la adunarea numerelor raționale și se enunță:

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Vom mai pune în evidență următoarele două proprietăți în care intervin relația de egalitate între numere raționale și operația de adunare a numerelor raționale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c, dacă $a = b$ atunci $a + c = b + c$.

Altfel spus, dacă adunăm același număr rațional cu numerele raționale care sînt cei doi membri ai unei egalități între numere raționale obținem numere raționale egale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b, c și d, dacă $a = b$ și $c = d$ atunci $a + c = b + d$.

Altfel spus, prin adunare membru cu membru a două egalități între numere raționale obținem o egalitate între numere raționale.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $\frac{7}{6}+\left(-\frac{5}{6}\right)$; b) $\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{7}+\left(-\frac{4}{7}\right)$;

d) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)$; e) $\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{6}\right)$; f) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{6}\right)$;

g) $-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}$; h) $-\frac{5}{56}+\left(-\frac{5}{196}\right)$; i) $-\frac{7}{120}+\left(-\frac{11}{320}\right)+\frac{13}{240}$;

j) $7{,}45 + 745 + 20\,999{,}8 + 20{,}001 + 9{,}0099$;

k) $0{,}25+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

5. OPUSUL UNUI NUMĂR RAȚIONAL. OPUSUL UNEI SUME

Să considerăm axa numerelor, figura 4, și să ne fixăm atenția asupra numerelor raționale $\frac{5}{2}$ și $-\frac{5}{2}$. Aceste numere sînt egal depărtate de originea coordonatelor. Se spune că punctele în dreptul cărora se află numerele raționale $\frac{5}{2}$ respectiv $-\frac{5}{2}$ sînt *simetrice* față de originea coordonatelor. De asemenea, se spune că $-\frac{5}{2}$ este *opusul* lui $\frac{5}{2}$, iar $\frac{5}{2}$ este opusul lui $-\frac{5}{2}$.

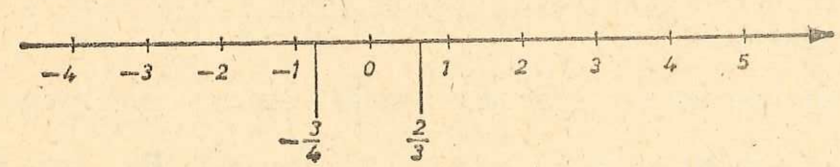


Fig. V.4

Definiție. *Opusul unui număr rațional pozitiv a este numărul rațional negativ $-a$.*

Opusul unui număr rațional negativ $-a$ este numărul rațional pozitiv a. Numărul rațional 0 are ca opus numărul rațional 0.

Observație. Opusul unui număr rațional a se notează prin $-a$.

Deci dacă $a = \frac{5}{2}$, atunci $-a = -\frac{5}{2}$. Dacă $a = -\frac{5}{2}$, atunci $-a = \frac{5}{2}$. Dacă $a = 0$, atunci $-a = 0$. În cazul în care $a = -\frac{5}{2}$, egalitatea $-a = \frac{5}{2}$ se mai scrie $-\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$. Deci $-\left(-\frac{5}{2}\right)$ este opusul numărului rațional $-\frac{5}{2}$. Tot astfel, dacă $a = 0$, atunci $-a = 0$ se mai scrie $-0 = 0$. Deci -0 este opusul numărului întreg 0.

Se constată că

$$\frac{5}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) = 0, \quad -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0.$$

În general:

Suma dintre un număr rațional și opusul său este egală cu 0, adică

$$a + (-a) = 0.$$

Un exemplu, de modul în care se obține opusul unei sume de numere raționale, se poate da cu o sumă de numere întregi, numerele întregi fiind și numere raționale. Un astfel de exemplu, s-a dat atunci cînd s-a vorbit despre opusul unui număr întreg și putem să ne referim la el, deoarece operațiile de adunare și scădere cu numere întregi se fac la fel cînd le considerăm că le efectuăm cu numere raționale.

În general:

Dacă $a = b + c$, *atunci* $-a = -b + (-c)$.

Adică, *opusul unei sume este suma opușilor termenilor sumei.*

EXERCIȚII

a) Să se adune $\frac{1}{2}$ cu opusul său.

b) Să se adune $-\frac{3}{4}$ cu opusul său.

6. SCĂDEREA

În egalitatea

$$-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3},$$

prin care se definește suma numerelor raționale $-\frac{1}{3}$ și $\frac{8}{3}$, putem pune în evidență oricare din termeni în felul următor

$$\frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}, \quad \frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Spunem că $\frac{8}{3}$ este *diferența* între $\frac{7}{3}$ și $-\frac{1}{3}$ obținută prin *scăderea* lui $-\frac{1}{3}$ din $\frac{7}{3}$. Pe $\frac{7}{3}$ îl numim *descăzut*, iar pe $-\frac{1}{3}$ *scăzător*. Analog, $-\frac{1}{3}$ este diferența între *descăzutul* $\frac{7}{3}$ și *scăzătorul* $\frac{8}{3}$.

În general:

Dacă a și b sînt două numere raționale, diferența între a și b, notată prin $a - b$, *este acel număr rațional c pentru care* $a = b + c$.

Se scrie

$$c = a - b$$

și se citește „c este egal cu a minus b".

Utilizînd noțiunea de opus al unui număr rațional, diferența între două numere raționale se efectuează asemănător modului în care se efectuează diferența între numere întregi. Aceasta se datorește faptului că numerele întregi sînt numere raționale, iar operațiile de adunare și scădere cu numere întregi se fac la fel ca și atunci cînd le considerăm că le efectuăm cu numere raționale. Un exemplu s-a dat atunci cînd s-a vorbit de diferența între numere întregi.

În general:

Oricare ar fi numerele raționale a și b, avem

$$a - b = a + (-b).$$

Adică, *diferența* $a - b$ *între două numere raționale a și b este egală cu suma* $a + (-b)$ *dintre numărul rațional a și opusul* $-b$ *al numărului rațional b.*

Vom spune că *efectuăm* diferența $a - b$ atunci cînd determinăm numărul rațional care este diferența între numerele raționale a și b.

Exemplu. Să se efectueze diferența $\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{2}\right)$. Avem

$$\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{17}{6}.$$

În mod analog

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{13}{6},$$

deoarece numărul rațional pozitiv $\frac{5}{2}$, care este valoarea absolută a numărului rațional negativ $-\frac{5}{2}$, este mai mare decît numărul rațional $\frac{1}{3}$, avînd $5 \cdot 3 > 2 \cdot 1$, iar $\frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$.

Trebuie reținut că *operația de scădere între două numere raționale se poate efectua oricare ar fi aceste numere raționale.*

Avem

$$\frac{5}{4} - 0 = \frac{5}{4}, \quad -\frac{3}{2} - 0 = -\frac{3}{2}.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: diferența între orice număr rațional și 0 este acel număr rațional, adică

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$a - 0 = a.$$

Avem

$$0 - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4} \quad 0 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: diferența între 0 și orice număr rațional este opusul acelui număr rațional, adică

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$0 - a = -a.$$

Vom pune în evidență următoarele două proprietăți în care intervin relația de egalitate între numere raționale și operația de scădere între numere raționale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c, dacă $a = b$ atunci $a - - c = b - c$.

Altfel spus, dacă scădem același număr rațional din numerele raționale care sînt cei doi membri ai unei egalități între numere raționale obținem numere raționale egale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b, c și d, dacă $a = b$ și $c = d$ atunci $a - c = b - d$.

Altfel spus, prin scăderea membru cu membru a două egalități între numere raționale obținem o egalitate între numere raționale.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$; b). $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$; c) $-\frac{5}{8} - \left(-\frac{3}{8}\right)$;
d) $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)$; e) $\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{12}\right)$; f) $-\frac{5}{12} - \left(-\frac{3}{20}\right)$;
g) $-\frac{8}{150} - \left(-\frac{7}{120}\right)$; h) $1\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}$; i) $2\frac{1}{5} + \left(-1\frac{6}{7}\right)$;
j) $0,1 - (-0,75)$; k) $\frac{4}{5} - (-0,2)$.

DESFACEREA PARANTEZELOR

Numerele întregi fiind numere raționale, iar operațiile de adunare și scădere cu numere întregi făcîndu-se în același fel ca și atunci cînd le considerăm că le efectuăm cu numere raționale, vom considera că tot ce s-a spus la desfacerea parantezelor în legătură cu numere întregi rămîne valabil atunci cînd desfacerea parantezelor se face în legătură cu numere raționale.

Deci, dacă între două paranteze se află o expresie formată din termeni despărțiți prin simbolurile + sau —, iar în fața parantezei de deschidere se află simbolul + sau în fața parantezei de deschidere nu se află nici un simbol, *desfacerea parantezelor* se face ca în cele ce urmează.

Exemplul 1. Prin desfacerea parantezelor drepte, expresia $\left[\frac{1}{3} + (-5)\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)$ devine $\frac{1}{3} + (-5) + \left(-\frac{1}{2}\right)$. S-au suprimat parantezele drepte, expresia aflată între aceste paranteze rămînînd neschimbată.

Exemplul 2. Prin desfacerea parantezelor drepte, expresia $\frac{1}{3} + \left[-5 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ devine $\frac{1}{3} - 5 + \left(-\frac{1}{2}\right)$. S-au suprimat parantezele drepte împreună cu simbolul + din fața parantezei drepte de deschidere, expresia aflată între aceste paranteze rămînînd neschimbată.

Exemplul 3. Prin desfacerea parantezelor rotunde, expresia $\frac{1}{3} + \left(5 - \frac{1}{2}\right)$ devine $\frac{1}{3} + 5 - \frac{1}{2}$. S-au suprimat parantezele rotunde, dar a fost păstrat simbolul + din fața parantezei rotunde de deschidere, expresia aflată între aceste paranteze rămînînd neschimbată.

Dacă între două paranteze se află o expresie formată din termeni despărțiți prin simbolurile + sau —, iar în fața parantezei de deschidere se afla simbolul —, desfacerea parantezelor se face ca în cele ce urmează.

Exemplul 1. Prin desfacerea parantezelor drepte, expresia $-\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{5} + (-3)\right]$ devine $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - (-3)$. S-au suprimat parantezele drepte. Simbolul + care desparte cei doi termeni $-\frac{1}{5}$ și (-3) ai expresiei aflate între parantezele drepte a fost înlocuit cu simbolul —. Simbolul — care este primul simbol al termenului $-\frac{1}{5}$, care este primul termen al expresiei aflate între parantezele drepte, a fost suprimat împreună cu simbolul — din fața parantezei drepte de deschidere și amîndouă au fost înlocuite cu simbolul +, acest simbol + avînd rol de simbol de adunare.

Exemplul 2. Prin desfacerea parantezelor rotunde, expresia $-\left(-\frac{1}{5} - 3\right)$ devine $\frac{1}{5} + 3$. S-au suprimat parantezele rotunde. Simbolul —, care desparte cei doi termeni $-\frac{1}{5}$ și 3 ai expresiei aflate între parantezele rotunde a fost înlocuit cu simbolul +. Simbolul —, care este primul simbol al termenului $-\frac{1}{5}$, care este primul termen al expresiei aflate între parantezele rotunde, a fost suprimat împreună cu simbolul — din fața parantezei rotunde de deschidere.

Exemplul 3. Prin desfacerea parantezelor rotunde, expresia $-\frac{1}{3}-\left(3-\frac{1}{5}\right)$ devine $-\frac{1}{3}-3+\frac{1}{5}$. S-au suprimat parantezele rotunde. Simbolul —, care desparte cei doi termeni 3 și $\frac{1}{5}$ ai expresiei aflate între parantezele rotunde a fost înlocuit cu simbolul +. A fost păstrat simbolul — din fața parantezei rotunde de deschidere.

EXERCIȚII

Să se desfacă parantezele. Să se efectueze calculele.

a) $\left[\frac{1}{3}+(-5)\right]+\left(-\frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{3}-5\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $\frac{1}{3}+\left[-5+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$; d) $\frac{1}{3}+\left(-5-\frac{1}{2}\right)$;

e) $\frac{1}{3}+\left(5-\frac{1}{3}\right)$; f) $-\frac{1}{3}-\left[-\frac{1}{5}+(-3)\right]$;

g) $-\frac{1}{5}-\left[-\frac{1}{5}+(-3)\right]$; h) $\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\right]$;

i) $0{,}35-\left[0{,}3-\left(0{,}05+\frac{1}{3}\right)\right]$.

7. RELAȚIILE $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ ÎNTRE NUMERE RAȚIONALE

Deoarece pentru numerele raționale $-\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{3}$ are loc egalitatea

$$\frac{2}{3}=-\frac{3}{4}+\frac{17}{12},$$

iar $\frac{17}{12}$ este un număr rațional pozitiv, se spune că „$\frac{2}{3}$ este mai mare decît $-\frac{3}{4}$“ și aceasta se scrie astfel

$$\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}.$$

În loc de $\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$ se mai scrie $-\frac{3}{4}<\frac{2}{3}$, ceea ce se citește „$-\frac{3}{4}$ este mai mic decît $\frac{2}{3}$“.

În general:

Un număr rațional a este mai mare decît un număr rațional b, ceea ce se scrie

$$a>b,$$

dacă există un număr rațional pozitiv c astfel încît

$$a=b+c.$$

Vom scrie și $b<a$ și vom citi aceasta „b este mai mic decît a“ dacă $a>b$. Simbolurile $>$, $<$ se numesc *simboluri de inegalitate strictă.*

Pe axa numerelor, din două numere raționale, cel mai mare se află la dreapta celui mai mic. Înțelegem, prin aceasta, că trecerea, pe axa numerelor, de la numărul mai mic la numărul mai mare se face parcurgînd axa numerelor în sens pozitiv. De exemplu, $\frac{2}{3}$ este mai mare decît $-\frac{3}{4}$ și se constată pe figura 4 că $\frac{2}{3}$ este la dreapta lui $-\frac{3}{4}$.

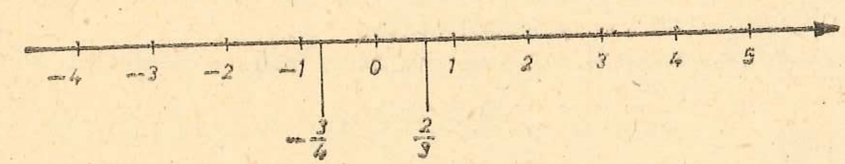


Fig. V.4

Analog, putem spune că, pe axa numerelor, din două numere raționale, cel mai mic se află la stînga celui mai mare. Înțelegem, prin aceasta, că trecerea, pe axa numerelor, de la numărul mai mare la numărul mai mic se face parcurgînd axa numerelor în sens negativ. De exemplu, $-\frac{3}{4}$ este mai mic decît $\frac{2}{3}$ și se constată pe figura 4 că $-\frac{3}{4}$ este la stînga lui $\frac{2}{3}$.

Avem $-1<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$, $0<\frac{1}{2}$; dar $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Dacă notăm cu a oricare din numerele raționale -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, avem $a<\frac{1}{2}$ sau

$a = \frac{1}{2}$. În loc de a scrie „$a < \frac{1}{2}$ sau $a = \frac{1}{2}$" vom scrie $a \leqslant \frac{1}{2}$, ceea ce se citește „a este mai mic sau egal cu $\frac{1}{2}$".

În general, *fiind date două numere raționale a și b, pentru a indica faptul că $a < b$ sau $a = b$ scriem*

$$a \leqslant b,$$

ceea ce se citește „a este mai mic sau egal cu b" sau „a este cel mult egal cu b". Inegalitatea $a \leqslant b$ se numește *inegalitate nestrictă* între a și b.

Analog, *fiind date două numere raționale a și b, pentru a indica faptul că $a > b$ sau $a = b$ scriem*

$$a \geqslant b,$$

ceea ce se citește „a este mai mare sau egal cu b" sau „a este cel puțin egal cu b". Inegalitatea $a \geqslant b$ se numește tot *inegalitate nestrictă* între a și b.

Aplicații.

1. Avem

$$\frac{5}{3} = 0 + \frac{5}{3},\ \frac{1}{7} = 0 + \frac{1}{7},\ \frac{2}{11} = 0 + \frac{2}{11}.$$

Deoarece $\frac{5}{3}, \frac{1}{7}, \frac{2}{11}$ sînt numere raționale pozitive, avem

$$\frac{5}{3} > 0,\ \frac{1}{7} > 0,\ \frac{2}{11} > 0.$$

Am obținut următoarea proprietate:

Oricare ar fi numărul rațional pozitiv a avem

$$a > 0.$$

2. Avem

$$0 = \left(-\frac{8}{3}\right) + \frac{8}{3},\ 0 = \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5},\ 0 = \left(-\frac{1}{19}\right) + \frac{1}{19}.$$

Deoarece $\frac{8}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{19}$ sînt numere raționale pozitive, avem

$$0 > -\frac{8}{3},\ 0 > -\frac{2}{5},\ 0 > -\frac{1}{19}.$$

Am obținut următoarea proprietate:

Oricare ar fi numărul rațional negativ a avem

$$a < 0.$$

Definiția *valorii absolute* sau a *modulului* unui număr rațional poate fi dată, deci, sub forma:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geqslant 0; \\ \bar{a}, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

EXERCIȚII

Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziții:

a) $\frac{1}{3} < -\frac{1}{6}$; b) $-\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$; c) $-\frac{3}{7} > -\frac{4}{7}$;

d) $-\frac{3}{5} < -\frac{3}{4}$; e) $-\frac{2}{7} > -\frac{2}{9}$; f) $-\frac{18}{19} > -\frac{19}{20}$.

8. ÎNMULȚIREA

Fiind date două numere raționale, de exemplu $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{2}$, vom înțelege prin *produsul* numerelor raționale $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{2}$, care se numesc *factorii* produsului, un număr rațional, notat cu $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ sau $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}$, care se obține ținînd seama că numerele raționale $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{2}$ sînt numere raționale pozitive, și efectuînd produsul lor, așa cum a fost el definit în manualul de matematică pentru clasa a V-a. Deci

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8}.$$

Spunem că numărul rațional $\frac{15}{8}$ s-a obținut prin *înmulțirea* numerelor raționale $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{2}$ sau că $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}$, ceea ce se citește „trei pe patru ori cinci pe doi", este $\frac{15}{8}$ și scriem aceasta

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}.$$

Numerele raționale fiind pozitive sau negative sau egale cu zero, vom da cîte o *definiție* pentru obținerea produsului numerelor raționale a și b în fiecare caz ce se poate prezenta.

Cazul 1. Numerele raționale a și b sînt pozitive sau oricare din ele este zero.

Produsul a două numere raționale a și b, care sînt pozitive sau oricare din ele este zero, este numărul rațional c care se obține așa cum am arătat în manualul de matematică pentru clasa a V-a.

Exemple.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8},\quad \frac{3}{4} \cdot 0 = 0,\quad \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

Cazul 2. Numerele raționale a și b sînt numere raționale negative.

Produsul a două numere raționale negative a și b este numărul rațional pozitiv $c = |a| \cdot |b|$.

Exemplu.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{8},$$

deoarece $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$, $\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}$ și $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$.

Cazul 3. Unul din numerele raționale a și b este număr rațional pozitiv sau zero, iar celălalt număr rațional negativ.

Produsul a două numere raționale a și b din care unul este număr rațional pozitiv sau zero, iar celălalt este număr rațional negativ este numărul rațional c care se obține astfel.

Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $c = 0$. În caz contrar, $c = -|a| \cdot |b|$.

Exemplul 1. Avem

$$\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{15}{8},$$

deoarece $\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}$ și $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$.

Exemplul 2. Avem

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}=-\frac{15}{8},$$

deoarece $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$ și $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$.

Exemplul 3. Avem

$$0\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=0,$$

deoarece primul factor este zero.

Exemplul 4. Avem

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 0=0,$$

deoarece al doilea factor este zero.

Trebuie reținut că:

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0.$$

Se observă că:

$$\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(-1)=\frac{5}{2},\quad (-1)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2},\quad \frac{4}{3}\cdot(-1)=-\frac{4}{3},$$

$$(-1)\cdot\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Rezultă proprietatea care arată că produsul cu -1 este oricărui număr rațional și *opusul* acelui număr rațional, adică

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a.$$

În loc de aflarea sau obținerea unui produs de numere raționale vom mai spune *efectuarea* produsului de numere raționale.

Vom pune în evidență următoarele două proprietăți în care intervin relația de egalitate între numere raționale și operația de înmulțire a numerelor raționale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c, dacă $a = b$ atunci $a \cdot c = b \cdot c$.

Altfel spus, dacă numerele raționale, care sînt cei doi membri ai unei egalități între numere raționale, le înmulțim cu același număr rațional, obținem numere raționale egale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b, c și d, dacă $a = b$ și $c = d$ atunci $a \cdot c = b \cdot d$.

Astfel spus, prin înmulțirea membru cu membru a două egalități între numere raționale, obținem o egalitate între numere raționale.

9. COMUTATIVITATE. ASOCIATIVITATE. DISTRIBUTIVITATE. ELEMENT NEUTRU

Exemple de proprietăți ale operației de înmulțire a numerelor întregi le putem considera și ca exemple de proprietăți ale operației de înmulțire a numerelor raționale, numerele întregi fiind și numere raționale. Ne putem referi la aceste exemple, deoarece operația de înmulțire cu numere întregi se face la fel ca și atunci cînd o considerăm că o facem cu numere raționale.

Comutativitatea înmulțirii numerelor raționale se enunță:

Oricare ar fi numerele raționale a și b avem

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

Asociativitatea înmulțirii numerelor raționale se enunță:

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c avem

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Din această cauză, vom conveni ca prin $a\cdot b\cdot c$ să înțelegem ori $(a\cdot b)\cdot c$ ori $a\cdot(b\cdot c)$. Astfel în loc de $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 7\right]\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)$ vom scrie $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 7\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)$ și, de asemenea, în loc de $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[7\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)\right]$ vom scrie tot $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 7\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)$.

Pentru trei numere raționale $-\frac{3}{4}$, 2, $-\frac{5}{2}$ avem

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[2+\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8};$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[2+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{15}{8}=\frac{3}{8}.\right.$$

Deducem că

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[2+\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right).$$

O astfel de proprietate este adevărată și pentru alte trei numere raționale, oricare ar fi ele. Această proprietate, în care intervin atît operația de adunare a numerelor raționale cît și cea de înmulțire a numerelor raționale, se numește *distributivitatea înmulțirii față de adunare* și se enunță:

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c avem

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Este adevărată și proprietatea care se numește *distributivitatea înmulțirii față de scădere* care se enunță:

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c avem

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

Într-adevăr, a, b, c fiind numere raționale, datorită distributivității înmulțirii față de adunare avem

$$a\cdot[(b-c)+c]=a\cdot(b-c)+a\cdot c.$$

Dar $(b-c)+c=b$. Deci

$$a\cdot b=a\cdot(b-c)+a\cdot c,$$

ceea ce, conform definiției scăderii a două numere raționale, se scrie

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

Exemplu.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[2-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{9}{2}=-\frac{27}{8},$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\frac{15}{8}=-\frac{27}{8},$$

deci

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[2-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right).$$

Observăm că:

$$\frac{8}{5}\cdot 1=\frac{8}{5};\ 1\cdot\frac{8}{5}=\frac{8}{5};\ \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 1=-\frac{2}{3};\ 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

Rezultă proprietatea care exprimă faptul că numărul rațional 1 este *element neutru* la înmulțirea numerelor raționale și care se enunță:

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$; b) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$; c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$;

d) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$; e) $\left(-\frac{16}{25}\right)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$;

f) $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; g) $\frac{1}{-}\cdot\left(-1\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)$;

h) $0{,}205\cdot(-100{,}2)$; i) $0{,}8\cdot\left(0{,}5-\frac{3}{4}\right)$;

j) $\left(\frac{1}{324}-\frac{7}{150}-\frac{17}{240}\right)\cdot\left(0{,}5-\frac{1}{2}\right)$; k) $(41-751{,}001)\cdot 10\,000$.

10. INVERSUL UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Prin inversul numărului rațional $\frac{3}{5}$ înțelegem numărul rațional $\frac{5}{3}$. Prin inversul numărului rațional 4 înțelegem numărul rațional $\frac{1}{4}$. Prin inversul numărului rațional $-\frac{3}{5}$, înțelegem numărul rațional $-\frac{5}{3}$. Numărul rațional 0 nu are invers, deoarece $\frac{1}{0}$ nu este număr rațional, orice număr rațional avînd numitorul diferit de 0 (zero).

Observație. Inversul unui număr rațional a, diferit de zero, se notează prin a^{-1}.

Deci dacă $a=\frac{3}{5}$, atunci $a^{-1}=\frac{5}{3}$. Dacă $a=4$, atunci $a^{-1}=\frac{1}{4}$. Dacă $a=-\frac{3}{5}$, atunci $a^{-1}=-\frac{5}{3}$.

Se constată că

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=1;\quad \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=1;\quad 4\cdot\frac{1}{4}=1;\quad \frac{1}{4}\cdot 4=1;$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=1;\quad \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=1.$$

În general:

Produsul dintre un număr rațional și inversul său este egal cu 1.

Să determinăm, acum, inversul produsului $\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)$ cu ajutorul inverșilor factorilor $\frac{3}{5}$ și $-\frac{8}{7}$ ai acestui produs. Să notăm

$$a=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)$$

și fie b inversul lui a, care este diferit de zero. Știm că

$$a\cdot b=1.$$

deci, înmulțind, mai întîi, cu b ambii membri ai egalității $a=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)$ obținem $a\cdot b=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot b$ sau $1=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot b$

Ținînd seama de simetria relației de egalitate între numere raționale, obținem $\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot b=1$. Înmulțind, apoi, cu $\frac{5}{3}$, inversul lui $\frac{3}{5}$, ambii membri ai egalității $\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\ }{7}\right)\cdot b=1$, obținem $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot b=\frac{5}{3}\cdot 1$ sau $\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot b=\frac{5}{3}$, deoarece $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=1$. Înmulțind, în sfîrșit, cu $-\frac{7}{8}$, inversul lui $-\frac{8}{7}$, ambii membri ai egalității $\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot b=\frac{5}{3}$ obținem $\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot b=\left(-\frac{7}{\ }\right)\cdot\frac{5}{3}$ sau $b=\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{5}{3}$, deoarece $\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)=1$.

Am ajuns la concluzia că inversul produsului $\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)$ este produsul $\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$, deoarece $\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$, datorită comutativității înmulțirii numerelor raționale.

În general:

Inversul unui produs de numere raționale, ai căror factori sînt diferiți de zero, este produsul inverșilor factorilor.

11. ÎMPĂRȚIREA

În egalitatea

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}=-\frac{21}{10},$$

prin care se definește produsul numerelor raționale $-\frac{3}{5}$ și $\frac{7}{2}$, putem pune în evidență oricare din factori în felul următor

$$\left(-\frac{21}{10}\right):\frac{7}{2}=-\frac{3}{5},\qquad \left(-\frac{21}{10}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{2}.$$

Spunem că $-\frac{3}{5}$ este *cîtul* între $-\frac{21}{10}$ și $\frac{7}{2}$ obținut prin *împărțirea* lui $-\frac{21}{10}$ la $\frac{7}{2}$. Pe $-\frac{21}{10}$ îl numim *deîmpărțit*, iar pe $\frac{7}{2}$ *împărțitor*. Analog, $\frac{7}{2}$ este *cîtul* împărțirii *deîmpărțitului* $-\frac{21}{10}$ la *împărțitorul* $-\frac{3}{5}$. În cazul în care se găsește un număr rațional, dar numai unul singur, care să fie cîtul împărțirii între două numere raționale, spunem că împărțirea se poate efectua între cele două numere raționale

Nu putem împărți un număr rațional cu 0. Într-adevăr, ca să aibă sens $\left(-\frac{3}{5}\right):0$ trebuie să existe un număr rațional a astfel încît

$$a\cdot 0=-\frac{3}{5},$$

ceea ce nu se poate, deoarece $a\cdot 0=0$. Nu are sens nici $0:0$, deoarece sînt mai multe numere raționale, de exemplu, $-\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, 3, astfel încît $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0=0$, $\frac{4}{5}\cdot 0=0{,}3\cdot 0=0$.

În general:

Dacă a și b sînt două numere raționale astfel încît $b\neq 0$, cîtul între a și b, notat prin $a:b$ sau $\frac{a}{b}$, este acel număr rațional c, pentru care $a=b\cdot c$.

Se scrie

$$c=a:b \text{ sau } c=\frac{a}{b}$$

și se citește „c este egal cu a împărțit la b".

Utilizînd noțiunea de invers al unui număr rațional, vom arăta cum se obține cîtul între două numere raționale.

Avînd egalitatea

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}=-\frac{21}{10},$$

să înmulțim ambii membri ai acestei egalități cu numărul rațional $\frac{2}{7}$, inversul lui $\frac{7}{2}$. Avem

$$\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}\right]\cdot\frac{2}{7}=\left(-\frac{21}{10}\right)\cdot\frac{2}{7},$$

sau, avînd în vedere că $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}\right]\cdot\frac{2}{7}=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 1=-\frac{3}{5}$; avem

$$-\frac{3}{5}=\left(-\frac{21}{10}\right)\cdot\frac{2}{7}.$$

Dar $\left(-\frac{21}{10}\right):\frac{7}{2}=-\frac{3}{5}$, conform definiției împărțirii unui număr rațional la un număr rațional, avînd $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}=-\frac{21}{10}$. Deci

$$\left(-\frac{21}{10}\right):\frac{7}{2}=\left(-\frac{21}{10}\right)\cdot\frac{2}{7}.$$

Analog,

$$\left(-\frac{21}{10}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{21}{10}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right).$$

În general:

Oricare ar fi numerele raționale a și $b \neq 0$, cîtul între a și b este egal cu produsul dintre a și inversul lui b.

Vom spune că *efectuăm* cîtul $a : b$ atunci cînd determinăm numărul rațional care este cîtul între numerele raționale a și b.

Exemplu. Să se efectueze cîtul $\left(-\frac{3}{5}\right):\frac{4}{7}$. Avem

$$\left(-\frac{3}{5}\right):\frac{4}{7}=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{4}=-\frac{21}{20}.$$

Trebuie reținut că, *operația de împărțire între două numere raționale se poate efectua, oricare ar fi aceste numere raționale, în care împărțitorul este diferit de zero.*

Exemplu. Să se efectueze cîtul $(-2):3$. Avem

$$(-2):3=(-2)\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}.$$

Trebuie reținut că, *operația de împărțire între două numere întregi se poate efectua, oricare ar fi aceste numere întregi, în care împărțitorul este diferit de zero, rezultatul împărțirii fiind un număr rațional.*

Avem

$$\frac{5}{4}:1=\frac{5}{4},\ \left(-\frac{3}{2}\right):1=-\frac{3}{2}.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între orice număr rațional și 1 este acel număr, adică

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$a:1=a.$$

Avem

$$1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5},\ 1:\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între 1 și orice număr rațional, diferit de zero, este inversul acelui număr, adică

Oricare ar fi numărul rațional a, diferit de zero, avem

$$1:a=a^{-1}\quad\text{sau}\quad\frac{1}{a}=a^{-1}.$$

Avem

$$\frac{4}{3}:(-1)=-\frac{4}{3},\ \left(-\frac{5}{6}\right):(-1)=\frac{5}{6}.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între orice număr rațional și -1 este opusul acelui număr rațional, adică

Oricare ar fi numărul rațional a avem

$$a:(-1)=-a.$$

Avem

$$(-1):\frac{4}{3}=-\frac{3}{4},\ (-1):\left(-\frac{8}{9}\right)=\frac{9}{8}.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între -1 și orice număr rațional, diferit de zero, este opusul inversului acelui număr rațional, adică

Oricare ar fi numărul rațional a, diferit de zero, avem

$$(-1):a=-a^{-1}.$$

Avem

$$0:\frac{7}{6}=0;\ 0:\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Rezultă proprietatea care arată următoarele: cîtul între 0 și orice număr rațional, diferit de zero, este 0, adică

Oricare ar fi numărul rațional a, diferit de zero, avem

$$0:a=0.$$

Vom pune în evidență următoarele două proprietăți în care intervin relația de egalitate între numere raționale și operația de împărțire între numere raționale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c, unde $c \neq 0$, dacă $a=b$, atunci $a:c=b:c$.

În loc de $a:c=b:c$ vom scrie și $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

Altfel spus, dacă împărțim cu același număr rațional, diferit de zero, numerele raționale care sînt cei doi membri ai unei egalități între numere raționale, obținem numere raționale egale.

Oricare ar fi numerele raționale a, b, c și d, unde $c \neq 0$ și $d \neq 0$, dacă $a=b$ și $c=d$, atunci $a:c=b:d$.

În loc de $a:c=b:d$ vom scrie și $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Altfel spus, prin împărțirea membru cu membru a două egalități între numere raționale, împărțitorii fiind diferiți de zero, obținem o egalitate între numere raționale.

Să se efectueze:

a) $\left(-\frac{4}{6}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$; b) $\left(-\frac{1}{5}\right):\frac{4}{5}$; c) $(-2):\left(-\frac{4}{5}\right)$;

d) $\left(-\frac{25}{36}\right):(-5)$; e) $\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3}{4}}{3}$; f) $\dfrac{3\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{\frac{1}{240}+\frac{1}{360}-\frac{7}{120}}$.

g) $0{,}03:\left(-\frac{1}{100}\right)$; h) $104{,}04:(-0{,}102)$; i) $285{,}93:(-40{,}5)$.

12. FACTOR COMUN

În membrul al doilea al egalității

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[2+\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right),$$

$-\frac{3}{4}$ apare atît în produsul $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2$, cît și în produsul $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$. Spunem că $-\frac{3}{4}$ este *factor comun* în ambele produse.

În membrul întîi al egalității considerate $-\frac{3}{4}$ apare o singură dată, înmulțit cu suma celorlalți factori ai produselor $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2$ și $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$. Se spune că $-\frac{3}{4}$ este *scos în factor comun*. La scoaterea în factor comun, egalitatea de mai sus o scriem astfel

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)\left[2+\left(-\frac{5}{2}\right)\right].$$

EXERCIȚII

Să se calculeze:

a) $\frac{222}{4\,444}\cdot\frac{137}{138}+\frac{222}{4\,444}\cdot\frac{1}{138}$;

b) $\frac{323}{450}\cdot\frac{240}{799}+\frac{323}{450}\cdot\frac{60}{799}+\frac{499}{799}\cdot\frac{323}{450}$.

13. PUTEREA CU EXPONENT NUMĂR NATURAL AL UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Fie numărul rațional $-\frac{3}{5}$. Înmulțindu-l pe $-\frac{3}{5}$ cu el însuși obținem $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$. În loc de $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$ vom scrie $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$. Vom spune că $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ este *pătratul* lui $-\frac{3}{5}$ sau *puterea a doua a* lui $-\frac{3}{5}$. Vom mai spune că $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ se obține prin *ridicarea lui* $-\frac{3}{5}$ *la puterea a doua*. Înmulțindu-l pe $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ cu $-\frac{3}{5}$ obținem $\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$, ceea ce se mai poate scrie $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$ sau $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$. Acest produs îl vom nota cu $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ și-l vom numi *cubul* lui $-\frac{3}{5}$ sau *puterea a treia* a lui $-\frac{3}{5}$. Vom spune că $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ se obține prin *ridicarea lui* $-\frac{3}{5}$ *la puterea a treia.*

Vom spune că $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$ este 1 și că $-\frac{3}{5}$ este $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$.

Fiind dată o putere a lui $-\frac{3}{5}$ obținem o altă putere a lui $-\frac{3}{5}$ făcînd produsul între acea putere a lui $-\frac{3}{5}$ și $-\frac{3}{5}$.

Exemplu.

$\left(-\frac{3}{5}\right)^4=\left(-\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$. Deci $\left(-\frac{3}{5}\right)^4=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$

sau

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^4=\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right).$$

Deci

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^4=\underbrace{\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}_{4\text{ factori}}.$$

În cazul numărului rațional 0, nu se definește 0^0, dar $0^1=0$, $0^2=0\cdot 0=0$ ș.a.m.d.

În general:

Dacă a este un număr rațional și n un număr natural astfel încît $n\neq 0$ și $n\neq 1$, atunci

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ factori}},$$

Apoi $a^1 = a$, *iar dacă* $a \neq 0$, *atunci* $a^0 = 1$.

Numărul rațional a se numește *bază*, iar numărul întreg n se numește *exponent*. a^n se citește, „puterea a n-a a lui a“. Astfel a^6 este puterea a șasea a lui a.

14. ÎNMULȚIREA DE PUTERI CU ACEEAȘI BAZĂ

Avem

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}_{4\text{ factori}}\cdot\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}_{2\text{ factori}}=$$

$$=\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}_{6\text{ factori}}=$$

$$=\left(-\frac{2}{5}\right)^6=\left(-\frac{2}{5}\right)^{4+2}.$$

În general:

Dacă a este un număr rațional, iar m și n sînt numere naturale, atunci

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}.$$

Deci:

Produsul puterilor cu aceeași bază este o putere a aceleiași baze, iar exponentul este suma exponenților factorilor.

15. PUTEREA UNEI PUTERI

Avem

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right]^2=\left(-\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^3=$$

$$=\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=$$

$$=\left(-\frac{2}{5}\right)^6=\left(\frac{2}{5}\right)^{3\cdot2}$$

În general:

Dacă a este un număr rațional, iar m și n sînt numere naturale, atunci

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}.$$

Deci:

Puterea unui număr rațional se ridică la o putere păstrînd baza puterii acelui număr și luînd ca exponent produsul exponenților.

16. PUTEREA UNUI PRODUS

Putem scrie:

$$\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot4\right]^2=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot4\right]\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot4\right]=$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\cdot(4\cdot4)=\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot4^2.$$

În general:

Un produs de numere raționale se ridică la o putere ridicînd fiecare factor la acea putere și înmulțind puterile obținute.

17. ÎMPĂRȚIREA DE PUTERI CU ACEEAȘI BAZĂ

Avem

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^4:\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]:\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]=$$

$$=\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=$$

$$=\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\left(-\frac{2}{5}\right)^{4-2}.$$

În general:

Dacă a este un număr rațional, diferit de 0, iar m și n sînt numere naturale astfel încît $m \geq n$, atunci

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Deci:

Cîtul puterilor cu aceeași bază, diferită de 0, este o putere a aceleiași baze, iar exponentul este diferența între exponentul deîmpărțitului și exponentul împărțitorului.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)$; b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{27}\right)$;

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{200}+\frac{1}{2^{201}}$; d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}:\frac{1}{2^{98}}$; e) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{99}:\frac{1}{5^{98}}$;

f) $-0{,}0001:\frac{1}{10^5}$; g) $(-0{,}1)^3\cdot(-1{,}2)^2\cdot(-10)^6$.

Să se efectueze:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$; 3) $1\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$;

5) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$; 6) $1-\frac{4}{5}$; 7) $\frac{7}{8}-1$; 8) $1-\frac{7}{8}$; 9) $\frac{1}{2}-2$;

10) $\frac{1}{10}-10$; 11) $\frac{1}{100}-100$; 12) $\frac{2}{3}-3$; 13) $1-\frac{14}{15}$;

14) $\frac{13}{15}-1$; 15) $\frac{1}{20}-\frac{3}{0}-\frac{7}{60}$; 16) $\frac{1}{24}-\frac{3}{16}-\frac{5}{36}$; 17) $\frac{1}{270}-\frac{7}{180}-\frac{1}{450}$;

18) $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$; 19) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$; 20) $\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$; 21) $\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{-3}{11}\right)$;

22) $(-3)\cdot\frac{1}{6}$; 23) $(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$; 24) $\frac{2}{7}\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)$;

25) $(-5)\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$; 26) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{-4}\cdot(-6)$; 27) $\left(-\frac{4}{9}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$;

28) $\left(-\frac{1}{15}\right):\frac{1}{3}$; 29) $\left(-\frac{25}{36}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)$; 30) $\left(-\frac{1}{24}\right):\frac{-1}{-8}$;

31) $\frac{-6}{-49}:\frac{3}{-7}$; 32) $\frac{-15}{28}:\frac{-3}{-7}$; 33) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; 34) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$;

35) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; 36) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; 37) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$; 38) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$; 39) $\left(\frac{1}{102}\right)^2$;

40) $\left(-\frac{1}{10}\right)^5:\left(\frac{1}{10}\right)^3$; 41) $(-240)\cdot\left(\frac{1}{48}-\frac{7}{60}+\frac{1}{24}\right)$;

42) $\frac{16}{19}\cdot\left(\frac{1}{24}-\frac{33}{32}-\frac{3}{16}\right)$; 43) $\left(\frac{5}{280}-\frac{1}{70}-\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{11}{56}\right)$;

44) $80\cdot\left[\frac{1}{40}+\frac{1}{83}\cdot\left(\frac{1}{120}-\frac{7}{240}-1\frac{1}{60}\right)\right]$; 45) $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}$;

46) $3-\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{3}}$; 47) $-1{,}25+(-12{,}5)-2{,}5-0{,}025+(-12\,500)$;

48) $2{,}45+(-45{,}2)$; 49) $4{,}4+(-444{,}4)$; 50) $199{,}99-2\,100$;

51) $(-2{,}4)\cdot(-200)$; 52) $(-4{,}05)\cdot(-1\,002)$;

53) $(-20{,}05)\cdot(-100{,}4)$; 54) $(99{,}9-100)^2$; 55) $(-240):(-1\,000)$;

56) $(-4{,}5):(-100)$; 57) $(-4{,}2):(-0{,}07)$;

58) $(-16\,402{,}5):(-4{,}05)$; 59) $0{,}1^3+(-0{,}01)^2$;

60) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0{,}75\right):\left(-\frac{1}{12}\right)$; 61) $\left(0{,}5-\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{1}{6}\right)^3$;

62) $0{,}3-\frac{3}{10}:\left(-\frac{1}{60}\right)$; 63) $(-0{,}6)\cdot 1{,}(6)-\frac{5}{6}$; 64) $0{,}1(34)-\frac{132}{990}$;

65) $\left[0{,}2+\frac{18}{31}\cdot\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{45}-\frac{7}{30}\right)\right]:0{,}01$;

66) $\left(\cfrac{\frac{1}{2}}{2}+\cfrac{1}{\frac{1}{2}}-\cfrac{\frac{1}{0{,}5}}{0{,}5}\right):(-2+0{,}25)$;

67) $\left\{1-\frac{18}{19}\cdot[0{,}5+0{,}(5)]\right\}:(1-101)$; 68) $\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}-(-0{,}1)^3$;

69) $0{,}375:\cfrac{322\cdot(-0{,}1)}{\frac{1}{240}+\frac{1}{540}+\frac{2}{225}}$; 70) $\cfrac{7\frac{1}{2}}{10\cdot(0{,}25+0{,}25:0{,}5)}$;

71) $(-90)\cdot\left\{\frac{2}{9}-\left[\frac{1}{90}+\frac{1}{179}\cdot\left(1\frac{1}{36}-2\frac{1}{45}\right)\right]:0{,}05\right\}$.

72) Să se efectueze:

$[-10\cdot(1{,}96-24{,}5)+4{,}05\cdot 20{,}4+2\,448:1{,}2]:(-0{,}1)^3$.

73) Care număr este mai mare: a) $(0{,}1)^3$ sau $(0{,}1)^5$?

b) $(0{,}25)^{60}$ sau $(0{,}25)^{70}$? c) $(-0{,}1)^3$ sau $(-0{,}1)^5$?

d) $(0{,}1)^8$ sau $(0{,}01)^8$? e) $(1{,}1)^4$ sau $(1{,}1)^5$?

f) $(-2{,}45)^{12}$ sau $(-2{,}45)^{13}$?

74) Să se calculeze:

$$\left|\frac{4\,322}{4\,323}-\frac{4\,323}{4\,324}\right|+|1{,}01-1{,}001|-\left|-\frac{4\,323}{4\,324}\right|+\left|-\frac{4\,322}{4\,323}\right|.$$

75) Să se calculeze:

a) $\left(-\frac{1}{10}-\frac{1}{100}-\frac{1}{1\,000}-\frac{1}{10\,000}\right):(-0{,}1111)$;

b) $(5{,}8+246{,}24\cdot 576{,}248)\cdot\left(0{,}5-\frac{1}{2}\right)$.

76) Să se afle toate valorile pe care le poate lua expresia:

$(-1)^{2k}+(-1)^{2k+1}+(-1)^k\cdot\frac{1}{2}+(-1)^{k+1}\left(-\frac{3}{4}\right)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

77[d]) Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziţii:

a) Oricare ar fi numerele raţionale a, c mai mari decît zero şi oricare ar fi numărul natural b, dacă $a^b=c^b$ atunci $a=c$;

b) Oricare ar fi numerele raționale a, b, c, dacă $a \neq b$ și $b \neq c$ atunci $a \neq c$;

c) Oricare ar fi numerele raționale a, b, dacă $a^2 = b^2$ atunci $a = b$.

78^d) Care este valoarea de adevăr a următoarei propoziții:
Oricare ar fi numerele raționale a, b, c, dacă $b \neq 0$, $c \neq 0$ și $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$, atunci $b = c$?

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

Să se efectueze:

1) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$; 2) $\frac{4}{8} \cdot \left(-\frac{16}{24}\right)$; 3) $\left(-\frac{16}{24}\right) : \left(-1\frac{1}{9}\right)$;

4) $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot 0{,}75\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 5) $99{,}8 + 198 + 1{,}202$;

6) $2{,}4 + (-4{,}75)$; 7) $2{,}1 - 400{,}1$; 8) $10 \cdot (-2{,}4)$; 9) $100 \cdot (-0{,}7)$;

10) $9{,}08 \cdot 40{,}5$; 11) $(-600{,}4) \cdot (-2005)$; 12) $0{,}2^3 + (-0{,}01)^2$;

13) $164{,}22 : 0{,}805$; 14) $2{,}04 + 2{,}04 \cdot 100$; 15) $4 + 2 \cdot (4{,}02 - 8{,}1)$;

16) $-1\,000 \cdot [5 + (-10{,}5)^2 + 3{,}24 : 1{,}8 + (19{,}4 - 1{,}69) : 10]$.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri

1) Să se arate că din 3 numere naturale oarecare se pot găsi două a căror sumă să se dividă cu 2.

2) Să se calculeze:

$$\frac{1}{2}(1\,984 \cdot 1\,983 - 2 - 4 - 6 - \ldots - 3\,964 - 3\,966)$$

G.M. nr. 5/1985 (enunț modificat)

3) Fiecare dintre numerele x, y, z este număr rațional diferit de zero, iar $n \in \mathbb{N}$. Se mai știe că numerele $(-3)^6 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^{n+1}$ și $(-2)^{11} \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot z^{n+3}$ au același semn.
Să se afle semnul numărului x.

4) Să se efectueze:

a) $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}$;

b) $\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 16}$.

Indicație: Calculați a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$.

Ce observați? Puteți aplica cele observate la rezolvarea exercițiului? Rezolvați și exercițiile și problemele de la 9 la 27 pagina 186.

Capitolul VI

RĂDĂCINA PĂTRATĂ

CHESTIUNI PREGĂTITOARE

Dacă un număr rațional a îndeplinește condiția $a \geq 0$, atunci numărul a se numește *nenegativ*.

Exemple. 2 este număr nenegativ, 4,5 este număr nenegativ, $\frac{2}{3}$ este număr nenegativ, 0 este număr nenegativ etc.

Prin *partea întreagă a numărului rațional* x, notată $[x]$, înțelegem cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Așadar $[x] \leq x < [x] + 1$.

Exemple.

$$[3{,}7] = 3; \left[2\frac{1}{3}\right] = 2; [-3{,}2] = -4; [0] = 0.$$

PĂTRATUL UNUI NUMĂR NATURAL

Putem scrie: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$ etc.

Numărul 4 este pătratul numărului 2. Spunem că 4 este pătrat perfect. De asemenea, numerele 9, 16, 100, 625 etc. sînt pătrate perfecte.

Numerele 3, 15, 67 etc. nu sînt pătrate perfecte.

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
13	169
99	9 801

Să examinăm tabelul alăturat.

Din acest tabel se vede că dacă numărul natural are o cifră, pătratul său are o cifră sau 2 cifre. Dacă numărul natural are două cifre, pătratul său are trei cifre sau patru cifre. Dacă numărul natural are n cifre ($n \in \mathbb{N}^*$), atunci pătratul său are $2n - 1$ sau $2n$ cifre.

1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ DINTR-UN NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT

Din tabelul alăturat se vede că pătratul numărului natural 2 este numărul natural 4. Analog, în același tabel pătratul fiecărui număr din coloana întîi este numărul natural ce-i corespunde în coloana a doua.

Vom spune că rădăcina pătrată a numărului 4, pe care o notăm cu $\sqrt{4}$, este acel număr natural pe care ridicîndu-l la pătrat obținem 4. Acest număr este 2. Scriem: $\sqrt{4} = 2$. Citim: rădăcina pătrată din 4 este 2. Analog, vom scrie $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$.

Definiție. *Dacă un număr natural* **k** *este pătratul unui număr natural* x, *atunci* x *se numește rădăcina pătrată a numărului natural* **k**.

Putem scrie $\sqrt{3^2} = 3$; $\sqrt{9^2} = 9$.

EXERCIȚII

Să se calculeze:

a) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$; b) $\sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{0}$; c) $\sqrt{281^2} + \sqrt{4594^2}$.

2. RĂDĂCINA PĂTRATĂ DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL NENEGATIV

Știm că $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Spunem că $\frac{2}{3}$ este rădăcina pătrată a lui $\frac{4}{9}$ și scriem $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Analog, vom scrie $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Știm că $0{,}5^2 = 0{,}25$. Spunem că 0,5 este rădăcina pătrată a lui 0,25 și scriem $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$. Analog, vom scrie: $1{,}25^2 = 1{,}5625$. Spunem că 1,25 este rădăcina pătrată a lui 1,5625 și scriem $\sqrt{1{,}5625} = 1{,}25$.

Definiție. *Dacă un număr rațional nenegativ* **u** *este pătratul unui număr rațional nenegativ* x, *atunci* x *se numește rădăcina pătrată a lui* **u**.

EXERCIȚII

Să se calculeze:

a) $\sqrt{\frac{1}{25}}$; b) $\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2}$; c) $\sqrt{0{,}49}$; d) $\sqrt{0{,}64}$.

3. RĂDĂCINA PĂTRATĂ CU APROXIMAȚIE DATĂ

RĂDĂCINA PĂTRATĂ CU APROXIMAȚIE DE O UNITATE PRIN LIPSĂ DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL NENEGATIV

Numărul 7 este cuprins între pătratele a două numere naturale consecutive și anume între pătratul lui 2 și pătratul lui 3. Putem scrie: $2^2 < 7 < 3^2$. Spunem că 2 este rădăcina pătrată cu aproximație

de o unitate prin lipsă a lui 7. Numărul 3 este rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin adaos a numărului 7. Diferența $7 - 2^2$, adică 3, se numește restul rădăcinii pătrate cu aproximație de o unitate prin lipsă a numărului 7. Restul se notează cu R. În exemplul nostru $R = 3$.

Analog, putem scrie $3^2 = 9 < 4^2$. În acest caz, $R = 9 - 3^2 = 0$.

Analog, 12,45 este cuprins între pătratele a două numere naturale consecutive. Putem scrie: $3^2 < 12{,}45 < 4^2$. Numărul 3 este rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a numărului 12,45, iar 4 este rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin adaos a numărului 12,45. Restul este în acest caz: $R = 12{,}45 - 3^2 = 3{,}45$.

De asemenea, putem scrie: $2^2 < \frac{11}{2} < 3^2$. Numărul 2 este rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a numărului $\frac{11}{2}$.

Se vede că rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a numărului $\frac{11}{2}$, adică 2, este egală cu rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a numărului 5 care este partea întreagă a numărului $\frac{11}{2}$.

Definiție. *Rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă dintr-un număr rațional nenegativ* **a** *este numărul natural* **x** *astfel încît:*

$$x^2 \leqslant a < (x + 1)^2.$$

x + 1 se numește rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin adaos a numărului rațional nenegativ **a**.

Altfel spus:

Numim rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a unui număr rațional nenegativ **a**, *cel mai mare număr natural* **x** *al cărui pătrat este mai mic sau egal cu* **a**.

Restul este $R = \mathbf{a} - \mathbf{x}^2$.

Avem: $0 \leqslant R < 2\mathbf{x} + 1$.

Într-adevăr, din $x^2 \leqslant a < (x + 1)^2$ deducem: $0 \leqslant a - x^2 < (x + 1)^2 - x^2$ adică $0 \leqslant a - x^2 < (x + 1)(x + 1) - x^2$ adică $0 \leqslant a - x^2 < 2x + 1$. Dar $a - x^2 = R$ și deci $0 \leqslant R < 2x + 1$.

Rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă dintr-un număr rațional nenegativ este egală cu rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă din partea întreagă a acelui număr rațional nenegativ.

Fie a un număr rațional nenegativ. Notăm cu b partea sa întreagă (b poate fi și zero).

Putem scrie $a = b + c$, unde $0 \leqslant c < 1$.

Dacă x este rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a lui b avem $x^2 \leqslant b < (x + 1)^2$ în care b este mai mic decît $(x + 1)^2$ cu un număr mai mare sau egal cu 1. Dacă la b adunăm pe c care este mai mic decît 1 obținem un număr $b + c$ care este, de asemenea, mai mic decît $(x + 1)^2$. Avem:

$$x^2 \leqslant b + c < (x + 1)^2$$

adică

$$x^2 \leqslant a < (x + 1)^2.$$

Aplicații:

1) Să se calculeze rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a numărului 2.

Soluție. Aceasta este evident 1 pentru că avem:

$$1^2 < 2 < 2^2.$$

2) Să se calculeze rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă din 8,5.

Soluție. Aceasta înseamnă să găsim un număr natural x astfel încît:

$$x^2 < 8 < (x + 1)^2.$$

Evident $x = 2$.

RĂDĂCINĂ PĂTRATĂ CU APROXIMAȚIE DE $\frac{1}{10}$ PRIN LIPSĂ DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL NENEGATIV

Să considerăm numărul $\frac{7}{3}$. Cel mai mare număr rațional de forma $\frac{x}{10}$ $(x \in N)$ al cărui pătrat este mai mic decît $\frac{7}{3}$ este $\frac{15}{10}$.

Putem scrie:

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 < \frac{7}{3} < \left(\frac{16}{10}\right)^2.$$

Spunem că $\frac{15}{10}$ este rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin lipsă a numărului $\frac{7}{3}$. Numărul $\frac{16}{10}$ este rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin adaos a numărului $\frac{7}{3}$. Știm că $\frac{15}{10} = 1{,}5$. Mai putem spune deci că 1,5 este rădăcina pătrată cu aproximație de 0,1 prin lipsă a numărului $\frac{7}{3}$.

Definiție. *Rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$, prin lipsă, din numărul rațional nenegativ a este numărul rațional de forma* $\frac{x}{10}$ $(x \in N)$ *astfel încît:*

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 \leqslant a < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2.$$

Putem scrie această dublă inegalitate astfel: $\frac{x^2}{100} \leqslant a < \frac{(x+1)^2}{100}$ sau $x^2 \leqslant 100a < (x + 1)^2$. Aceasta înseamnă că x este rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă din $100a$.

Aplicații:

1) Să se calculeze rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin lipsă a numărului 1,712.

Soluție. Înmulțim numărul 1,712 cu 100 și obținem 171,2. Rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a numărului 171,2 este egală cu rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a părții întregi a numărului 171,2 adică a lui 171. Această rădăcină pătrată este 13. Deci rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin lipsă din 1,712 este $\frac{13}{10}$, adică 1,3. Rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin adaos a numărului 1,712 este 1,4. Să facem verificarea. Într-adevăr, avem $1{,}3^2 < 1{,}712 < 1{,}4^2$ adică $1{,}69 < 1{,}712 < 1{,}96$.

2) Să se calculeze rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin lipsă din $\frac{10}{7}$.

Soluție: Procedăm în felul următor:

$$\frac{10}{7} \cdot 100 = \frac{1\,000}{7} = 142 + \frac{6}{7}.$$

Rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a lui 142 este 11. Deci rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ din $\frac{10}{7}$ este 1,1.

În mod asemănător se definește rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{100}$ prin lipsă dintr-un număr rațional nenegativ.

Definiție. *Rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{100}$ prin lipsă din numărul rațional nenegativ* **a** *este numărul rațional de forma* $\frac{x}{100}$ $(x \in N)$ *astfel încît:*

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 \leqslant a < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2.$$

Aplicație. Să se calculeze rădăcina pătrată cu aproximație de 0,01 din 0,00065.

Soluție. Înmulțind numărul 0,00065 cu 10 000 obținem numărul 6,5. Calculăm rădăcina pătrată cu aproximație de o unitate prin lipsă a lui 6,5 și obținem 2. Împărțim pe 2 la 100 și obținem 0,02.

Spunem că 0,02 este rădăcina pătrată cu aproximație de 0,01 prin lipsă din 0,00065.

Verificare:

$$0{,}02^2 < 0{,}00065 < 0{,}03^2.$$

În mod asemănător se definește rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{10\,000}$ etc., prin lipsă, dintr-un număr rațional nenegativ.

4. NUMERE IRAȚIONALE

Să rezolvăm următoarea problemă:

Există un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2? Constatăm că $0^2 \neq 2$; $1^2 \neq 2$; $2^2 \neq 2$; $(-1)^2 \neq 2$; $(-2)^2 \neq 2$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \neq 2$; $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \neq 2$.

Să demonstrăm teorema:

Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Poate exista un număr întreg x astfel încît $x^2 = 2$?

Avem $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $(-1)^2 = 1$, $(-2)^2 = 4$. Nu mai facem încercări, pentru că vom obține numere mai mari decît 2. Deci nu există nici un număr întreg x astfel încît $x^2 = 2$.

Dar oare există un număr rațional x astfel încît $x^2 = 2$?

Să presupunem că există un număr rațional x astfel încît $x^2 = 2$. Atunci putem scrie $x = \frac{a}{b}$ sau $x = -\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N},\ b \neq 0)$. $\frac{a}{b}$ este fracție ireductibilă.

Avem $\frac{a^2}{b^2} = 2$, de unde $a^2 = 2b^2$. Deci a^2 este par. Dacă a^2 este par atunci și a este par. Într-adevăr, dacă a ar fi impar atunci prin ridicarea sa la pătrat am obține un număr impar și nu un număr par. Avem egalitatea: $a = 2q$ $(q \in \mathbf{N})$. Înlocuim pe a cu $2q$ în egalitatea $a^2 = 2b^2$ și obținem $4q^2 = 2b^2$, de unde $2q^2 = b^2$. Deci b^2 este par. Dacă b^2 este par atunci și b este par. Am ajuns la concluzia că a este par și b este par. Deci fracția $\frac{a}{b}$ nu este ireductibilă. Acest lucru este însă absurd, pentru că am presupus că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. Deci nu există nici un număr rațional x astfel încît $x^2 = 2$.

Să demonstrăm următoarea teoremă:

Dacă a și b sînt numere raționale și dacă $ab = 0$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$.

Demonstrație. Dacă $a = 0$ teorema este demonstrată.

Dacă $a \neq 0$, putem înmulți în ambii membri ai egalității cu $\frac{1}{a}$ și avem: $\frac{1}{a} \cdot ab = 0$, de unde $b = 0$.

Să considerăm ecuația:

$$(x-3)(x+3) = 0.$$

Avem $x - 3 = 0$, adică $x = 3$ sau $x + 3 = 0$, adică $x = -3$.

Ecuația $(x-3)(x+3) = 0$ are deci numai două rădăcini $x_1 = 3$ și $x_2 = -3$.

Ecuația $(x-3)(x+3) = 0$ are aceleași rădăcini ca ecuația $x^2 - 9 = 0$ care are aceleași rădăcini ca ecuația $x^2 = 9$. Deci ecuația $x^2 = 9$ are numai două rădăcini $x_1 = \sqrt{9}$ și $x_2 = -\sqrt{9}$.

Ecuația $x^2 = 4$ are, de asemenea, numai două rădăcini:

$$x_1 = \sqrt{4} = 2 \text{ și } x_2 = -\sqrt{4} = -2.$$

Să considerăm ecuația

$$x^2 = 2.$$

După cum am văzut, această ecuație nu are rădăcini raționale. Admitem că ea are, de asemenea, numai două rădăcini x_1 și x_2 care nu sînt numere raționale, ci numere pe care le numim iraționale și pe care le notăm astfel:

$$x_1 = \sqrt{2} \text{ și } x_2 = -\sqrt{2}.$$

Analog, numerele $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ sînt iraționale.

Numărul π, care este raportul dintre lungimea oricărui cerc și diametrul său, este de asemenea, număr irațional.

Numerele raționale împreună cu numerele iraționale pozitive și negative formează mulțimea numerelor reale pe care o notăm cu **R**.

EXERCIȚII

1) Se consideră numerele:

$3;\ 0;\ -2;\ \frac{1}{2};\ 4.$

Care din aceste numere sînt numere naturale?

2) Se consideră numerele:

$-6;\ -4;\ 0;\ 1;\ 2;\ 5;\ 4;\ 2{,}1;\ 0{,}5.$

Care din aceste numere sînt numere întregi?

3) Se consideră numerele:

$1;\ 0;\ -1;\ \frac{1}{3};\ \sqrt{2};\ 2{,}5;\ 0{,}(3);\ 2{,}3(5).$

Care din aceste numere sînt numere raționale?

4) Se consideră numerele:

-2; 0; $0,(13)$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$.

Care din aceste numere sînt numere iraționale?

5) Să se completeze următorul tabel. Primul rînd este completat ca model.

Numărul	Aparține acest număr mulțimii N?	Aparține acest număr mulțimii N*?	Aparține acest număr mulțimii Z?	Aparține acest număr mulțimii Q?	Aparține acest număr mulțimii R?	Aparține acest număr mulțimii R—Q?
0	Da	Nu	Da	Da	Da	Nu
1						
2						
-4						
$\frac{1}{2}$						
0,5						
0,(5)						
$\sqrt{2}$						
$\sqrt{3}$						
$-\sqrt{2}$						
1,41						

5. EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR NATURAL

EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT CU PATRU CIFRE

Să calculăm rădăcina pătrată din pătratul perfect 1 156.

Pentru a obține numere naturale de patru cifre trebuie să ridicăm la pătrat numere naturale de două cifre.

Fie $\overline{xy}$ numărul natural astfel încît:

$$\sqrt{1\,156} = 10x + y$$

de unde $1\,156 = (10x + y)^2 = (10x + y)(10x + y) = 100x^2 + 2 \cdot 10xy + y^2$.

Avem deci: $1\,156 = 100x^2 + 2 \cdot 10xy + y^2$.

Se vede că cea mai mare valoare a lui x este 3.

Într-adevăr, dacă x ar fi egal cu 4 sau cu un număr mai mare decît 4, în membrul al doilea al egalității ar fi un număr mai mare decît 1 156.

Vom sublinia anumite constatări:

Constatarea 1.

Se observă că 3^2 este cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu 11.

Deci dacă $x = 3$ putem scrie

$$1\,156 = 900 + 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot y + y^2,$$

de unde

$$1\,156 - 900 = 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot y + y^2.$$

Putem scrie:

$$256 = (2 \cdot 3 \cdot 10 + y)y.$$

Constatarea 2.

În paranteza $(2 \cdot 3 \cdot 10 + y)$ apare $2 \cdot 3$ adică numărul 3 înmulțit cu 2. Se vede că la $2 \cdot 3 \cdot 10$ trebuie adunat un număr y astfel încît dacă înmulțim rezultatul obținut cu y să obținem 256. Se vede că $y = 4$.

Deci: $\sqrt{1\,156} = 34$.

Practic, pentru a afla rădăcina pătrată din 1156 procedăm în felul următor.

$\sqrt{11'56}$	Despărțim numărul în grupe de cîte două cifre începînd de la dreapta la stînga.
$\sqrt{11'56}$ | 3 9 -2	Ne întrebăm: care este cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu 11? Evident acesta este 3^2. Pe 3 îl punem sus în dreapta, îl ridicăm la pătrat și obținem 9, iar pe 9 îl scădem din 11. Obținem restul parțial 2 (vezi constatarea 1).
$\sqrt{11'56}$ | 3 9 | 6 25|6	Lîngă primul rest parțial 2, coborîm grupa următoare de numere adică pe 56 așa cum se vede. S-a obținut 256. Despărțim la numărul 256 o cifră de la dreapta (25 |6). Pe 3 îl dublăm și obținem 6 pe care îl punem sub 3 (vezi constatarea 2).

$\sqrt{11'56}$	34
9	$64 \cdot 4 = 256$
256	
256	
$===$	

Împărţim pe 25 la 6 şi obţinem 4. Trebuie să găsim un număr natural mai mic sau egal cu 4 astfel încît punîndu-l lîngă 6 în dreapta şi înmulţind numărul care rezultă astfel cu numărul ce trebuie găsit să obţinem cel mai mare număr natural cel mult egal cu 256. Se vede că lîngă 6 trebuie să punem 4 (vezi constatarea 2). Înmulţim pe 64 cu 4 şi obţinem 256 pe care îl scădem din 256. Pe 4 îl punem lîngă 3.

Deci $\sqrt{1\,156} = 34$. Proba: $34^2 = 1\,156$.

EXERCIŢII

Calculaţi:

a) $\sqrt{900}$; b) $\sqrt{324}$; c) $\sqrt{144}$; d) $\sqrt{1\,444}$.

EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT CARE ARE MAI MULT DE PATRU CIFRE

Să calculăm rădăcina pătrată din 15 129.
Se procedează analog cazului precedent:

$\sqrt{1'51'29}$	

Se despart grupe de cîte două cifre de la dreapta spre stînga.

$\sqrt{1'51'29}$	1
1	
$=$	

Extragem rădăcina pătrată din 1 şi obţinem 1 care se trece în dreapta, după cum se vede. Ridicăm pe 1 la pătrat (1^2) şi obţinem 1 pe care îl scriem sub prima cifră a numărului 15 129 şi scăzîndu-l din prima cifră a acestuia obţinem restul parţial 0.

$\sqrt{1'51'29}$	1
1	2
$=5\lfloor 1$	

Coborîm grupa următoare şi anume 51 în locul în care se vede şi despărţim o cifră de la dreapta. Dublăm pe 1 aflat la rezultatul de sus în dreapta şi obţinem 2 care se pune sub 1.

$\sqrt{1'51'29}$	12
1	$22 \cdot 2 = 44$
$=51$	
44	
$=7$	

Pe 5 de jos îl împărţim la 2 şi obţinem cîtul 2. Scriem pe 2 lîngă primul 2 şi rezultatul îl înmulţim cu 2. Am obţinut 44. Scădem pe 44 din 51 şi obţinem restul parţial 7. Numărul 2 convine şi îl punem lîngă 1, sus, după cum se vede.

$\sqrt{1'51'29}$	12
1	$22 \cdot 2 = 44$
$=51$	24
44	
$=72\lfloor 9$	

Coborîm lîngă 7 grupa următoare adică pe 29 şi despărţim o cifră de la dreapta (în cazul nostru pe 9). Îl dublăm pe 12 ($12 \cdot 2 = 24$) şi pe 24 îl punem într-o nouă linie aşezată sub linia unde am scris: $22 \cdot 2 = 44$.

$\sqrt{1'51'29}$	123
1	$22 \cdot 2 = 44$
$=51$	$243 \cdot 3 = 729$
44	
$=729$	
729	
$===$	

Împărţim pe 72 la 24 şi obţinem cîtul 3. Pe 3 îl punem lîngă 24. Numărul obţinut 243, îl înmulţim cu 3 şi obţinem 729. Pe 729 îl scădem din 729 şi obţinem restul 0. Toată lucrarea se aşază după cum se vede în acest ultim paragraf.

În concluzie avem: $\sqrt{15\,129} = 123$.
Proba: $123^2 = 15\,129$.

EXERCIŢII

Să se calculeze: *a*) $\sqrt{22\,500}$; *b*) $\sqrt{256\,036}$; *c*) $\sqrt{2\,958\,400}$; *d*) $\sqrt{96\,040\,000}$; *e*) $\sqrt{107\,584}$; *f*) $\sqrt{82\,083\,600}$; *g*) $\sqrt{4028049}$.

EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR NATURAL CARE NU ESTE PĂTRAT PERFECT

Să calculăm rădăcina pătrată din 35 674 cu aproximaţie de o unitate prin lipsă.

Vom proceda după cum se vede mai jos:

$\sqrt{3'56'74}$	188
1	$28 \cdot 8 = 224$
$2\,56$	$368 \cdot 8 = 2\,944$
$2\,24$	
$=32\,74$	
$29\,44$	
$=3\,30$	

Restul este 330.

Verificarea se face în felul următor:

$$188^2 + 330 = 35\,674.$$

188 este rădăcina pătrată cu aproximaţie de o unitate prin lipsă a numărului 35 674.

Într-adevăr avem:

$$188^2 < 35\,674 < 189^2.$$

EXERCIȚII

Să se calculeze cu aproximație de o unitate prin lipsă:

a) $\sqrt{402}$; b) $\sqrt{254\,017}$.

EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE CU UN NUMĂR DAT DE ZECIMALE EXACTE DINTR-UN NUMĂR NATURAL CARE NU ESTE PĂTRAT PERFECT

Să calculăm rădăcina pătrată din 40 089 cu o zecimală exactă. Aceasta înseamnă că nu mai continuăm calculele după obținerea primei zecimale. În acest mod, calculăm rădăcina pătrată cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin lipsă din 40 089. Înlocuim numărul 40 089 cu numărul egal cu el și anume cu 40 089,00. Dacă dorim să scoatem două zecimale exacte înlocuim numărul 40 089 cu numărul 40 089,0000 ș.a.m.d.

În numărul 4'00'89', 00, despărțim grupe de cîte două cifre de la dreapta spre stînga și calculele se fac după cum urmează. Avem grijă ca atunci cînd ajungem în dreptul virgulei să punem virgula la rezultat.

$\sqrt{4'00'89',00}$	200,2
−00 89 00	$4002 \cdot 2 = 8004$
80 04	
−8 96	

Restul este 8,96. Virgula de la rest se pune sub virgula numărului din care se extrage rădăcina pătrată.

Prima cifră a restului, și anume 8, corespunde cifrei unităților numărului 40 089,00 și anume cifrei 9.

A doua cifră a restului, și anume 9, corespunde cifrei care indică zecimile numărului 40 089,00 adică primului 0 după virgulă etc.

200,2 este rădăcina pătrată cu aproximație de 0,1 prin lipsă a numărului 40 089. Într-adevăr avem:

$$200{,}2^2 < 40\,089 < 200{,}3^2.$$

Proba:

$$200{,}2^2 + 8{,}96 = 40\,089.$$

Avem: $\sqrt{40\,089} \approx 200{,}2$ (semnul $\approx$ se citește „aproximativ egal").

Să se calculeze rădăcina pătrată din 2 cu trei zecimale exacte.

Calculele se fac după cum urmează:

$\sqrt{2,'00'00'00}$	1,414
1 00	$24 \cdot 4 = 96$
96	$281 \cdot 1 = 281$
−4 00	$2\,824 \cdot 4 = 11\,296$
2 81	
1 19 00	
1 12 96	
−6 04	

Proba: $1{,}414^2 + 0{,}000604 = 2.$

Avem: $\sqrt{2} \approx 1{,}414.$

EXERCIȚII

1) Să se calculeze: $\sqrt{15\,376}$; $\sqrt{41\,616}$; $\sqrt{9\,012\,004}$.

2) Să se calculeze cu două zecimale exacte și să se facă proba:

$$\sqrt{7};\ \sqrt{18};\ \sqrt{20}.$$

6. EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL REPREZENTAT PRINTR-O FRACȚIE ZECIMALĂ.

Am văzut că $0{,}4^2 = 0{,}16$. Avem: $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$.
Analog $0{,}05^2 = 0{,}0025$. Avem: $\sqrt{0{,}0025} = 0{,}05$.

1) Să calculăm rădăcina pătrată din 1,5 cu două zecimale exacte, adică să calculăm rădăcina pătrată din 1,5 cu aproximație de 0,01 prin lipsă.

Avem egalitatea:

$$1{,}5 = 1{,}5000.$$

Extragerea rădăcinii pătrate se face la fel ca la numerele naturale cu grija ca atunci cînd ajungem în dreptul virgulei să punem virgula la rezultat. Ne oprim după obținerea celei de a doua zecimale. Scriem:

$\sqrt{1,'50'00}$	1,22
−50	$22 \cdot 2 = 44$
44	$242 \cdot 2 = 484$
−6 00	
4 84	
1 16	

Proba:

$$1{,}22^2 + 0{,}0116 = 1{,}5.$$

1,22 este rădăcina pătrată cu aproximație de 0,01 prin lipsă a numărului 1,5. Într-adevăr, avem: $1,22^2 < 1,5 < 1,23^2$.

Scriem: $\sqrt{1,5} \approx 1,22$.

2) Să extragem rădăcina pătrată dintr-un număr rațional mai mic decît 1 reprezentat printr-o fracție zecimală. Să calculăm de exemplu $\sqrt{0,007}$ cu 3 zecimale exacte și să facem proba. Vom proceda astfel:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0,'00'70'00} & 0,083 \\ \hline 64 & 163 \cdot 3 = 489 \\ \hline =600 & \\ 489 & \\ \hline 111 & \end{array}$$

Proba:

$0,083^2 + 0,000111 = 0,007$. Avem: $\sqrt{0,007} \approx 0,083$.

3) Să se calculeze rădăcina pătrată din 2,37583 cu o zecimală exactă. (Vom folosi numai primele două zecimale, iar celelalte vor fi coborîte la rest.)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2,37583} & 1,5 \\ \hline 1\,37 & 25 \cdot 5 = 125 \\ 1\,25 & \\ \hline =12 & \end{array}$$

Restul va fi 0,12583.

Proba: $1,5^2 + 0,12583 = 2,37583$.

EXERCIȚII

1) Să se calculeze $\sqrt{2,3}$; $\sqrt{1,37415}$ cu două zecimale exacte și să se facă și proba.

2) Să se calculeze cu aproximație de o sutime prin lipsă: $\sqrt{74,7}$.

3) Să se calculeze cu trei zecimale exacte:

a) $\sqrt{0,369694}$; b) $\sqrt{2,5}$.

7. PROPRIETATEA: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$

Să calculăm: $\sqrt{4 \cdot 9}$. După cum se vede: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$.

Analog: $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$.

Dăm fără demonstrație teorema:

Dacă $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$, atunci $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Atragem atenția că $\sqrt{4 + 9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$.

Exemple.

a) $\sqrt{7^4} = \sqrt{(7^2)^2} = 7^2$;

b) $\sqrt{9^6} = 9^3$;

c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^4} = 2 \cdot 3^2$;

d) $\sqrt{2^3 \cdot 3^4} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3^2 \sqrt{2} = 18\sqrt{2}$;

e) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$;

f) $\sqrt{800} = \sqrt{2 \cdot 400} = 20\sqrt{2}$.

Avem:

$$\sqrt{3^2} = 3;\ \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

În general putem scrie;

$$\sqrt{x^2} = |x|, \text{ unde } x \in \mathbf{Q}.$$

Deci putem scrie $\sqrt{x^2} = x$ numai dacă $x \geqslant 0$.

EXERCIȚII

1) Să se calculeze:

a) $\sqrt{4 \cdot 2\,500}$; b) $\sqrt{255^2 \cdot 3\,654^2} : (51 \cdot 3\,654)$; c) $5 - \dfrac{18 \cdot 75}{\sqrt{225^2 \cdot 324^2}}$;

d) $\sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + 12^2}$; e) $\sqrt{(-2)^2 \cdot (-345)^2} + \sqrt{(-24557)^2} + \sqrt{0} + \sqrt{(-1)^{202}}$; f) $\sqrt{3^4} - \sqrt{2^6}$.

2) Să se calculeze

a) $2\sqrt{x^2} - |x|$, $x \in \mathbf{Q}$; b^d) $\sqrt{(x-1)^2} - |1 - x|$, $x \in \mathbf{Q}$.

8. PROPRIETATEA: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $(a \geqslant 0,\ b > 0)$

Să calculăm $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$. După cum se vede $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$.

Analog: $\sqrt{\dfrac{16}{49}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \dfrac{4}{7}$; $\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$.

Dăm fără demonstrație teorema:

Dacă $a \geqslant 0$ și $b > 0$ atunci $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple.

1) $\sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$; 2) $\sqrt{2\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2}$.

Exerciții

Să se calculeze:

a) $\sqrt{\frac{1}{16}}$; b) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; c) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; d) $\sqrt{1\frac{17}{64}}$.

REPREZENTAREA NUMERELOR IRAȚIONALE SUB FORMĂ DE FRACȚII ZECIMALE INFINITE NEPERIODICE

Să considerăm unele valori aproximative ale lui $\sqrt{2}$.

	Prin lipsă	Prin adaos
Cu aproximație de o unitate	1	2
Cu aproximație de o zecime	1,4	1,5
Cu aproximație de o sutime	1,41	1,42
Cu aproximație de o miime	1,414	1,415

Un număr rațional se reprezintă printr-o fracție zecimală finită sau printr-o fracție zecimală infinită periodică.

Un număr irațional se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită neperiodică. În cazul lui $\sqrt{2}$ sau $\sqrt{3}$ această fracție zecimală infinită neperiodică se obține prin procedeul de extragere a rădăcinii pătrate din 2 sau 3.

Avem: $\sqrt{2} = 1,414...,\quad \sqrt{2} \approx 1,41;\quad \sqrt{2} > 1,41;$

$\sqrt{3} = 1,732...,\quad \sqrt{3} \approx 1,73;\quad \sqrt{3} > 1,73;$

$\pi = 3,141...,\quad \pi \approx 3,14;\quad \pi > 3,14.$

Admitem că fiecare fracție zecimală infinită neperiodică reprezintă un număr irațional.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

Să se calculeze:

1) $(2^2)^3$; **2)** $(2\cdot 3)^2$; **3)** $(2\cdot 5\cdot 10)^2$; **4)** $(2^3\cdot 3^2\cdot 5)^2$; **5)** $(2\cdot 3^3\cdot 7)^2$;

6) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; **7)** $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; **8)** $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; **9)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; **10)** $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; **11)** $\left(\frac{1}{10}\right)^3$;

12) $\left(\frac{1}{1\,007}\right)^2$; **13)** $0,02^2$; **14)** $0,01^2$; **15)** $0,1^3$; **16)** $0,001^3$.

Să se calculeze:

17) $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{64}$;

18) $\sqrt{15\,129}$; **19)** $\sqrt{35\,721}$; **20)** $\sqrt{10\,404}$; **21)** $\sqrt{41\,616}$;

22) $\sqrt{9\,024\,016}$; **23)** $\sqrt{90\,000}$; **24)** $\sqrt{14\,400}$; **25)** $\sqrt{6\,250\,000}$.

Să se calculeze (cu trei zecimale exacte și să se facă proba):

26) $\sqrt{27}$; **27)** $\sqrt{314}$; **28)** $\sqrt{2,351}$; **29)** $\sqrt{0,05}$; **30)** $\sqrt{0,009}$.

Să se calculeze (cu două zecimale exacte și să se facă proba):

31) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$.

Să se calculeze:

32) $\sqrt{4\cdot 9}$; **33)** $\sqrt{9\cdot 16\cdot 25}$; **34)** $\sqrt{9\cdot 625}$; **35)** $\sqrt{2\cdot 3\cdot 2^3\cdot 3^3}$;

36) $\sqrt{7\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5\cdot 7}$; **37)** $\sqrt{2^2\cdot 5\cdot 2^2\cdot 5^3\cdot 11^2}$; **38)** $\sqrt{72\cdot 50\cdot 49}$;

39) $\sqrt{\frac{4}{49}}$; **40)** $\sqrt{\frac{25}{36}}$; **41)** $\sqrt{\frac{1}{100}}$; **42)** $\sqrt{\frac{1}{4\,900}}$; **43)** $\sqrt{\frac{1}{810\,000}}$;

44) $\sqrt{2+\frac{1}{4}}$; **45)** $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; **46)** $\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}}}$.

Să se calculeze:

47) $\frac{\sqrt{200}}{10}$; **48)** $\frac{\sqrt{300}}{10}$; **49)** $\frac{\sqrt{12}}{2}$; **50)** $\frac{\sqrt{75}}{5}$; **51)** $\frac{\sqrt{1\,200}}{20}$;

52) $\frac{\sqrt{24}}{2}$; **53)** $\frac{\sqrt{25+100}}{5}$.

Să se calculeze:

54) $0,3 + 0,3\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}$; **55)** $\sqrt{8^{80}\cdot 9^{40}} : \frac{(8^{20}\cdot 9^{10})^2}{5^2}$;

56) $\left(2+\frac{2}{3}\right)^2 : \sqrt{\dfrac{1}{3,75-1\frac{1}{2}}}$.

57) Să se calculeze:

$$\sqrt{\frac{85}{132}:\frac{51}{55}}.$$

58) Să se așeze în ordine crescătoare numerele:

$$10\sqrt{2\cdot 8},\ 6\sqrt{3\cdot 27},\ \frac{9}{2}\sqrt{36}.$$

59) Care număr este mai mare: $1,73\cdot\sqrt{4}$ sau $1,41\cdot\sqrt{9}$?

60) Să se afle cel mai mare număr natural, pătrat perfect, de patru cifre care să aibă cifra unităților 1.

61) Să se afle x și y astfel încît numărul $\sqrt{\overline{1xy}}$ $(x \neq y)$ să fie număr natural.

62) Să se afle numerele naturale, pătrate perfecte, de forma $\overline{110xy}$.

63) Să se scrie toate numerele naturale de forma 4 00****, pătrate perfecte.

64*) Să se afle cel mai mare număr natural de patru cifre, știind că cifra unităților este 4, iar rădăcina sa pătrată este număr natural.

65) Pentru ce valori ale lui x, numere naturale, numărul natural $\frac{1\,800}{x}$ este pătrat perfect?

66) Să se afle toate numerele naturale, pătrate perfecte, de forma $\overline{9xyz4}$.

67) Rădăcina pătrată din produsul a două numere naturale distincte este 77. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

68[d]) Volumul unui cub este de 373,248 metrii cubi. Să se afle lungimea laturii cubului.

69) Să se reprezinte fiecare din următoarele mulțimi scriind elementele sale între acolade;

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ 1 + \sqrt{4} \leq x \leq 7 - \sqrt{9}\};$$

$$B = \left\{x \mid x \in \mathbf{Z},\ \frac{-6 + \sqrt{16}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{49}}{2}\right\}.$$

70) Aria unui pătrat este egală cu 0,09 m². Să se afle lungimea laturii sale.

71) Știind că aria unui pătrat este egală cu 1,44 m², să se afle latura sa.

72) Știind că aria unui pătrat este egală cu 1,0404 m², să se afle lungimea laturii sale.

73) Să se afle x din:

a) $\frac{x}{\sqrt{25}} = \frac{3}{10}$; b) $\frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{3}{x}$; c) $\frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{16}}$; d) $\frac{6}{x} = \frac{\sqrt{49}}{14 \cdot \sqrt{\frac{1}{36}}}$.

Notă: Rezolvați și problemele **29); 30)** de la pagina 189.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

1) Să se efectueze:

a) $\sqrt{4} + \sqrt{1}$; b) $\sqrt{0} + \sqrt{9}$; c) $\sqrt{16} + \sqrt{25} + \sqrt{36}$;
d) $\sqrt{100} - \sqrt{81}$; e) $\sqrt{5^2} + \sqrt{9975^2}$; f) $\sqrt{921^4} - 921^2$;
g) $11^3 - \sqrt{11^6}$; h) $\sqrt{10\,000} - \sqrt{45^2}$; i) $\sqrt{1600} + \sqrt{250\,000}$.

2) Să se calculeze:

a) $\sqrt{121}$; b) $\sqrt{144}$; c) $\sqrt{169}$; d) $\sqrt{196}$; e) $\sqrt{57\,600}$;
f) $\sqrt{142\,884}$; g) $\sqrt{11\,881}$; h) $\sqrt{4\,012\,009}$.

3) Să se calculeze:

a) $\sqrt{7{,}36}$; b) $\sqrt{246{,}49}$; c) $\sqrt{4{,}3681}$;
d) $\sqrt{0{,}16}$; e) $\sqrt{0{,}0036}$; f) $\sqrt{0{,}000001}$.

4) Să se calculeze cu aproximație de o zecime prin lipsă $\sqrt{4{,}71}$. Să se facă și verificarea.

5) Să se calculeze cu două zecimale exacte: a) $\sqrt{2{,}1}$; b) $\sqrt{21{,}93}$. Să se facă și proba.

6) Să se calculeze $\sqrt{13}$ cu trei zecimale exacte. Să se facă și proba.

7) Să se calculeze (cu două zecimale exacte):

a) $\sqrt{0{,}002}$; b) $\sqrt{0{,}028}$. Să se facă și proba.

8) Să se calculeze:

a) $\sqrt{16{,}81}$; b) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}64}$.

9) Să se calculeze:

a) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; b) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{225}} \cdot (-15)$; d) $\sqrt{1 - \frac{15}{64}}$.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri

1) Să se găsească toate numerele prime de două cifre astfel încît rădăcina pătrată din răsturnatul fiecăruia dintre ele să fie număr natural. (Răsturnatul numărului $\overline{ab}$ este $\overline{ba}$.)

2) Să se arate că numerele de forma $\sqrt{5n + 7}$ unde $n \in \mathbf{N}$ nu sînt numere naturale.

3) Știind că $x \in \mathbf{Q}$ și că $x < 0$, să se calculeze:

a) $-3\sqrt{x^2} + |3x|$;

b) $-5\sqrt{x^2} + |-4x|$.

4) Să se reprezinte următoarea mulțime enumerînd elementele sale:

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ |x| < \sqrt{11}\}.$$

5) Să se afle cel mai mic număr natural scris în baza zece și care îndeplinește următoarele două condiții:

a) este pătrat perfect;

b) este mai mare decît 6 204.

9. MEDIA PROPORȚIONALĂ ȘI CALCULAREA EI

În unele proporții cu termeni pozitivi, extremii sînt egali între ei sau mezii sînt egali între ei. De exemplu, avem următoarele proporții

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6};\quad \frac{24}{12} = \frac{12}{6}.$$

Numărul egal cu extremii egali între ei sau cu mezii egali între ei se numește medie proporțională a celorlalți doi termeni ai proporției.

Exemple. Numărul 6 este medie proporțională a numerelor 2 și 18 din proporția $\frac{6}{2} = \frac{18}{6}$. Numărul 12 este medie proporțională a numerelor 24 și 6 din proporția $\frac{24}{12} = \frac{12}{6}$.

Media proporțională a două numere se mai numește *media geometrică* a acestor numere.

CALCULUL MEDIEI PROPORȚIONALE (MEDIE GEOMETRICĂ)

În cazul în care extremii unei proporții cu termeni pozitivi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sînt egali între ei, adică $a = d$, vom nota cu x valoarea lor comună și atunci din $ad = bc$ obținem $x^2 = bc$ sau $x = \sqrt{bc}$.

În cazul în care mezii unei proporții cu termeni pozitivi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sînt egali între ei, adică $b = c$, vom nota cu x valoarea lor comună și atunci din $ad = bc$ obținem $x^2 = ad$ sau $x = \sqrt{ad}$.

Deci:

Media proporțională a două numere pozitive este rădăcina pătrată a produsului lor.

Exemplu. Să se determine media proporțională a numerelor 8 și 50. Avem $8 \cdot 50 = 2^3 \cdot 2 \cdot 5^2 = 2^4 \cdot 5^2$. Deci $x = \sqrt{8 \cdot 50} = 2^2 \cdot 5 = 20$. Se vede că $8 < 20 < 50$. În general:

Media proporțională a două numere pozitive diferite este mai mare decît cel mai mic din ele și este mai mică decît cel mai mare din ele.

Dacă cele două numere pozitive sînt egale, media lor proporțională coincide cu fiecare din ele.

Nu este neapărată nevoie ca produsul celor două numere să fie un pătrat perfect. De exemplu, media proporțională a numerelor 2 și 1 este $\sqrt{2}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

Să se afle media aritmetică și media proporțională a numerelor:

1) 2 și 8; **2)** 1 și 4; **3)** 1 și 9; **4)** 4 și 9; **5)** 4 și 25; **6)** 0,1 și 1 000; **7)** $\frac{1}{4}$ și 36.

Să se afle media proporțională a numerelor:

8) $\frac{1}{7}$ și 7; **9)** 0,25 și 100; **10)** 2,5 și 1 000; **11)** $\frac{3}{2}$ și $\frac{8}{27}$; **12)** 20 și 125; **13)** 34 și 306; **14)** 2^{2m-1} și $2 \cdot 3^{2m}$ $(m \in N^*)$.

15) Se consideră:

$$A = 40{,}4 - \sqrt{2{,}04^2 \cdot 10^2}; \quad B = 9 + 9 \cdot \sqrt{\frac{1}{81}}.$$

Să se afle raportul dintre media geometrică a numerelor A și B și media lor aritmetică.

16[d]) Dacă a, b, c sînt trei numere mai mari decît zero și dacă $\frac{b}{c} > 1$, iar a este media proporțională a lui b și c, să se scrie numerele a, b, c în ordine crescătoare.

17[d]) A, B, C, X, Y, Z sînt numere mai mari decît 0. Se știe că: X este media geometrică a lui Y și Z iar $\frac{Y}{Z} > 1$.

a) Dacă $\frac{X}{A} = \frac{Y}{B} = \frac{Z}{C}$, să se scrie numerele A, B, C în ordine crescătoare;

b) Dacă $AX = BY = CZ$, să se scrie numerele A, B, C în ordine crescătoare.

Lucrare pentru repetarea unor cunoștințe din capitolele anterioare

1) Să se afle x din:

a) $\frac{x}{4} = \frac{8}{2}$; b) $\frac{5}{x} = 8$; c) $\frac{x}{8} = 3$; d) $15 = \frac{x}{4}$; e) $7 = \frac{4}{x}$;

f) $\frac{1}{x} = \frac{b}{c}$; g) $b = \frac{x}{a}$; h) $a = \frac{b}{x}$; i) $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$.

2) O piesă de metal are masa de 54 kg. Ce masă are o piesă confecționată din același metal, dar cu volumul de două ori mai mare decît volumul primei piese? Dar o piesă care are volumul de trei ori mai mic decît volumul primei piese?

3) Să se calculeze 76,5% din 2 400 kg.

4) Pentru realizarea unui produs erau necesare 400 kg material. Consumul de material s-a redus cu 15%. Cît material este necesar pentru realizarea produsului în noile condiții?

5) 65% din suma depusă de un elev la C.E.C. este de 260 lei. Cîți lei a depus elevul la C.E.C.?

6) Pînă la o anumită dată într-o cooperativă agricolă de producție trebuiau arate 800 ha. Cu cîteva zile înainte de termenul stabilit fuseseră arate 600 ha. Cît la sută din suprafața planificată a mai rămas de arat?

7) Masa unui vas gol este 20% din masa aceluiași vas plin cu un anumit lichid. Știind că lichidul din vas cîntărește 16 kg, să se afle cît cîntărește vasul gol și cît cîntărește vasul plin.

8) Să se calculeze media proporțională a numerelor:

a) 2 și 7 800; b) $\frac{1}{2}$ și 0,72.

9) Care sînt divizorii numărului -12? Dar ai lui -274?

Capitolul VII

MONOAME ŞI POLINOAME

1. MONOAME

În manualul de matematică pentru clasa a V-a, am utilizat o expresie de forma $a \cdot b$, care se mai scrie ab, pentru a exprima produsul între numerele naturale, deci şi raţionale, a şi b. Am mai utilizat o expresie de forma $2 \cdot a$, care se mai scrie şi $2a$, pentru a exprima produsul între 2 şi numărul natural, deci şi raţional, a. Cunoscînd numerele întregi şi numerele raţionale, putem scrie şi expresii de forma $(-2)a$ sau $2(-a)$ sau $-ab$. Vom spune că expresia $-ab$ este opusul expresiei ab.

Vom mai spune că expresiile de mai înainte sînt monoame.

Monoamele sînt numere întregi, numere raţionale şi litere de exemplu, x sau a, precum şi produse cu oricîţi factori, unde factorii sînt monoame. Opusul oricărui monom, despre care am vorbit mai înainte, este, de asemenea, un monom.

Într-un monom, simbolul de înmulţire şi parantezele se omit ori de cîte ori este posibil.

Exemple. Următoarele expresii sînt monoame:

$$2,\ -1,\ \frac{7}{3},\ -\frac{5}{4},\ a,\ \frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right),\ \frac{5}{8}a,\ ab,\ -\left(-\frac{5}{4}\right),\ -a,$$
$$-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right);\ -bc,\ (-a)c,\ (-4c)(-2d),\ 3(5c^2)(-2d),\ -(-3a^2b^2)c\cdot\frac{7}{5}.$$

Produsele în care factorii alăturaţi sînt aceeaşi se scriu ca puteri.

Pentru acest motiv, în monomul $-(-3a^2b^2)c\cdot\frac{7}{5}$ apar pătratele lui a şi b.

Presupunînd că literele dintr-un monom sînt înlocuite cu numere raţionale, în orice monom putem folosi proprietăţile înmulţirii numerelor raţionale, anume comutativitatea şi asociativitatea. De aceea, putem schimba ordinea factorilor într-un monom, pentru a grupa la un loc numerele raţionale şi a le înlocui cu produsul lor, de asemenea, pentru a grupa la un loc literele de acelaşi fel, pentru a scrie o singură putere a unei litere. Opusul unui monom poate fi înlocuit cu produsul dintre -1 şi acel monomului, ţinînd seama de faptul că opusul unui număr este produsul dintre -1 şi acel număr.

Datorită celor de mai sus, monomul $-(-3a^2b^2)c\cdot\frac{7}{5}$ poate fi transformat în felul următor

$$-(-3a^2b^2)c\cdot\frac{7}{5} = (-1)\,[(-1)\cdot 3a^2b^2]c\cdot\frac{7}{5} =$$
$$(-1)^2\cdot\frac{7}{5}\cdot 3a^2b^2c = \frac{21}{5}\,a^2b^2c.$$

În mod asemănător,

$$(-4c)(-2d) = [(-1)\cdot 4c][(-1)\cdot 2d] = (-1)^2\cdot 4\cdot 2cd = 8cd;$$
$$3(5c^2)(-2d) = 3(5c^2)[(-1)\cdot 2d] = (-1)\cdot 3\cdot 5\cdot 2c^2d = -30c^2d.$$

Din cele de mai înainte, se vede că un monom poate fi adus la o formă numită *canonică*, definită astfel:

Forma canonică a unui monom este un număr raţional sau un produs dintre un număr raţional şi puteri de litere diferite.

Într-un asemenea produs, numărul raţional este primul factor. În cazul în care acesta lipseşte, se consideră că este 1.

Exemple. Monoamele

$$\frac{7}{3},\ -1,\ 1,\ -\frac{5}{4},\ \frac{21}{5}\cdot a^2b^2c,\ 8cd,\ ad^2,\ -30c^2d,\ -xy$$

sînt scrise sub formă canonică.

Coeficientul unui monom este numărul raţional din forma canonică a monomului.

Exemple. Monoamele, scrise sub formă canonică, din exemplele de mai înainte, au respectiv coeficienţii

$$\frac{7}{3},\ -1,\ 1,\ -\frac{5}{4},\ \frac{21}{5},\ 8, 1, -30, -1.$$

Gradul unui monom, diferit de 0, este suma exponenţilor literelor care fac parte din el. În cazul în care într-un monom nu figurează nici o literă, monomul, diferit de 0, are gradul 0.

Se consideră că literele fără exponent au exponentul egal cu 1. Trebuie reţinut că exponenţii literelor dintr-un monom sînt numere naturale diferite de zero.

Exemplu. Monomul $\frac{21}{5}\cdot a^2b^2c$ are gradul egal cu $2+2+1=5$.

Gradul unui monom, diferit de 0, în raport cu un grup de litere, în particular în raport cu o literă, este suma exponenţilor literelor respective sau exponentul literei din monomul considerat. Dacă o literă sau mai multe litere nu figurează într-un monom, exponentul acelei litere sau al acelor litere în monomul considerat este egal cu 0.

Exemplu. Monomul $\frac{21}{5} a^2b^2c$ are gradul 4 în raport cu literele a și b. Același monom are gradul 2 în raport cu litera a și gradul 0 în raport cu orice literă diferită de a, b și c.

2. OPERAȚII CU MONOAME

Orice monom fiind o expresie, iar fiecare expresie avînd o valoare, care în cazul expresiilor de numere raționale este un număr rațional, vom face operații cu monoame așa cum facem operații cu numere raționale.

ÎNMULȚIREA

Produsul a două monoame este un monom.

Aceasta rezultă din definiția monomului, în cazul în care nici unul din cele două monoame nu este egal cu 0. În cazul în care unul din cele două monoame este egal cu zero, produsul celor două monoame îl vom considera egal cu 0.

Exemplu. Produsul monoamelor $5x^2$ și $-2y$ este monomul $5x^2 \cdot (-2y)$ a cărui formă canonică este $-10x^2y$.

EXERCIȚII

A. Să se scrie sub formă canonică monoamele:

1) $x \cdot x$; **2)** $x \cdot (-x)$; **3)** $-x \cdot (-x)$; **4)** $x^2 \cdot x^3$; **5)** $x \cdot x^4$; **6)** $-2 \cdot (-x)$; **7)** $-x(-2x)$; **8)** $-2x \cdot (-2x)$; **9)** $x(-x^2)$; **10)** $-x \cdot (-x^2)$; **11)** $x^2(-x)$; **12)** $-x^2(-x^2)$; **13)** $2x(-3y)$; **14)** $-5x(-4y)$; **15)** $-3x^2(-3x)$; **16)** $-4x(-2x^2)$; **17)** $-2x^2(-5x^3)$; **18)** $-4(-xy)$; **19)** $-2x(-xy)$; **20)** $-2x(-4xy)$; **21)** $xy(-xy)$; **22)** $-xy(-2xy)$; **23)** $-xy(-x^2y)$; **24)** $2x(-x^2y)$; **25)** $-xy^2(-xy^2)$; **26)** $2x^2(-3xy)$; **27)** $-4x(-2x^2y)$; **28)** $-2x^2(-3x^3y)$; **29)** $-x(-2x^3y)$; **30)** $-x(2xyz)$.

B. Să se scrie sub formă canonică monoamele:

1) $2x \cdot (-4x)$; **2)** $4x^2 \cdot (-x^2)$; **3)** $4x \cdot (-x^2)$; **4)** $(-2x) \cdot (-2y)$; **5)** $5x^2y \cdot (-xy^2)$; **6)** $6xy \cdot (-10x^3)$; **7)** $-2x^2 \cdot (-2x^2y)$; **8)** $-5x^2y \cdot (-x^2yz)$; **9)** $\frac{1}{2} x^2 \cdot (-2x)$; **10)** $\frac{3}{4} x^2y \cdot \left(-\frac{1}{3} xyz\right)$; **11)** $x \cdot (-x^2) \cdot (-x^3)$; **12)** $xy \cdot (-y) \cdot (-2y)$; **13)** $2x \cdot (-3xy) \cdot (-4x^2)$; **14)** $10x \cdot (-0{,}2x^2) \cdot (-0{,}5x^2)$.

RIDICAREA LA PUTERE

Puterea unui monom, diferit de zero, în care exponentul este un număr natural este un monom.

Într-adevăr, dacă exponentul este 0, puterea unui monom, diferit de 0, este monomul 1. Dacă exponentul este 1, puterea unui

monom este monomul considerat. Dacă exponentul este un număr natural mai mare decît 1, puterea unui monom este un produs de monoame, în care factorii sînt egali, deci este un monom.

Exemplu. Puterea a treia a monomului xy este $(xy)^3$ care are forma canonică: x^3y^3.

EXERCIȚII

Să se scrie sub formă de monoame, în forma canonică, următoarele puteri de monoame:

1) $(-x^2)^2$; **2)** $(2xy)^2$; **3)** $(-3x^2)^3$; **4)** $(-xy)^2$; **5)** $(-2xy^2)^3$; **6)** $(-x^3)^4$; **7)** $(-2xy^3z)^2$; **8)** $\left(-\frac{1}{2}x\right)^2$; **9)** $\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^3$; **10)** $(-0{,}1x)^2$.

ÎMPĂRȚIREA

În egalitatea $5x^2(-2y) = -10x^2y$ prin care se definește produsul monoamelor $5x^2$ și $-2y$ putem pune în evidență oricare din aceste monoame astfel:

$$\frac{-10x^2y}{-2y} = 5x^2, \quad \frac{-10x^2y}{5x^2} = -2y.$$

Spunem că monomul $5x^2$ este cîtul între monomul $-10x^2y$ și monomul $-2y$. Analog, spunem că, monomul $-2y$ este cîtul între monomul $-10x^2y$ și monomul $5x^2$.

În cazul în care se găsește un monom, în forma canonică, dar numai unul singur, care să fie cîtul împărțirii între două monoame, spunem că, împărțirea se poate efectua între cele două monoame.

Nu putem împărți un monom cu monomul 0. În adevăr, ca să aibă sens $\frac{x}{0}$ trebuie să existe un monom A astfel încît

$$A \cdot 0 = x,$$

ceea ce nu se poate, deoarece $A \cdot 0 = 0$. Nu are sens nici $\frac{0}{0}$, deoarece există mai multe monoame, în forma canonică, de exemplu, y, z, astfel încît $y \cdot 0 = 0$, $z \cdot 0 = 0$.

În general:

Dacă A și B sînt două monoame, astfel încît $B \neq 0$, cîtul între monoamele A și B, notat prin $\frac{A}{B}$, este acel monom C, în cazul în care el există, pentru care $A = B \cdot C$.

Se scrie

$$C = \frac{A}{B}$$

și se citește „monomul C este egal cu monomul A împărțit la monomul B".

Vom spune că *efectuăm* cîtul $\frac{A}{B}$ atunci cînd determinăm monomul care este cîtul între monoamele A și B.

EXERCIȚII

Să se efectueze împărțirile de monoame:

1) $x^5 : x^2$; 2) $y^4 : y$; 3) $y : y$; 4) $y^2 : y^2$; 5) $-y : (-y)$;
6) $x^5 : (-x^2)$; 7) $5x^2y : (-xy)$; 8) $(-4x^3) : (-2x)$;
9) $(-6x^6y) : (-3x^2y)$; 10) $(-4x^3y) : (-4x^2)$; 11) $\frac{4}{9}x^3 : \left(-\frac{2}{3}x^2\right)$;
12) $0{,}2x^3 : (10x)$.

3. POLINOAME

O expresie care este un monom sau o sumă de monoame se numește polinom.

Cîteva exemple de polinoame sînt următoarele: $x^2 + 3x + 1$, $2y^2 + 1 + y^3$, $x^2 + (-2y^2) + y^3$, $-a^2b^2$, $-\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}$. Vom nota polinomul $x^2 + 3x + 1$ cu $P(x)$ și vom scrie: $P(x) = x^2 + 3x + 1$. La fel vom scrie $P(x;y) = x^2 + (-2y^2) + y$.

Valoarea unui polinom:

Spunem că $P(2)$ este valoarea polinomului $P(x)$ cînd x este înlocuit cu 2. De obicei, se spune că $P(2)$ este valoarea polinomului pentru $x = 2$. De exemplu

$$P(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 11$$

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să considerăm polinomul:

$$P(x;\ y) = x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + 1.$$

Să se calculeze $P(2; -1)$.

Rezolvare:

Vom înlocui pe x cu 2 și pe y cu -1:

$$P(2;\ -1) = 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 8 - 1 + 1 = 8.$$

Monoamele a căror sumă formează un polinom se numesc *termenii polinomului*. Vom spune că polinomul format dintr-un singur monom are un singur termen.

Exemplu. Termenii polinomului

$$3a^2b^2 + (-5b) + \left(\frac{7}{3}a\right)\left(-\frac{5}{3}a\right) + \frac{5}{7}$$

sînt următoarele monoame: $3a^2b^2$, $-5b$, $\left(\frac{7}{3}a\right)\left(-\frac{5}{3}a\right)$ și $\frac{5}{7}$.

În orice polinom, vom scrie termenii săi sub formă canonică. Atunci polinomul

$$3a^2b^2 + (-5b) + \left(\frac{7}{3}a\right)\left(-\frac{5}{3}a\right) + \frac{5}{7}$$

se va scrie sub forma

$$3a^2b^2 - 5b - \frac{35}{9}a^2 + \frac{5}{7},$$

deoarece suma între un termen și opusul unui termen este diferența între primul termen și cel de al doilea.

Termenii acestui polinom sînt următoarele monoame:

$$3a^2b^2,\ -5b,\ -\frac{35}{9}a^2 \text{ și } \frac{5}{7}.$$

Tot astfel, polinomul

$$-\frac{5}{2}x + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

se scrie sub forma

$$-\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Termenii acestui polinom sînt următoarele monoame: $-\frac{5}{2}x$ și $-\frac{1}{2}$.

Un polinom care are doi termeni se numește *binom*.

Exemplu. $-\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ este un binom.

Un polinom care are trei termeni se numește *trinom*.

Exemplu. $a^2b^2 + c - \frac{1}{2}$ este un trinom.

EXERCIȚIU

Se consideră: $P(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.

Să se calculeze:

a) $P(1)$; b) $P(-1)$; c) $P(0)$; d) $P(-2)$; e) $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

REDUCEREA TERMENILOR ASEMENEA

Fie următorul polinom:

$$5x^2 + 5x + 3x + 2x \cdot (-3y) + (-x) \cdot (-y).$$

Aducînd monoamele $2x\cdot(-3y)$ şi $(-x)\cdot(-y)$ la forma canonică obţinem:

$$5x^2+5x+3x-6xy+xy.$$

În acest polinom termenii $5x$ şi $3x$ sînt termeni care, cu excepţia coeficienţilor, sînt identici. Astfel de termeni se numesc *termeni asemenea.*

Termenii $-6xy$ şi xy sînt termeni asemenea. Termenii $5x^2$ şi $5x$ nu sînt termeni asemenea. Nici $3x$ şi xy nu sînt termeni asemenea.

În polinomul:

$$5a^2+\frac{2}{3}a^2+x^2y-xy^2-0{,}5a^2$$

$5a^2$, $\frac{2}{3}a^2$, $-0{,}5a^2$ sînt termeni asemenea, iar x^2y şi $-xy^2$ nu sînt termeni asemenea.

Prin adunarea termenilor asemenea, presupunînd că literele sînt numere raţionale, se obţine un singur termen, în felul următor. Utilizînd distributivitatea înmulţirii numerelor raţionale în raport cu adunarea sau scăderea numerelor raţionale, se scoate în factor partea literală şi se adună, respectiv se scad, coeficienţii.

Exemplul 1

Considerăm polinomul

$$5x+3x.$$

Putem scrie $5x+3x=(5+3)x=8x$.

Exemplul 2.

$$5xy-6xy=(5-6)xy,$$

deci

$$5xy-6xy=-xy.$$

Prin adunarea termenilor asemenea dintr-un polinom, polinomul obţinut are termenii distincţi doi cîte doi.

Adunarea termenilor asemenea dintr-un polinom se numeşte reducerea termenilor asemenea.

Forma la care este adus un polinom după scrierea termenilor săi sub formă canonică şi reducerea termenilor asemenea se numeşte *forma canonică* a polinomului.

Conform definiţiei date, rezultă că forma canonică a polinomului $3x+3\cdot(-x)\cdot(-y)+4x$ este $7x+3xy$.

Dacă prin reducerea termenilor asemenea se obţine un monom cu coeficientul 0 (zero), acel termen nu se mai scrie, afară de cazul cînd polinomul se reduce la numărul raţional 0 (zero), caz în care se scrie termenul 0.

Exemplul 1. Fie polinomul

$$-\frac{5}{3}xy+\frac{1}{3}xy+\frac{4}{3}xy-5x+7y.$$

Prin reducerea termenilor asemenea obţinem

$$-\frac{5}{3}xy+\frac{1}{3}xy+\frac{4}{3}xy=\left(-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)xy=0\cdot xy.$$

Forma canonică a polinomului considerat va fi deci

$$-5x+7y.$$

Exemplul 2. Fie polinomul

$$-3x+\frac{3}{7}x\cdot 7.$$

Scriind termenii acestui polinom sub formă canonică şi reducînd termenii asemenea obţinem

$$-3x+\frac{3}{7}x\cdot 7=-3x+3x=(-3+3)x=0\cdot x=0.$$

Forma canonică a polinomului considerat va fi deci 0.

Gradul unui polinom diferit de zero, este gradul cel mai mare dintre gradele termenilor formei canonice a polinomului considerat.

Exemplul 1. Gradul polinomului

$$-\frac{7}{3}ab^2+5xy+\left(-\frac{5}{2}ab\right)b+(-2y)(3x)$$

este gradul cel mai mare dintre gradele termenilor formei canonice

$$-\frac{29}{6}ab^2-xy$$

a polinomului considerat. Termenul $-\frac{29}{6}ab^2$ are gradul $1+2=3$, iar termenul xy are gradul $1+1=2$. Deci gradul polinomului considerat este 3.

Exemplul 2. Gradul polinomului

$$-\frac{5}{3}xy+\frac{1}{3}xy+\frac{4}{3}xy-5x+7y$$

este gradul cel mai mare dintre gradele termenilor formei canonice

$$-5x+7y$$

a polinomului considerat. Termenul $-5x$ are gradul 1 ca şi termenul $7y$. Deci gradul polinomului considerat este 1.

Gradul unui polinom, diferit de zero, în raport cu un grup de litere, în particular în raport cu o literă, este gradul cel mai mare dintre gra-

dele termenilor formei canonice a polinomului considerat, în raport cu grupul dat de litere, în particular în raport cu litera dată.

Exemplu. Gradul polinomului

$$-\frac{29}{6}ab^2 - xy,$$

scris sub formă canonică, în raport cu grupul de litere x, y este 2, deoarece termenul $-\frac{29}{6}ab^2$ are gradul 0 în raport cu grupul de litere x, y, iar termenul $-xy$ are gradul 2 în raport cu același grup de litere.

EXERCIȚII

1) Să se reducă termenii asemenea:

a) $4a + 2a$; b) $6x + x$; c) $-4x - 6x$; d) $-8y - y$;
e) $4x - 2x$; f) $6x - 8x$; g) $-x^2y - x^2y$; h) $5x - 5x$;
i) $-6x + 6x$; j) $-x + x$; k) $-y - y$; l) $-2x + 2x$;
m) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x$; n) $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x$.

2) Să se reducă termenii asemenea:

a) $8a - 4a$; b) $b - 7b - 2b + 1$; c) $3x^2 - 2x + x^2 + x + x$;
d) $2x^2 - 3xy + xy - x^2 + 2xy + 2 - 1$; e) $x^2y - xy^2 + 2xy^2$;
f) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y$; g) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}x + y - \frac{1}{2}y$.

4. OPERAȚII CU POLINOAME: ADUNAREA, SCĂDEREA

Orice polinom fiind o expresie, iar fiecare expresie avînd o valoare, care în cazul expresiilor de numere raționale este un număr rațional, vom face operații cu polinoame așa cum facem operații cu numere raționale.

ADUNAREA

Fie polinoamele

$$2x + 3y \text{ și } 4x - y + 1.$$

Prin suma acestor polinoame se înțelege expresia

$$(2x + 3y) + (4x - y + 1).$$

Prin desfacerea parantezelor obținem polinomul

$$2x + 3y + 4x - y + 1.$$

Vom considera că acest polinom este suma polinoamelor date. În acest sens vom spune că:

Suma a două polinoame este un polinom.

Aducem polinomul $2x + 3y + 4x - y + 1$ la forma canonică prin reducerea termenilor asemenea. Avem:

$$2x + 3y + 4x - y + 1 = 6x + 2y + 1.$$

EXERCIȚII

Efectuați:

1) $4x + (-3x)$; **2)** $4x + (-6x)$; **3)** $6x + (-7x)$; **4)** $a + (-2a)$;
5) $2y + (-2y)$; **6)** $x + (-x)$; **7)** $-3x + (-3x)$; **8)** $-y + (-y)$;
9) $2a + (-5a + b)$; **10)** $2a + (2a - b)$; **11)** $2x + (-2x + 1)$;
12) $2x + (y - 2x - 7)$; **13)** $-2x + y + 1 + (2x - y - 1)$.

Să se efectueze:

a) $3a + b + (-2a - b)$; b) $a + (2a + 1) + (-a - 1)$;
c) $2x^2 + (x^2 - y) + (-3x^2 + y)$;
d) $3x^2y + (2x^2y - 2) + (xy^2 + 1)$; e) $\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)$.

SCĂDEREA

Fie polinoamele

$$2x^2 - 5y \text{ și } x^2 - 4y + 1.$$

Prin diferența dintre primul polinom și cel de al doilea polinom se înțelege expresia:

$$(2x^2 - 5y) - (x^2 - 4y + 1).$$

Prin desfacerea parantezelor obținem polinomul:

$$2x^2 - 5y - x^2 + 4y - 1.$$

Vom considera că acest polinom este diferența dintre primul polinom și cel de al doilea polinom din polinoamele date. În acest sens vom spune că:

Diferența dintre două polinoame este un polinom.

Polinomul obținut și anume $2x^2 - 5y - x^2 + 4y - 1$ poate fi adus la forma canonică prin reducerea termenilor asemenea.

Avem:

$$2x^2 - 5y - x^2 + 4y - 1 = x^2 - y - 1.$$

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $3x - (2x - 1)$; b) $5x - y - (5x - y)$; c) $4x - y - (4x - y)$;
d) $ab - (2ab + a^2) - (a^2 - 3ab)$;
e) $3x^2y - (-xy^2 - 1) - (1 + 3x^2y)$;
f) $\frac{1}{3}x - \left(\frac{1}{6}x - 1\right) + \left(\frac{1}{4}x - 1\right)$.

Prin închiderea între paranteze a termenilor dintr-un polinom înțelegem operația inversă desfacerii parantezelor prin care se obțin termenii considerați.

Exemple.

$$3ab - \frac{5}{7}xy - \frac{5}{2}xa^2 = 3ab + \left(-\frac{5}{7}xy - \frac{5}{2}xy^2\right);$$

$$-\frac{5}{7}xy + 3ab - \frac{5}{2}xa^2 = -\frac{5}{7}xy + \left(3ab - \frac{5}{2}xa^2\right);$$

$$-\frac{5}{7}xy + 3ab - \frac{5}{2}xa^2 = -\frac{5}{7}xy - \left(-3ab + \frac{5}{2}xa^2\right);$$

$$-\frac{5}{2}xa^2 - \frac{5}{7}xy + 3ab = -\frac{5}{2}xa^2 - \left(\frac{5}{7}xy - 3ab\right).$$

Închiderea între paranteze a termenilor dintr-un polinom fiind operația inversă desfacerii parantezelor înseamnă că:

Dacă în fața parantezei se pune simbolul +, sau nici un simbol atunci termenii dintre paranteze se scriu așa cum sînt scriși în polinomul inițial.

Această regulă este exemplificată prin primele două exemple de mai sus. În exemplul al doilea, termenul $3ab$ este scris neprecedat de simbolul +, deoarece este scris primul.

Dacă în fața parantezei se pune simbolul —, atunci între paranteze, în locul fiecărui termen, se scrie opusul său.

Această regulă este exemplificată prin ultimele două exemple de mai înainte. În exemplul al treilea, termenul $\frac{5}{2}xa^2$ este precedat de simbolul +, fiind necesar acest simbol cu rol de simbol de adunare.

5. ÎNMULȚIREA UNUI MONOM CU UN POLINOM

Fie monomul xy^2, polinomul $-2b^2c + \frac{3}{2}a$ și produsul lor

$$xy^2\left(-2b^2c + \frac{3}{2}a\right).$$

Notînd cu A monomul xy^2, cu B monomul $-2b^2c$ și cu C monomul $\frac{3}{2}a$, obținem, în baza proprietății de distributivitate a înmulțirii față de adunare $A(B + C) = AB + AC$, că

$$xy^2\left(-2b^2c + \frac{3}{2}a\right) = (xy^2)(-2b^2c) + (xy^2)\left(\frac{3}{2}a\right).$$

Fie produsul

$$a(x - y + z)$$

dintre monomul a și polinomul $x - y + z$. Avem $(x - y) + z = x - y + z$, ceea ce se obține prin desfacerea parantezelor. Deci avem

$$a(x - y + z) = a(x - y) + az.$$

Dar $(-1)y = -y$. Deci $a(x - y) = ax + (-1)ay$. Însă $(-1)ay = -ay$. Așadar,

$$a(x - y + z) = ax - ay + az.$$

În general:

Produsul unui monom cu un polinom este un polinom obținut făcînd suma tuturor produselor dintre monom și fiecare termen al polinomului.

La înmulțirea unui monom cu un polinom, produsele dintre monom și fiecare termen al polinomului se scriu direct sub formă canonică.

Exemplu.

$$xy^2\left(-2b^2c + \frac{3}{2}a\right) = -2b^2cxy^2 + \frac{3}{2}axy^2.$$

EXERCIȚII

Să se efectueze:

a) $2(x - 2y)$; b) $a(x - 1)$; c) $3(2x - y + 1)$; d) $-2x(x - 2y)$; e) $a(a - 2b + 1)$; f) $2x(x^2 - xy + 2y^2)$; g) $3x^2(x^2 - 3xy^2 - y^2)$; h) $ax(ax^2 - 2ax + x^2)$; i) $\frac{1}{2}x(y - 2)$.

SUMA COEFICIENȚILOR UNUI POLINOM

Se consideră polinomul

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 6.$$

Coeficienții polinomului sînt 2; 5; —4; 6, iar suma coeficienților polinomului este $2 + 5 - 4 + 6$.

Să calculăm: $P(1)$.

Avem: $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 2 + 5 - 4 + 6.$

Se vede că $P(1)$ este suma coeficienților polinomului dat.

6. ÎMPĂRȚIREA UNUI POLINOM LA UN MONOM

Fie monomul x^2y^2 și polinomul $xy - 4x^2 + 7y^2$. Să facem produsul lor. Avem

$$x^2y^2(xy - 4x^2 + 7y^2) = x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4.$$

Spunem că, polinomul $x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4$ se împarte la monomul x^2y^2, deoarece cîtul împărțirii între polinomul $x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4$ și monomul x^2y^2 este un polinom $xy - 4x^2 + 7y^2$. Înțelegem prin cîtul împărțirii între polinomul $x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4$ și monomul x^2y^2, polinomul $xy - 4x^2 + 7y^2$ din produsul

$$x^2y^2(xy - 4x^2 + 7y^2) = x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4.$$

Vom scrie

$$\frac{x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4}{x^2y^2} = xy - 4x^2 + 7y^2.$$

Fiecare termen al polinomului $x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4$ se împarte la monomul x^2y^2, deoarece

$$x^3y^3 - 4x^4y^2 + 7x^2y^4 = x^2y^2(xy - 4x^2 + 7y^2).$$

Aceasta se constată și din

$$\frac{x^3y^3}{x^2y^2} = xy, \quad \frac{-4x^4y^2}{x^2y^2} = -4x^2, \quad \frac{7x^2y^4}{x^2y^2} = 7y^2,$$

deoarece xy, $-4x^2$, $7y^2$ sînt monoame, iar monomul x^2y^2 este diferit de zero.

În general:

Un polinom se împarte la un monom diferit de zero, dacă fiecare termen al polinomului se împarte la monomul considerat.

Cîtul împărțirii între un polinom și un monom, în cazul în care polinomul se împarte la monom, este un polinom.

Se scrie

$$C = \frac{B}{A}$$

și se citește „polinomul C este egal cu polinomul A împărțit la monomul B".

Vom spune că *efectuăm* cîtul $\frac{A}{B}$ atunci cînd determinăm polinomul care este cîtul între polinomul A și monomul B.

EXERCIȚII

Să se efectueze:

1) $(x^3 + x^2) : x$; 2) $(x^5 + x^4) : x^2$; 3) $(x^2 + x) : x$;
4) $(y^2 - y) : y$; 5) $(z^2 - z) : (-z)$; 6) $(6x - 4y + 2) : 2$;
7) $(6x - 9y - 3) : 3$; 8) $(2x^3 + 2x) : (2x)$; 9) $(x^4 - x^3 - x) : x$;
10) $(4x^5 - 2x^3) : (-2x^2)$; 11) $(5x^2y + 5xy) : (5xy)$;
12) $(4x^2yz - 2yz) : (2yz)$; 13) $(24x^3y^3 - 12x^2y^2 - 6x^2yz) : (6x^2y)$.

7. FACTOR COMUN

Efectuarea produsului între monomul b și polinomul $c + r + t$ exprimată prin

$$b(c + r + t) = bc + br + bt$$

poate fi exprimată și sub forma

$$bc + br + bt = b(c + r + t).$$

Monomul b apare ca factor în toți termenii polinomului din membrul întîi al acestei egalități. Spunem că monomul b este *factor comun* în termenii bc, br și bt. În membrul al doilea al aceleiași egalități, monomul b apare o singură dată înmulțit cu suma celorlalți factori ai termenilor polinomului din membrul întîi al egalității. Se spune că monomul b este *scos în factor comun*. Trecerea de la membrul întîi la membrul al doilea al egalității

$$bc + br + bt = b(c + r + t)$$

se numește *scoaterea în factor comun* a monomului b.

În mod asemănător obținem

$$\left(\frac{7}{5}xy\right)\left(xy^2 - \frac{5}{3}xy + 7a\right) = \left(\frac{7}{5}xy\right)(xy^2) - \left(\frac{7}{5}xy\right)\left(\frac{5}{3}xy\right) + \left(\frac{7}{5}xy\right)(7a) = \frac{7}{5}x^2y^3 - \frac{7}{3}x^2y^2 + \frac{49}{5}xya,$$

ceea ce, scris sub forma:

$$\frac{7}{5}x^2y^3 - \frac{7}{3}x^2y^2 + \frac{49}{5}xya = \left(\frac{7}{5}xy\right)\left(xy^2 - \frac{5}{3}xy + 7a\right),$$

are semnificația scoaterii în factor comun a monomului $\frac{7}{5}xy$.

Scoaterea în factor comun a unui monom dintr-un polinom dat se face ca în exemplul următor. Considerăm polinomul de mai sus

$$\frac{7}{5}x^2y^3 - \frac{7}{3}x^2y^2 + \frac{49}{5}xya.$$

Pentru a determina un monom care să poată fi scos în factor comun din acest polinom, se caută, mai întîi, literele comune tuturor termenilor. În cazul polinomului de mai sus, literele comune tuturor termenilor polinomului sînt x și y. Se determină, apoi, puterile cele mai mari ale acestor litere care sînt comune tuturor termenilor polinomului. În cazul de față sînt x^1 și y^1 sau x și y. Deci xy este factor comun tuturor termenilor polinomului. Numărul rațional $\frac{7}{5}$ poate fi scos în factor comun, deoarece aceasta revine la împărțirea tuturor coeficienților termenilor polinomului cu $\frac{7}{5}$, împărțire care se poate face întotdeauna în mulțimea numerelor raționale, împărțitorul fiind nenul.

EXERCIȚII

Să se descompună în factori:

a) $2x + 2y$; b) $ax - ay$; c) $4x - 2y$; d) $x^2 - xy$;
e) $x^2 + x$; f) $a^3 - a^2$; g) $x^2y + xy^2$; h) $3x + 3y - 3$;
i) $x^3 + x^2 + x$; j) $6x^3 + 12x^2y + 6x^2$; k) $a^8b^5 + a^4b^2$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

Să se scrie sub formă canonică monoamele:

1) $2a\cdot(-3a)$; **2)** $-42\cdot(-a^2)$; **3)** $x(-2x)$; **4)** $-2x(-x)$;
5) $-2x(2x)$; **6)** $(-4y)\cdot(-2y^2)$; **7)** $y(-2y)$; **8)** $-y(2y)$;
9) $(-2y)\cdot(-y)$; **10)** $(-y^2)\cdot(-y)$; **11)** $(-3xy)(-2xy)$;
12) $(-xy)(3x^2yz)$; **13)** $(-2x^2)(-x^4)$; **14)** $-x(-2x^2y)(-3xy^2z)$;
15) $-4x(-2x^2y)(-xy^2)$; **16)** $(-3x^5)(-2x^4y)(-3xyz)$;
17) $(-2x^3y)\left(-\frac{1}{2}xyz\right)$; **18)** $\left(-\frac{3}{4}x^4y\right)(-4x^2)$.

Să se scrie sub formă de monoame, în forma canonică, următoarele puteri de monoame:

19) $(a^2)^3$; **20)** $(-a^2x^3y)^5$; **21)** $(-2xy^3)^3$;
22) $(-4xy^2)^2$; **23)** $\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^3$; **24)** $(-0{,}1x^2)^2$; **25)** $(-1{,}05x^2)^2$.

Să se efectueze împărțirile:

26) $(-a^4):(-a^2)$; **27)** $(-4x^2y):(-4x)$; **28)** $(-3y):(-y)$;
29) $(-5x^3y):(-5xy)$; **30)** $(-2x):x$; **31)** $(-3x^2):(-3x)$;
32) $(-x):(-x)$; **33)** $(-2x^4):(2x^2)$; **34)** $x^5:(-x^2)$;
35) $(-6x^6y^2):(-2x^4y)$; **36)** $(-12x^3yz):(-12x^2)$;
37) $\frac{4}{9}x^4y:\left(-\frac{2}{3}x^2\right)$; **38)** $(-x^3y^2z):\left(-\frac{1}{4}xy\right)$;
39) $(-2x^3):(-0{,}1x^2)$.

40) Să se afle valoarea monomului $0{,}0000008a^8b^9$, pentru $a = 2$, $b = -5$.

41) Să se afle valoarea polinomului $P(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ pentru:
a) $x = 2$; $y = -2$; b) $x = \frac{1}{2}$; $y = -0{,}5$.

42) Să se afle valoarea polinomului $P(x) = 8x^3 - 2x + 1$ pentru:
a) $x = -2$; b) $x = -1$; c) $x = -\frac{1}{2}$; d) $x = 0$.

43) Să se afle valoarea polinomului $P(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + 2y^2$ pentru:
a) $x = -1$; $y = 0$; b) $x = -2$; $y = -1$; c) $x = 2$; $y = -\frac{1}{2}$;
d) $x = 1$; $y = -1$; e) $x = 1$; $y = -0{,}01$.

Să se reducă termenii asemenea:

44) $2a + 5a$; **45)** $7a + 8a$; **46)** $a + a$; **47)** $-2a - 5a$;
48) $-7a - 6a$; **49)** $-a - a$; **50)** $-a - 3a$; **51)** $4b - 2b$;
52) $7b - 3b$; **53)** $2b - 4b$; **54)** $3c - 7c$; **55)** $6x + 6x$;
56) $-7x + 7x$; **57)** $-8y - 8y$; **58)** $x - x$; **59)** $3xy - 2xy$;
60) $xy - 6xy$; **61)** $2xyz - 2xyz$; **62)** $4a + 3a - 4a$;
63) $3a + a - 2a + 1$; **64)** $5x + 3x - 7x - x$;
65) $x^2 + 3y - x^2 - y + 2$; **66)** $2x + 3xy - xy - 2x$;
67) $x^2 - 2x - x^2 + 2x$; **68)** $4x^2 - 2x^2y + 4y^2 + 3xy^2 - 1$;
69) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 4$.

Să se efectueze adunările și scăderile de polinoame:

70) $3a + (-a)$; **71)** $2x + (-2x)$; **72)** $2x + (-x + 3)$;
73) $x^2y + (-xy^2 + x^2y)$; **74)** $x + 2y + (-2x - 3y + 1)$;
75) $x^3 + 2x^2 + (-x^3 - 2x^2)$; **76)** $3a - (-2a)$; **77)** $-a - (-a)$;
78) $2x - (-4x + 4)$; **79)** $3x^2 + 2y - (x^2 + 2y - 2)$;
80) $x^3 + 2x^2 - (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$;
81) $x^3 - (-x^2 + 2x) - (x^3 + x^2 - 1)$;
82) $\frac{1}{3}x^3y - \left(-\frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{5}x^2y\right) - \left(-\frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{6}x^3y\right)$;
83) $2a + (3a - 1) - (5a - 2)$; **84)** $b + (2b - 1) - (b + 1)$;
85) $2x + (x - 2y) - (x + 1)$; **86)** $4x - (3x - y) + (-x - y)$;
87) $ax - (2ax + 1) + (1 + ax)$; **88)** $\frac{2}{3}x + \left(x - \frac{1}{3}y\right) - \left(\frac{1}{4}x + 1\right)$;

89) Se consideră: $A = x^2 + x^2y$, $B = 2x^2 - xy^2 - 1$, $C = x^2 - x^2y + 1$. Să se calculeze: a) $A + B - C$, b) $A - B - C$, c) $-A - B - C$.

Să se efectueze:

90) a) $a^2 - (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + 2b^2)$;
b) $2x^2 + (x^2 + xy^2 + 1) - (3x^2 + xy^2 + 1)$;
c) $c + c(c - 1)$; d) $x + x(y - 1)$; e) $3x + 3x(y - 1)$.

Să se efectueze înmulțirile:

91) $2a(a - b)$; **92)** $-3a(a^2 - b)$; **93)** $-2x(x - 2y)$;
94) $-2x(x^2 + 2x + 1)$; **95)** $-x^2(x^2 - 3xy - y^2)$;
96) $4x(x^3 - 2xy^2 + 3y)$.

Să se efectueze:

97) $3(x + 1) - 2(x - 2)$; **98)** $3(x + y) - 2(x - y)$; **99)** $a + a(a - 1)$;
100) $\frac{1}{4}x - 2\left(\frac{1}{12}x - \frac{1}{2}\right)$; **101)** $5(x - 4) - 3(x - 2)$;
102) $8(x - 1) - 3(x + 3)$; **103)** $6(2x - 1) - 5(x - 3)$;

104) $8(y-1)-4(y-2)-y$; 105) $5(x-2)-(x-4)$;
106) $6(x-2)-(x-5)-(x-9)$; 107) $5(x+y)-4(x+y)$;
108) $2(x-y)-3(x+y)-(2x-y)$;
109) $8(x-2)-(4x-3)-2(x-5)$;
110) $6(x-y)-2(x+y)-4(x-y)$;
111) $7(x^2-y)-3(2x^2+y)-(x^2-3y)$; 112) $2\cdot[x+3(x-1)]$;
113) $3+3\cdot[x-2(x-1)]+3x$.

Să se efectueze împărțirile dintre un polinom și un monom:
114) $(2x+2y):2$; 115) $(ax+ay):a$; 116) $(x^2+2x):x$;
117) $(a^3+a^2+a):a$; 118) $(x^3-x):(-x)$; 119) $(a^2x-a^2):a^2$;
120) $(x^2y-xy^2):(xy)$; 121) $(x^6y^6-x^3y^3):(-x^3y^3)$;
122) $[y+y(x-y)+xy]:y$; 123) $\{5+5[2+3(x-1)]-12x\}:3$.

Să se descompună în factori:
124) $2a+2b$; 125) $3x+3y$; 126) $5x+5$; 127) $7x-7$;
128) x^2+2x; 129) x^2+x; 130) x^3+x^2+x; 131) $ax+ay$;
132) $bx+by$; 133) a^2+ab; 134) $a+a^2b$;
135) $a(x+y)+b(x+y)$; 136) $a(x-1)-b(x-1)$.

Să se descompună în factori:
137) a^2b+ab^2c; 138) $2xy^2+4xy^2+6xy^2z$;
139) $2x^2y+3xy^2-4x^2y^2$; 140) $12a^2b+36ab^2$;
141) $24a^2b^3-36ab^4+40ab^2c$; 142) $x+1+(x+1)^2$.
143) Se știe că $a=-10$ și $b+c=-24$. Să se calculeze $a^2+ab+ac$.
144) Se consideră

$$P(x)=x^5-27x^3+2x+1.$$

Să se calculeze $P(20{,}5)+P(-20{,}5)$.

145[d]) Se consideră două numere: primul și al doilea.
La primul se adună al doilea și se obține al treilea.
La al doilea se adună al treilea și se obține al patrulea ș.a.m.d.
Cu cît este egală suma primelor șase numere astfel obținute, dacă al cincilea este egal cu 7?
146[d]) Se consideră $a=2^{69}$ și $b=(2^{100}-2^{99}+9^{34}:3^{67}-2^{99})^{46}$.
Determinați valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziții:
a) $a=b$; b) $a>b$; c) $a<b$.
147) Să se scrie în baza 10 numărul $1\,010_{(2)}$.
148) Să se scrie în baza 2 numărul 41.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

a) Să se afle valoarea polinomului

$$P(x)=x^3-2x^2+1$$

pentru $x=-1$.

b) Să se afle valoarea polinomului

$$P(x,\ y)=x^3-2x^2y+y^2-1$$

pentru: $x=-1,\ y=0$.

Să se efectueze următoarele operații cu monoame:
c) $(-3x^3y)\cdot(-x)$; d) $(-6x^3y):(-x^2)$.

Să se reducă termenii asemenea:
e) $2x+3x$; f) $-3x-x$; g) $4x-2x$; h) $7x-8x$; i) $3x-3x$;
j) $-4x-4x$; k) $-x-x$; l) $2x^2-x^2$; m) $2a+3b-2a+1$;
n) $3x+2x+y-x-y-4x$.

Să se efectueze înmulțirea dintre un monom și un polinom:
o) $3a(a^2-2ab+1)$.

Să se descompună în factori:
p) $7a+7b$; r) $ax-ay$; s) $2x+2y+2$; t) a^2+a; u) x^2y+xy.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri

1) Să se arate că produsul a trei numere întregi consecutive este divizibil cu 6.

2) a) Să se arate că numerele de forma $\overline{abab}$ se divid cu 101.

b) Care este cel mai mare număr natural de forma $\overline{abab}$ și care are cel mai mic număr de divizori?

3) Numărul întreg n nu este divizibil nici cu 2 nici cu 3. Să se arate că $(n+1)(n-1)$ se divide cu 24.

4) Știind că $x\in\mathbf{Q}$ să se calculeze:

$$|x^2+1|+|1+x^4|-|x^4+x^2|.$$

5) Știind că $a\in\mathbf{Q}$ și că $a<0$, să se calculeze:

a) $|a|+|-a|+|3-a|+|-1+2a|+|a^3|-|a|^3+5a$;

b) $\sqrt{a^2}-\sqrt{4a^2}+|a^2+2|-\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{a^4}$.

6) Toate polinoamele la care avem: $P(x)=P(-x)$ le numim de tipul 1 și toate polinoamele la care avem: $P(-x)=-P(x)$ le numim de tipul 2. Arătați cărui tip aparține fiecare din polinoamele:

$$P_1(x)=Ax^{2k+1}-Bx\quad(k\in\mathbf{N}^*);$$
$$P_2(x)=Ax^{4k}+Bx^{2k}+C\quad(k\in\mathbf{N}^*);$$
$$P_3(x)=x^6-14x^4+39x^2-36.$$

8. FRACȚII ALGEBRICE

Expresii de forma

$$\frac{a-b}{c-d},\quad \frac{ab^2}{ab},\quad \frac{cx-2c}{c},$$

se numesc fracții algebrice.

Se observă că, o fracție algebrică se reprezintă sub forma cîtului între două polinoame, în care polinomul de la numitor este diferit de zero.

Înlocuind literele dintr-o fracție algebrică cu numere raționale, în particular cu numere întregi, și efectuînd operațiile în ordinea în care acestea sînt indicate în fracția algebrică considerată, se obține un număr rațional, care uneori se reduce la un număr întreg, numit *valoarea* fracției algebrice considerate.

Aceasta în cazul în care, pentru numerele raționale cu care au fost înlocuite literele, numitorul are ca valoare un număr rațional diferit de zero. Dacă însă, pentru numerele raționale cu care au fost înlocuite literele, numitorul este zero, atunci se spune că fracția algebrică nu este definită sau nu are sens pentru valorile considerate ale literelor.

Exemple: 1. Fracția algebrică $\frac{a-b}{c-d}$ are cîte o valoare pentru acele valori ale lui a, b, c și d pentru care $c \neq d$. Aceeași fracție algebrică nu este definită sau nu are sens pentru acele valori ale lui a, b, c și d pentru care $c = d$.

2. Fracția algebrică $\frac{ab^2}{ab}$ are cîte o valoare pentru acele valori ale lui a și b pentru care $a \neq 0$ și $b \neq 0$ și nu este definită sau nu are sens dacă $a = 0$ sau $b = 0$.

3. Fracția algebrică $\frac{cx-2c}{c}$ are cîte o valoare pentru acele valori ale lui x și c pentru care $c \neq 0$ și nu este definită sau nu are sens pentru valori ale lui x și c în care $c = 0$.

Orice polinom sau orice monom poate fi transformat într-o fracție algebrică rațională în care numărătorul este polinomul sau monomul considerat, iar numitorul este 1.

Exemplu. Polinomul $x^2 - ab - 2$ devine fracție algebrică rațională dacă-l scriem sub forma $\frac{x^2-ab-2}{1}$.

EXERCIȚIU

Se consideră: $F(x, y) = \frac{x^3 - y^2}{x - y}$.

Să se afle: $F(1, -2)$; $F(0, -1)$; $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Notă: Rezolvați și exercițiile și problemele 31—36), 39,) 40) de la pagina 189

9. ECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

În manualul de matematică pentru clasa a V-a, denumirea de ecuație a fost dată unor propoziții cu o variabilă ca, de exemplu, $x + 2 = 6$, unde $x \in \{4, 5\}$ sau $3x = 9$, unde $x \in \{2, 4\}$.

Exprimarea $x + 2 = 6$, unde $x \in \{4, 5\}$ se numește propoziție cu o variabilă, deoarece pentru fiecare valoare a lui x din mulțimea $\{4, 5\}$ exprimarea $x + 2 = 6$ devine o propoziție care poate fi adevărată sau falsă. De exemplu, dacă x este 4 atunci $4 + 2 = 6$ este o propoziție adevărată. Dacă x este 5 atunci $5 + 2 = 6$ este o propoziție falsă.

Fiecărei propoziții cu o variabilă i se asociază o mulțime care se numește mulțimea de adevăr a propoziției cu o variabilă. Aceasta este totalitatea elementelor din mulțimea elementelor cu care x poate fi înlocuit în propoziția cu o variabilă considerată și care conduc la propoziții adevărate.

În cazul unei ecuații, mulțimea de adevăr a fost numită *mulțimea soluțiilor ecuației*. Această mulțime o vom numi și *mulțimea rădăcinilor ecuației*. Elementele acestei mulțimi au fost numite *soluțiile* ecuației. Le vom mai numi *rădăcinile* ecuației.

Din cele de mai sus rezultă că mulțimea de adevăr a ecuației $x + 2 = 6$, unde $x \in \{4, 5\}$, este mulțimea $\{4\}$. Mulțimea $\{4\}$ se mai numește mulțimea soluțiilor aceleiași ecuații sau mulțimea rădăcinilor aceleiași ecuații. Vom mai scrie $S = \{4\}$, S fiind mulțimea soluțiilor aceleiași ecuații. Numărul 4 se numește *soluția* ecuației considerate sau *rădăcina* acestei ecuații.

Următoarele ecuații

$$2x + 1 = 0, \text{ unde } x \in \mathbf{Q}; \quad x - 5 = 0, \text{ unde } x \in \mathbf{Q};$$

$$\frac{1}{2}x - 4 = 0, \text{ unde } x \in \mathbf{Q},$$

le vom numi ecuații de gradul întîi cu o necunoscută, anume cu necunoscuta x.

În general:

Fiind date numerele raționale a și b cu $a \neq 0$, o ecuație de gradul întîi cu necunoscuta x este o ecuație de tipul

$$ax + b = 0, \textit{ unde } x \in \mathbf{Q}.$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$2x + 1 = 0, \text{ unde } x \in \mathbf{Q}.$$

Presupunem că x a fost înlocuit cu o soluție, pe care o vom nota tot cu x, a ecuației considerate. Atunci

$$2x + 1 = 0,$$

este o egalitate între numere raționale.

Prin scăderea lui 1 din ambii membri ai acestei egalități obținem $2x + 1 - 1 = 0 - 1$ sau

$$2x = -1.$$

Se spune că am trecut termenul liber cu semn schimbat din membrul întîi în membrul al doilea.

Împărțim ambii termeni ai egalității $2x = -1$ cu 2. Obținem

$$\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$$

sau

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Punînd pe $-\frac{1}{2}$ în locul lui x în ecuația considerată, obținem că

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

este o propoziție adevărată.

Numărul $-\frac{1}{2}$ este soluție sau rădăcină a ecuației considerate.

Mulțimea soluțiilor sau rădăcinilor ecuației considerate este $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, deoarece presupunerea că x a fost înlocuit cu o soluție a ecuației considerate ne conduce la

$$x = -\frac{1}{2},$$

iar prin înlocuirea lui x cu $-\frac{1}{2}$ în ecuația considerată obținem o propoziție adevărată.

Vom considera, în cele ce urmează, și ecuații a căror rezolvare se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul întîi, după cum rezultă din exemplele care urmează.

Deoarece în orice ecuație de gradul întîi cu o necunoscută, litera din polinom, pe care o vom numi *necunoscută*, poate fi înlocuită cu orice număr rațional, nu vom mai scrie $x \in \mathbf{Q}$, dar vom presupune că $x \in \mathbf{Q}$.

Deci următoarele exprimări

$$2x + 1 = 0,\ x - 5 = 0,\ \frac{1}{2}x - 4 = 0$$

le vom numi ecuații de gradul întîi cu o necunoscută.

Prin *rezolvarea* unei ecuații de gradul întîi cu o necunoscută se înțelege determinarea mulțimii soluțiilor sale.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuația

$$\frac{7}{3}x + 5 = 2x + 6.$$

Presupunem că x a fost înlocuit cu o soluție, pe care o vom nota tot cu x, a ecuației considerate. Atunci

$$\frac{7}{3}x + 5 = 2x + 6$$

este o egalitate între numere raționale.

Constatăm că $\frac{7}{3}$ este mai mare decît 2, deoarece $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, iar $\frac{1}{3}$ este un număr rațional pozitiv. Atunci, prin scăderea lui $2x$ din ambii membri ai egalității de mai sus, obținem

$$\frac{7}{3}x + 5 - 2x = 2x + 6 - 2x$$

sau

$$\frac{7}{3}x + 5 - 2x = 6.$$

Se spune că am trecut *termenul de gradul întîi* cu semn schimbat din membrul al doilea în membrul întîi. Am obținut

$$\frac{1}{3}x + 5 = 6.$$

Prin scăderea lui 5 din ambii membri ai acestei egalități obținem

$$\frac{1}{3}x + 5 - 5 = 6 - 5,$$

sau

$$\frac{1}{3}x = 6 - 5.$$

Se spune că am trecut *termenul liber* cu semn schimbat din membrul întîi în membrul al doilea. Am obținut

$$\frac{1}{3}x = 1.$$

În sfîrșit, înmulțim ambii membri ai acestei egalități cu inversul lui $\frac{1}{3}$. Obținem $\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3}x = 1 \cdot \frac{3}{1}$ sau $x = 1 \cdot \frac{3}{1}$, deoarece $\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$. Deci

$$x = 3.$$

Punînd pe 3 în locul lui x în ecuația considerată, obținem că

$$\frac{7}{3} \cdot 3 + 5 = 2 \cdot 3 + 6$$

este o propoziție adevărată, deoarece $\frac{7}{3} \cdot 3 + 5 = 12$ și $2 \cdot 3 + 6 =$

$= 12$. Numărul 3 este soluție sau rădăcină a ecuației considerate. Pentru a arăta că 3 este soluție sau rădăcină a ecuației considerate, vom mai scrie $x = 3$.

Mulțimea soluțiilor sau rădăcinilor ecuației considerate este $\{3\}$, deoarece presupunerea că x a fost înlocuit cu o soluție a ecuației considerate ne conduce la

$$x = 3,$$

iar prin înlocuirea lui x cu 3 în ecuația considerată obținem o propoziție adevărată.

Ca modalitate de rezolvare a unei ecuații de tipul celei din exemplul 1 trebuie reținut că se fac următoarele:

1) Se trece termenul de gradul întîi, cu semn schimbat, dintr-un membru în celălalt și se reduc termenii asemenea.

2) Se trece termenul liber, cu semn schimbat, din membrul care conține necunoscuta în celălalt membru și se reduc termenii asemenea.

3) Se înmulțesc ambii membri ai egalității obținute cu inversul coeficientului necunoscutei și se efectuează înmulțirile.

Trebuie să reținem că ecuația cu o necunoscută din exemplul 1 are o singură soluție.

Trebuie să mai reținem că nu este necesar să verificăm că prin înlocuirea lui x cu 3 în ecuația $\frac{7}{3}x + 5 = 2x + 6$ obținem o propoziție adevărată. Aceasta se datorește faptului că propozițiile, adică ecuațiile, care se obțin din ecuația dată prin aplicarea regulilor 1, 2 sau 3 de mai înainte sînt *echivalente* între ele și *echivalente* cu ecuația dată.

Prin propoziții cu o variabilă echivalente înțelegem propoziții în care variabila poate lua valori în una și aceeași mulțime și pentru fiecare valoare a variabilei din acea mulțime ambele propoziții sînt adevărate sau false.

Ecuația

$$x + 2 = x + 2$$

are ca mulțime a soluțiilor mulțimea Q a numerelor raționale, deoarece oricare ar fi numărul rațional x egalitatea $x + 2 = x + 2$ este adevărată.

Dacă, însă, considerăm ecuația

$$x + 2 = x + 3,$$

mulțimea soluțiilor acestei ecuații este mulțimea vidă $\emptyset$, deoarece oricare ar fi numărul rațional x, egalitatea $x + 2 = x + 3$ este totdeauna falsă.

Pentru a face calcule cu numere întregi și nu cu numere raționale, se elimină numitorii. Prin aceasta se înțelege că ambii membri ai ecuației se înmulțesc cu c.m.m.m.c. al numitorilor.

În cazul ecuației

$$\frac{7}{3}x + 5 = 2x + 6$$

înmulțim, mai întîi, ambii membri ai ecuației cu 3. Obținem $3\left(\frac{7}{3}x + 5\right) = 3(2x + 6)$ sau $7x + 15 = 6x + 18$. Mai departe, trecem pe $6x$ cu semn schimbat din membrul al doilea în membrul întîi și obținem $7x + 15 - 6x = 18$ sau $x + 15 = 18$. Apoi, trecem pe 15 cu semn schimbat din membrul întîi în membrul al doilea și obținem $x = 18 - 15$ sau $x = 3$. Deci 3 este soluția ecuației considerate.

Exemplul 2. Fie ecuația

$$\frac{2x + 3}{2} = \frac{5x + 6}{3}.$$

Presupunînd că x a fost înlocuit cu o soluție, pe care o vom nota tot cu x, a ecuației considerate, putem scrie

$$\frac{1}{2}(2x + 3) = \frac{1}{3}(5x + 6).$$

Aplicînd distributivitatea înmulțirii față de adunare, obținem, mai întîi, $\frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 5x + \frac{1}{3} \cdot 6$ sau

$$x + \frac{3}{2} = \frac{5}{3}x + 2.$$

Putem proceda și altfel. Înmulțind ambii membri ai egalității $\frac{2x + 3}{2} = \frac{5x + 6}{3}$ cu cel mai mic multiplu comun al lui 2 și 3, care este 6, obținem $\frac{2x + 3}{2} \cdot 6 = \frac{5x + 6}{3} \cdot 6$. Dar aceasta se scrie $\frac{6(2x + 3)}{2} = \frac{6(5x + 6)}{3}$ sau

$$3(2x + 3) = 2(5x + 6).$$

În cazul de față, rezultatul este cel al înmulțirii numărătorului fracției $\frac{2x + 3}{2}$ cu numitorul fracției $\frac{5x + 6}{3}$, al înmulțirii numărătorului fracției $\frac{5x + 6}{3}$ cu numitorul fracției $\frac{2x + 3}{2}$ și al egalării celor două produse obținute.

Din

$$3(2x + 3) = 2(5x + 6),$$

aplicînd distributivitatea înmulțirii față de adunare, obținem

$$6x + 9 = 10x + 12$$

Aplicîndu-i procedeul de rezolvare descris mai înainte, avem succesiv: $9 = 10x + 12 - 6x$; $9 = 4x + 12$; $9 - 12 = 4x$; $-3 = 4x$ sau $4x = -3$; $x = -\frac{3}{4}$.

Exemplul 3. Fie ecuația

$$\frac{3x + \frac{5}{4}}{2} - \frac{\frac{7}{3}x + 3}{5} = x.$$

Presupunînd că x a fost înlocuit cu o soluție, pe care o vom nota tot cu x, a ecuației considerate, putem scrie

$$\frac{1}{2}\left(3x + \frac{5}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{7}{3}x + 3\right) = x \text{ sau } \frac{1}{2}\cdot 3x + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{3}x - \frac{1}{5}\cdot 3 =$$

$$= x \text{ sau } \left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{15}x\right) + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{5}\right) = x \text{ sau } \frac{31}{30}x + \frac{1}{40} = x.$$

Aplicîndu-i procedeul de rezolvare descris mai înainte, avem succesiv:

$\frac{31}{30}x + \frac{1}{40} - x = 0$; $\frac{1}{30}x + \frac{1}{40} = 0$; $\frac{1}{30}x = -\frac{1}{40}$; $x = -\frac{1}{40}\cdot 30$

sau

$$x = -\frac{3}{4}.$$

EXERCIȚII

Să se rezolve, în mulțimea $\mathbf{Q}$, ecuațiile:

1) $2x = 6$; **2)** $4x = 8$; **3)** $4x = 0$; **4)** $7x = 7$; **5)** $-4x = 12$;
6) $-6x = -24$; **7)** $-9x = 0$; **8)** $-6x = -6$; **9)** $-x = -1$;
10) $-x = -2$; **11)** $-x = 3$; **12)** $2x = -2$; **13)** $-7x = 21$;
14) $3x = -9$; **15)** $-10x = 0$; **16)** $x + 1 = 2$; **17)** $x - 4 = 3$;
18) $-x + 1 = 4$; **19)** $-x + 5 = 2$; **20)** $-x + 4 = -4$;
21) $-x - 4 = -4$; **22)** $x - 4 = 2$; **23)** $x - 2 = 5$;
24) $3 - x = 4$; **25)** $-3 + x = 5$; **26)** $-2 + x = -1$;
27) $-4 + x = -4$; **28)** $5 - x = -5$; **29)** $-5 + x = 5$;
30) $-5 - x = -5$; **31)** $1 + y = 5$; **32)** $-3 + y = -4$;
33) $7 - z = 2$; **34)** $-7 + z = 4$; **35)** $2x - 4 = 0$;
36) $7x - 28 = 0$; **37)** $3x + 12 = 0$; **38)** $4x + 16 = 0$;

39) $-3x + 27 = 0$; **40)** $-6x + 18 = 0$; **41)** $-9x - 36 = 0$;
42) $-10x + 40 = 0$; **43)** $-5y + 20 = 0$; **44)** $4x + 6 = -10$;
45) $4 = 3x - 2$; **46)** $3 = 4y - 5$; **47)** $-7 = 2y + 1$;
48) $11 = 4z + 3$; **49)** $40 = 20y + 60$; **50)** $5x - 8 = 12$;
51) $7x - 1 = 13$; **52)** $7x - 8 = 20$; **53)** $-8x + 1 = 17$;
54) $-7y + 1 = -13$; **55)** $-9x + 2 = 20$; **56)** $4x - 3 = 21$;
57) $5x + 12 = 2$; **58)** $-6x + 18 = 6$; **59)** $-8y + 10 = 2$;
60) $8x = 3x + 15$; **61)** $3x = 2x + 1$; **62)** $4x = -3x + 14$;
63) $4x - 6 = 2x$; **64)** $2y = -3y - 10$; **65)** $7x - 14 = 5x - 2$;
66) $8z + 1 = 5z - 5$; **67)** $-4z + 15 = 15 - 2z$;
68) $-3z + 7 = -7 + 4z$; **69)** $3(x + 1) = 6$;
70) $5(y - 1) = 2y + 7$; **71)** $4(x + 1) = -7x - 7$;
72) $3(x + 2) = 2(x + 4)$; **73)** $6 = 4(x + 1) - 2(x + 2)$;
74) $-2 = 5(x + 1) - 7$; **75)** $-6 = 2(y + 4) + 5y$;
76) $5(x + 1) = 2(x - 1) - 2$; **77)** $3(x - 1) - 4(x + 2) = 0$;
78) $2(2x - 5) = 3(x - 2) + 7$; **79)** $5(1 - 2x) + 3 = 4(x + 3) + 10$;
80) $2x = -1\,732$; **81)** $-5x = 5\,010$; **82)** $-25x = -6\,250$;
83) $102y = -20\,910$; **84)** $2x = 5x - 1\,752$;
85) $1\,754y = 254y + 3\,000$; **86)** $2\,009y = 1\,009y - 24\,000$;
87) $4x = 2$; **88)** $5x = 2$; **89)** $7x = 1$; **90)** $-6x = 5$;
91) $-8x = -1$; **92)** $-4x = 1$; **93)** $-9x = 3$; **94)** $3x + 1 = 0$;
95) $6x = 3$; **96)** $400x = 1$; **97)** $2(x + 1) = 3x + 5$;
98) $4(x - 1) = 5(x + 1) + 10x$; **99)** $3x + 2x^2 = 2(2 + x^2)$;
100) $\frac{x}{2} = 3$; **101)** $\frac{x - 1}{2} = 3$; **102)** $\frac{4}{3} = \frac{x}{2}$;
103) $\frac{x - 1}{2} = \frac{x + 1}{3}$; **104)** $\frac{x}{4} = \frac{x - 1}{3}$; **105)** $\frac{3x}{2} = \frac{5x + 1}{4}$;
106) $\frac{4x - 1}{3} = 1 + \frac{x}{2}$; **107)** $3x + \frac{x + 1}{4} = \frac{x}{6}$;
108) $2x - \frac{x - 1}{4} = \frac{x}{2}$; **109)** $4x - \frac{x + 1}{6} = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$;
110) $\frac{3(x - 1)}{4} = \frac{1}{5}x - 3x$; **111)** $\frac{1}{4}(2x - 1) = \frac{1}{6}x - 1{,}5x$;

112) $\frac{2}{5}(x+1)+x^2=\frac{3}{2}(x-1)+x(x-4)$; 113) $2x=2x$;

114) $3x-3x=0$; 115) $7y=5y+2y$; 116) $3t+5=5+3t$;

117) $3(x+1)=3(x+2)-3$; 118) $2x+1=2x+2$;

119) $5(x+1)=5x+4$; 120) $2(x+1)=2(x+2)$.

Să se rezolve ecuațiile cu necunoscutele x sau y sau z:

121) $ax=b$, $(a\neq 0)$; 122) $ax=5$, $(a\neq 0)$;

123) $ax+x=2$, $(a\neq -1)$; 124) $2x=4b$;

125) $3ax=5$, $(a\neq 0)$; 126) $2ax=4a$, $(a\neq 0)$;

127) $4ax=2ax-4$, $(a\neq 0)$; 128) $5ax=ax+8a$, $(a\neq 0)$;

129) $3ax=2ax+b$, $(a\neq 0)$; 130) $4ay-b=3ay$, $(a\neq 0)$;

131) $7az-c=5az+2c$, $(a\neq 0)$; 132) $ax-bx=1$, $(a\neq b)$;

133) $ay+by=5$, $(a\neq -b)$; 134) $ay=by+3$, $(a\neq b)$;

135) $az=-bz+7$, $(a\neq -b)$; 136) $\frac{ax}{2}-3=\frac{2ax}{3}$, $(a\neq 0)$;

137) $\frac{1}{2}(a-x)=\frac{3}{4}(a+x)$.

138) Să se reprezinte fiecare dintre următoarele mulțimi scriind elementele sale între acolade:

$A=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ 2x=4\}$; $B=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ -2x=0\}$;
$C=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ 5x=0\}$; $D=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ -2x=6\}$;
$E=\{x\mid x\in \mathbf{Z},\ x-2=0\}$; $F=\{x\mid x\in \mathbf{Z},\ -5x=0\}$;
$G=\{x\mid x\in \mathbf{Z},\ 2(x+1)=4x+2\}$;
$H=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ 3x-6=0\}$; $I=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ 4x+8=0\}$;
$J=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ 4x=3x\}$; $K=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ 4x=2\}$.

139) Să se reprezinte fiecare dintre următoarele mulțimi scriind elementele sale între acolade:

$A=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ x\leqslant 3\}$; $B=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ 2x<6\}$;
$C=\{x\mid x\in \mathbf{N}^*,\ 2x\leqslant 0\}$; $D=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ -2\leqslant x\leqslant 0\}$;
$E=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ x+1\leqslant 4\}$; $F=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ x-1\leqslant 3\}$;
$G=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ x\leqslant -2\}$; $H=\{x\mid x\in \mathbf{Z},\ -2\leqslant x\leqslant 2\}$;
$I=\{x\mid x\in \mathbf{Z}-\mathbf{N},\ x\geqslant -5\}$; $J=\{x\mid x\in \mathbf{Z},\ -2\leqslant x\leqslant 3\}$;
$K=\{x\mid x\in \mathbf{Z},\ -3<x<4\}$; $L=\{x\mid x\in \mathbf{Z},\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

140) Să se reprezinte fiecare dintre următoarele mulțimi, scriind elementele sale între acolade:

$A=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ 2(x+1)=2\}$; $B=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ 3x=6\}$;
$C=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ -4x-8=0\}$; $D=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ 10x=5\}$;
$E=\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ -5x=1\}$; $F=\{x\mid x\in \mathbf{Q}-\mathbf{N},\ 3x=0\}$;
$G=\{x\mid x\in \mathbf{Q}-\mathbf{Z},\ x-2x=4\}$.

141) Suma a două numere întregi distincte mai mari decît -2 este 0. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

142) Suma a două numere întregi mai mari decît -2 este 1. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

143) Se consideră numerele raționale a și b. Știind că $a<b<0$ să se afle care este mai mare dintre $|a|$ și $|b|$.

144[d]) Pentru ce numere întregi x, $\frac{2}{1+x}$ este număr întreg?

145[d]) Pentru ce numere naturale x, numărul $\frac{5}{3x+1}$ este număr întreg?

146) Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ |x|=2\}=\{-2;\ 2\}$;
b) $\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ |x|=0\}=\{0\}$;
c) $\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ |x|=-5\}=\emptyset$;
d) $\{x\mid x\in \mathbf{Q},\ |x|+|x-1|=-3\}=\{1\}$.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază

Să se rezolve, în mulțimea **Q**, ecuațiile:

a) $3x=6$; b) $8x=4$; c) $3x=1$; d) $-x=9$; e) $-4x=4$;
f) $5x=0$; g) $2y+1=3$; h) $4z+7=2z+3$; i) $16=-4x$;
j) $2x-2=5(x-1)$; k) $x(x+1)=x^2+2x+1$;
l) $2x+1=x+x+1$; m) $2x-x=x+4$; n) $\frac{2z}{3}-\frac{z}{2}=\frac{1}{3}$;
o) $x-\frac{x-1}{4}=\frac{x}{2}$; p) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}(x+1)=1$.

r) Să se rezolve ecuația cu necunoscuta x:

$$2ax=1\ (a\neq 0).$$

1) Să se afle un număr știind că adunînd dublul său cu $\frac{2}{5}$ obținem 2.

Rezolvare. Notînd cu x numărul căutat, avem $2x + \frac{2}{5} = 2$. Deci $2x = 2 - \frac{2}{5}$ sau $2x = \frac{8}{5}$. Prin urmare, $x = \frac{8}{10}$ sau $x = \frac{4}{5}$. Numărul căutat este $\frac{4}{5}$.

2) Să se afle un număr știind că înmulțindu-l cu 3 obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 24 din el.

Rezolvare. Notînd cu x numărul căutat, avem $3x = x - 24$. Deci $3x - x = -24$ sau $2x = -24$. Obținem $x = \frac{-24}{2}$ sau $x = -12$. Numărul căutat este -12.

3) Cineva a depus la CEC în două luni suma de 3 600 lei. Suma depusă în a doua lună este de trei ori mai mare decît cea din prima lună. Ce sumă în lei a depus la CEC în fiecare lună?

Rezolvare. Să notăm cu x suma în lei depusă la CEC în prima lună. Atunci $3x$ este suma în lei depusă la CEC în a doua lună. Suma în lei depusă la CEC în cele două luni este $4x$. Deci $4x = 3\,600$, de unde $x = 900$. Prin urmare, în prima lună a fost depusă la CEC suma de 900 lei, iar în a doua lună a fost depusă la CEC suma de 2 700 lei.

4) Într-o sticlă sînt 235 ml de apă, iar într-o altă sticlă sînt 123 ml de apă. Cîți ml de apă trebuie să turnăm din prima sticlă în a doua ca în ambele sticle să se afle cantități egale de apă?

Rezolvare. Notăm cu x cantitatea de apă în ml ce trebuie să fie turnată din prima sticlă în a doua astfel încît în cele două sticle să se afle cantități egale de apă. Atunci $235 - x = 123 + x$. Avem $235 - x - x = 123$ sau $235 - 2x = 123$. Apoi $-2x = 123 - 235$ sau $-2x = -112$. Deci $x = \frac{-112}{-2}$ sau $x = 56$. Rezultă că din prima sticlă trebuie să turnăm în a doua sticlă 56 ml de apă asfel încît în cele două sticle să se afle cantități egale de apă.

5) Un tată spune către fiica sa de 8 ani: cînd ai să ai vîrsta mea, eu am să fiu de 60 de ani. Cîți ani are tatăl?

Rezolvare. Să notăm cu x vîrsta în ani a tatălui. Atunci, o să treacă $x - 8$ ani pînă cînd tatăl are să împlinească vîrsta de 60 de ani. Deci $x + (x - 8) = 60$. Deci $2x - 8 = 60$, de unde $2x = 60 + 8$ sau $2x = 68$. Prin urmare $x = 34$. Vîrsta tatălui este de 34 de ani.

1) Un număr este cu 2 mai mare decît altul. Să se afle numerele știind că suma lor este 246.

2) Un număr este cu 2,4 mai mare decît alt număr. Să se afle aceste numere, știind că suma lor este 6.

3) Un număr este de 2 ori mai mare decît altul. Să se afle numerele știind că suma lor este 423.

4) Să se afle un număr știind că înmulțindu-l cu 2 obținem același rezultat ca atunci cînd îl adunăm cu 24.

5) Să se afle un număr știind că înmulțindu-l cu 2 obținem același rezultat ca atunci cînd scădem pe 2 din el.

6) M-am gîndit la un număr. L-am adunat cu 4. Rezultatul l-am înmulțit cu 2. Din noul rezultat am scăzut 8 și am obținut numărul la care m-am gîndit. La ce număr m-am gîndit?

7) Diferența dintre lungimea și lățimea unui dreptunghi este de 28 m, iar perimetrul este de 456 m. Să se afle aria dreptunghiului.

8) Suma a trei numere este 28. Primul este de 3 ori mai mare decît al doilea, iar diferența dintre al doilea și al treilea este 12. Să se afle numerele.

9) Suma bazelor unui trapez este de 25 m, iar diferența lor de 12 m. Să se afle bazele trapezului.

10[d]) Mihai îi spune lui Petre: Dacă îmi dai 1 leu din banii tăi, voi avea de două ori mai mulți bani decît vei avea tu. Petre îi spune lui Mihai: Dacă îmi dai tu 5 lei voi avea cît vei avea tu. Ce sumă are Petre și ce sumă are Mihai?

11) Suma a trei numere întregi consecutive este 54. Să se afle numerele. (Trei numere întregi consecutive sînt $x - 1$, x, $x + 1$.)

12) Suma a două numere naturale este 257. Dacă-l împărțim pe unul din ele la celălalt, obținem cîtul 20 și restul 5. Să se afle numerele.

13) Să se afle un număr pe care, dacă-l înmulțim cu $\frac{4}{7}$, obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 21 din el.

14) Să se afle un număr știind că, înmulțindu-l cu $\frac{3}{5}$, obținem același rezultat ca atunci cînd îl adunăm cu 20.

15) Dacă din dublul unui număr pozitiv scădem jumătatea sa, obținem 1,2. Să se afle numărul.

16) Suma bazelor unui trapez este de 92 m. Jumătatea uneia este cu 16 m mai mare decît dublul celeilalte. Să se afle bazele trapezului.

17) Suma a două numere întregi distincte care nu sînt mai mari decît 4 este 2. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

18) Un pionier a depus la CEC în trei luni suma de 420 lei. În luna a doua a depus de două ori mai mulți bani decît în prima lună și cu 20 lei mai puțin decît în a treia lună. Ce sumă a depus în fiecare lună?

19) Să se afle două numere naturale consecutive știind că, dacă adunăm $\frac{5}{6}$ din unul din ele cu $\frac{1}{7}$ din celălalt, obținem 47. (Două numere naturale consecutive sînt x, $x+1$.)

20) Într-un grup de copii sînt de trei ori mai mulți băieți decît fete. Dacă ar mai veni în grup 3 fete și ar pleca 7 băieți, atunci numărul fetelor ar fi egal cu $\frac{3}{5}$ din numărul băieților. Cîte fete și cîți băieți sînt în grup?

21) Într-un bidon se află de trei ori mai mult lichid decît în altul. Dacă din fiecare bidon s-ar scoate cîte 4 l, atunci în primul bidon ar rămîne de patru ori mai mult lichid decît în al doilea. Cîți litri sînt în fiecare bidon?

22) Într-un vas sînt 149 litri de lichid și în altul 161 litri. În fiecare minut în primul vas se toarnă cîte 8 litri, iar în al doilea cîte 5 litri. După cîte minute în primul vas va fi aceeași cantitate de lichid ca în al doilea vas?

23) Suma a două numere naturale scrise în baza 10 este egală cu 979. Unul din ele se termină cu zero. Dacă se taie acest zero, se obține al doilea număr. Să se afle numerele.

24) Să se afle toate numerele naturale de trei cifre scrise în baza 10 știind că fiecare dintre ele îndeplinește următoarele condiții:
1) este divizibil cu 2 și nu este divizibil cu 5;
2) are cifra zecilor 3;
3) dacă se adună numărul cu inversatul său se obține 666.
(Indicație: Inversatul (răsturnatul) numărului $\overline{xyz}$ este numărul $\overline{zyx}$).

Probleme suplimentare

25) Un dreptunghi are lungimea de trei ori mai mare decît lățimea. Dacă se mărește lungimea cu 2 m și lățimea tot cu 2 m se obține un dreptunghi a cărui arie este cu 252 m² mai mare decît aria primului dreptunghi. Să se afle lungimea și lățimea primului dreptunghi.

26) Un muncitor trebuie să facă, după plan, pînă la o anumită dată, un număr de piese. Pentru aceasta trebuie să facă 40 piese pe zi. Introducînd o inovație, muncitorul a făcut cîte 50 piese pe zi și a terminat de realizat numărul planificat de piese cu o zi înainte de termen. Cîte piese avea de făcut muncitorul după plan?

27) O echipă de tractoriști trebuie să are, într-un anumit interval de timp, un anumit număr de hectare. Dacă ară cîte 60 ha pe zi, rămîne în urmă cu 10 hectare față de plan. Dacă ară cîte 70 ha pe zi, depășește planul cu 30 ha. Cîte zile sînt planificate pentru arat și cîte hectare are de arat?

28) Un muncitor avea de executat, după plan, în 14 zile un anumit număr de piese. Lucrînd cîte 2 piese pe zi, în plus, față de plan, a executat planul în 10 zile. Să se afle cîte piese trebuia să execute, în total, muncitorul după plan.

29) Un mobil a parcurs distanța de 144 km în 3 ore. O parte din distanță a fost parcursă cu viteza de 10 m/s, iar restul cu o viteză de două ori mai mare. Cît timp s-a mișcat mobilul cu viteza de 10 m/s și cît timp s-a mișcat cu cealaltă viteză?

30) Distanța dintre două localități este de 270 km. Două autoturisme pleacă în același timp din aceste localități și merg unul către celălalt. Viteza unuia este cu 18 km/h mai mare decît a celuilalt și se întîlnesc după 2 ore de la plecare. Să se afle viteza fiecăruia dintre cele două autoturisme.

31) Doi bicicliști pornesc în același timp din localitatea A și merg spre localitatea B. Primul biciclist are viteza de 15 km/h, iar al doilea are viteza de 10 km/h. Primul ajunge în B cu o oră înaintea celui de-al doilea. Care este distanța dintre cele două localități?

32[d]) Un ogar fuge după o vulpe care se află la distanța de 30 m de el. Săritura ogarului este de 2 m. Săritura vulpii este de 1 m. În timpul în care vulpea face 3 sărituri, ogarul face 2 sărituri. Ce distanță trebuie să parcurgă ogarul pentru a ajunge vulpea?

33) Un dreptunghi are lungimea cu 3 cm mai mare decît latura unui pătrat, iar lățimea cu 2 cm mai mică decît latura aceluiași pătrat.

Știind că aria dreptunghiului este cu 4 cm^2 mai mare decît aria pătratului, să se afle lungimea și lățimea dreptunghiului.

34) Există un dreptunghi și un pătrat astfel încît:
1) aria dreptunghiului să fie egală cu aria pătratului și
2) lungimea dreptunghiului să fie cu 2 cm mai mare decît latura pătratului, iar lățimea dreptunghiului să fie cu 2 cm mai mică decît latura pătratului?

35) Este posibil să cheltuim toată suma de 451 lei cumpărînd 20 mingi din care unele cu 7 lei bucata și altele cu 3 lei bucata?

36) Diferența dintre un număr natural și dublul său este a.
1) Să se afle numărul.
2) Dacă $a > 0$, problema are soluție?
3) Dacă $a = 0$, problema are soluție?
4) Dacă $a < 0$, problema are soluție?

37) O uzină a făcut în t zile p tone de produse. Ce reprezintă $\frac{p}{t}$?

Dar $\frac{t}{p}$?

38) Suma a două numere este s, iar diferența dintre primul și al doilea este d. Să se afle numerele.

39) Cîți litri de suc de 6 lei litrul trebuie amestecați cu 6 litri de suc de 4 lei litrul pentru a obține un amestec de 5,25 lei litrul?

40) Cîte kilograme de marfă cu prețul de m lei kilogramul trebuie amestecate cu a kilograme de marfă cu prețul de p lei kilogramul pentru a obține un amestec cu prețul de n lei kilogramul?

41) Două uzine trebuiau să producă împreună, după plan, într-un anumit interval de timp, 450 mașini. Prima uzină a depășit planul cu 20% și a doua cu 10%, realizînd împreună 515 mașini. Cîte mașini trebuia să producă, după plan, fiecare uzină?

42) Un biciclist parcurge o anumită distanță în 20 min. El merge jumătate din distanță cu o viteză, iar cealaltă jumătate cu o viteză de patru ori mai mare. În cît timp parcurge a doua jumătate?

43[d]) Într-un colectiv de muncă sînt 17 băieți și un număr de fete. Fiecare membru al colectivului este fie electrician, fie strungar. Numărul fetelor care au profesia de strungar este egal cu numărul băieților care au profesia de electrician. Cîți membri ai colectivului au profesia de strungar?

Lucrare pentru realizarea recapitulării finale a unor cunoștințe de bază

1) Numărul 23 este număr prim?

2) Numărul 93 240 se divide cu 2? Dar cu 5? Dar cu 10? Dar cu 3? Dar cu 9? Dar cu 7? Dar cu 18? Dar cu 36?

3) Să se efectueze:
a) $5^{22} : (5 \cdot 5^2 \cdot 5^{17})$; b) $(7^2)^{10} : 7^{19}$; c) $(-2)^{248} : (-2)^{245}$

4) Să se afle x din:

a) $\frac{x}{4} = \frac{3}{6}$; b) $\frac{4}{x} = \frac{10}{5}$; c) $\frac{6}{3} = \frac{x}{4}$; d) $\frac{1}{4} = \frac{5}{x}$;

e) $\frac{x}{2} = 3$; f) $\frac{6}{x} = 3$; g) $4 = \frac{x}{5}$; h) $5 = \frac{20}{x}$;

i) $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; j) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$; k) $\frac{a}{b} = \frac{x}{p}$; l) $\frac{m}{n} = \frac{n}{x}$;

m) $\frac{x}{a} = b$; n) $\frac{a}{x} = c$; o) $p = \frac{x}{s}$; p) $r = \frac{s}{x}$.

5) 6 kg de mere costă 30 lei. Cît costă 7 kg de mere de aceeași calitate?

6) 6 muncitori pot termina o lucrare în 2 ore. În cîte ore pot termina aceeași lucrare 10 muncitori?

7) Să se împartă numărul 270 în părți direct proporționale cu numerele 2; 3; 4.

8) Să se calculeze 20% din 1 400 lei.

9) Să se afle un număr știind că 40% din el este egal cu 160.

10) Cît la sută din 150 este 37,5?

11) Să se scrie următoarele numere în ordine crescătoare: -2; -3; 0; 3; -5; 7; -9.

12) Să se efectueze:

a) $2 + (-5) - (-6)$; b) $2 \cdot (-5) + (-6) : (-2)$;
c) $2^2 + (-3)^2 + (-1)^3 + 3^3$;
d) $10^3 \cdot [(-1)^{24} + (-1)^{25} - 2 \cdot (2 + 9 : 3)]$.

13) Să se efectueze:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : (-0{,}75)\right]$;

b) $(-10)^2 \cdot \left[\frac{1}{32} : \sqrt{\frac{1}{64}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{12{,}25} + \frac{3}{4}\right]$;

c) $\left(\frac{1}{80}-\frac{1}{24}-\frac{1}{400}\right):\sqrt{\frac{9}{1\,600}}$;

d) $10{,}5 \cdot (-4{,}02) + 104{,}04 : (-0{,}102) + (-0{,}01)^2$.

14) Să se calculeze: a) $\sqrt{0{,}49}$; b) $\sqrt{0{,}0081}$.

15) Să se calculeze: a) $\sqrt{15}$; b) $\sqrt{5{,}2}$; c) $\sqrt{0{,}005}$ cu trei zecimale exacte și să se facă și proba.

16) Să se descompună în factori: a) $ax + ay$; b) $3x + 3$.

17) Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $4\,x = 0$; b) $3\,(x-2)+7 = 5\,x + 10\,(x+1)$.

Capitolul VIII

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DIVERSE ȘI RECAPITULATIVE

1) Raportul a două numere naturale este $\frac{1}{4}$, iar suma lor nu este mai mare decît 25. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

2) Raportul a două numere naturale este $\frac{2}{3}$, iar suma lor nu este mai mare decît 20.

1) Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

2) Adăugați la condițiile de mai sus una din condițiile de mai jos, astfel încît problema să admită:

a) două soluții;

b) o soluție.

(I) Un număr este egal cu $\frac{2}{3}$ din celălalt.

(II) Dacă înmulțim un număr cu 3, obținem același rezultat ca atunci cînd înmulțim celălalt număr cu 2.

(III) Numerele sînt direct proporționale cu 2 și 3.

(IV) Numerele sînt invers proporționale cu 2 și 3.

(V) Suma numerelor este un multiplu de 4.

(VI) Suma numerelor este un multiplu de 5, dar nu este un multiplu de 2.

3) Se știe că $\frac{a}{b} = 2$, iar $\frac{c}{d} = \frac{1}{4}$. Să se calculeze $\frac{ac}{bd}$.

4) Raportul dintre numerele a și b este $\frac{2}{5}$, iar raportul dintre numerele c și d este $\frac{4}{5}$. Care este raportul dintre ad și bc?

5) Să se afle suma dintre numărul 3 și numărul opus acestuia.

6) Să considerăm următorul „tablou de numere":

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Convenim să scriem:

$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 4 = -2$. În general, $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc$.

Să se calculeze:

a) $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix}-4 & -5\\ -3 & -10\end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}$.

7) Să se calculeze:

$(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+3}$, unde $n \in N^*$.

8[d]) Într-un grup se joacă cinci copii: Andrei, Barbu, Costel, Dan și Emil. Fiecare dintre ei are aplicată pe spate cîte o bucată de hîrtie de culoare albă sau neagră. Fiecare poate vedea ce culoare are hîrtia de pe spatele oricăruia dintre ceilalți copii, dar nu poate vedea ce culoare are hîrtia de pe spatele său. Fiecare din cei ce au pe spate hîrtia de culoare albă spune mereu adevărul, iar ceilalți mint mereu.

Andrei a spus: văd trei bucăți de hîrtie de culoare albă și una de culoare neagră.

Barbu a spus: văd patru bucăți de hîrtie de culoare neagră.

Costel a spus: văd o bucată de hîrtie de culoare albă și trei de culoare neagră.

Emil a spus: văd patru bucăți de hîrtie de culoare albă.

Ce culoare are bucata de hîrtie de pe spatele fiecărui copil?

9) Să se efectueze:

a) $0{,}2 + 0{,}2\cdot 100$; b) $(-2)^2 - (-0{,}2)^3 - 4{,}08$;

c) $4{,}02 + 4{,}02\cdot(-2{,}05)$; d) $0{,}05 : (-0{,}001) + 0{,}07$;

e) $32{,}4 : (-0{,}18) + (-0{,}5)^2$; f) $0{,}3\cdot[2 + 2\cdot(1-4)]$;

g) $2\cdot\{-1 + 10\cdot[2 + 2\cdot(-3)]\}$;

h) $\left(-\frac{5}{6}\right):\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}:\left(0{,}5 + \frac{1}{6}\right)\right]$; i) $\left(1 - \frac{1}{72}\right):\left(\frac{5}{36} - \frac{1}{135} + \frac{5}{168}\right)$.

10) Să se calculeze (la pag. 129 se explică ce se înțelege prin $[x]$, unde $x \in Q$):

a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{7}{2}\right] + [2{,}7] + [-0{,}5] + [1{,}2]$;

b) $\left[-\frac{2}{3}\right] + \left[-\frac{7}{5}\right] + [0{,}25] + [-2{,}4] + [-0{,}75] + \left[\frac{8}{5}\right]$.

Să se calculeze:

11) $3\,857\cdot 66\,666 - 3\,857\cdot 66\,667$.

12) $4\,755\cdot 66\,664 - 4\,755\cdot 66\,666$.

13) $1\,247(3\,457a + 1) - 1\,247\cdot 3\,457a$.

14) $66\,666(22\,222a + 1) - 33\,333(44\,444a + 2)$.

15) $3\,241(9a + 987\,792b) - 3\,241(9a + 987\,792b)$.

16) În această problemă a și b sînt numere.

Prin max (a, b) înțelegem cel mai mare număr dintre a și b, dacă $a \neq b$, sau a, dacă $a = b$. De exemplu: $\max(2; 4) = 4$, $\max(-3; -3) = -3$.

Prin min (a, b) înțelegem cel mai mic număr dintre a și b, dacă $a \neq b$, sau a, dacă $a = b$. De exemplu: $\min(4; 5) = 4$, $\min(7; 7) = 7$.

Să se calculeze:

a) $\max(-2;\ -5) + \max(-2;\ 0)$;

b) $\max(-4;\ 4) + \min(0;\ -5)$;

c) $\min(0;\ 3) + \max(-1;\ 0)$;

d) $\min\left(0{,}6;\ -\frac{2}{3}\right) + \max\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$;

e) $\max\left(-0{,}3;\ -\frac{1}{3}\right) - \min\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$;

f) $\max\left(\frac{15}{16};\ \frac{16}{17}\right) + \min\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$;

g) $\min\left(-\frac{2}{7};\ -\frac{2}{9}\right) + \max(-0{,}3;\ 0{,}(3))$;

h) $\max(|-7|;\ |-8|) + \min(|3|;\ |-4|)$.

17) Să se scrie numărul $1\,011_{(2)}$ în baza 10.

18) Să se scrie numărul 1 036 în baza 2.

19[d]) Suma a două numere naturale este 126, iar produsul lor este 2 525. Să se afle suma inverselor acestor numere.

20) Știind că $a = -2$ și $b + c = -4$ să se calculeze

$$ab + ac.$$

21) Se știe că $x - y = 3$. Cu cît este egal $y - x$?

22) Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziții:

1) Oricare ar fi numerele raționale a și b, dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, atunci

$$a + b \neq 0;$$

2) Oricare ar fi numerele raționale a și b, dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, atunci

$$a - b \neq 0.$$

23) Se consideră trei numere pozitive x, y, z astfel încît:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}.$$

a) Cît la sută reprezintă numărul cel mai mic din cel mai mare?

b) Să se afle cele trei numere știind că:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 372.$$

24) Se consideră trei numere pozitive x, y, z astfel încît:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}.$$

a) Cît la sută reprezintă numărul cel mai mic din suma celorlalte două?

b) Să se afle cele trei numere știind că:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{5} = \frac{6}{7}.$$

25) Să se afle numerele pozitive x, y, z, t știind că ele îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții:

a) $y + 2z + 3t = 1$.

b) Dacă înmulțim pe x cu 5, obținem același rezultat ca atunci cînd înmulțim pe 7 cu y.

c) z este egal cu $\frac{3}{5}$ din y.

d) Raportul dintre z și t este 1,5.

26^{d}) Să se arate că din oricare cinci numere naturale, prime, mai mari ca 2 putem alege două astfel încît diferența lor să fie divizibilă cu 8.

27^{d}) Se dau 1 833 de numere. Fiecare din ele este 1 sau -1. Se pot împărți aceste 1 833 de numere în două grupe astfel încît suma numerelor din prima grupă să fie egală cu suma numerelor din cealaltă grupă?

28^{d}) În cele ce urmează, a și b sînt numere întregi. Considerăm următorul șir de numere. Primul număr din șir este egal cu a, al doilea este egal cu b, al treilea este egal cu diferența între al doilea și primul, al patrulea este egal cu diferența între al treilea și al doilea ș.a.m.d. Ce număr se află pe locul 184?

29) Lungimea unui dreptunghi este de trei ori mai mare decît lățimea, iar aria sa este de 4 824,03 m². Să se afle lungimea și lățimea dreptunghiului.

30) Raportul dintre lățimea și lungimea unui dreptunghi este 0,6, iar aria sa de 24 603,75 m². Să se afle lungimea și lățimea dreptunghiului.

31) Se consideră $P(x) = 8x^3 - 4x^2 + 1$. Să se calculeze:

a) $P(1)$; b) $P\left(-\frac{1}{2}\right)$; c) $P(0)$.

32) Se consideră: $A = x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{6}x - 0{,}5y$, $C = x + 0{,}25$.

Să se efectueze:

a) $A - B - C$; b) $A - 2(3B + 2C)$.

33^{d}) Să se arate că nu există un polinom P cu coeficienți reali astfel încît să avem:

$$P(x) + P(1 - x) = x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

34) Se consideră expresia:

$$E(x, y) = (x^2 - 2y)^3.$$

Să se afle valoarea acestei expresii pentru:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}; \; y = 0{,}5.$$

35) Se consideră expresia:

$$E(x, y) = x^6y^3 - 6x^4y^2 + 12x^2y - 8.$$

Să se afle valoarea ei pentru:

$$x = \frac{-0{,}004}{(-0{,}03)^2 + (-0{,}01)^2}; \; y = \frac{(-8) : 2^3 + 3{,}002}{-\sqrt{4{,}016016}}.$$

36) Se consideră expresia:

$$E(x, y) = (xy^2 - 1)\{3x^2 - 2[3xy + 2x(x - 2y)]\}.$$

Să se afle valoarea expresiei pentru:

$$x = 4$$

şi

$$y = \left(3 + \frac{2}{75} - 1\frac{7}{36} - 1\frac{1}{15} + \frac{5}{24}\right) : \frac{-8 \cdot \sqrt{1\,229{,}2036}}{9 \cdot 10^4 \cdot (-0{,}04)^2}.$$

37[d]) Să se găsească toate numerele naturale n pentru care $n + 1$, $n + 5$, $n + 7$, $n + 11$, $n + 13$, $n + 17$, $n + 23$ sînt în acelaşi timp numere prime.

38[d]) Să se afle acele numere naturale x pentru care fiecare din numerele $x + 1$, $x + 3$, $x + 7$, $x + 9$, $x + 15$ este un număr prim.

39) Se consideră trei numere întregi. Diferenţa între primul şi al doilea este egală cu diferenţa între al doilea şi al treilea. Ştiind că al doilea este 72, să se afle suma numerelor.

40) Să se calculeze:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + 6^{k+1}}{3^{k+1} + 3^{2k+2}}, \text{ unde } k \in \mathbf{N}^*.$$

41[d]) Se ştie că:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{99} + a_{100} = 0.$$

Să se calculeze:

$$1(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \ldots$$
$$\ldots + 99(a_{99} - a_{100}) + 100a_{100}.$$

42) Să se afle valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele propoziţii:

a) $\{x|\ x \in \mathbf{Z},\ 2x + 1 = -7\} = \{-4\}$;

b) $\{x|\ x \in \mathbf{N},\ 2x + 1 = 3\} = \{1\}$;

c) $\left\{x|\ x \in \mathbf{N}^*;\ \frac{x}{2} = 0\right\} = \{0\}$;

d) $\left\{x|\ x \in \mathbf{Q},\ x - \frac{x+1}{2} = 0\right\} = \{-1\}$;

e) $\left\{x|\ x \in \mathbf{R},\ \frac{x - 7{,}5}{3} = 0\right\} = \{7{,}5\}$;

f) $\{x|\ x \in \mathbf{Z},\ x - 1 = -3\} = \{-4\}$;

g) $\{x|\ x \in \mathbf{Z},\ -2 < x \leq 2{,}5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;

h) $\{x|\ x \in \mathbf{N}^*,\ -2 < x < 3{,}1\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

i) $\left\{x|\ x \in \mathbf{R} - \{4\},\ \frac{x-4}{x-4} = 1\right\} = \mathbf{R} - \{4\}$;

j) $\{0, \sqrt{2}, 1\} \cap \mathbf{Q} = \{0; 1\}$; k) $\left\{\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right\} \cap \mathbf{R} = \left\{\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right\}$;

l) $\{\sqrt{7}, -\sqrt{2}\} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$; m) $\left\{\sqrt{\frac{4}{9}}\right\} \cap \mathbf{R} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

43) Raportul a două laturi ale unui triunghi isoscel este 0,4, iar perimetrul este de 24 m. Să se afle laturile triunghiului.

44) Să se afle două numere întregi consecutive ştiind că diferenţa între produsul lor şi pătratul celui mai mic dintre ele este 245.

45[d]) Despre un număr natural ştim următoarele:

a) are patru cifre;

b) prima cifră (din stînga) a numărului este 2;

c) dacă mutăm prima cifră pe ultimul loc, obţinem un număr natural de patru cifre mai mic decît primul;

d) dacă din numărul dat scădem numărul format din aceleaşi cifre, dar scrise în ordine inversă, obţinem numărul 999.

Să se afle numărul.

46) Diferenţa între un număr de trei cifre şi numărul de trei cifre format din aceleaşi cifre, dar scrise în ordine inversă, este 693. Să se afle numărul. Cîte soluţii are problema?

47) Apa de mare conţine 5% sare. Cîte kg de apă obişnuită trebuie adăugate la 80 kg de apă de mare, pentru ca ceea ce se obţine să conţină 2% sare?

48[d]) Pentru a numerota paginile unui volum, un tipograf a utilizat 2 989 de cifre. Cîte pagini are volumul?

49) Într-un depozit este de două ori mai multă marfă decît în altul. Dacă din primul depozit s-ar scoate 430 kg marfă, iar în al doilea s-ar aduce 2 785 kg, atunci în fiecare depozit ar fi aceeaşi cantitate de marfă. Cîte kilograme de marfă sînt în fiecare depozit?

50) Într-un sac este o cantitate de marfă egală cu $\frac{2}{3}$ din cantitatea de marfă existentă în alt sac. Dacă s-ar muta dintr-un sac în altul 14,250 kg marfă, atunci în ambii saci ar fi aceeaşi cantitate de marfă. Cîtă marfă este în fiecare sac?

51) În trei zile cineva cheltuieşte o sumă de bani. În prima zi cheltuieşte $\frac{2}{3}$ din sumă şi încă 50 lei. În a doua zi cheltuieşte $\frac{3}{5}$ din din rest şi încă 25 lei. În a treia zi cheltuieşte restul de 225 lei. Să se afle suma iniţială şi cît s-a cheltuit în fiecare zi.

52) Cineva cheltuiește într-o zi cu 50 lei mai mult decît $\frac{1}{3}$ dintr-o sumă pe care o are. A doua zi cheltuiește cu 25 lei mai puțin decît $\frac{2}{3}$ din rest. A treia zi cheltuiește restul de 295 lei. Ce sumă a cheltuit în total și ce sumă a cheltuit în fiecare zi?

53[d]) Mihai a participat la un concurs școlar de schiuri. Colegii l-au întrebat ce loc a ocupat. Iată ce le-a răspuns Mihai: Dacă jumătate din băieții care m-au depășit ar fi parcurs distanța într-un timp mai mare ca al meu, atunci numărul băieților care ar fi rămas în urma mea ar fi fost de patru ori mai mare decît numărul băieților care m-ar fi întrecut. La concurs au participat 31 de băieți. Ce loc a ocupat Mihai?

54) Într-o clasă sînt de două ori mai multe fete decît băieți.
a) Pot fi în clasă 36 elevi? b) Dar 32?

55[d]) Tatăl are astăzi 28 ani și fiul 8. Să se răspundă la următoarele întrebări:

a) Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi de trei ori mai mare decît vîrsta fiului?

b) Este posibil ca, pe viitor, vîrsta tatălui să fie de 3,5 ori mai mare decît vîrsta fiului? Dacă este posibil, arătați după cîți ani vîrsta tatălui va fi de 3,5 ori mai mare decît vîrsta fiului.

c) Este posibil ca, în viitor, vîrsta tatălui să fie de patru ori mai mare decît vîrsta fiului? Dacă este posibil, arătați după cîți ani vîrsta tatălui va fi de patru ori mai mare decît vîrsta fiului.

d) A fost posibil ca, în trecut, vîrsta tatălui să fi fost de patru ori mai mare decît vîrsta fiului? Dacă acest lucru a fost posibil, arătați cu cîți ani în urmă s-a realizat acest lucru.

56[d]) Se dă un segment de dreaptă AB care are lungimea de 10 cm (fig. VIII.1). Pe acest segment se consideră un punct mobil M.

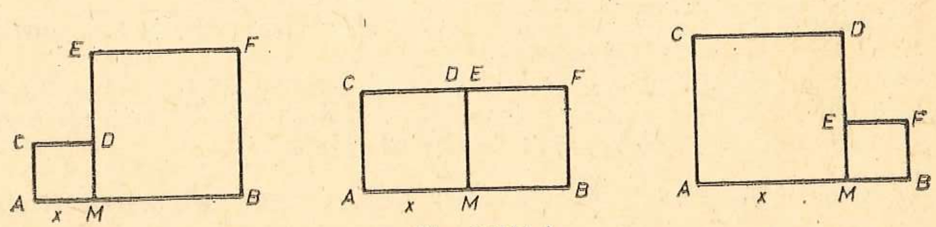


Fig. VIII.1

Fie x lungimea lui AM. Construim de aceeași parte a lui AB pătratele $ACDM$ și $MEFB$ de laturi AM și MB.
Fie

$$y = AC + CD + DE + EF + FB + BA.$$

a) Să se arate că avem:

$$y = -2x + 40 \text{ sau } y = 2x + 20.$$

b) Să se determine x astfel încît y să fie egal cu dublul perimetrului pătratului $ACDM$.

57) Între localitățile A și B este o distanță de 200 km. Din A pleacă în același timp către B două mașini, ce merg pe același drum. Una merge cu viteza de 40 km/h și cealaltă cu viteza de 60 km/h. După cît timp, de la plecarea din A și înainte de a ajunge în B, una din mașini va fi la o distanță față de B de două ori mai mică decît cealaltă mașină?

58[d]) Două camioane au pornit simultan din A către B. Primul a mers cu viteza de 50 km/h jumătate din timpul în care a parcurs drumul, iar în restul timpului a mers cu 40 km/h. Al doilea camion a mers, prima jumătate de drum cu 40 km/h, iar a doua jumătate cu 50 km/h. Care din cele două camioane a ajuns mai întîi în B?

59[d]) Un mobil parcurge jumătate dintr-o distanță cu viteza de 40 km/h și cealaltă jumătate cu viteza de 60 km/h. Care este viteza medie?

60[d]) Suma a trei numere naturale este 222. Al doilea este mai mare decît primul, iar al treilea este cu 2 mai mare decît suma celorlaltor două. Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

61[d]) Despre trei numere știm următoarele:

1) primul este număr natural;
2) al doilea este mai mare decît primul;
3) al treilea este de două ori mai mare decît primul;
4) diferența dintre al doilea și primul nu este mai mare decît 3;
5) suma lor este 6 971.

Să se afle numerele. Cîte soluții are problema?

62[d]) Să se arate că dacă numerele naturale x, y, $(y \geq x)$, sînt astfel încît $x^2 + 1 = xy$, atunci $y = 2$.

Din problemele date la olimpiade în țara noastră (cl. a VI-a, cl. a VII-a) aritmetică și algebră

1972, *februarie, București*

1) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică (proporțională) a numerelor:

$$a = 6{,}0625 + \frac{15}{16} + \sqrt{4{,}1616} - \frac{1}{25};$$

$$b = \left[7{,}25 + 11\frac{3}{4} - \left(3{,}092 + 9\frac{51}{125}\right)\right] : 1\frac{5}{8}.$$

2) Lungimea unui segment este cu 175 m mai mică decît lungimea altuia. Să se afle lungimile lor știind că $\frac{1}{3}$ din lungimea unuia este egală cu $\frac{3}{4}$ din lungimea celuilalt.

3) Să se afle x din proporția:

$\frac{x}{2} = \frac{\overline{4a6}}{5}$, știind că $\overline{4a6}$ este un număr de trei cifre divizibil cu 9 (a fiind cifra zecilor).

4) Să se afle toate perechile de numere naturale care au media proporțională egală cu 91.

1973, *februarie, București*

1) Trei elevi au împreună 225 lei. Primul are $\frac{2}{3}$ din cît are al doilea, iar al doilea are $\frac{3}{4}$ din cît are al treilea.

Elevii fac o excursie care costă în total 120 lei, fiecare contribuind cu aceeași sumă.

Cum trebuie împărțită celor trei elevi suma rămasă necheltuită?

2) Să se arate că fracția:

$$F = \frac{113\,226\,113\,226\,000 \ldots 000\,226\,113}{211\,422\,211\,422\,000 \ldots 000\,422\,211}$$

este egală cu $\frac{113}{211}$, unde numărul zerourilor de la numărător este acel și cu numărul zerourilor de la numitor.

3) Se dă $\frac{a}{b} = 0{,}6$. Să se afle $\frac{3b}{2a + 3b}$.

1973, *mai, București*

1) Lichidul turnat într-un vas cîntărește 153 kg. Vasul plin cîntărește de 5 ori cît vasul gol. Știind că vasul are volumul de 1,7 hl, să se afle masa vasului plin și densitatea lichidului.

2) O sumă de bani este împărțită la 7 elevi astfel:

Primul primește jumătate din sumă și încă 50 bani, al doilea primește jumătate din suma rămasă și încă 50 bani, al treilea primește jumătate din noul rest și încă 50 bani și așa mai departe, pînă ce ultimul primește jumătate din ultimul rest și încă 50 bani. Întreaga sumă fiind astfel distribuită, să se afle cît a primit fiecare din cei 7 elevi.

3) Drumul parcurs în alunecarea unui corp pe un plan înclinat este proporțional cu pătratul timpului necesar alunecării. Un corp alunecă în 5 secunde 50 metri. Să se afle ce drum a parcurs acel corp dacă a alunecat timp de 8 secunde.

4) Două corpuri se mișcă uniform pe un cerc. Ele pleacă în același timp dintr-un punct A de pe cerc în sensuri contrare. După ce s-au întîlnit într-un punct B, primului corp i-au mai trebuit 4 secunde ca să ajungă în A, iar celui de-al doilea, continuînd mersul său, i-au mai trebuit 9 secunde ca să ajungă și el în A.

De cîte ori parcurge cercul într-un minut fiecare din cele două corpuri?

1974, *februarie, București*

1) Un automobil a mers 30 km cu viteza de 36 km pe oră și apoi 100 km cu viteza de 60 km pe oră.

Care a fost viteza medie în metri pe secundă a acestui automobil?

2) a) Care este cel mai mic număr natural mai mare decît 1 974 și care este pătrat perfect?

b) Care este cel mai mic număr natural mai mare decît 1 974 și care este pătrat perfect și multiplu de 6?

c) Care este cel mai mic număr natural mai mare decît 1 974 și care este pătrat perfect și multiplu de 7?

1974, *mai, București*

1) Un mobil mișcîndu-se uniform rectiliniu parcurge o anumită distanță într-un anumit timp. Dacă viteza se micșorează cu 2 km/h, mobilul parcurge aceeași distanță într-un timp de două ori mai mare.

Să se afle viteza mobilului.

2) Ariile a trei pătrate sînt direct proporționale cu numerele 9, 16, 25, iar diferența între cel mai mare și cel mai mic perimetru este de 16 m.

Să se afle laturile fiecărui pătrat.

3) O sumă de bani s-a distribuit ca primă la 3 muncitori A, B, C direct proporțional cu numerele $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$.

Unul din muncitori constată că el primește astfel cu 462 lei mai mult decît dacă aceeași sumă s-ar fi distribuit invers proporțional cu numerele 12, 10 și 15 respectiv.

Să se afle:

a) Care a fost întreaga sumă.

b) Cît a primit fiecare din cei 3 muncitori A, B, C (verificare).

1979, *ianuarie, București*

1) Să se afle care din numerele $[0,(x)]^x$ și $(0, x)^x$, unde $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, este mai mare.

2) Suma dintre un număr prim și unul natural impar este 4 237. Să se afle numerele.

3) Să se afle toate numerele naturale m și n care satisfac condiția:

$$m^2(n + 1) = 80.$$

1977, *februarie, București*

I) Se dau proporțiile:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \text{ și } \frac{b}{4} = \frac{c}{5}.$$

1) Să se determine k și p astfel încît să avem

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{k} = \frac{c}{p}.$$

2) Dacă $k = 12$ și $p = 15$ să se determine a, b, c știind că:

a) $a + b + c = 70$,

b) $ab + bc = 69$,

c) $a^2 + b^2 + c^2 = 433$.

II) a) Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care fracția $\left(\frac{5}{4}\right)^n$ este mai mare decît 2.

b) În anul 1976 producția unei uzine a fost de A tone.

În fiecare din anii următori producția crește cu 25% față de anul precedent.

Care este numărul minim de ani după care producția anului respectiv depășește $2A$?

1973, *februarie, București*

1) Cineva spune:

„Gîndește-te la un număr. Un coleg îți mai dă încă pe atît. De la fratele tău mai primești 50. Înjumătățește rezultatul. Restituie colegului partea care ți-a dat-o. Ți-a rămas 25?“ De ce?.

2) Un număr de 3 cifre are proprietatea că suma dintre cifra sutelor și cea a unităților este egală cu cifra zecilor. Facem suma dintre el și inversatul său (adică numărul format din aceleași cifre scrise în ordine inversă). Să se arate că această sumă este divizibilă cu 121.

Care este în acest caz cea mai mare sumă ce se poate obține?

Etapa pe țară 1986 — Aritmetică — algebră

I Să se afle numerele naturale de trei cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\frac{34}{x^2 + y^2 + z^2}$ este număr natural.

II. O bunică are doi nepoți. Vîrsta bunicii se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră fiind vîrsta unuia din nepoți. Dacă la vîrsta bunicii se adaugă vîrstele celor doi nepoți, se obține vîrsta de 83 de ani. Ce vîrstă are bunica?

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

CAPITOLUL I

RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASA A V-A

1. Divizibilitate — pag. 4

1) a) 24; b) 13 358; c) 24 080; d) 28 833; e) 28 000. **2)** a) 17 100; b) 13 022; c) 3 299; d) 11 202; e) 3 513; f) 81 640; g) 118 080; h) 52 100; i) 38 001; j) 430 910; k) 19 091. **3)** a) 1 710; b) 8 000; c) 24 000; d) 2 000; e) 24 000; f) 0; g) 864; h) 82 410; i) 1 002 001; j) 2 214 000; k) 105 000. **4)** a) 28 007; b) 48; c) 240; d) 54 675; e) 232; f) 130; g) 1 200; h) 4 080; i) 1 008; **5)** 15 rest 7. **6)** a) 0; b) 1; c) 0; d) 2^8; e) 5^2; f) 7; g) 2^{20}; h) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6$. **7)** $D_6 = \{1; 2; 3; 6\}$; $D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$. **8)** Da; Nu. **9)** Nu; Nu. **10)** Da, Da, Da. **11)** Da, Da. **12)** Da, Nu. **13)** Da, Nu. **14)** Nu, Nu

15)

	2	5	10	9	3	4	25	18	27	Prim
240	Da	Da	Da	Nu	Da	Da	Nu	Nu	Nu	Nu
37	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Da
162	Da	Nu	Nu	Da	Da	Nu	Nu	Da	Da	Nu
169	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
13 500	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Nu
1 715	Nu	Da	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
720	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Nu	Da	Nu	Nu
191	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Da

16) a) 4 030; 4 232; 4 434; 4 636; 4 838; b) 1 400; 1 455; c) 1 200; 1 203; 1 206; 1 209; d) 32 400; 32 409; e) 5 120; 5 124; 5 128; f) 450; 432; 414; 486; 468; g) 81 000; 51 444; 21 888. **17)** 2. **18)** 12; 60; 180. **19)** 8; 4. **20)** a) 1 440; b) 14 400; c) 8 400; d) 33 800. **21)** a) 8; b) 15; c) 28; d) 170; e) 8; f) 3; g) 177 851; h) 99 999. **22)** Cîtul este 204 și restul 20.

2. Operații cu numere raționale și cu fracții zecimale — pag. 10

1) a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $1\frac{1}{3}$. **2)** a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{17}{12}$; c) $\frac{61}{60}$; d) $\frac{4}{75}$; e) $\frac{259}{2\,000}$. **3)** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{23}{12}$; d) $\frac{26}{1\,125}$; e) $2\frac{8\,699}{8\,888}$. **4)** a) $\frac{1}{2}$; b) 6; c) 2; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{4}{25}$; f) $\frac{1}{27}$; g) 12; h) 1; i) 94 771; j) 8. **5)** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{5}$; c) 8; d) 9; e) 1. **6)** a) 4; b) 1; c) 10; d) $\frac{1}{12}$; e) 70. **7)** a) 4 276,4 995; b) 1 679,664. **8)** a) 6 970,3; b) 1 111; c) 3 801,006; d) 3 900,154; e) 30 980, 109; f) 0,81; g) 0,28; h) 8 620. **9)** a) 24,5; b) 20; c) 40; d) 13,92; e) 10,035; f) 486,1; g) 836,4; h) 20 140,2; i) 480; j) 48 960; k) 0,12; l) 480 000,48. **10)** a) 0,12; b) 2,45; c) 2,4; d) 0,48; e) 0,002; f) 1,8; g) 24,38; h) 23,5; i) 15; j) 241; k) 40,08; l) 17,755238; m) 2; n) 500; o) 200; p) 14,5; r) 4 050; s) 20030; t) 200 400; u) 6 100; v) 13 500; z) 2 070. **11)** a) 0,03; b) 418,66; c) 0,07; d) 22,48. **12)** 6 140,66. **13)** a) 1 008; b) 9 919,8. **14)** a) 246,222; b) 732,56; c) 490,305; d) 330; e) 30 003; f) 2 028,1002; g) 120; h) 2 041 656,702; i) 1 119 096; j) 22,01; k) 6 680,550005. **15)** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 23; d) $\frac{1}{3}$; e) 1. **16)** a) 22,5; b) 2 340; **17)** a) A; b) A; c) F; d) F. **18)** I. a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) F; g) F. II. a) $\{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$; c) $\{1, 2\}$; d) $\{6\}$; e) $\emptyset$; f) $\{7\}$; g) $\{8, 9\}$. **19)** $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. **20)** a) 29; b) 70; c) 34; d) 30; e) 30; f) 12; g) $\frac{1}{4}$; h) 200; i) $133\frac{1}{3}$. **21)** a) $5a$; b) a; c) $8a + 1$; d) 2^{3n}; e) 3^n; f) 2.

CAPITOLUL II

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

1. Raport — pag. 16

1) a) 400 cm; b) 3; c) De trei ori; d) $\frac{1}{3}$; e) De trei ori.

2) $\frac{1}{15}$. **3)** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{4}{25}$. **4)** $\frac{1}{8}$. **5)** 12. **6)** $\frac{1}{2}$.

2. Proporție. Proprietatea fundamentală a proporției — pag. 20

1) 100. 2) 3. 3) 36. 4) 6. 5) 24. 6) 48. 7) $\frac{5}{4}$. 8) 30. 9) $\frac{14}{15}$. 10) $\frac{3}{20}$. 11) $\frac{8}{7}$.

3. Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții — pag. 22

2) $\frac{a}{b}=\frac{3}{40}$; 3) $\frac{a}{b}=6$; 4) Da; Nu. 5) $x=\frac{6}{5}$. 6) $x=20$. 7) $x=\frac{6}{5}$. 8) $x=9$. 9) $x=30$. 10) $x=20$. 11) $x=2$. 12) $x=\frac{4}{3}$; 13) $x=5$. 14) $x=20$. 15) $x=60$. 16) $x=4$. 17) $x=2$. 18) $x=\frac{3}{4}$. 19) $x=\frac{1}{17}$. 20) $x=2$. 21) $x=\frac{1}{4}$. 22) $x=\frac{1}{4}$. 23) $x=\frac{1}{3}$. 24) $x=6$. 25) $x=\frac{1}{2}$. 26) $x=5$. 27) $x=1$. 28) $x=1$. 29) $x=1$. 30) $x=3$. 31) $x=\frac{2}{3}$. 32) $x=10$. 33) $x=4$. 34) a) $x=\frac{bc}{d}$; b) $x=\frac{ac}{b}$. 35) a) $y=\frac{ad}{b}$; b) $y=\frac{bc}{a}$. 36) $S=v\cdot t$. 37) $t=\frac{S}{v}$. 38) $U=I\cdot R$. 39) $R=\frac{U}{I}$. 40) $F=p\cdot S$. 41) $S=\frac{F}{p}$. 42) a) Prețul creionului este de 3 ori mai mic decît prețul caietului; b) 6 lei. 43) 12 lei. 44) 18. 45) $\frac{112}{3}$. Dar $\frac{112}{3}$ nu este număr natural. Problema nu are soluție.

4. Proporții derivate — pag. 29

1) 40; 60. 2) a) $\frac{9}{7}$; b) $\frac{2}{9}$; c) $\frac{5}{7}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{4}{21}$; f) $\frac{25}{21}$; g) $\frac{41}{35}$. 3) a) 8; b) 3. 4) 80 lei; 200 lei. 5) a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{16}{3}$.

5. Șir de rapoarte egale — pag. 31

1) $\frac{1}{4}$. 2) 14. 3) a) 4; b) 16; c) 4. 4) 10. 5) $\frac{45}{119}$; $\frac{50}{119}$; $\frac{24}{119}$.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 31

1) Da, da, da, da. 2) a) $\frac{1}{3}$; b) 1; c) 156,202; d) 27 100, 76; e) 285,34; f) 60; g) 1,2; h) 30; i) 100,01; j) $\frac{5}{6}$. 3) a) 8; b) 12; c) $\frac{10}{3}$; d) 28; e) $\frac{3}{5}$. 4) 21.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri — pag. 31

1) Putem scrie:
$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Numerele naturale ale căror pătrate divid pe 720 sînt: $a=1$; $b=2$; $c=3$; $d=2^2$; $e=2\cdot 3$; $f=2^2\cdot 3$. Aceste numere sînt deci 1; 2; 3; 4; 6; 12.

2) $5^{102} : (5^{100}+5^{100}+5^{100}+5^{100}+5^{100}) =$
$= 5^{102} : [5^{100}\cdot(1+1+1+1+1)] = 5^{102} : 5^{101} = 5.$
Se putea observa direct că $5^{100}+5^{100}+5^{100}+5^{100}+5^{100} = 5\cdot 5^{100} = 5^{101}$.

3) Putem scrie:
$93\,024 = 2^5\cdot 3^2\cdot 17\cdot 19.$
Mai putem scrie:
$93\,024 = 2^4\cdot 17\cdot(2\cdot 3^2)\cdot 19;$
$93\,024 = 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19.$
Deci numărul 93 024 poate fi scris ca un produs de patru numere naturale consecutive. Aceste numere sînt 16; 17; 18; 19.

Încercați să rezolvați problema și altfel. Concentrați-vă atenția asupra ultimei cifre a fiecărui număr și asupra faptului că oricare dintre numere este mai mare decît 10 și mai mic decît 20.

4) Putem scrie: $792 = 2^3\cdot 3^2\cdot 11$; $a = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11 \dots 99\cdot 100 + 792 + 8 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 \dots 99\cdot 100 + 2^3\cdot 3^2\cdot 11 + 8$.
Scoatem factor comun pe $2^3\cdot 3^2\cdot 11$ și avem:
$2^3\cdot 3^2\cdot 11\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 12 \dots 99\cdot 100 + 1) + 8.$
Restul împărțirii lui a la 792 este 8.

5) a) Notăm cu L lungimea dreptunghiului și cu l lățimea sa. Perimetrul dreptunghiului este egal cu $2(L+l)$. Semiperimetrul dreptunghiului este egal cu $L+l$.

Avem $l = \frac{5}{28}\cdot 2\cdot(L+l) = \frac{5}{14}\cdot(L+l)$. Avem în continuare:

$1 = \frac{5}{14}\cdot\frac{L+l}{l}$ de unde $\frac{L+l}{l} = \frac{14}{5}$.

b) Am văzut la punctul a) că $\frac{L}{l}+1 = \frac{14}{5}$. Scriem în continuare:

$\frac{L}{l} = \frac{9}{5}$. Avem $\frac{l}{L} = \frac{5}{9}$.

c) Am văzut la punctul b) că:

$\frac{l}{L}=\frac{5}{9}$. De aici obținem: $\frac{l}{L-l}=\frac{5}{9-5}$; $\frac{l}{L-l}=\frac{5}{4}$. Avem: $\frac{l}{16m}=\frac{5}{4}$;

$l=\frac{5\cdot16m}{4}=20m$; $L=36m$.

Aria dreptunghiului $=720\ m^2$.

6) Putem scrie: $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$;

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

$\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$.

Deci: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{1}{4}$. Putem scrie în continuare:

$\frac{2a}{2b}=\frac{3c}{3d}=\frac{4e}{4f}=\frac{1}{4}$. De aici: $\frac{2a+3c+4e}{2b+3d+4f}=\frac{1}{4}$.

Dar $2a+3c+4e=33$. Avem:

$\frac{33}{2b+3d+4f}=\frac{1}{4}$, de unde $2b+3d+4f=4\cdot33=132$.

7) După efectuarea calculelor se ajunge la $\frac{x+1}{x}=91$.

Avem: $\frac{x+1-x}{x}=\frac{91-1}{1}$; $x=\frac{1}{90}$.

6. Proporționalitate directă. 7. Proporționalitate inversă. 8. Regula de trei simplă — pag. 36

1) 14 lei. 2) 56 lei. 3) 112 lei. 4) 200 rotații. 5) 5,6 kg. 6) 72 kg. 7) 37,5 kg. 8) $\frac{5}{2}$. 9) 3 h. 10) 16 h. 11) $1\frac{1}{3}$ h. 12) 12 h. 13) 2 h. 14) $42\frac{6}{7}$ h $\approx$ 42 h 51 min. 15) 4 kg. 16) 6 h. 17) 36 kg. 18) 10 cm^3.

9. Regula de trei compusă — pag. 38

1) 2 zile. 2) $2\frac{2}{3}$ ore = 2 h 40 min. 3) 2 tractoare. 4) 160 m. 5) 8 zile. 6) 320 lei. 7) 32 zile. 8) 25 zile.

10. Împărțirea unui număr în părți direct proporționale cu mai multe numere — pag. 41

1) 40; 60; 80. 2) 4; 5; 6; 7. 3) $\frac{3}{25}$; $\frac{12}{25}$; $\frac{2}{5}$. 4) 45; 75; 105; 120. 5) 12; 15; 21. 6) 40; 60; 80. 120. 7) 24; 48; 84.

Lucrarea pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 42

a) 80 lei; b) 12 ore; c) 20, 30, 40.

11. Aplicații practice — pag. 43

1) 1 : 1 000. 2) 40 km. 3) 25 600 m^2.

Probleme suplimentare — pag. 43

1) Nu; Da. 2) 100 gr. 3) 120 km. 4) $\frac{2}{3}$. 5) La 48 km de A. 6) 10 zile. 7) Cu 6 zile mai puțin; cu $4\frac{2}{3}$ zile mai puțin. 8) 80 ore. 9) 10 zile. 10) a) 12 zile; b) 12 zile; c) 48 zile.

CAPITOLUL III

PROCENTE

1. Aflarea a p% dintr-un număr dat — pag. 48

1) 24 lei. 2) 12 fete.

2. Aflarea unui număr cînd cunoaștem p% din el — pag. 51

1) 800 lei. 2) 200 copii.

3. Aflarea raportului procentual — pag. 53

1) 50%. 2) 80%.

PROBLEME

1) 70%. 2) 840. 3) 800 kg. 4) 6,48; $p\%\cdot a=\frac{ap}{100}$; $a\%\cdot p=\frac{ap}{100}$; rezultatele sînt deci egale. 5) 96 km. 6) 288 piese. 7) 30 elevi. 8) 30 vagoane. 9) 20 000 lei. 10) 200 000 kg. 11) 6 692 000 t. 12) 250 kg. 13) 100 t. 14) 500 kg. 15) 40 piese. 16) 1 000 g = 1 kg. 17) 4 167 kg. 18) 9,6 kg. 19) 30%. 20) 25%. 21) 20%. 23) 5%. 24) 20%. 25) 20%. 26) a) 75%; b) 12,5%; c) 12,5%. 27) $11\frac{1}{9}\%\approx11{,}11\%$ ciment; $22\frac{2}{9}\%\approx22{,}22\%$ nisip; $66\frac{2}{3}\%\approx66{,}66\%$

prundiș. 28) 0,005%. 29) a) 100%; b) 200%. 30) 20%. 31) a) 12%; b) 68%; c) 8 160 de piese. 32) a) 21%; b) 56%. 33) 500. 34) $\frac{1}{2}$. 35) 1 664 t. 36) 2 000 kg. 37) 50%. 38) 2 000 lei. 39) 115%; 15%. 40) 30%. 42) a) 30%; b) 30%; c) 480 t; 360 t; 360 t. 43) a) 6%; 480.

Lucrarea pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag 58

a) 720; b) 800; c) 20%

CAPITOLUL IV

NUMERE ÎNTREGI

1. Numere întregi. Reprezentarea pe o dreaptă — pag. 60

0°C; +3°C.

2. Valoarea absolută a unui număr întreg — pag. 62

1) a) 6; b) 254. 2) 5; 0; 7; 8; 200; 200; 48; 49. 3) a) $|9| > 0$; b) $|-9| > 0$; c) $|0| = 0$; d) $0 < |-5|$; e) $|8| = |-8|$; f) $|5| = 5$; g) $|-7| > |-3|$; h) $|7| > |3|$; i) $|-9| > |-7|$. 4) a) A; b) F; c) F; d) A.

3. Adunarea numerelor întregi — pag. 66

1) a) 7; b) 6; c) 6; d) 17; e) 9; f) 2; g) −8; h) −11; i) −4; j) −6; k) 0; l) 0; m) +2; n) +2; o) −2; p) −2; r) 0; s) 0; t) 2; u) 6; v) −9; w) −16; x) −15; y) −9. 2) a) 100; b) −22; c) 21; d) −24; e) −36; f) −60; g) 0; h) +16; i) −7; j) 0; k) 14; l) −376; m) 899. 3) a) 30; b) −26; c) 11; d) −16; e) −26; f) 0; g) −9; h) 0; i) 13. 4) +1°.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 68

1) 5. 2) −14. 3) −2. 4) −2. 5) 4. 6) 8. 7) 0. 8) 0. 9) 6. 10) 6. 11) 0. 12) −7. 13) −7.

6. Scăderea — pag. 72

1) a) 5; b) 3; c) −1; d) −4; e) +3; f) 3; g) −8; h) −9; i) 0; j) 0; k) 16; l) 18; m) −13; n) −11; o) −4; p) −2; r) 0; s) 0; ș) 0; t) 0; ț) 7; u) −8; v) 15. 2) a) 13; b) −8; c) 8; d) −35; e) 0; f) 34; g) −21; h) −5; i) 0. 3) a) 0; b) 61; c) −12; d) 38; e) 75; f) 1 079. 4) mai mică cu 5°C. 5) a crescut cu 7°C.

6)

a	$-a$	$\|a\|$	$1+a$	$1-a$
2	−2	2	3	−1
3	−3	3	4	−2
0	0	0	1	1
−4	4	4	−3	5
−305	305	305	−304	+306

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 72

1) 3. 2) −3. 3) 9. 4) 8. 5) 2. 6) −1. 7) 0. 8) 0. 9) 10. 10) 6. 11) −7. 12) −7.

Desfacerea parantezelor — pag. 74

1) a) −2; b) 4; c) 0; d) 0; e) −4; f) 0; g) 3; h) −43; i) 59; j) 2; k) −59; l) 0. 2) a) 19; b) −3; c) 9; d) 1; e) 0; f) 5 750.

7. Relațiile: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ între numere întregi — pag. 77

2) −2; −1; 0; 1; 2; 3. 3) −4; −3; −2; −1; 0; 1,2. 4) a) $4 > 0$; b) $-4 < 0$; c) $-4 < 4$; d) $-2 < 1$; e) $0 > -200$; f) $-200 > -201$; g) $21 > -2121$; h) $|10| > 0$; i) $|-11| > 0$; j) $|0| = 0$; k) $|9| = 9$; l) $|-9| > -9$; m) $|5| = |-5|$. 6) a) $\{-1; 2\}$; b) $\varnothing$. 7) a) $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; $B = \{0; 1; 2; 3\}$; $C = \{-4; -3; -2; -1\}$; $D = \{-4; -3; 3; 4\}$.

8. Înmulțirea — pag. 79

1) 20. 2) 20. 3) 6. 4) −6. 5) 0. 6) 0. 7) 0. 8) 8. 9) 9. 10) −8. 11) −7. 12) −6. 13) −6. 14) 9. 15) 0. 16) 768.

9. Comutativitatea, asociativitatea, distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere, element neutru — pag. 81

1) a) −1 134; b) 0; c) −340; d) 0; e) −1 280; f) +48; g) 40; h) 90; i) 2 141 700.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 81

1) 10. 2) 10. 3) −6. 4) −12. 5) 0. 6) 0. 7) 0. 8) 4. 9) 9. 10) −5. 11) −7. 12) −9. 13) 8. 14) −6. 15) −1. 16) 0. 17) 0. 18) −10.

10. Împărțirea — pag. 83

a) 2; b) 5; c) −3; d) −5; e) 0; f) −2; g) 2; h) −120; i) 0.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 83

1) 2. **2)** 3. **3)** −3. **4)** −5. **5)** 6. **6)** −7. **7)** −8. **8)** 8. **9)** 0. **10)** 0. **11)** 2.

EXERCIȚII — pag. 84

a) 16; b) 10; c) −20; d) −6; e) +94; f) 240; g) −520; h) 460.

11. Factor comun — pag. 84

1) a) 7 777 700; b) 954 000; c) 0. **2)** $a = -2$.

12. Divizorii unui număr întreg — pag. 86

1) Divizorii numărului −8 sînt: 1, −1, 2, −2, 4, −4, 8, −8; Divizorii numărului 8 sînt: 1, −1, 2, −2, 4, −4, 8, −8. **2)** −9 995. **3)** 9 889. **4)** −990.

13. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg — pag. 89

a) 9; b) 5; c) −3; d) 0; e) 2; f) 10; g) 4; h) 0; i) 4; j) −8; k) 0; l) 0. m) 1; n) 5; o) 1.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 89

I. **1)** 10. **2)** 1. **3)** 2. **4)** −3. **5)** 1. **6)** 1. **7)** 0. **8)** 0. **9)** 4. **10)** 9. **11)** 1. **12)** 1. **13)** 1. **14)** 0. **15)** 0.

II. **1)** 0. **2)** −4. **3)** 2. **4)** 0. **5)** −8. **6)** 30. **7)** 130. **8)** −145 651.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME — pag. 90

1) a) 4; b) 6; c) −5; d) −12; e) −2; f) 2; g) 1; h) 0; i) 0; j) −12; k) −14; l) −2; m) −3; n) −3; o) 12; p) 14; r) 2; s) −2; t) 5; u) 5; v) −4; x) 4; y) 6; z) −7. **2)** a) −8; b) 15; c) 0; d) 0; e) −3; f) −4; g) 9; h) 0.

3)

a	b	$-a$	$-b$	$a+b$	$-a-b$	$a-b$	$b-a$
2	−3	−2	3	−1	1	5	−5
4	−2	−4	2	2	−2	6	−6
−5	2	5	−2	−3	3	−7	7
−1	4	1	−4	3	−3	−5	5
0	−2	0	2	−2	2	2	−2
−3	0	3	0	−3	3	−3	3
−5	5	5	−5	0	0	−10	10
6	−6	−6	6	0	0	12	−12
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	−1	−1	2	−2	0	0
−1	1	1	−1	0	0	−2	2
1	−1	−1	1	0	0	2	−2

4) a) −7, −5, −1, 0, 2, 6; b) −10, −9, −3, 0, 1, 4, 5; c) −8, −7, −5, −4, 0, 1, 4, 9. **5)** $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; $B = \{-3, -2, -1\}$; $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $D = \{-2, -1, 0\}$. **6)** a) 6; b) 40; c) 6; d) 20; e) 6; f) −14; g) −24; h) −8; i) −14; j) 0; k) 0; l) 0; m) 3; n) −3; o) 4 200; p) −84; r) −2 400; s) −1.

7)

a	b	c	ab	ac	bc	abc	$a+2$	$2b+c$
2	3	10	6	20	30	60	4	16
−2	−3	−10	6	20	30	−60	0	−16
2	−4	0	−8	0	0	0	4	−8
−4	3	0	−12	0	0	0	−2	6
1	−1	−1	−1	−1	1	1	3	−3
−1	0	−1	0	1	0	0	1	−1

8) a) 5; b) 2; c) 2; d) 2; e) −4; f) −2; g) −4; h) −3; i) 7; j) −8; k) 0; l) 0; m) −4. **9)** a) 9; b) 16; c) 0; e) −2. **10)** a) 4; b) 9; c) 8; d) 27; e) 4; f) 9; g) −8; h) −27; i) 100; j) 100; k) 1 000; l) −1 000; m) 10 000; n) 10 000; o) 100 000; p) −100 000; r) −32; s) −3; t) 0; u) 4; v) −1; x) 0; y) −42 025; z) 561;

11)

a	b	$a:b$	a^2	a^2+b^2
14	2	7	196	200
16	4	4	256	272
−18	−9	2	324	405
−20	−10	2	400	500
20	−10	−2	400	500
40	−4	−10	1 600	1 616
−15	3	−5	225	234
−60	−30	2	3 600	4 500
0	5	0	0	25
0	−3	0	0	9
−5	−5	1	25	50
−7	7	−1	49	98
7	−1	−7	49	50
−8	1	−8	64	65

12) a) 2 715; b) 17 855; c) 39 000; d) −19 784; e) −22 499; f) −77 535, g) −80 640; h) 118 090; i) 16 700; j) −790; k) −7 000; l) 15 188; m) 7 200; n) 104 200; o) 0; p) 148 614; r) −1 672 800; s) 2 021 040; t) −41 400; u) −260 400; v) 26 000; x) 1 002 001. **13)** a) 280 000; b) −2 142 720; c) 0; d) 1 000; e) −2 000;

f) 4; g) 360; h) $-39\,298$; i) $140\,003$; j) -204; k) $1\,002$; l) $18\,000$; m) $-4\,120$; n) -80; o) -800; p) -182; r) 16; s) $26\,800$; t) 72; u) -104. **14)** a) F; b) F; c) A. **16)** a) $\{-1,0\}$, $\{-1,1\}$; $\{-1, 0, 1\}$. **17)** a) $8 \cdot (3^{100} + 3^{105} - 16)$. **18)** Indicații. Cel mai mic număr întreg de cinci cifre scris în baza 10 este $-99\,999$. Răspuns: $-90\,000$. **19)** $-65\,987$. **20)** Nu, deoarece $xyz > 0$. **22)** a) $2a > 3a$; b) $2a = 3a$; c) $2a < 3a$; d) $-2b < -3b$; e) $-2b = -3b$; f) $-2b > -3b$; g) $-2c > c$; h) $-2c = c$; i) $-2c < c$; j) $2d^2 > -3d^2$; k) $2d^2 = -3d^2$; l) $2d^2 > -3d^2$; m) $x^{27} < x^{26}$; n) $x^{27} = x^{26}$; o) Dacă $0 < x < 1$, $x^{27} < x^{26}$. Dacă $x = 1$, $x^{27} = x^{26}$. Dacă $x > 1$, $x^{27} > x^{26}$. p) $y^2 > y^3$; r) $y^2 = y^3$; s) $y^2 > y^3$; t) $y^2 = y^3$ u) $y^2 < y^3$. **23)** a) $2^{47} > 2^{45}$; b) $9^{57} > 8^{57}$; c) $(3^2)^8 > (2^3)^8$; d) $10^{21} > 8 \cdot 10^{20}$; e) $(-2)^{43} > (-2)^{45}$; f) $202^{303} > 303^{202}$; h) $3^{401} > 2^{601}$; i) $3^{303} > 2^{404}$.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri — pag. 93

1) Putem scrie:

$9^{41} = (3^2)^{41} = (3^{41})^2$. Deci 9^{41} este pătrat perfect.

2) a) $S_1 = -200 - 199 - 198 - \ldots -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 198 + 199 + 200 + 201 + 202$.

Avem $-200 + 200 = 0$; $-199 + 199 = 0$ ș.a.m.d.

Deci $S_1 = 201 + 202 = 403$.

b) $S_2 = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + 14 - 15 \ldots -296 + 297 + 298 - 299 - 300 + 301 + 302$.

Observăm că:

$2 - 3 = -1$;
$-4 + 5 = 1$;
$6 - 7 = -1$;
$-8 + 9 = 1$;
. . . . ;
$+298 - 299 = -1$
$-300 + 301 = 1$;
$S_2 = 1 + 302 = 303$.

3) a) $P_1 = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \ldots (-1)^{1000} \cdot (-1)^{1001}$. Orice factor cu exponent par este egal cu 1. Produsul numerelor cu exponent par este egal cu 1. Rămîne să calculăm produsul numerelor cu exponent impar: $(-1)^1 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^5 \ldots (-1)^{999} \cdot (-1)^{1001}$. Sînt în total 501 factori. Deci produsul lor este egal cu -1. Avem deci $P_1 = -1$, $P_2 = (100 - 1^2) \cdot (100 - 2^2) \cdot (100 - 3^2) \ldots \cdot (100 - 25^2)$. Printre factorii acestui produs se află și factorul $100 - 10^2$, care este egal cu zero. Deci $P_2 = 0$.

4) $9\,999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$.

$(9 \cdot 11)^{10} \cdot 99^{10} < (9 \cdot 11)^{10} \cdot 101^{10}$.

Deci $99^{20} < 9\,999^{10}$.

5) Ultima cifră a numărului a este 6.

6) $-25 + (-24) + (-23) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \ldots + 24 = -25$.

Sînt $25 + 1 + 24 = 50$ (termeni).

7) Mulțimea A are 200 elemente; Mulțimea B are 215 elemente; Mulțimea C are 289 elemente; Mulțimea D are 198 elemente; Mulțimea E are 3 969 elemente.

8) $3^{82} = (3^2)^{41} = 9^{41}$;

$2^{123} = (2^3)^{41} = 8^{41}$.

Deci $3^{82} > 2^{123}$.

Avem:

$|2^{123} - 3^{82}| = 3^{82} - 2^{123}$.

Putem scrie:

$(2^{123} + |2^{123} - 3^{82}|) : 3^{81} = (2^{123} + 3^{82} - 2^{123}) : 3^{81} = 3$.

9) a) Dacă $P = 0$, S poate lua 5 valori distincte și anume: -10; -5; 0; 5; 10. Evident -10 este cea mai mică valoare pe care o poate lua S, iar 10 este cea mai mare valoare pe care o poate lua S.

b) Dacă $S = 0$, $P = (-2) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$. Deci P poate lua o singură valoare și anume 0.

10) Cel mai mic număr din mulțimea $A \cup B$ este -22. Cel mai mare număr din mulțimea $A \cup B$ este 12.

11) Cum produsul a două numere naturale consecutive este un număr multiplu de 2, atunci $\dfrac{a(a+1)}{2} \in \mathbb{N}^*$.

CAPITOLUL V

NUMERE RAȚIONALE.

Exercițiu (pag. 100)

1)

Numărul	N	N*	Z	Q
-2	nu	nu	da	da
2	da	da	da	da
0	da	nu	da	da
$\frac{3}{5}$	nu	nu	nu	da
$-\frac{1}{2}$	nu	nu	nu	da
0,5	nu	nu	nu	da
$-0{,}75$	nu	nu	nu	da
1,25	nu	nu	nu	da
$\frac{7}{3}$	nu	nu	nu	da

3. Valoarea absolută a unui număr rațional — pag. 101

1) a) 4; b) $\frac{17}{12}$. 2) $| \; | \triangleright |b|$.

4. **Adunarea numerelor raționale** — pag. 105

a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{2}{5}$; c) $-\frac{3}{7}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{7}{12}$; f) $\frac{5}{12}$; g) $-\frac{1}{12}$; h) $-\frac{45}{392}$;

i) $-\frac{37}{960}$; j) 21 781,26; k) $-0,5$.

6. **Scăderea numerelor raționale** — pag. 108

a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{11}{12}$; f) $-\frac{4}{15}$; g) $\frac{1}{200}$; h) $-1\frac{1}{4}$;

i) $\frac{12}{35}$; j) 0,85; k) 1.

Desfacerea parantezelor — pag. 110

a) $-\frac{31}{6}$; $-\frac{31}{6}$; c) $-\frac{31}{6}$; d) $-\frac{31}{6}$; e) 5; f) $2\frac{13}{15}$; h) $\frac{11}{12}$.

7. **Relațiile**: $\triangleleft$, $\leqslant$, $\triangleright$, $\geqslant$ **între numere raționale** — pag. 113

a) F; b) A; c) A; d) F; e) F; f) A.

8. **Înmulțirea** — pag. 117

a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{5}{9}$; c) $-\frac{1}{20}$; d) $-\frac{5}{16}$; e) $-\frac{1}{15}$; f) $+\frac{5}{4}$; g) $+\frac{3}{2}$;

h) $-20,541$; i) $-\frac{1}{5}$; j) 0; k) $-7\,100\,010$.

11. **Împărțirea** — pag. 122

a) 1; b) $-\frac{1}{4}$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{5}{36}$; e) -8; f) 0; g) -3; h) $-1\,020$; i) $-7,06$.

12. **Factor comun** — pag. 122.

a) $\frac{111}{2\,222}$; b) $\frac{323}{450}$.

13. **Puterea cu exponent număr natural a unui număr rațional** — pag. 125

a) 0; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{1}{5}$; f) -10; g) $-1\,440$.

EXERCIȚII (pag. 126)

1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-1\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{11}{20}$; 5) $\frac{7}{12}$; 6) $\frac{1}{5}$; 7) $-\frac{1}{8}$;
8) $\frac{1}{8}$; 9) $-\frac{3}{2}$; 10) $-\frac{99}{10}$; 11) $-\frac{9\,999}{100}$; 12) $-\frac{7}{3}$; 13) $\frac{1}{15}$; 14) $-\frac{2}{15}$;
16) $-\frac{41}{144}$; 17) $-\frac{101}{2\,700}$; 18) $\frac{1}{7}$; 19) $-\frac{1}{7}$; 20) $-\frac{1}{5}$; 21) $\frac{1}{33}$; 22) $-\frac{1}{2}$;
23) -1; 24) $-\frac{2}{3}$; 25) $-\frac{1}{7}$; 26) -1; 27) $\frac{2}{3}$; 28) $-\frac{1}{5}$; 29) $\frac{5}{6}$; 30) $-\frac{1}{3}$;
31) $-\frac{2}{7}$; 32) $-\frac{5}{4}$; 33) $\frac{4}{9}$; 34) $\frac{1}{49}$; 35) $-\frac{1}{8}$; 36) $\frac{1}{16}$; 37) $-\frac{1}{27}$; 38) $-\frac{8}{125}$;
39) $\frac{1}{10\,404}$; 40) $-\frac{1}{100}$; 41) 13; 42) $-\frac{113}{114}$; 43) 1; 44) 1; 45) -1; 46) $\frac{21}{10}$;
47) $-12\,516,275$; 48) $-42,75$; 49) -440; 50) $-1\,900,01$; 51) 480; 52) 4 058,1; 53) 2 013,02; 54) 0,01; 55) 0,24; 56) 0,045; 57) 60; 58) 4 050; 59) 0,0011;
60) -7; 61) 36; 62) 18,3; 63) $-\frac{11}{6}$; 64) $\frac{1}{990}$; 65) 10; 66) 1; 67) 0; 68) $-0,999$;

69) $-\frac{1}{5\,760}$; 70) 1; 71) -10; 72) $-2\,348\,020$; 73) a) $(0,1)^3 > (0,1)^5$;
b) $(0,25)^{60} > (0,25)^{70}$; c) $(-0,1)^3 < (-0,1)^5$; d) $(0,1)^8 > (0,01)^8$; e) $(1,1)^4 \triangleleft (1,1)^5$;
f) $(-2,45)^{12} > (-2,45)^{13}$; 74) 0,009. 75) a) 1; b) 0. 76) $\frac{5}{4}$; $-\frac{5}{4}$. 77) a) F;
b) F; c) F. 78) F.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 128

1) $\frac{7}{12}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) 299,002; 6) $-2,35$; 7) -398; 8) -24;
9) -70; 10) 367,74; 11) 1 203 802; 12) 0,0081; 13) 204; 14) 206,04; 15) $-4,16$;
16) $-118\,821$.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri — pag. 128

1) Dacă împărțim fiecare dintre cele trei numere la 2, fiecare rest va fi egal cu 0 sau cu 1. Deci vom avea două resturi egale. Suma numerelor corespunzătoare acestor resturi se va divide cu 2.

2) $E = \frac{1}{2}(1984 - 1983 - 2 - 4 - 6 - \ldots - 3964 - 3966) = \frac{1}{2}[1\,984 \cdot 1\,983 - 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,983)]$.

Să calculăm:

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,983.$

O metodă de a calcula această sumă este următoarea:
Putem scrie:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,983.$$

$$S = 1\,983 + 1\,982 + \ldots + 1.$$

Adunăm „parte cu parte" și obținem:

$$2S = (1 + 1\,983) + (2 + 1\,982) + \ldots + (1\,983 + 1).$$

$2S$ are 1 983 de termeni. Fiecare termen este egal cu 1 984.

$$2S = 1\,983 \cdot 1\,984; \; S = \frac{1\,983 \cdot 1\,984}{2}.$$

Avem în continuare:

$$E = \frac{1}{2}\left(1\,984 \cdot 1\,983 - 2 \cdot \frac{1\,983 \cdot 1\,984}{2}\right) = 0.$$

3) Numărul x este negativ.

4) a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{3}{80}$.

CAPITOLUL VI

RĂDĂCINA PĂTRATĂ

1. **Rădăcină pătrată dintr-un număr natural pătrat perfect** — pag. 130

a) 9; b) 3; c) 4 875.

2. **Rădăcina pătrată dintr-un număr rațional nenegativ** — pag. 130

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{7}$; c) 0,7; d) 0,8.

4. **Numere iraționale** — pag. 135

1) 3; 0; 4. 2) -6; -4; 0; 1; 2; 5; 4. 3) 1; 0; -1; $\frac{1}{3}$; 2,5; 0,(3); 2,3(5).
4) $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$.

5)

Numărul	**N**	**N***	**Z**	**Q**	**R**	**R−Q**
0	Da	Nu	Da	Da	Da	Nu
1	Da	Da	Da	Da	Da	Nu
2	Da	Da	Da	Da	Da	Nu
-4	Nu	Nu	Da	Da	Da	Nu
$\frac{1}{2}$	Nu	Nu	Nu	Da	Da	Nu
0,5	Nu	Nu	Nu	Da	Da	Nu
0,(5)	Nu	Nu	Nu	Da	Da	Nu
$\sqrt{2}$	Nu	Nu	Nu	Nu	Da	Da
$\sqrt{3}$	Nu	Nu	Nu	Nu	Da	Da
$-\sqrt{2}$	Nu	Nu	Nu	Nu	Da	Da
1,41	Nu	Nu	Nu	Da	Da	Nu

EXERCIȚII — pag. 138
a) 30; b) 18; c) 12; d) 38.

EXERCIȚII — pag. 139
a) 150; b) 506; c) 1 720; d) 9 800; e) 328; f) 9 060; g) 2 007.

EXERCIȚII — pag. 140
a) ≈ 20; b) ≈ 504.

EXERCIȚII — pag. 141
1) 124; 204; 3 002. 2) 2,64; 4,24; 4,47.

EXERCIȚII — pag. 142
1) $\approx 1{,}51$; $\approx 1{,}17$. 2) $\approx 8{,}64$. 3) a) $\approx 0{,}608$; b) $\approx 1{,}581$.

7. **Proprietatea:** $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. $(a \geq 0,\ b \geq 0)$ — pag. 143

1) a) 100; b) 5; c) $4\frac{53}{54}$ d) 18; e) 25 248; f) 1. 2) a) $|x|$; b) 0.

8. **Proprietatea:** $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $(a \geq 0,\ b > 0)$ — pag. 144

a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{6}{5}$; d) $\frac{9}{8}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME: — pag. 144

1) 64; 2) 36; 3) 10 000; 4) 129 600; 5) 142 884; 6) $\frac{4}{9}$; 7) $\frac{1}{25}$; 8) $\frac{1}{27}$;
9) $\frac{1}{125}$; 10) $\frac{9}{16}$; 11) $\frac{1}{1\,000}$; 12) $\frac{1}{1\,014\,049}$; 13) 0,0004; 14) 0,0001; 15) 0,001;

16) 0,000000001; 17) 2; 3; 4; 5; 6; 10; 7; 8; 18) 123; 19) 189; 20) 102; 21) 204; 22) 3 004; 23) 300; 24) 120; 25) 2 500; 26) 5,196; 27) 17,720; 28) 1,533; 29) 0,223; 30) 0,094; 31) 1,41; 1,73; 2,23. 32) 6; 33) 60; 34) 75; 35) 36; 36) 70; 37) 1 100; 38) 420; 39) $\frac{2}{7}$; 40) $\frac{5}{6}$; 41) $\frac{1}{10}$; 42) $\frac{1}{70}$; 43) $\frac{1}{900}$; 44) $\frac{3}{2}$; 45) $\frac{4}{3}$; 46) $\frac{3}{2}$; 47) $\sqrt{2} \approx 1{,}414$; 48) $\sqrt{3} \approx 1{,}732$; 49) $\sqrt{3}$; 50) $\sqrt{3}$; 51) $\sqrt{3}$; 52) $\sqrt{6} \approx 2{,}449$; 53) $\sqrt{5} \approx 2{,}236$; 54) 0,4; 55) 25; 56) $10\frac{2}{3}$; 57) $\frac{17}{22}$; 58) $\frac{9}{2}\sqrt{36}$; $10\sqrt{2 \cdot 8}$; $6\sqrt{3 \cdot 27}$; 59) $1{,}41\sqrt{9} > 1{,}73\sqrt{4}$; 60) 9 801; 61) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases}$; 62) 11 025. 63) 4 000 000; 4 004 001; 4 008 004. 64) 9 604. 65) 2,8, 18,50, 72,200, 450, 1 800. 66) 91 204; 94 864; 97 344. 67) 1 și 5 929; 7 și 847; 11 și 539; 49 și 121. Problema are 4 soluții. 68) 7,2 m. 69) $A = \{3;\ 4\}$; $B = \{0;\ 1\}$. 70) 0,3 m. 71) 1,2 m. 72) 1,02 m. 73) a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; c) 2; d) 2.

Lucrare pentru verificarea unor cunoștințe de bază. — pag. 146

1) a) 3; b) 3; c) 15; d) 1; e) 9 980; f) 0; g) 0; h) 55; i) 540. 2) a) 11; b) 12; c) 13; d) 14; e) 240; f) 378; g) 109; h) 2 003. 3) a) 2,7; b) 15,7; c) 2,09; d) 0,4; e) 0,06; f) 0,001. 4) 2,1. 5) a) 1,44; b) 4,68. 6) 3,605. 7) a) 0,04; b) 0,16. 8) a) 4,1; b) 0,08. 9) a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{8}$; c) -1; d) $\frac{7}{8}$.

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri — pag. 147

1) $\overline{ab} = 61$. 2) $\sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$. 3) a) 0; b) X.
4) $A = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$; 5) 6 241.

Calculul mediei proporționale — pag. 148

1) 5; 4. 2) 2,5; 2. 3) 5; 3. 4) 6,5; 6. 5) 14,5; 10. 6) 500,05; 10. 7) 18,125; 3. 8) 1. 9) 5. 10) 50. 11) $\frac{2}{3}$; 12) 50. 13) 102. 14) 6^m $(m \in \mathbb{N}^*)$. 15) $A = 20$; $B = 10$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 16) c; a; b. 17) a) $C < A < B$; b) $B < A < C$.

Lucrare pentru repetarea unor cunoștințe din capitolele anterioare — pag. 149

1) a) $x = 16$; b) $x = \frac{5}{8}$; c) $x = 24$; d) $x = 60$; e) $x = \frac{4}{7}$; f) $x = \frac{c}{b}$; g) $x = ab$; h) $x = \frac{b}{a}$; i) $x = \frac{ac}{b}$; 2) 108 kg; 18 kg. 3) 1 836. 4) 340 kg. 5) 400. 6) 25%. 7) 4 kg; 20 kg. 8) 124,89; b) 0,6.

MONOAME ȘI POLINOAME

Operații cu monoame. Înmulțirea — pag. 152

A 1) x^2; 2) $-x^2$; 3) x^2; 4) x^5; 5) x^5; 6) $2x$; 7) $2x^2$; 8) $4x^2$; 9) $-x^3$; 10) x^3; 11) $-x^3$; 12) x^4; 13) $-6xy$; 14) $20xy$; 15) $9x^3$; 16) $-8x^3$; 17) $10x^5$; 18) $4xy$; 19) $2x^2y$; 20) $8x^2y$; 21) $-x^2y^2$; 22) $2x^2y^2$; 23) x^3y^2; 24) $-2x^3y$; 25) x^2y^4; 26) $-6x^3y$; 27) $8x^3y$; 28) $6x^5y$; 29) $2x^4y$; 30) $-2x^2yz$.

B. 1) $-8x^2$; 2) $-4x^4$; 3) $-4x^3$; 4) $+4xy$; 5) $-5x^3y^3$; 6) $-60x^4y$; 7) $+4x^4y$; 8) $+5x^4y^2z$; 9) $-x^3$; 10) $-\frac{1}{4}x^3y^2z$; 11) x^6; 12) $2xy^3$; 13) $24x^4y$; 14) x^5.

Ridicarea la putere — pag. 153

1) x^4; 2) $4x^2y^2$; 3) $-27x^6$; 4) x^2y^2; 5) $-8x^3y^6$; 6) x^{12}; 7) $4x^2y^6z^2$; 8) $\frac{1}{4}x^2$; 9) $-\frac{1}{27}x^6y^3$; 10) $0{,}01x^2$.

Împărțirea — pag. 154

1) x^3; 2) y^3; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) $-x^3$; 7) $-5x$; 8) $2x^2$; 9) $2x^4$; 10) xy; 11) $-\frac{2x}{3}$; 12) $0{,}02x^2$.

Polinoame — pag. 155

a) -4; b) -2; c) 1; d) -19; e) $\frac{7}{8}$.

Reducerea termenilor asemenea — pag. 158

1) a) $6a$; b) $7x$; c) $-10x$; d) $-9y$; e) $2x$; f) $-2x$; g) $-2x^2y$; h) 0; i) 0; j) 0; k) $-2y$; l) 0; m) $\frac{1}{4}x$; n) $-\frac{1}{2}x$. 2) a) $4a$; b) $-8b+1$; c) $4x^2$; d) x^2+1 e) $a^2y + xy^2$; f) $x + \frac{1}{2}y$; g) $-\frac{x}{12} + \frac{y}{2}$.

Adunarea — pag. 159

1) x; 2) $-2x$; 3) $-x$; 4) $-a$; 5) 0; 6) 0; 7) $-6x$; 8) $-2y$; 9) $-3a+b$; 10) $4a-b$; 11) 1; 12) $y-7$; 13) 0.
a) a; b); $2a$; c) 0; d) $5x^2y + xy^2 - 1$; e) $x - \frac{2}{3}$.

Scăderea — pag. 159

a) $x+1$; b) 0; c) 0; d) $2ab - 2a^2$; e) xy^2; f) $\frac{5x}{12}$.

Înmulțirea — pag. 161

a) $2x - 4y$; b) $ax - a$; c) $6x - 3y + 3$; d) $-2x^2 + 4xy$; e) $a^2 - 2ab + a$; f) $2x^3 - 2x^2y + 4xy^2$; g) $3x^4 - 9x^3y^2 - 3x^2y^2$; h) $a^2x^3 - 2a^2x^2 + ax^3$; i) $\frac{1}{2}xy - x$.

Împărțirea — pag. 162

1) $x^2 + x$; 2) $x^3 + x^2$; 3) $x + 1$; 4) $y - 1$; 5) $-z + 1$; 6) $3x - 2y - 1$; 7) $2x - 3y - 1$; 8) $x^2 + 1$; 9) $x^3 - x^2 - 1$; 10) $-2x^3 + x$; 11) $x + 1$; 12) $2x^2 - 1$; 13) $4xy^2 - 2y - z$.

Factor comun — pag. 164

a) $2(x + y)$; b) $a(x - y)$; c) $2(2x - y)$; d) $x(x - y)$; e) $x(x + 1)$; f) $a^2(a - 1)$; g) $xy(x + y)$; h) $3(x + y - 1)$; i) $x(x^2 + x + 1)$; j) $6x^2(x + 2y + 1)$; k) $a^4b^2(a^4b^3 + 1)$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME — pag. 164

1) $-6a^2$; 2) $42a^2$; 3) $-2x^2$; 4) $2x^2$; 5) $-4x^2$; 6) $8y^3$; 7) $-2y^2$; 8) $-2y^2$; 9) $2y^2$; 10) y^3; 11) $6x^2y^2$; 12) $-3x^3y^2z$; 13) $2x^6$; 14) $-6x^4y^3z$; 15) $-8x^4y^3$; 16) $-18x^{10}y^2z$; 17) x^4y^2z; 18) $3x^6y$; 19) a^6; 20) $-a^{10}x^{15}y^5$; 21) $-8x^3y^9$; 22) $16x^2y^4$; 23) $-\frac{1}{8}x^3y^6$; 24) $0{,}01x^4$; 25) $1{,}1025x^4$; 26) a^2; 27) xy; 28) 3; 29) x^2; 30) -2; 31) x; 32) 1; 33) $-x^2$; 34) $-x^3$; 35) $3x^2y$; 36) xyz; 37) $-\frac{2}{3}x^2y$; 38) $4x^2yz$; 39) $20x$; 40) -400; 41) a) 0; b) 0. 42) a) -59; b) -5; c) 1; d) 1. 43) a) -4; b) -22; c) $36\frac{1}{2}$; d) 8; e) 4,0202. 44) $7a$; 45) $15a$; 46) $2a$; 47) $-7a$; 48) $-13a$; 49) $-2a$; 50) $-4a$; 51) $2b$; 52) $4b$; 53) $-2b$; 54) $-4c$; 55) $12x$; 56) 0; 57) $-16y$; 58) 0; 59) xy; 60) $-5xy$; 61) 0; 62) $3a$; 63) $2a + 1$; 64) 0; 65) $2y + 2$; 66) $2xy$; 67) 0; 68) $4x^2 - 2x^2y + 4y^2 + 3xy^2 - 1$; 69) $-\frac{1}{4}x - y + \frac{9}{2}$; 70) $2a$; 71) 0; 72) $x + 3$; 73) $2x^2y - xy^2$; 74) $-x - y + 1$; 75) 0; 76) $5a$; 77) 0; 78) $6x - 1$; 79) $2x^2 + 2$; 80) $3x - 1$; 81) $-2x + 1$; 82) $\frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{3}xy^3 + \frac{13}{15}x^2y$; 83) 1; 84) $2b - 2$; 85) $2x - 2y - 1$; 86) 0; 87) 0; 88) $\frac{17}{12}x - \frac{1}{3}y - 1$; 89) a) $2x^2 + 2x^2y - xy^2 - 2$; b) $-2x^2 + 2x^2y + xy^2$; c) $-4x^2 + xy^2$; 90) a) $a^2 + b^2$; b) 0; c) c^2; d) xy; e) $3xy$; 91) $2a^2 - 2ab$; 92) $-3a^3 + 3ab$; 93) $-2x^2 + 4xy$; 94) $-2x^3 - 4x^2 - 2x$; 95) $-x^4 + 3x^3y + x^2y^2$; 96) $4x^4 - 8x^2y^2 + 12xy$; 97) $x + 7$; 98) $x + 5y$; 99) a^2; 100) $\frac{x}{12} + 1$; 101) $2x - 14$; 102) $5x - 17$; 103) $7x + 9$; 104) $3y$; 105) $4x - 6$; 106) $4x + 2$; 107) $x + y$; 108) $-3x - 4y$; 109) $2x - 3$; 110) $-4y$; 111) $-7y$; 112) $8x - 6$; 113) 9; 114) $x + y$; 115) $x + y$; 116) $x + 2$; 117) $a^2 + a + 1$; 118) $-x^2 + 1$; 119) $x - 1$; 120) $x - y$; 121) $-x^3y^3 + 1$; 122) $1 + 2x - y$; 123) x; 124) $2(a + b)$; 125) $3(x + y)$; 126) $5(x + 1)$; 127) $7(x - 1)$; 128) $(x + 2) : x$; 129) $x \cdot (x + 1)$; 130) $x(x^2 + x + 1)$; 131) $a(x + y)$; 132) $b(x + y)$; 133) $a(a + b)$; 134) $a(1 + ab)$; 135) $(x + y)(a + b)$; 136) $(x - 1)(a - b)$; 137) $ab(a + bc)$; 138) $6xy^2(1 + z)$; 139) $xy(2x + 3y - 4xy)$; 140) $12ab(a + 3b)$; 141) $4ab^2(6ab - 9b^2 + 10c)$; 142) $(x + 1)(x + 2)$; 143) 340; 144) 2; 145) 28; 146) a) F; b) F; c) A. 147) $1\,010_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 2 = 10$; 148) $41 = 101\,001_{(2)}$.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 166

a) $P(-1) = -2$; b) $P(-1,0) = -2$; c) $3x^4y$; d) $6xy$; e) $5x$; f) $-4x$; g) $2x$; h) $-x$; i) 0; j) $-8x$; k) $-2x$; l) x^2; m) $3b + 1$; n) 0; o) $3a^3 - 6a^2b + 3a$; p) $7(a + b)$; r) $a(x - y)$; s) $2(x + y + 1)$; t) $a(a + 1)$; u) $xy(x + 1)$;

Lucrare pentru pregătirea olimpiadelor și a altor concursuri — pag. 167

3) $8 \mid (n + 1)(n - 1)$ și $3 \mid (n + 1)(n - 1)$; 4) 2. 5) a) 4; b) $2a + 1$.

8. Fracții algebrice — pag. 168

$F(1, -2) = -1$; $F(0, -1) = -1$; $F\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

9. Ecuații de gradul I cu o necunoscută — pag. 174

1)* Soluția ecuației este 3; 2) 2; 3) 0; 4) 1; 5) -3; 6) 4; 7) 0; 8) 1; 9) 1; 10) 2; 11) -3; 12) -1; 13) -3; 14) -3; 15) 0; 16) 1; 17) 7; 18) -3; 19) 3; 20) 8; 21) 0; 22) 6; 23) 7; 24) -1; 25) 8; 26) 1; 27) 0; 28) 10; 29) 10; 30) 0; 31) 4; 32) -1; 33) 5; 34) 11; 35) 2; 36) 4; 37) -4; 38) -4; 39) 9; 40) 3; 41) -4; 42) 4; 43) 4; 44) -4; 45) 2; 46) 2; 47) -4; 48) 2; 49) -1; 50) 4; 51) 2; 52) 4; 53) -2; 54) 2; 55) -2; 56) 6; 57) -2; 58) 2; 59) 1; 60) 3; 61) 1; 62) 2; 63) 3; 64) -2; 65) 6; 66) -2; 67) 0; 68) 2; 69) 1; 70) 4; 71) -1; 72) 2; 73) 3; 74) 0; 75) -2; 76) -3; 77) -11; 78) 11; 79) -1; 80) -866; 81) $-1\,002$; 82) 250; 83) -205; 84) 584; 85) 2; 86) -24; 87) $\frac{1}{2}$; 88) $\frac{2}{5}$; 89) $\frac{1}{7}$; 90) $-\frac{5}{6}$; 91) $\frac{1}{8}$; 92) $-\frac{1}{4}$; 93) $-\frac{1}{3}$; 94) $-\frac{1}{3}$; 95) $\frac{1}{2}$; 96)** $\left\{\frac{1}{400}\right\}$; 97) $S = \{-3\}$; 98) $-\frac{9}{11}$; 99) $\frac{4}{3}$; 100) 6; 101) 7; 102) $\frac{8}{3}$; 103) 5; 104) 4; 105) 1; 106) $\frac{8}{5}$; 107) $-\frac{3}{37}$; 108) $-\frac{1}{5}$; 109) 0; 110) $\frac{15}{71}$; 111) $\frac{3}{22}$; 112) $-\frac{19}{29}$; 113) Q; 114) Q; 115) Q; 116) Q; 117) Q; 118) $\emptyset$; 119) $\emptyset$; 120) $\emptyset$; 121) $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$; 122) $\frac{5}{a}$, $a \neq 0$; 123) $\frac{2}{a+1}$, $a \neq -1$; 124) $2b$; 125) $\frac{5}{3a}$, $a \neq 0$; 126) 2, $a \neq 0$; 127) $-\frac{2}{a}$, $a \neq 0$; 128) 2, $a \neq 0$; 129) $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$; 130) $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$; 131) $\frac{3c}{2a}$, $a \neq 0$; 132) $\frac{1}{a - b}$, $a \neq b$; 133) $\frac{5}{a + b}$, $a + b \neq 0$; 134) $\frac{3}{a - b}$, $a \neq b$;

---

* La alte răspunsuri vom suprima cuvintele „soluția ecuației este"

** În răspunsurile la alte exerciții vom scrie mulțimea soluțiilor ecuației ca la exercițiul 96) sau 97).

135) $\frac{7}{a+b}$, $a+b \neq 0$; **136)** $-\frac{18}{a}$, $a \neq 0$; dacă $a = 0$, n-are soluție. **137)** $-\frac{a}{5}$;
138) $A = \{2\}$; $B = \{0\}$; $C = \{0\}$; $D = \emptyset$; $E = \{2\}$; $F = \{0\}$; $G = \{0\}$; $H = \{2\}$; $I = \{-2\}$; $J = \{0\}$; $K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; **139)** $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $B = \{0, 1, 2\}$; $C = \emptyset$; $D = \{0\}$; $E = \{0, 1, 2, 3\}$; $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $G = \emptyset$; $H = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $I = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$; $J = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; $K = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $L = \{0, 1\}$. **140)** $A = \{0\}$; $B = \{2\}$; $C = \{-2\}$; $D = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; $E = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$; $F = \emptyset$, $G = \emptyset$. **141)** -1, 1. Problema are o singură soluție. **142)** -1, 2 sau 0, 1. Problema are două soluții. **143)** $|b| < |a|$. **144)** $x \in \{-3, -2, 0, 1\}$. **145)** 0. **146)** a) A; b) A; c) A; d) F.

Lucrare pentru verificarea însușirii unor cunoștințe de bază — pag. 177

a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) -9; e) -1, f) 0; g) 1; h) -2; i) -4; j) 1; k) -1; l) $\mathbf{Q}$; m) $\emptyset$; n) 2; o) -1; p) $\frac{2}{5}$; r) $\frac{1}{2a}$, $a \neq 0$.

Probleme — pag. 179

1) 122; 124. **2)** 1, 8; 4, 2. **3)** 141; 282. **4)** 24. **5)** -2. **6)** 0. **7)** 12 800 m^2. **8)** 24; 8; -4. **9)** 6,5 m; 18,5 m. **10)** Mihai are 23 lei, Petre are 13 lei. **11)** 17; 18; 19. **12)** 245; 12. **13)** 49. **14)** -50. **15)** 0,8. **16)** 12 m; 80 m. **17)** 4 și -2; 3 și -1; 2 și 0. Problema are trei soluții. **18)** 80 lei; 160 lei; 180 lei. **19)** 48; 49. **20)** 9 fete și 27 băieți. **21)** 12 l; 36 l; **22)** 4 min. **23)** 89 și 890. **24)** 234; 432. **25)** 31 m; 93 m. **26)** 200 piese. **27)** 4 zile. **28)** 70 piese. **29)** 2 h cu 10 m/s; 1 h cu 20 m/s. **30)** 58,5 km/h; 76,5 km/h. **31)** 30 km. **32)** 120 m. **33)** 13 cm; 8 cm. **34)** Nu. **35)** Nu. **36)** 1) $-a$; 2) Nu; 3) Da; 4) Da. **39)** 10. **41)** 200; 250. **42)** 4 min. **43)** 17.

Lucrare pentru realizarea recapitulării finale a unor cunoștințe de bază — pag. 183

1) Da. **2)** Da, Da, Da, Da, Da, Da, Da, Da, Da. **3)** a) 25; b) 7. **4)** a) $x = 2$; b) $x = 2$; c) $x = 8$; d) $x = 20$; e) $x = 6$; f) $x = 2$; g) $x = 20$; h) $x = 4$; i) $x = \frac{ab}{c}$; j) $x = \frac{ac}{b}$; k) $x = \frac{ap}{b}$; l) $x = \frac{n^2}{m}$; m) $x = ab$; n) $x = \frac{a}{c}$; o) $x = pS$; p) $x = \frac{S}{r}$. **5)** 35 lei. **6)** $1\frac{1}{5}$ h. **7)** 60 : 90 : 120. **8)** 280 lei. **9)** 400. **10)** 25%. **11)** $\{-9; -5; -3; -2; 0; 3; 7\}$. **12)** a) 3; b) -7; c) 39; d) $-10\,000$. **13)** a) $-\frac{4}{75}$; b) $187\frac{1}{2}$; c) $-\frac{19}{45}$; d) $-1\,062$, $2\,099$. **14)** a) 0,7; b) 0,09. **15)** a) 3,872; b) 2,280; c) 0,070. **16)** a) $a(x+y)$; b) $3(x+1)$; **17)** a) $x = 0$; b) $-\frac{3}{4}$.

CAPITOLUL VII

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DIVERSE ȘI RECAPITULATIVE — pag. 185

1) 1 și 4; 2 și 8; 3 și 12; 4 și 16; 5 și 20. Cinci soluții. **2)** 1) 2 și 3; 4 și 6; 6 și 9; 8 și 12. Patru soluții. **2)** a) Se adaugă condiția (VI); b) Se adaugă condiția (V). **3)** $\frac{ac}{bd} = \frac{1}{2}$. **4)** $\frac{ad}{bc} = \frac{1}{2}$. **5)** 0. **6)** a) 8; b) 11; c) -14; d) 25; e) -3; f) 0; g) 0. **7)** -1. **8)** Andrei, neagră; Barbu, neagră; Costel, albă; Dan, albă; Emil neagră. **9)** a) 20,2; b) $-0,072$; c) $-4,221$; d) $-49,93$; e) $-179,75$; f) $-1,2$; g) -82; h) -1; i) $\frac{7\,455}{1\,219}$. **10)** a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{7}{2}\right] + [2,7] + [-0,5] + [1,2] = 1 + (-4) + 2 + (-1) + 1 = -1$; b) -6. **11)** $-3\,857$. **12)** $-9\,510$. **13)** 1 247. **14)** 0. **15)** 0. **16)** a) -2; b) -1; c) 0; d) $-\frac{1}{6}$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{12}{85}$; g) $\frac{1}{21}$; h) 11. **17)** 11. **18)** $1000001100_{(2)}$. **19)** Fie x și y cele două numere. Știm că $x + y = 126$ și că $xy = 2\,525$. Dorim să calculăm suma inverselor numerelor x și y adică suma $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$. Putem scrie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy} = \frac{126}{2\,525}$. *Altfel*: Pentru a afla $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, împărțim $x + y$ la xy. Avem $\frac{x+y}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$. Dar $\frac{x+y}{xy} = \frac{126}{2\,525}$. Deci $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{126}{2\,525}$. **20)** 8. **21)** -3. **22)** 1) F contraexemplu $-2 \neq 0$; $2 \neq 0$ și $(-2) + 2 = 0$; 2) F contraexemplu $a = b = 2$, $2 \neq 0$ și $a - b = 0$. **23)** a) 40%; b) 248; 372; 620. **24)** a) 25%; b) $\frac{12}{7}$; $\frac{18}{7}$; $\frac{30}{7}$. **25)** $x = \frac{7}{17}$; $y = \frac{5}{17}$; $z = \frac{3}{17}$; $t = \frac{2}{17}$. **26)** Orice număr prim mai mare ca 2 împărțit la 8 dă un rest care poate fi unul și numai unul din numerele, 1, 3, 5, 7. Deci vom avea două numere care dau același rest la împărțirea cu 8. Diferența lor va fi divizibilă cu 8. **27)** Nu. **28)** $-a$. **29)** 120,3 m; 40,1 m. **30)** 202,5 m și 121,5 m. **31)** a) 5; b) -1; c) 1. **32)** a) $-\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y$; b) $-4x + \frac{7}{3}y - \frac{3}{4}$. **33)** Să presupunem că există un astfel de polinom. Atunci luînd $x = 0$ obținem $P(0) + P(1) = 0$ și luînd $x = 1$ obținem $P(1) + P(0) = 1$. Deci am deduce că $0 = 1$ (absurd). **34)** $-\frac{1}{27}$. **35)** $x = -4$, $y = -\frac{1}{2}$, $E\left(-4, -\frac{1}{2}\right) = -1000$. **36)** $y = -\frac{1}{2}$, $E\left(4, -\frac{1}{2}\right) = 0$. **37)** Dacă $n = 0$, atunci $n + 1$ nu este prim; dacă $n = 1$, atunci $n + 5$ nu este prim; dacă $n = 2$, atunci $n + 7$ nu este prim; dacă $n = 3$, atunci $n + 11$ nu este prim; dacă $n = 4$, atunci $n + 5$ nu este prim; dacă $n = 5$, atunci $n + 1$ nu este prim; dacă $n = 6$, atunci numerele considerate sînt 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29. Dacă $n = 7k$, $k \in \mathbf{N}^*$, atunci $n + 7$ nu este prim; dacă $n = 7k + 1$, $k \in \mathbf{N}^*$, atunci $n + 13$ nu este prim; dacă $n = 7k + 2$,

$k \in N^*$, atunci $n + 5$ nu este prim; dacă $n = 7k + 3$, $k \in N^*$, atunci $n + 11$ nu este prim; dacă $n = 7k + 4$, $k \in N^*$, atunci $n + 17$ nu este prim; dacă $n = 7k + 5$, $k \in N^*$, atunci $n + 23$ nu este prim; dacă $n = 7k + 6$, $k \in N^*$, atunci $n + 1$ nu este prim. Deci $n = 6$ este singurul caz în care toate numerele considerate sînt prime. **38)** $x = 4$. **39)** 216. **40)** $\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + 6^{k+1}}{3^{k+1} + 3^{k+2}} = \frac{2^k}{3^k} \cdot \frac{3^{k+1}(1 + 3^{k+1})}{2^{k+1}(1 + 3^{k+1})} = \frac{3}{2}$. **41)** $1(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots + 98(a_{98} - a_{99}) + 99(a_{99} - a_{100}) + 100a_{100} = a_1 - a_2 + 2a_2 - 2a_3 + 3a_3 - 3a_4 + \dots + 98a_{98} - 98a_{99} + 99a_{99} - 99a_{100} + 100a_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{99} + a_{100} = 0$. **42)** a) A; b) A; c) F; d) F; e) A; f) F; g) F; h) F; i) A; j) A; k) A; l) A; m) A. **43)** 10 m; 10 m; 4 m. **44)** Fie x și $x + 1$ cele două numere întregi consecutive $x(x + 1) - x^2 = 245$; $x = 245$. Numerele sînt: 245; 246. **45)** 2 111 sau 2 221. **46)** Fie $\overline{abc}$ numărul. Avem: $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c)$. Dacă $\overline{abc} - \overline{cba} = 693$, atunci $a - c = 7$. Dacă $c = 0$, atunci $a = 7$; dar $\overline{7b0}$, unde b poate fi orice cifră, nu este o soluție a problemei, deoarece scriind în ordine inversă cifrele număulrui $\overline{7b0}$, prima cifră (din stînga) este 0. Dacă $c = 1$, atunci $a = 8$; deci $\overline{8b1}$, unde b poate fi orice cifră, este o soluție a problemei. Dacă $c = 2$, atunci $a = 9$; deci $\overline{9b2}$, unde b poate fi orice cifră, este o soluție a problemei. Problema are 20 de soluții. **47)** 120 kg. **48)** 1 024 pagini. **49)** 6 430 kg; 3 215 kg. **50)** 85,5 kg; 57 kg. **51)** 2 025 lei; 1 400 lei; 400 lei; 225 lei. **53)** Să notăm cu x numărul băieților care l-au depășit pe Mihai. $30 - \frac{x}{2} = 4 \cdot \frac{x}{2}$, $x = 12$. Deci Mihai a ocupat locul 13. **54)** a) Da. b) Nu. **55)** a) Peste 2 ani; b) Nu; c) Nu; d) Da. Cu $1\frac{1}{3}$ ani în urmă; **56)** b) $x = 4$ cm; $x = \frac{10}{3}$ cm. **57)** 2 h 30 min. **58)** Primul. **59)** 48 km/h. **61)** 1 742. 1 745; 3 484. O singură soluție. **62)** Din $x^2 + 1 = xy$ deducem $(y - x)x = 1$. Deci x este un divizor natural al lui 1, înseamnă că $x = 1$. Atunci $y = 1y = 1^2 + 1 = 2$.

CUPRINS

Matematică. Aritmetică-Algebră clasa a VI-a

Nr. colilor de tipar : 14
Bun de tipar : 4.VII.1989

Com. nr. 90 192/35052
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.